1 Introdução

O método de Fourier para encontrar soluções aproximadas através de séries infinitas de senos e cossenos é explicado no livro [2]. A proposta a seguir servirá para compreender melhor as equações diferenciais parciais. Mais especificamente, o trabalho para esta matéria gira em torno do estudo de funções periódicas que não são contínuas em todos os pontos, porém suas derivadas laterais existem e podem ser calculadas.

Em cada exercício, é perceptível encontrar três tipos de funções: as pares, as ímpares e as que não se enquadram nos conceitos anteriores. Para tais casos, as séries infinitas podem ser obtidas e gerar resultados que podem ser comparados com o valor exato de f(x).

1.1 Questão 18 - Página 556

Para o problema 18:

a) Gerar o gráfico para a função em 3 períodos

b) Encontrar a Série de Fourier para a dada função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$$

2 Desenvolvimento

Para este trabalho, é importante considerar que há necessidade de atuar em 3 períodos da função f(x) atribuída. Por essa razão, os limites para o domínio estão entre $-6 \leq x \leq 6$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -6 \leq x \leq -5, \\ x+4, & -5 < x < -3, \\ 0, & -3 < x < -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 3, \\ x-4, & 3 < x < 5, \\ 0, & 5 < x \leq 6 \end{cases}$$

A figura 1 foi desenvolvida através da combinação entre Fortran e software Gnuplot© e demonstra o comportamento da função.

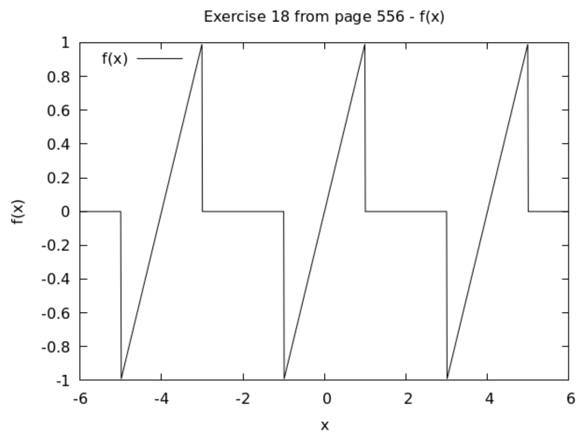

Figura 1: f(x) periódica em intervalo de -6 a 6

2.1 Série de Fourier

A série de Fourier de período L tem por objetivo aproximar uma f(x) através da seguinte equação 1

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n sin(\frac{n\pi x}{L}) \tag{1}$$

Onde a_0, a_n e b_n são obtidas através do produto interno de funções e podem ser encontradas de acordo com os equacionamentos 2, 3 e 4

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x), dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos(\frac{n\pi x}{L}), dx \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin(\frac{n\pi x}{L}), dx \tag{4}$$

2.1.1 Obtenção dos coeficientes

Sabendo que os limites de integração para o exercício 18 são -6 e 6, deve-se calcular as integrais a fim de encontrar a série desejada. Começando pela equação 2, tem-se que:

$$a_0 = \frac{1}{6}\int_{-6}^{6} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{6}\left[\int_{-6}^{-5} 0dx + \int_{-5}^{-3}(x+4)dx + \int_{-3}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{1} xdx + \int_{1}^{3} 0dx + \int_{3}^{5}(x-4)dx + \int_{5}^{6} 0dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{6}\left[\int_{-5}^{-3}(x+4)dx + \int_{-1}^{1} xdx + \int_{3}^{5}(x-4)dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-5}^{-3} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\Big|_{3}^{5}\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{6}\left[(-4.5+4.5)+(0.5-0.5)+(-7.5+7.5)\right] = 0$$

Considerando que a equação 3 analisa a relação da função com a série de cossenos, temos que:

$$a_n = \frac{1}{6}\int_{-6}^{6} f(x)cos(\frac{n\pi x}{6})dx$$

$$a_n = \frac{1}{6}\left[\int_{-5}^{-3}(x+4)cos(\frac{n\pi x}{6})dx + \int_{-1}^{1} xcos(\frac{n\pi x}{6})dx + \int_{3}^{5}(x-4)cos(\frac{n\pi x}{6})dx\right]$$

Para facilitar o entendimento da obtenção de a_n, divide-se em 3 integrais

$$\frac{1}{6}\int_{-5}^{-3}(x+4)cos(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{1}{6}\left[\frac{6(x+4)}{n\pi}sin(\frac{n\pi x}{6}) + \frac{36}{(n\pi)^2}cos(\frac{n\pi x}{6})\Big|_{-5}^{-3}\right]$$

$$\frac{1}{6}\int_{-1}^{1} xcos(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{1}{6}\left[\frac{6x}{n\pi}sin(\frac{n\pi x}{6}) + \frac{36}{(n\pi)^2}cos(\frac{n\pi x}{6})\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$\frac{1}{6}\int_{3}^{5}(x-4)cos(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{1}{6}\left[\frac{6(x-4)}{n\pi}sin(\frac{n\pi x}{6}) + \frac{36}{(n\pi)^2}cos(\frac{n\pi x}{6})\Big|_{3}^{5}\right]$$

$$\frac{1}{6}\int_{-5}^{-3}(x+4)cos(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{-1}{n\pi}\left[sin(\frac{n\pi}{2})+sin(\frac{5n\pi}{6})\right]+\frac{6}{(n\pi)^2}\left[cos(\frac{n\pi}{2})-cos(\frac{5n\pi}{6})\right]$$
$$\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}xcos(\frac{n\pi x}{6})dx = 0$$
$$\frac{1}{6}\int_{3}^{5}(x-4)cos(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{1}{n\pi}\left[sin(\frac{n\pi}{2})+sin(\frac{5n\pi}{6})\right]+\frac{6}{(n\pi)^2}\left[-cos(\frac{n\pi}{2})+cos(\frac{5n\pi}{6})\right]$$

Conforme a_n é a soma das parcelas das integrais, chega-se a conclusão de que $a_n = 0$. Para a eq. 4, que representa a parcela senoidal da série de Fourier, chega-se a seguinte solução:

$$b_n = \frac{1}{6}\int_{-6}^{6} f(x)sin(\frac{n\pi x}{6})dx$$

$$b_n = \frac{1}{6}\left[\int_{-5}^{-3}(x+4)sin(\frac{n\pi x}{6})dx+\int_{-1}^{1}xsin(\frac{n\pi x}{6})dx+\int_{3}^{5}(x-4)sin(\frac{n\pi x}{6})dx\right]$$

Assim como foi feito para o coeficiente a_n, divide-se b_n em 3 integrais

$$\frac{1}{6}\int_{-5}^{-3}(x+4)sin(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{1}{6}\left[\frac{-6(x+4)}{n\pi}cos(\frac{n\pi x}{6})+\frac{36}{(n\pi)^2}sin(\frac{n\pi x}{6})\Big|_{-5}^{-3}\right]$$
$$\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}xsin(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{1}{6}\left[\frac{-6x}{n\pi}cos(\frac{n\pi x}{6})+\frac{36}{(n\pi)^2}sin(\frac{n\pi x}{6})\Big|_{-1}^{1}\right]$$
$$\frac{1}{6}\int_{3}^{5}(x-4)sin(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{1}{6}\left[\frac{-6(x-4)}{n\pi}cos(\frac{n\pi x}{6})+\frac{36}{(n\pi)^2}sin(\frac{n\pi x}{6})\Big|_{3}^{5}\right]$$

Substituindo x pelos limites de integração, chega-se aos seguintes resultados para as parcelas de b_n:

$$\frac{1}{6}\int_{-5}^{-3}(x+4)sin(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{-1}{n\pi}\left[cos(\frac{n\pi}{2})+cos(\frac{5n\pi}{6})\right]+\frac{6}{(n\pi)^2}\left[-sin(\frac{n\pi}{2})+sin(\frac{5n\pi}{6})\right]$$
$$\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}xsin(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{-2}{n\pi}cos(\frac{n\pi}{6})+\frac{12}{(n\pi)^2}sin(\frac{n\pi}{6})$$
$$\frac{1}{6}\int_{3}^{5}(x-4)sin(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{-1}{n\pi}\left[cos(\frac{n\pi}{2})+cos(\frac{5n\pi}{6})\right]+\frac{6}{(n\pi)^2}\left[-sin(\frac{n\pi}{2})+sin(\frac{5n\pi}{6})\right]$$

Ao somar as parcelas, o coeficiente responsável pela série de senos resulta em:

$$\begin{aligned} b_n \quad = \quad & \frac{1}{6}\int_{-6}^{6} f(x)sin(\frac{n\pi x}{6})dx = \frac{-2}{n\pi}\left[cos(\frac{n\pi}{2})+cos(\frac{5n\pi}{6})+cos(\frac{n\pi}{6})\right]+ \\ & \frac{12}{(n\pi)^2}\left[-sin(\frac{n\pi}{2})+sin(\frac{5n\pi}{6})+sin(\frac{n\pi}{6})\right] \end{aligned} \tag{5}$$

Em suma, a série de Fourier para o exercício 18 ficou da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(x) \quad \approx \quad & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\left[cos(\frac{n\pi}{2})+cos(\frac{5n\pi}{6})+cos(\frac{n\pi}{6})\right]sin(\frac{n\pi x}{L})+ \qquad (6) \\ & \frac{12}{(n\pi)^2}\left[-sin(\frac{n\pi}{2})+sin(\frac{5n\pi}{6})+sin(\frac{n\pi}{6})\right]sin(\frac{n\pi x}{L}) \end{aligned}$$

3 Resultados

Para a demonstração gráfica dos resultados foi utilizado o software livre Gnuplot [3] que extraiu os valores das funções pela programação realizada em Fortran [1]. Para otimizar o procedimento de geração de gráficos, foi desenvolvido um arquivo do tipo 'Makefile' que permite compilar automaticamente os códigos e repetir os processos quantas vezes desejar.

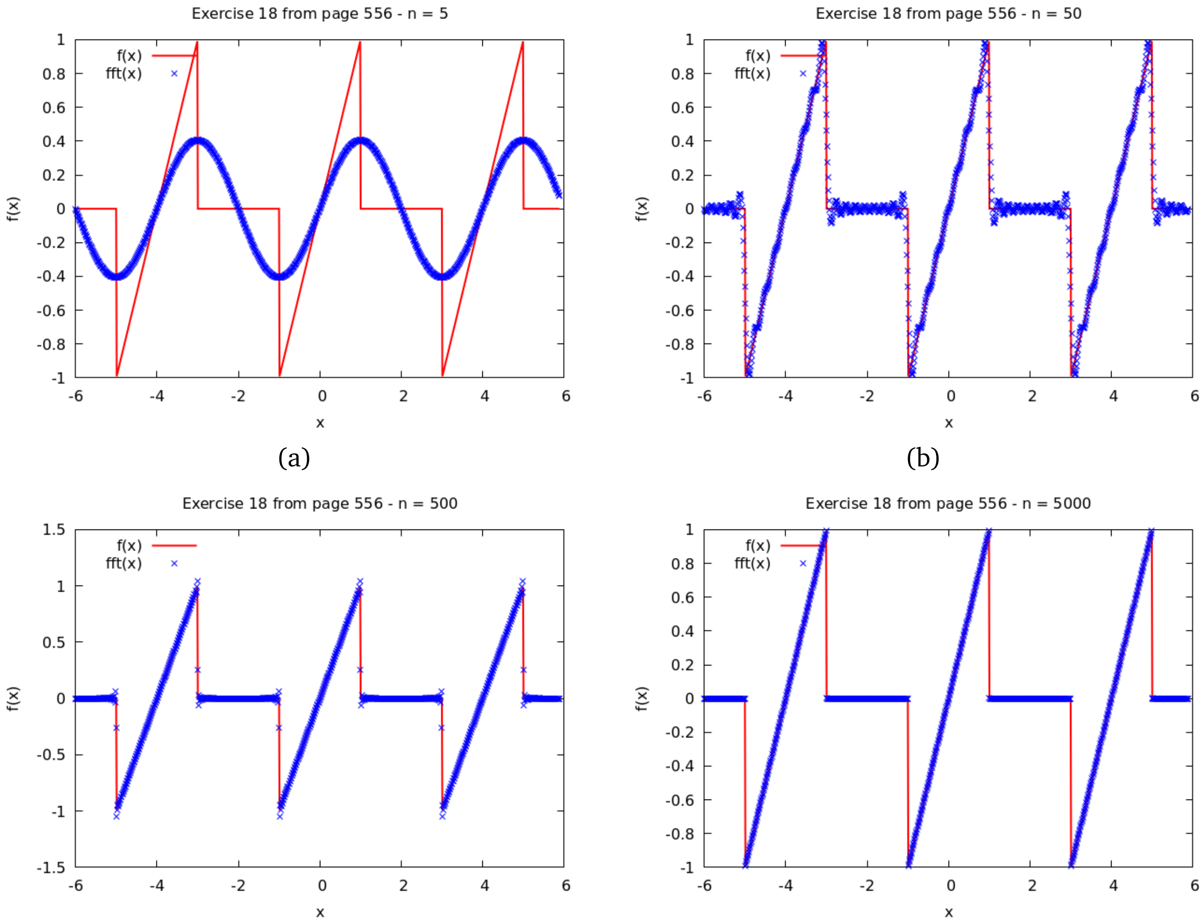

Figura 2: Séries de Fourier para n = 5 (a), n = 50 (b), n = 500 (c) e n = 5000 (d)

4 Resultados

Conforme esperado, o princípio de aumentar o número de repetições para a série mostra que cada vez mais se aproxima do valor da função original. O custo computacional para o caso estudado em si foi baixo, o que permitiu um número razoável de testes.

5 Códigos

```makefile
FC = gfortran
FFLAGS = -march=native -mtune=native -O3
FDEBUGFLAGS = -g -fbacktrace -ffpe-trap=zero,overflow,underflow,denormal
IDIR = -I/usr/local/include/fgsl/
LIBS = -lgsl -lfgsl -lopenblas -lm
LIBS = -lopenblas -lm

all:ex18.exe

ex18.exe: main.o functions.o fourierseries.o
	$(FC) $(FFLAGS) -o $@ $(IDIR) $^ $(LIBS)

%.o: %.f90
	$(FC) -c $(FFLAGS) -o $@ $(IDIR) $<

debug:main.f90 functions.f90 fourierseries.f90
	$(FC) -g $(FDEBUGFLAGS) -o ex18_dbg.exe $(IDIR) $^ $(LIBS)

clean:
	rm -f *.o *.mod *.exe
```

```fortran
! PROGRAM CREATED TO APPLIED MATH COURSE OF IME‘S POST-GRADUATION ENGINEERING COURSE
! WRITTEN BY WALLACE RAMOS ROSENDO DA SILVA
! PROFESSOR MARCIO VIOLANTE FERREIRA
! EXERCISE 18 FROM PAGE 556 - BOYCE & DIPRIMA'S BOOK
! COMPILING CODE:
! Created a makefile to optimize compiling process
! Enter in Terminal and write:
! make ; ./ex18.exe argument1 ==> argument1 = number of repetitions for this exercise

program main
    use fgsl
    use functions
    use fourierseries

    implicit none

    ! Defining a name for Fourier Analysis Exercise
    character(kind=fgsl_char,len=6) :: file_name = "result"
    character(kind=fgsl_char,len=6) :: unit1,arg1
    integer(fgsl_int) :: iter=1,nmax=1000,mmax,new_unit,period
    real(fgsl_double) :: dxvec,x0=-6.0_fgsl_double,x1=6.0_fgsl_double
    real(fgsl_double), allocatable :: xvec(:), yvec(:), fft_res(:)

    ! Command-line input of how many iterations has to be done in Fourier's Series
    call get_command_argument(1,arg1)
    read(arg1,*) mmax ! Transforming string into an integer

    write(unit1,'(I6.6)') mmax ! Creating a new string with 6 digits to store results
    open(newunit=new_unit,file=file_name//"_"//trim(unit1)//".txt",status="replace",action="write")

    allocate(xvec(nmax))
    allocate(yvec(nmax))
    allocate(fft_res(nmax))

    ! Creating a linear spaced vector x
    dxvec = (x1-x0)/real(nmax-1,fgsl_double)
    do iter = 1, nmax
        xvec(iter) = x0 + (iter-1)*dxvec
    end do

    ! Calculating f(x)
    do period = -1,1
        call piecewise_18pg556(xvec,yvec,period,nmax)
    end do

    ! Fourier Series Approximation
    call fouriertransformation(xvec,fft_res,mmax,nmax)

    ! Creating a text file with results of f(x) and Fourier Series approximation
    ! write(new_unit,'(a11,a6,a11,a6,a11)') &
    ! & "x"," ","f(x)"," ","fft(x)"
    write(new_unit,'(f11.8,a6,f11.8,a6,f11.8)') &
    & (xvec(iter)," ",yvec(iter)," ",fft_res(iter),iter=1,nmax)

    deallocate(xvec)
    deallocate(yvec)
    deallocate(fft_res)

    ! Plotting chart with interface between Gnuplot and Fortran
    call execute_command_line("gnuplot -c plot.plt " &
    & //file_name//"_"//trim(unit1)//".txt "//arg1) ! preparing a command-line for gnuplot
end program main
```

```
module functions
    use fgsl
    implicit none
    contains

    ! Exercise 18 from page 556
    ! Calling a subroutine to calculate piecewise function
    subroutine piecewise_18pg556(x,y,k,n)
        integer(fgsl_int) :: i, k, n
        real(fgsl_double), intent(in) :: x(n)
        real(fgsl_double), intent(out) :: y(n)

        do i = 1, n
            if (x(i) >= real(-2.0_fgsl_double + 4.0_fgsl_double*k) .and. x(i) <= real(-1.0_fgsl_double + 4.0_fgsl_double*k)) then
                y(i) = 0.0
            else if (x(i) > real(-1.0_fgsl_double + 4.0_fgsl_double*k) .and. x(i) < real(1.0_fgsl_double + 4.0_fgsl_double*k)) then
                y(i) = x(i) - 4.0_fgsl_double*k
            else if (x(i) >= real(1.0_fgsl_double + 4.0_fgsl_double*k) .and. x(i) < real(2.0_fgsl_double + 4.0_fgsl_double*k)) then
                y(i) = 0.0
            end if
        end do

    end subroutine

end module functions
```

```
module fourierseries
    use fgsl

    implicit none
    contains

    subroutine fouriertransformation(x,fft,m,n)
        integer(fgsl_int) :: i, k, n, m
        real(fgsl_double) :: bm(m), sin_series(m,n)
        real(fgsl_double), intent(in) :: x(n)
        real(fgsl_double), intent(out) :: fft(n)

        do k = 1, m
            bm(k) = -2.0_fgsl_double*(cos(k*m_pi/6.0) + cos(k*m_pi*5.0/6.0) + cos(k*m_pi/2.0))/(k*m_pi) &
            & + 12.0_fgsl_double*(sin(k*m_pi/6.0) + sin(k*m_pi*5.0/6.0) - sin(k*m_pi/2.0))/(k*m_pi)**(2)
            do i = 1, n
                sin_series(k,i) = sin(k*m_pi*x(i)/abs(x(1)))
            end do
        end do

        fft = matmul(bm,sin_series)

    end subroutine
end module fourierseries
```

```
# gnuplot -c plot.plt ARG1 ARG2
set terminal png
set output sprintf("pictures/ex18_n_%s.png",ARG2)
set key top left
set xlabel "x"
set ylabel "f(x)"
set title sprintf("Exercise 18 from page 556 - n = %s",ARG2)
plot ARG1 using 1:2 title "f(x)" lc rgb "red" dt 1 lw 2 with lines, \
     ARG1 using 1:3 title "fft(x)" lc rgb "blue" dt 2 lw 1 with points
```

Referências

[1] Jeanne C. Adams et al. *Fortran 90 Handbook: Complete ANSI/ISO Reference*. USA: McGraw-Hill, Inc., 1993. ISBN: 0070004064.

[2] R.C. DiPrima e D.B. Meade. *Elementary Differential Equations, 11th Edition*. Wiley, 2016. ISBN: 9781119169871. URL: https://books.google.com.br/books?id=QsaPDQAAQBAJ.

[3] T. Williams e C. Kelley. *Gnuplot 5.4, An Interactive Plotting Program*. GNU License, 2020. URL: http://sourceforge.net/projects/gnuplot.