Wstęp do teorii grafów - ćwiczenia

Wojciech Wróblewski

Zad 66 - rozwiązanie

Możemy zauważyć, że problem zadany w zadaniu możemy uprościć do problemu kojarzenia małżeństw . Przypomnijmy, że z tw. Halla warunkiem konieczym i wystarczającym by problem kojarzenia małżeństw miał rozwiązanie jest by dla każdego zbioru dziewcząt, wszystkie one znały łącznie co najmniej k chłopców gdzie 1 <= k <=m, gdzie k to liczba dziewcząt a m liczba chłopców.

W zadaniu mamy inne polecenie. Każdy dziewczyna ze zbioru D chce poślubić pewną liczbę ukochanych (tzn. dla każdego $d \in D$ mamy określą liczbę $x_d >= 1$ wymaganych małżonków). Każdy chłopiec może poślubić co najwyżej jedną dziewczynę. Korzystając ze wskazówki zastąpmy każdą dziewczynę jej liczbą kopii równą dokładnie liczbie wymaganych dla niej małżonków. Każda kopia jest w reliacji tylko z jednym chłopcem. Takim zabiegiem sprowadzamy problem do znanego problemu kojarzenia małrzeństw i korzystając z warunku Halla, otrzymujemy, że warunkiem koniecznym oraz wystarczającym aby problem Haremu miał rozwiązanie jest warunek by dla każdego k-elementowego podzbioru dziewcząt, zbiór chłopców był większy równy sumie liczb odpowiadających wymaganym chłopcom dla każdej dziewczyny tzn . Określając zbiór $X = \{x_{d_1}, x_{d_2}, x_{d_3}, x_{d_4}, ..., x_{d_k}\}$, gdzie każda liczba x_{d_i} , odpowiada liczbie wymaganych małżonków dla i- tej dziewczyny. Problem Haremu będzie miał rozwiązanie, gdy dla każdego k- elementowego podzbioru dziewcząt liczba chłopców m będzie większa lub równa sumie elementów zbioru X (o indeksach do k).

Zad 72 - rozwiązanie

Niech $P = (X, \preceq)$ będzie skończonym częściowym porządkiem.
$L \subseteq X$ jest łańcuchem w P, a A jest rozbiciem X na antyłańcuchy. Korzystając ze wskazówki wiemy, że jeśli L jest łańcuchem oraz A jest antyłańcuchem to$|A \cap L| \leq 1$. Można dodatkowo zauważyć, że jeśli A jest zorbiciem X tzn $\bigcup A = X$, to nie ma takiego elementu, który należy do L i nie należy do A, więc naturalnie otrzymujemy:
$|L| \leq |A|$

Dana jest liczba $x \in X$ oraz liczba $N(x)$ zdfiniowana jako najwięszka długość łańcucha w P, którego największym elementem jest x. Zdefiniujemy zbiór $N^{-1}(\{n\}) = \{x : N(x) = n\}$. Gdyby zadany zbiór nie był antyłańcuchem to moglibyśmy wskazać 2 porównywalne elementy x oraz z $(x \preceq z)$, z czego otrzymalibyśmy, że $N(x) \preceq N(z)$, co jest sprzecznością ponieważ z założeń zadania mamy że $N(x)$ jest największą długością łańcucha.

Załóżmy że $height(P) = n = N(x)$ dla $x \in X$. Mamy z definicji, że n jest długością najdłuższego łańcucha. Zdefiniujmy rozbicie zbioru X na antyłańcuchy takie że :
$\forall A_j \in \mathcal{A}\ A_j = \{x : N(x) = j\}$. Mamy, że $j \in \{1, ..., n\}$, bo z definicji n jest długością najdłuższego łańcucha. Otrzymujemy równość $|\mathcal{A}| = n$. Dodatkowo wiemy, że rozbicie jest rozbiciem najmniejszym, ponieważ $(\forall j \preceq n)(\exists x \in X)(N(x) = j)$

Zad 77 - rozwiązanie

Liczbę digrafów prostych możemy policzyć podobnie jak dla grafów nieskierowanych. Dla każdej pary krawędzi $\{u, v\}$, mamy cztery możliwości na stworzenie krawędzi.

- Istnieje krawędź z u do v.
- Istnieje krawędź z v do u
- Istnieje krawędź (u,v) oraz (v,u)
- Nie istnieje krawędź pomiędzy wierzchołkami $\{u, v\}$

Wobec tego ostateczną liczbą digrafów prostych o maksymalnie n wierzchołkach będzie $4^{\binom{n}{2}}$, gdzie $\binom{n}{2}$ oznacza liczbę par wierzchołków jakie możemy dobrać do konstrukcji krawędzi .

Liczbę turniei możemy obliczyć zliczając możliwe ustawienie kierunków krawędzi w grafie pełnym co uczynimy na $2^{\binom{n}{2}}$ sposobów.