Obliczenia naukowe

Sprawozdanie lista 3

Wojciech Wróblewski 250349

October 2020

1 Opis problemu

W poniższych zadanich poruszony zostanie problem rozwiązywania równań nieliniowych metodami iteracyjnymi. Dana jest funkcja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

i poszukujemmy takiego $r \in \mathbb{R}$, że: $f(r) = 0$

Poniżej przedstawione zostaną trzy różne metody ilustrujące wyznaczanie ciągów przybliżeń miejsca zerowego : $x_0, x_1, x_2, ...$ według reguły, $x_{n+1} := \Phi(x_n)$, takie, że $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

W zadaniach poniżej będziemy rozważać 3 metody w tym:

- metodę bisekcji.
- metodę stycznych (Newtona)
- metodę siecznych

Metoda bisekcji

Opis metody oraz terminologia

W zadaniu należy zaimplementować funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

Algorytm opiera swoje działanie na twierdzeniu Darboux.

Twierdzenie.
Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.

Rozwiązanie

Algorytm wyznacza miejsce zerowe funkcji $f(x)$ z dokładnością do zdefiniowanej przy wywyłaniu funkcji wartości ϵ, w przedziale obustronnie domkniętym [a,b] przy założeniach :

- Funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale [a,b].
- W końcach przedziału [a,b] warrtości funkcji są przeciwnych znaków.

Algorytm

1. Początkowo obliczana jest długość przedziału $[a, b]$ tj. e = b-a , oczywiście zakładamy, że b > a. Nastepnie długość dzielona jest przez dwa (e = e/2) i dodawana do początku rozpatrywanego przedziału. Otrzymujemy wartość c tj. (c = a + e).Następnie wartość funkcji w punkcie c porównywana z zadaną przy wywołaniu prezycją.Jeżeli $f(c) < \epsilon$ lub $|e| < \delta$, algorytm zwraca punkt c wraz z jego wartością w tym punkcie, liczbą iteracji i potencjalnej informacji o błędzie. Ten krok zapewni wartunek stopu algorytmu, czyli uchroni go przed wejściem w pętlę nieskończoną. Jeżeli powyższe warunki stopu nie zostaną osiągnięte algorytm kontynuuje działanie wykonując :

2. Oblicza podprzedziały $[a, x]$ oraz $[x, b]$.
3. Sprawdza, w którym z podprzedziałów funkcja przyjmuje różne znaki na końcach przedziałów.
4. Jeżeli [a,x] jest wspomnianym przedziałem z kroku wczesniejszego. Podstaw $a := a, b := x$. W przeciwnym wypadku podstaw $x := a, b := b$.
5. Przechodzi do kroku 1.

Z punktu widzenia numerycznego w implementacji powyższego algorytmu istotne jest obliczanie środka zadanego podziału wyrażeniem $c = a + (b - a)/2$, ponieważ wyrażenie nie wyprowadzi nas poza zakres, w przeciwieństwie do wyrażenia $c = (a + b)/2$, które może doprowadzić do numeryczych niedokładności w szczególności do tego, że środek zadanego odcinka na osi rzeczywistej, nie będzie należał do odcinka.
Równie istotne jest wykorzystnie funkcji signum przy badaniu znaków. Pozwoli to zniwelować potencjalne niedokładności wynikające z mnożenia, gdybyśmy chcieli sprawdzić zmianę znaku obliczając iloczyny wartości funkcji.

```
function mbisekcji(f, a::Float64, b::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64)
    u = f(a)
    v = f(b)
    error = 0
    iterations = 0
    e = b - a
    if sign(u) == sign(v)
        error = 1
        return (NaN, NaN, iterations, error)
    end
    while e > epsilon
        iterations += 1
        e /= 2
        c = a + e
        w = f(c)
        if abs(e) < delta || abs(w) < epsilon
            return (c, w, iterations, error)
        end
        if sign(w) != sign(u)
            b = c
            v = w
        else
            a = c
            u = w
        end
    end
end
```

Rysunek 1: funkcja realizująca metodę bisekcji

Metoda stycznych

Opis metody oraz terminologia

W metodzie Newtona przyjmuje się następujące założenia dla funkcji f:

- W przedziale [a,b] znajduje się dokładnie jeden pierwiastek.
- Funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału oraz pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak w tym przedziale.

W realizacji metody początkowo wybierany jest punkt startowy x_0, a każdy kolejny punkt generowany jest przez wyrażenie :
$x_{n+1} = x_n - \frac{f^{'}(x_n)}{f(x_n)}$

Dla danego wcześniej punktu zostaje obliczona wartość funkcji i prowadzona jest styczna do wykresu funkcji f(x) we wspomnianym punkcie. Miejsce przecięcia stycznej z osią OX wyznacza przybliżenie rozwiązania x_{n+1}. Jeżeli wartość odległości między wyznaczonymi x_n oraz x_{n+1} (tj. $|x_n - x_{n+1}| > \delta$), wartość funkcji w punkcie x_{n+1} jest większa od przyjętej dokładności ϵ albo została osiągnięta maksymalna liczba iteracji, kontynuujemy działanie wyznaczając kolejne przybliżenie.

Warunek stopu:
$|f(x_{n+1}) - f(x_n) < \delta \vee f(x_{x+1}) < \epsilon \vee$ iteracja$>$ MAX, gdzie ϵ, δ,MAX to predefiniowane stałe

```julia
function mstycznych(f, derivitive_f, x_0::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64, max_iterations::Int)
    v = f(x_0)
    error = 0
    iterations = 0
    if abs(v) < epsilon
        return (x_0, v, iterations, error)
    end

    if abs(derivitive_f(x_0)) < epsilon
        error = 2
        return (x_0, v, iterations, error)
    end
    for iterations in 1:max_iterations
        x_1 = x_0 - v / derivitive_f(x_0)
        v = f(x_1)
        if abs(x_1 - x_0) < delta || abs(v) < epsilon
            return (x_1, v, iterations, error)
        end
        x_0 = x_1
    end
    error = 1
    return (NaN, NaN, iterations, error)
end
```

Rysunek 2: funkcja realizująca metodę stycznych

Metoda siecznych

Opis metody oraz terminologia

Metoda siecznych jest to kolejna metoda numeryczna, służąca do rozwiązania równania nieliniowego z jedną niewiadomą. Jest to algorytm interpolacji liniowej, który przyjmuje, że funkcja ciągła na dostatecznie małym odcinku w przybliżeniu zmienia się w sposób liniowy . Wówczas na odcinku domkniętym [a,b], krzywą f(x) zastąpić sieczną i za przybliżoną wartość pierwiastka przyjmujemy punkt przecięcia siecznej z osią OX.

Metodę ilustrujemy rekurencyjnym wzorem.

$$\begin{cases} \mathrm{x}_0 = a \\ \mathrm{x}_1 = b \\ \mathrm{x}_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{cases}$$

Punkt przecięcia siecznej z osią OX wyznacza następną wartość pierwiastka zdefiniowanej funkcji $f(x)$, ponieważ algorytm zakłada, że funkcję na względnie małym przedziale można zastąpić sieczną . Algortym zaprzestaje działanie, jeżeli $|f(x_{n+1}) - f(x_n)|$, $f(x_{x+1})$ są mniejsze od zadanych dokładności lub osiągnięta została maksymalna liczba iteracji(MAX).

Warunek stopu:
$|f(x_{n+1}) - f(x_n) < \delta \vee f(x_{x+1}) < \epsilon \vee$ iteracja> MAX, gdzie ϵ, δ, MAX to predefiniowane stałe

```
function msiecznych(f, x_0::Float64, x_1::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64, max_iterations::Int)
    error = 0
    f_x0 = f(x_0)
    f_x1 = f(x_1)
    for iteration in 1:max_iterations
        if abs(f_x0) > abs(f_x1)
            x_0, x_1, = x_1, x_0
            f_x0, f_x1 = f_x1, f_x0
        end
        s = (x_1 - x_0)/(f_x1 - f_x0)
        x_1 = x_0
        f_x1 = f_x0
        x_0 = x_0 - (f_x0 * s)
        f_x0 = f(x_0)
        if abs(x_1 - x_0) < delta || abs(f_x0) < epsilon
            return (x_0, f_x0, iteration, error)
        end
    end
    error = 1
    return (NaN, NaN, iteration, error)
end
```

Rysunek 3: funkcja realizująca metodę siecznych

Zad4

Opis zadania oraz terminologia

W zadaniu należy zastosować wspomniane wcześniej metody w celu obliczenia pierwiastka równania :

$\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$
Dla predefiniowanych parametrów:
Metoda bisekcji:

- przedział początkowy $[1.5, 2]$
- $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$
- $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

Metoda stycznych:

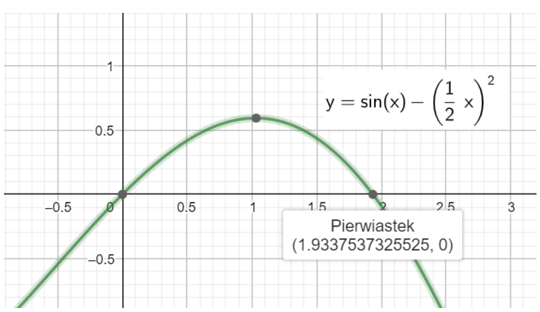
- przybliżenie początkowe $x_0 = 1.5$
- $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$
- $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

Metoda siecznych:

- przybliżenie początkowe $x_0 = 1 \wedge x_1 = 2$
- $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$
- $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

Wyniki

Przybliżona wartość pierwiastka dla maksymalnej liczby iteracji ustalonej na 60.
Zadanie wykonane przy pomocy funkcji zawartych w programie methods_module.jl.



Rysunek 4: Wartość pierwiastka przybliżona do 13 miejsc po przecinku

metoda	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	błąd
bisekcja	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
stycznych	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

Wnioski

Obserwujemy, że każda z metod poprawnie oblicza pierwiastek równania.Możemy zauważyć, że metoda bisekcji wymagała największej liczby iteracji w celu przybliżenia pierwiastka. Metody stycznych i siecznych wykonały tą samą liczbę iteracji, jednak metoda stycznych okazała się najbardziej dokładna. Powyższe doświadczenie pokazuje, że zaprezentowane metody posiadają różne współczynniki zbieżności oraz przedstawia nam, jak ważne jest odpowiednie dobranie parametrów początkowych w celu osiągnięcia dokładnego przybliżenia.

Zad5

Opis zadania oraz terminologia

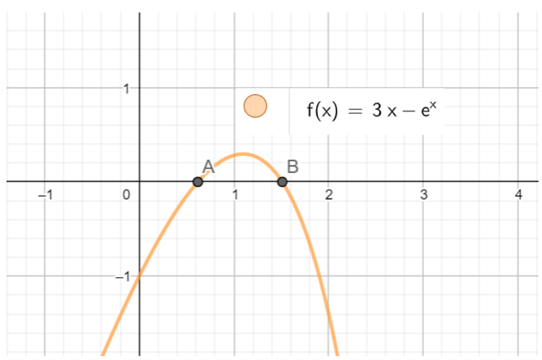
W zadaniu należy znaleźć argument x, dla którego wykresy $f(x) = 3x \wedge g(x) = e^x$ przecinają się. Predefiniowaną metodą, którą należy wykorzystać jest metoda bisekcji.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć punkty przecięcia dwóch funkcji należy rozpatrzeć równanie :

$f(x) - g(x) = 0$

W metodzie bisekcji musimy zdefiniować przedział początkowy, dla którego algorytm ma zacząć działanie. W tym celu posłużę się wykresami funkcji wygenerowanymi przez program Geogebra.



0.6190612866704

Rysunek 5: wartość pierwiastka A

1.5121345519584

Rysunek 6: wartość pierwiastka B

Przedziały jakie będziemy rozpatrywać to $[0, 1]$ oraz $[1, 2]$, dla dokładności $\epsilon = 10^{-4}, \delta = 10^{-4}$. Zadanie wykonane przy pomocy funkcji zawartych w programie methods_module.jl.

Wyniki

przedział	miejsce przecięcia	liczba iteracji
$[0, 1]$	0.619140625	8
$[1, 2]$	1.5120849609375	13

Wnioski

W doświadczeniu obserwujemy, że gdy funkcja ma 2 miejsca zerowe, uzyskany wynik zależy od przedziału jaki ustalimy. Ustalenie przedziałów (tak aby wartości na krańcach przedziałów były różnych znaków) na podstawie graficznej reprezentacji funkcji pozwoliło na poprawne obliczenie pierwiastów z zadaną dokładnością. Brak analizy przedziału może powodować duże niedokładności albo błędy w wynikach.

Zad6

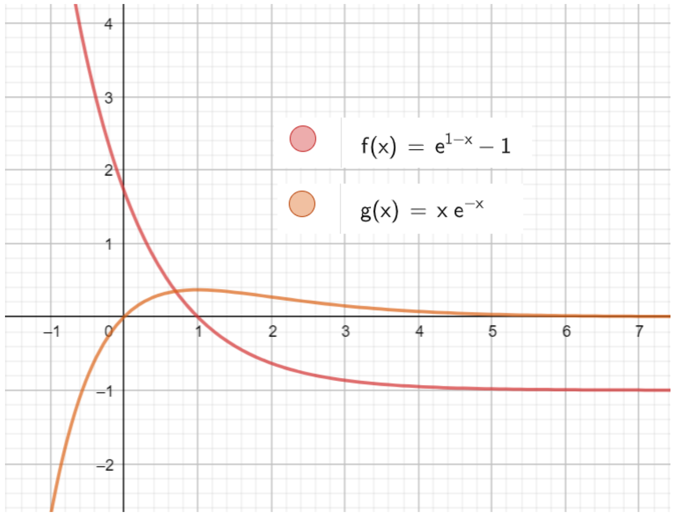
Opis zadania oraz terminologia

W zadaniu należy znaleźć miejsca zerowe funkcji:
$f(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $g(x) = xe^{-x}$

Rozwiązanie

W tym celu wykorzystane zostaną wszystkie wspomniane wcześniej metody.W rozwiązaniach maksymalna liczba iteracji ustalona na 60. Zadanie wykonane przy pomocy funkcji zawartych w programie methods_module.jl.

funkcja	pochodna funkcji
$e^{1-x} - 1$	$-e^{1-x}$
xe^{-x}	$-e^{-x}(x-1)$



Rysunek 7: Wykresy funkcji f(x) oraz g(x).

Wyniki

Dla przedziału $[a, b]$

a	b	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	błąd
0.5	2.0	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16	nie
0.5	3.0	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16	nie
0.0	2.5	1.0000038146972656	-3.814689989667386e-6	17	nie
-2.0	2.0	1.0	0.0	2	nie
-5.0	10.0	0.9999942779541016	5.722062269342132e-6	19	nie
-10.0	10.0	1.0000038146972656	-3.814689989667386e-6	20	nie

metoda bisekcji dla funkcji $e^{1-x} - 1$

a	b	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	błąd
-0.3	0.2	3.0517578125111022e-6	3.0517484992995665e-6	15	nie
-1.0	1.0	0.0	0.0	1	nie
-0.5	0.5	0.0	0.0	1	nie
-2.5	2.0	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	16	nie
-8.0	7.0	-7.62939453125e-6	-7.629452739132958e-6	17	nie
-20.0	20.0	0.0	0.0	1	nie

metoda bisekcji dla funkcji xe^{-x}

Dla przybliżenia początkowego x_0.
Rodzaje błędu dla metody stycznych (Newtona)

- 0 - jeżeli błędu nie było

- 1 - jeżeli nie osiągnięto predefiniowanej precyzji
- 2 - pochodna bliska zero

x_0	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	błąd
1.5	0.9999999984736215	1.5263785790864404e-9	4	nie
0.0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	nie
2.5	0.9999934982589662	6.501762170207925e-6	6	nie
0.78	0.9999999683373862	3.1662614308203274e-8	3	nie
15.0	-0.9999991684712809	0	2	tak (2)

metoda newtona dla funkcji $e^{1-x} - 1$

x_0	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	błąd
-6.0	-1.0672969464735902e-9	-1.067296947612713e-9	12	nie
-2.5	-3.3084197593330218e-6	-3.3084307049924325e-6	7	nie
-0.5	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	4	nie
0.78	-2.6293774813289416e-9	-2.629377488242567e-9	9	nie
8.0	14.636807965014	6.438155219843286e-6	6	nie

metoda newtona dla funkcji xe^{-x}

Dla przybliżeń początkowych $x_0 \wedge x_1$.

x_0	x_1	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	błąd
-3.0	2.0	1.0000000476847546	-4.7684753479160236e-8	8	nie
0.0	2.0	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6	nie
0.97	1.27	0.9999998676130336	1.3238697516015918e-7	3	nie
0.97	8.0	0.9999999441748564	5.582514517321613e-8	4	nie
0.0	9.0	5.689787204981281	-0.9908113587546935	3	nie

metoda siecznych dla funkcji $e^{1-x} - 1$

x_0	x_1	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	błąd
-0.1	0.2	8.519032621501032e-8	8.519031895761895e-8	4	nie
-2.0	2.0	14.294924723787231	8.85064549833867e-6	15	nie
-8.0	5.0	14.704958872295627	6.042008325002657e-6	13	nie
-0.1	0.23	1.358887387221128e-7	1.3588872025636474e-7	4	nie
-0.1	5.0	14.407554029025446	7.970196785880581e-6	13	nie

metoda siecznych dla funkcji xe^{-x}

Metoda Newtona dla f(x) gdzie $x_0 \in (1, \infty]$

x_0	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	rodzaj błędu
1.5	0.9999999984736215	1.5263785790864404e-9	4	0
2.0	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
5.0	0.9999996427095682	3.572904956339329e-7	54	0
8.0	NaN	NaN	0	1
10.0	NaN	NaN	0	1
15.0	15.0	-0.9999991684712809	0	2
50.0	50	-1.0	0	2
500.0	500	-1.0	0	2
5000.0	5000	-1.0	0	2

metoda stycznych dla funkcji$e^{1-x} - 1$

Metoda Newtona dla g(x) gdzie $x_0 \geqslant 1$

x_0	pierwiastek równania	wartość funkcji	liczba iteracji	rodzaj błędu
1.0	1.0	0.36787944117144233	0	2
2.0	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	10	0
5.0	15.194283983439147	3.827247505782993e-6	9	0
8.0	14.636807965014	6.438155219843286e-6	6	0
10.0	14.380524159896261	8.173205649825554e-6	4	0
15.0	15.0	4.588534807527386e-6	0	0
50.0	50.0	9.643749239819589e-21	0	0
500.0	500.0	3.562288203370643e-215	0	0
5000.0	5000.0	0.0	0	0

metoda stycznych dla funkcji xe^{-x}

Wnioski

Powyższe tabele pokazują, że motoda bisekcji wymaga największej liczby iteracji w celu wyliczenia miejsca zerowego, a przedziały początkowe jakie należy zadawać najlepiej żeby były bliskie potencjalnego miejsca zerowego oraz zawężone.W metodzie bisekcji dla symetrycznie zadanych przedziałów zauważamy szybką zbieżność. Dla metody stycznych i siecznych dobranie odpowiednich parametrów początkowych jest również bardzo istotne. Najlepiej gdy przybliżenia początkowe są możliwie blisko potencjalnego miejsca zerowego. Wówczas otrzymujemy najdokładniejsze wyniki. Jednak wraz z zwiększaniem przedziału wyniki stają się mniej dokładne, a nawet kompletnie błędne, co wskazuje na lokalną zbieżność metod stycznych i siecznych. Dla funkcji g(x),metody stycznych i przybliżenia początkowego $x_0 = 1$ funkcja zwraca błąd ponieważ pochodna w tym punkcie jest bliska 0, wobec czego wyznaczenie miejsca zerowego w tym punkcie nie jest możliwe. Dla funkcji f(x) gdzie $x > 1$ i metody stycznych, wraz ze wzrostem przybliżeń początkowych dokładność rezultatów spada by od pewnego momentu zupełnie różnić się od wartości oczekiwanych zwracając błędy.