

Wstęp do teorii grafów - ćwiczenia

Wojciech Wróblewski

Zad 32 - rozwiązanie

Oznaczmy $S = (a_1, \dots, a_n)$ jako kod Prufer'a dla drzewa T . Zgodnie z algorytmem wyznaczania kodu Prufera S dla drzewa T podanego na stronie wykładowcy:

- Znajdź liść l o najmniejszej wartości etykiety drzewa T .
- Dodaj sąsiada l do S . Usuń liść l .
- Powtarzaj dopóki T będzie postaci K_2 .

Możemy zauważyć, że każdy wierzchołek drzewa T zostanie dodany do kodu S , $\deg(v) - 1$ razy. Uzyskujemy :

$$\sum_{k=1}^{n-2} a_k = \sum_{v \in V} (\deg(v) - 1) = \sum_{v \in V} \deg(v) - \sum_{v \in V} 1 = 2|E| - n = 2(n-1) - n = n-2$$

Zad 36 - rozwiązanie

Podpunkt 1.

Zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór wszystkich drzew na zbiorze $\{1, \dots, n\}$. $|\Omega| = n^{n-2}$ z twierdzenia Cayleya . $L_n = \{T \in \Omega : \deg(n) = 1\}$ dla $n \geq 1$.

Krzystając z twierdzenia Cayleya możemy policzyć drzewa na zbiorze $\{1, \dots, n-1\}$. Podstawiając do wzoru otrzymujemy, że takich drzew będzie $(n-1)^{n-3}$. Element n -ty dodamy na $n-1$ sposobów jako liść ($\deg(n) = 1$), uzyskując $(n-1)^{n-2}$ drzew na zbiorze $\{1, \dots, n\}$. Ostatecznie:

$$|L_n| = (n-1)^{n-2}, \text{ czyli}$$

$$P_n(L_n) = \frac{|L_n|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}}$$

Podpunkt 2.

Obliczamy granicę.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-2} = e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

Zad 38 i 39 - output z programu

Output z konsoli po uruchomieniu programu *graph.py* z załącznika.Python 3.7.3.

```
Vertices of graph:
['a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f']
Edges of graph :
[{'a', 'b'}, {'a', 'c'}, {'a', 'd'}, {'c', 'd'}, {'e', 'd'}, {'f', 'd'}]
edges of spanning tree  [{'f', 'd'}, {'a', 'd'}, {'c', 'd'}, {'e', 'd'}, {'a', 'b'}]

eccentricity of vertex : a is 2
eccentricity of vertex : b is 3
eccentricity of vertex : c is 2
eccentricity of vertex : d is 2
eccentricity of vertex : e is 3
eccentricity of vertex : f is 3

min vertex degree: 1
average vertex degree: 2.0
max vertex degree: 4
radius: 2
diameter: 3

Process finished with exit code 0
```