

**MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**WALLACE RAMOS ROSENDO DA SILVA**

**ANÁLISE AERODINÂMICA E ESTUDO DO ALCANCE DE UM PROJÉTIL DE  
ARTILHARIA**

**RIO DE JANEIRO  
2023**

WALLACE RAMOS ROSENDO DA SILVA

ANÁLISE AERODINÂMICA E ESTUDO DO ALCANCE DE UM PROJÉTIL  
DE ARTILHARIA

Proposta de Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador(es): André Luiz Tenório Rezende, D.Sc.

Rio de Janeiro  
2023

©2023

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha  
Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

Ramos Rosendo da Silva, Wallace.

Análise aerodinâmica e estudo do alcance de um projétil de artilharia /  
Wallace Ramos Rosendo da Silva. – Rio de Janeiro, 2023.

105 f.

Orientador(es): André Luiz Tenório Rezende.

Proposta de Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, Engenharia Mecânica, 2023.

1. aerodinâmica. 2. força de arrasto. 3. extensão de alcance. 4. trajetória balística. 5. fluidodinâmica computacional. i. Luiz Tenório Rezende, André (orient.) ii. Título

**WALLACE RAMOS ROSENDO DA SILVA**

**Análise aerodinâmica e estudo do alcance de um projétil  
de artilharia**

Proposta de Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador(es): André Luiz Tenório Rezende.

Aprovada em 21 de dezembro de 2022, pela seguinte banca examinadora:

---

**Prof. André Luiz Tenório Rezende - D.Sc. do IME - Presidente**

---

**Prof. Victor Santoro Santiago - D.Sc. do IME**

---

**Prof. Bruna Rafaella Loiola - D.Sc. do IME**

Rio de Janeiro  
2023

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

## AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados à Isabella, minha mulher, que foi a primeira pessoa a acreditar neste projeto e aceitou dividir a vida comigo. Sem o seu suporte e paciência para aguentar todas as noites de preocupação jamais teria chegado a lugar algum.

À minha família de origem, pois fui criado por cinco mulheres incríveis que sempre serei grato por tudo que fizeram a mim: Rosimeri, minha mãe; Jessica, minha irmã; Eunice, minha avó paterna; Vera Lúcia, tia paterna e Rosângela, minha madrinha que infelizmente não está mais entre nós. Aos parentes não citados, agradeço-lhes numa mensagem sucinta para que saibam que reconheço seu apoio em todas as minhas empreitadas, mesmo as que sentiram desconfiança devido ao grau de incerteza envolvido.

Aos amigos de infância, deixo-lhes claro novamente o profundo sentimento de amor fraternal após todos esses anos de convívio. Antônio, Alexandre, João e Lucas, contem comigo para tudo. Vocês sempre me demonstraram que a vida não se exige muito para ser bem vivida, nós que a complicamos.

Aos amigos do CEFET-RJ, Marcus, Raul, Renan, Rodrigo e Tobias, jamais esquecerei dos bons momentos vividos na adolescência. Sem o bom convívio convosco durante o curso técnico em Mecânica Industrial, eu jamais teria escolhido a Engenharia Mecânica como uma possibilidade de graduação.

Aos amigos do 44, nunca fui tão bom como disseram, nem tão ruim quanto às vezes acho que sou. Sem vocês eu jamais teria conhecido a minha esposa e vivido momentos felizes numa fase tão difícil quanto foi a perda de meu pai.

Aos amigos do Tamandaré, fica o meu apreço pela vossa amizade e espero encontrá-los mais vezes para ter certeza que serei o único que terá um fio de cabelo na cabeça na próxima década.

Aos amigos da UERJ, em especial Carol, Gabriel Cerqueira, Gabriel Amaral, Guilherme, João Tinoco, Luciano, Yoná, pois vocês apareceram na minha vida de universitário justamente quando mais quis desistir do curso. Tenho muito orgulho de tê-los conhecido e convivido durante todos esses anos, ainda mais no momento crítico que passamos dentro da universidade.

Aos amigos oriundos do GFRJ, vocês têm parte da culpa por eu ter escolhido fazer esse mestrado. Ao Arthur, Bruno, Júlio César, Patrick e Thiago, gratidão eterna pelos momentos vividos nos trabalhos da Olimpíada Brasileira de Astronomia e por me ensinarem a amar o setor espacial como tanto me sinto parte dele, além de me darem a

única chance que tive de sair do país para fazer algo interessante.

Aos professores André Rezende e Cel. Barros que foram determinantes no suporte ao desenvolvimento deste trabalho, deixo-lhes meu sincero agradecimento. A todo o restante do corpo docente Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia (IME), agradeço o suporte e condições técnicas ofertadas para que toda a pesquisa pudesse ser desenvolvida nos laboratórios da instituição.

*"Quem deve enfrentar monstros deve permanecer  
atento para não se tornar também um monstro.  
Se olhares demasiado tempo dentro de um abismo,  
o abismo acabará por olhar dentro de ti."*

(NIETZSCHE, F. W. **Além do bem e do mal.** Márcio Pugliesi (Trad.) São Paulo:  
Editora Hemus, 2001)

## RESUMO

A extensão de alcance em projéteis é um tema de grande interesse para pesquisas sobre aerodinâmica. Para aumentar o deslocamento do corpo, procura-se reduzir o arrasto aerodinâmico através da injeção de gases em altas temperaturas na base do projétil por meio de uma câmara geradora de gás, sendo tal tecnologia conhecida como *Base Bleed*. Esse sistema busca reduzir o arrasto através do aumento de pressão na região à jusante da base do projétil, injetando gases em altas temperaturas e em velocidades subsônicas. O objetivo deste trabalho é observar a diminuição do coeficiente de arrasto pela influência do *Base Bleed* através da manipulação de parâmetros como o diâmetro de saída do bocal, a temperatura dos gases injetados e a vazão mássica desses gases propelidos. Tais fenômenos serão analisados por simulações de dinâmica dos fluidos computacional (CFD) usado Método dos Volumes Finitos (MVF). No presente trabalho o coeficiente de arrasto não sofrerá efeito do ângulo de ataque,  $C_{D_0}$ , para construção de uma malha bidimensional e axissimétrica. Para descrever a turbulência duas modelagens com ênfase em problemas aerodinâmicos foram utilizadas: Spalart-Allmaras e Shear-Stress Transport  $\kappa-\omega$ . A escolha destes modelos também se deve ao custo computacional. Além do coeficiente de arrasto, os resultados de interesse são o campo de velocidades, de pressão e as linhas de corrente para a velocidade. Com os valores obtidos será implementado o modelo de trajetória ponto-massa modificado (MPMTM), regulamento pela OTAN, para predição de trajetória e verificação da extensão de alcance gerada pelo *Base Bleed* em código próprio desenvolvido em MATLAB e validado previamente com referências de softwares comerciais como o PRODAS, de larga aplicação na indústria aeroespacial.

**Palavras-chave:** aerodinâmica. força de arrasto. extensão de alcance. trajetória balística. fluidodinâmica computacional.

## ABSTRACT

Range extension in projectiles is a topic of great interest for aerodynamics research. To increase the displacement of the body, it is sought to reduce the aerodynamic drag by injecting gases at high temperatures at the base of the projectile through a gas generating chamber, and such technology is known as *Base Bleed*. This system seeks to reduce drag by increasing the pressure in the region downstream of the base of the projectile, injecting gases at high temperatures and subsonic velocities. The objective of this work is to observe the reduction of the drag coefficient by the influence of the *Base Bleed* through the manipulation of parameters such as the nozzle exit diameter, the injected gas temperature and the mass flow rate of these propelled gases. Such phenomena will be analyzed by computational fluid dynamics (CFD) simulations used Finite Volume Method (FVM). In the present work the drag coefficient will not be affected by the angle of attack,  $C_{D_0}$ , to construct a two-dimensional and axisymmetric mesh. To describe the turbulence two modeling approaches with emphasis on aerodynamic problems were used: Spalart-Allmaras and Shear-Stress Transport  $\kappa - \omega$ . The choice of these models is also due to the computational cost. Besides the drag coefficient, the results of interest are the velocity field, pressure field and the current lines for the velocity. With the obtained values the modified point-mass trajectory model (MPMTM), NATO regulation, will be implemented for trajectory prediction and verification of the range extension generated by the *Base Bleed* in own code developed in MATLAB and previously validated with commercial software references such as PRODAS, widely applicable in aerospace industry.

**Keywords:** aerodynamics. drag force. range extension. ballistic trajectory. computational fluid dynamics.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Técnicas de redução de arrasto, traduzido e adaptado.	24
Figura 2 – Granada hipotética de calibre 155mm M107 HE.	25
Figura 3 – Escoamento supersônico na base de um projétil com <i>Base Bleed</i> .	25
Figura 4 – Pressão na base por fluxo de massa.	26
Figura 5 – Coeficiente de Arrasto em função do número de Mach para um projétil calibre 120mm obtido por testes de tiro, com ou sem <i>Base Bleed</i> .	27
Figura 6 – Malha computacional	29
Figura 7 – Visualização experimental	30
Figura 8 – Imagens computacionais baseadas no gradiente de densidade e contornos de velocidade adimensional em função do fluxo de ar no meio externo.	31
Figura 9 – Modelo computacional para um projétil 155mm.	32
Figura 10 – Campo de velocidade com $M = 1,5$ em diferentes modelos de turbulência.	34
Figura 11 – Coeficiente de Arrasto versus Mach para o projétil com <i>Base Bleed</i> pelas simulações CFD usando os modelos SST $\kappa - \omega$ , Transição $\kappa - \kappa l - \kappa - \omega$ e RSM e comparando com resultados semi-empíricos.	40
Figura 12 – Fluxogramas para algoritmo <i>pressure-based</i> segregado e acoplado.	48
Figura 13 – Fluxograma para algoritmo <i>density-based</i>	48
Figura 14 – Volume de controle usado para ilustrar a discretização da equação do transporte escalar.	49
Figura 15 – Avaliação do gradiente do volume de controle	51
Figura 16 – Esquema QUICK para um escoamento unidimensional.	51
Figura 17 – Média temporal para turbulência estacionária para a velocidade instantânea $u_i(\mathbf{x}, t)$ .	54
Figura 18 – Domínio computacional	72
Figura 19 – Domínio computacional	75
Figura 20 – Sistema de referência para o cálculo de trajetória	76
Figura 21 – Coeficiente de Arrasto $C_D$ em função do número de Mach (sem BB)	78
Figura 22 – Projétil sob regime de velocidade igual a Mach 2	78
Figura 23 – Linhas de corrente para a velocidade sob regime $M = 2,0$	79
Figura 24 – Influência do diâmetro sobre o coeficiente de arrasto.	80
Figura 25 – Projétil sob diferentes condições de vazão mássica sob regime $M = 2,0$ ( $\phi_{BB} = 25,4\text{ mm}; T_{BB} = 2306,15\text{ K}$ )	81
Figura 26 – Projétil sob diferentes condições de vazão mássica sob regime $M = 2,0$ ( $\phi_{BB} = 50,8\text{ mm}; T_{BB} = 2306,15\text{ K}$ )	82
Figura 27 – Influência da vazão mássica do <i>Base Bleed</i> sobre o coeficiente de arrasto com $T_{BB} = 1500\text{ K}$	83

Figura 28 – Projétil sob diferentes condições de vazão mássica sob regime $M = 2,0$ $(\phi_{BB} = 50,8 \text{ mm}; T_{BB} = 1500 \text{ K})$	84
Figura 29 – Influência da temperatura do <i>Base Bleed</i> sobre o coeficiente de arrasto com $\dot{m}_{BB} = 0,060 \text{ kg/Mestrado}$	85
Figura 30 – Curvas de arrasto de acordo com modelos de turbulência RANS	86
Figura 31 – Projétil sob modelo Spalart-Allmaras	86
Figura 32 – Linhas de corrente para o modelo Spalart-Allmaras	86
Figura 33 – Projétil com diferentes saídas de bocal e diferentes vazões	88

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparações entre os algoritmos segregados e acoplados. . . . .	47
Tabela 2 – Constantes usadas no modelo Spalart-Allmaras. . . . .	58
Tabela 3 – Constantes usadas no modelo $\kappa-\varepsilon$ . . . . .	59
Tabela 4 – Constantes usadas no modelo $\kappa-\omega$ . . . . .	61
Tabela 5 – Constantes usadas no modelo SST $\kappa-\omega$ . . . . .	63
Tabela 6 – Malhas desenvolvidas para o domínio computacional (sem <i>Base Bleed</i> )	72
Tabela 7 – Malhas desenvolvidas para o domínio computacional (com <i>Base Bleed</i> )	73
Tabela 8 – Efeito <i>Base Bleed</i> em função da temperatura . . . . .	73
Tabela 9 – Diâmetros testados para analisar o efeito <i>Base Bleed</i> . . . . .	73
Tabela 10 – Teste de convergência (com <i>Base Bleed</i> ) . . . . .	79
Tabela 11 – Trajetória Balística com QE = 711 mil e v = 878 m/Mestrado ( $\phi_{BB} = 25,4$ mm)	87
Tabela 12 – Trajetória Balística com QE = 800 mil e v = 878 m/Mestrado ( $\phi_{BB} = 25,4$ mm)	88
Tabela 13 – Trajetória Balística com QE = 711 mil e v = 878 m/Mestrado ( $\phi_{BB} = 50,8$ mm)	89
Tabela 14 – Trajetória Balística com QE = 800 mil e v = 878 m/Mestrado ( $\phi_{BB} = 50,8$ mm)	89
Tabela 15 – Coeficientes Aerodinâmicos (sem <i>Base Bleed</i> ) . . . . .	99
Tabela 16 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed - $T_{bb} = 300$ K) . . . . .	100
Tabela 17 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed - $T_{bb} = 1500$ K) . . . . .	101
Tabela 18 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed - $\phi_{bb} = 25,4$ mm, $\dot{m}_{bb} = 0,015$ kg/s e $T_{bb} = 2306,15$ K) . . . . .	102
Tabela 19 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed - $\phi_{bb} = 25,4$ mm, $\dot{m}_{bb} = 0,030$ kg/s e $T_{bb} = 2306,15$ K) . . . . .	103
Tabela 20 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed - $\phi_{bb} = 50,8$ mm, $\dot{m}_{bb} = 0,030$ kg/s e $T_{bb} = 2306,15$ K) . . . . .	104
Tabela 21 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed - $\phi_{bb} = 50,8$ mm, $\dot{m}_{bb} = 0,060$ kg/s e $T_{bb} = 2306,15$ K) . . . . .	105

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$a_\infty$	Velocidade do som ao escoamento livre
$a_P$	Coeficiente do sistema linear para solução de $\phi$
$a_{nb}$	Coeficiente do sistema linear para solução de $\phi_{nb}$
$az$	Azimute do disparo do projétil
$A$	Área do elemento para a superfície de controle
$\mathbf{A}_f$	Vetor de área da face
$A_{ref}$	Área de referência do projétil
$A_{base}$	Área da base do projétil
AOA	Ângulo de ataque ( <i>Angle of attack</i> )
$b$	Coeficiente linear para solução do método <i>Multigrid</i>
BB	<i>Base Bleed</i>
$c$	Coeficiente linear para solução do método <i>Multigrid</i>
$C_{D_0}$	Coeficiente de arrasto com ângulo de ataque nulo
$C_{D_{\alpha^2}}$	Coeficiente de arrasto quadrático
$C_D$	Coeficiente de arrasto total
$C_{D_{BB}}$	Coeficiente de arrasto pelo efeito <i>Base Bleed</i>
$C_{l_p}$	Coeficiente do momento de amortecimento da rotação (padrão NACA)
$C_{L_\alpha}$	Coeficiente de sustentação linear
$C_{L_{\alpha^3}}$	Coeficiente de sustentação cúbico
$C_{mag-f}$	Coeficiente da força de Magnus
$CD_{k\omega}$	Parte positiva do termo de difusão cruzada
CDS	Esquema de Diferenças Centrais ( <i>Central Differencing Scheme</i> )
$c_T$	Condutividade térmica do fluido
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional ( <i>Computational Fluid Dynamics</i> )

$C_{ma}$	Coeficiente do momento de derrubada linear
$C_{ma^3}$	Coeficiente do momento de derrubada cúbico
$c_p$	Calor específico a pressão constante
$CP$	Coeficiente de pressão
$C_{spin}$	Coeficiente do momento de amortecimento da rotação
$c_v$	Calor específico a volume constante
$C_{X_0}$	Coeficiente de arrasto com ângulo de ataque nulo (padrão NACA)
$C_{X_{\alpha^2}}$	Coeficiente de arrasto quadrático (padrão NACA)
$C_{y_{pa}}$	Coeficiente da força Magnus (padrão NACA)
$C_{Z_0}$	Coeficiente de sustentação linear (padrão NACA)
$C_{Z_{\alpha^3}}$	Coeficiente sustentação cúbico (padrão NACA)
$d$	Erro associado à solução do método <i>Multigrid</i>
$d(\perp)$	Distância perpendicular à parede para o modelo SST $\kappa - \omega$
$D$	Diâmetro de referência do projétil
DES	Modelagem Híbrida de Turbulência ( <i>Detached-Eddy Simulation</i> )
DNS	Simulação Númerica Direta ( <i>Direct Numerical Simulation</i> )
$e$	Energia específica interna do sistema
$\tilde{e}$	Energia interna específica média de Favre
$e''$	Flutuação da energia interna específica do fluido segundo a decomposição de Favre
ER	Alcance estendido ( <i>Extended Range</i> )
$f$	Fator de sub-relaxação
$f(\mathbf{x}, t)$	função instantânea para a decomposição de Reynolds
$F_\tau(\mathbf{x})$	função média para a decomposição de Reynolds
$F_{BB}$	Força causada pelo efeito <i>Base Bleed</i>
$F_C$	Efeito de Coriolis

$F_D$	Força de arrasto aerodinâmico
$F_G$	Força gravitacional
$F_L$	Força de sustentação aerodinâmica
$F_M$	Força do efeito Magnus
<b>g</b>	Vetor aceleração da gravidade
$g_0$	Aceleração da gravidade em função da latitude
$h$	Entalpia específica do sistema
$\tilde{h}$	Entalpia específica média de Favre
$h''$	Flutuação da entalpia específica do fluido segundo a decomposição de Favre
$h_{RK4}$	Passo do integrador do método de integração numérica Runge-Kutta de 4 <sup>a</sup> ordem
$H$	Entalpia total do sistema
$i_{BB}$	Fator de ajuste do arrasto em função do ângulo de elevação
$Inj$	Parâmetro de injeção
$Inj_0$	Parâmetro ótimo de injeção
$lat$	Latitude do disparo do projétil
L	Comprimento de referência do projétil
LES	Simulação de Grandes Escalas ( <i>Large-Eddy Simulations</i> )
$m$	Massa do projétil
$M$	Número de Mach
$M_\infty$	Número de Mach no meio livre
MVF	Método dos Volumes Finitos (FVM, <i>Finite Volume Method</i> )
<b>n</b>	Vetor normal à superfície
$N_{faces}$	Número de faces envolvendo o volume de controle
$N_{ref}$	Nível de refino de malha para o método <i>Multigrid</i>
$\dot{m}_{BB}$	Vazão mássica de injeção de gases pelo <i>Base Bleed</i>

OTAN	Organização do Tratado do Atlântico Norte
$p$	Pressão para as equações de Navier-Stokes
$p'$	Flutuação estatística da pressão segundo a decomposição de Favre
$p_\infty$	Pressão do meio livre
$P$	Pressão média de Favre
$P_\kappa$	Produção de energia cinética turbulenta
PLIF	Fluorescência planar em laser induzido ( <i>Planar Laser Induced Fluorescence</i> )
PRR	Região primária de recirculação ( <i>Primary Recirculation Region</i> )
$Pr_L$	Número de Prandtl laminar
$Pr_t$	Número de Prandtl turbulento
$q_j$	Vetor fluxo de calor
$q_{Lj}$	Vetor fluxo de calor laminar
$q_{Tj}$	Vetor fluxo de calor turbulento
$q'_j$	Flutuação do Vetor fluxo de calor do fluido segundo a decomposição de Favre
$Q_D$	Fator de arrasto para o modelo de trajetória MPMTM
$Q_D$	Fator de Magnus para o modelo de trajetória MPMTM
QE	Ângulo de elevação ( <i>Quadrant elevation angle</i> )
QUICK	Interpolação Regressiva Quadrática para Cinemática Convectiva ( <i>Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics</i> )
$\vec{r}$	Vetor deslocamento do centro da célula à montante até o volume de controle
$R$	Constante dos gases perfeitos
$R^\phi$	Resíduo normalizado
RANS	Equações médias de Reynolds ( <i>Reynolds Averaged Navier-Stokes</i> )
Re	Número de Reynolds

ROE-FDS	Esquema de Fluxo Direto de Roe ( <i>Roe's Flux Direct Scheme</i> )
$s_{ij}$	Tensor instantâneo da taxa de deformação
$S_{ij}$	Tensor médio da taxa de deformação
$S$	Constante da Lei de Sutherland, Vorticidade do modelo Spalart-Allmaras
$S_\phi$	Termo-fonte associado a $\phi$ ( <i>Source-term</i> )
S-A	Modelo de turbulência Spalart-Allmaras
SRM	Motor de propulsão sólida ( <i>Solid Rocket Motor</i> )
SST k- $\omega$	Modelo de turbulência Transporte das Tensões Cisalhantes k- $\omega$ ( <i>Shear-Stress Transport k-omega model</i> )
$S_t$	Magnitude da taxa de deformação
STANAG	Acordo de padronização ( <i>Standardization agreement</i> )
$t_c$	Taxa de torção do canhão de disparo
$t_{ij}$	Tensor instantâneo das tensões viscosas
$T$	Temperatura
$\tilde{T}$	Temperatura pela média de Favre
$T''$	Flutuação da temperatura do fluido segundo a decomposição de Favre
$u_i$	Velocidade instantânea do fluido
$u'_i$	Flutuação da velocidade instantânea do fluido segundo a decomposição de Reynolds
$u''_i$	Flutuação da velocidade instantânea do fluido segundo a decomposição de Favre
$U_i$	Velocidade média do fluido segundo a decomposição de Reynolds
$\tilde{u}_i$	Velocidade média do fluido segundo a decomposição de Favre
$U_\infty$	Velocidade do fluido no meio livre
$U_{solo}$	Velocidade do projétil em relação ao solo para cálculo de trajetória
$U_{x_{solo}}$	Velocidade do projétil no eixo x em relação ao solo para cálculo de trajetória

$U_{y_{solo}}$	Velocidade do projétil no eixo y em relação ao solo para cálculo de trajetória
$U_{z_{solo}}$	Velocidade do projétil no eixo z em relação ao solo para cálculo de trajetória
$UDS$	Esquema de Diferença <i>Upwind</i> ( <i>Upwind Differencing Scheme</i> )
$UDS - 1$	Esquema de Diferença <i>Upwind</i> de 1 <sup>a</sup> ordem ( <i>First-Order Upwind Differencing Scheme</i> )
$UDS - 2$	Esquema de Diferença <i>Upwind</i> de 2 <sup>a</sup> ordem ( <i>Second-Order Upwind Differencing Scheme</i> )
$V$	Velocidade do projétil em relação ao ar para cálculo de trajetória
$V_x$	Velocidade do projétil no eixo x em relação ao ar para cálculo de trajetória
$V_y$	Velocidade do projétil no eixo y em relação ao ar para cálculo de trajetória
$V_z$	Velocidade do projétil no eixo z em relação ao ar para cálculo de trajetória
$V_{parede}$	Velocidade do escoamento sobre a parede da munição
VC	Volume de controle
VBPL	Método baseado na vorticidade ( <i>Vorticity-Based Production Limit</i> )
$W$	Velocidade do projétil em relação ao ar para cálculo de trajetória
$W_x$	Velocidade do ar para cálculo de trajetória no eixo x
$W_y$	Velocidade do ar para cálculo de trajetória no eixo y
$W_z$	Velocidade do ar para cálculo de trajetória no eixo z
WALE	Escala Local Adaptada à Parede ( <i>Wall Adapting Local Eddy</i> )
x	Coordenada horizontal no plano XY
X	Deslocamento horizontal do projétil no modelo de trajetória MPMTM
y	Coordenada vertical no plano XY
Y	Deslocamento vertical do projétil no modelo de trajetória MPMTM
Z	Deslocamento lateral do projétil no modelo de trajetória MPMTM

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Volume de controle arbitrário
$\nabla$	Operador gradiente tensorial
$\alpha_e$	Vetor guinada de reposição
$\alpha_{e_0}$	Vetor guinada de reposição inicial
$\beta$	Compressibilidade
$\beta_S$	Constante da Lei de Sutherland
$\gamma$	Razão de expansão adiabática do ar
$\Gamma$	Constantes aplicados à função de mistura do modelo SST $\kappa - \omega$
$\Gamma_\phi$	Coeficiente difusivo associado a $\phi$
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\varepsilon$	Taxa de dissipação de energia cinética por unidade de massa
$\zeta$	Coeficiente de dilatação da viscosidade
$\eta$	Gradiente de temperatura
$\theta$	Constante aplicada na discretização espacial QUICK
$\kappa$	Energia cinética turbulenta
$\Lambda$	Aceleração pelo efeito de Coriolis
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\mu_t$	Viscosidade dinâmica turbulenta
$\nu$	Viscosidade cinética
$\tilde{\nu}$	Viscosidade cinética amortecida para o modelo Spalart-Allmaras
$\nu_t$	Viscosidade cinética turbulenta
$\rho$	Densidade
$\rho_\infty$	Densidade do meio livre
$\varrho$	Rotação do corpo ( <i>spin</i> )

$\sigma_k$	Constante aplicada ao modelo SST $\kappa - \omega$
$\sigma_w$	Constante aplicada ao modelo SST $\kappa - \omega$
$\tau$	Período de tempo para as decomposições de Reynolds e Favre
$\tau_{xy}$	Tensões principais para o modelo SST $\kappa - \omega$
$\tau_{ij}$	Tensor tensão de Reynolds específico
$\varphi$	Velocidade angular sobre seu próprio eixo polar
$\phi$	Propriedade de interesse do fluido
$\phi_{bb}$	Diâmetro do bocal de saída do <i>Base Bleed</i>
$\phi_{c0}$	Propriedade de interesse do fluido no centro do volume de controle
$\phi_{ex}$	Solução exata do método <i>Multigrid</i>
$\phi_f$	Propriedade de interesse do fluido na face do volume de controle
$\phi_{up}$	Propriedade de interesse do fluido sob esquema <i>upwind</i> de primeira ordem
$\chi$	Função auxiliar aplicada ao modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$\chi_w$	Função auxiliar aplicada ao modelo de turbulência $\kappa - \omega$ padrão
$\psi$	Função incremental aplicada ao método de integração numérica Runge-Kutta de 4 <sup>a</sup> ordem
$\Psi$	Fator de correção do método <i>Multigrid</i>
$\omega$	Taxa específica de dissipação da energia
$\Omega$	Vorticidade do fluido

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>24</b>
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
1.2	MOTIVAÇÃO	35
1.3	OBJETIVO DE ESTUDO	36
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	37
<b>2</b>	<b>REVISÃO TEÓRICA</b>	<b>39</b>
2.1	ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS	39
2.2	EQUAÇÕES DE GOVERNO	40
2.2.1	CONSERVAÇÃO DE MASSA	41
2.2.2	CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR	41
2.2.3	CONSERVAÇÃO DE ENERGIA	41
<b>3</b>	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	<b>43</b>
3.1	MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS	45
3.1.1	ALGORITMOS DE RESOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS	46
3.1.1.1	ALGORITMO <i>PRESSURE-BASED</i>	47
3.1.1.2	ALGORITMO <i>DENSITY-BASED</i>	47
3.1.2	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL	49
3.1.2.1	ESQUEMA DE DIFERENÇAS CENTRAIS	49
3.1.2.2	ESQUEMA <i>UPWIND</i> DE PRIMEIRA ORDEM	49
3.1.2.3	ESQUEMA <i>UPWIND</i> DE SEGUNDA ORDEM	50
3.1.2.4	ESQUEMA QUICK	50
3.1.3	RELAXAÇÃO DOS TERMOS DE ALTA ORDEM	51
3.1.4	MÉTODO MULTIGRID	52
3.1.5	CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	52
<b>4</b>	<b>MODELAGEM DE TURBULÊNCIA</b>	<b>53</b>
4.1	O PROBLEMA DE FECHAMENTO	53
4.1.1	DECOMPOSIÇÃO DE REYNOLDS	54
4.1.2	DECOMPOSIÇÃO DE FAVRE	55
4.1.2.1	APROXIMAÇÕES DE FECHAMENTO PARA OS ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS	56
4.2	MODELO SPALART-ALLMARAS	57
4.3	MODELO $\kappa-\varepsilon$ PADRÃO	59
4.4	MODELO $\kappa-\omega$ PADRÃO	59

4.5	MODELO <i>SHEAR STRESS TRANSPORT</i> $\kappa-\omega$ . . . . .	61
<b>5</b>	<b>MODELO DE TRAJETÓRIA . . . . .</b>	<b>64</b>
5.1	MODELO DE TRAJETÓRIA PONTO-MATERIAL MODIFICADO - MTPMM	64
5.2	MODELO DE ATMOSFERA . . . . .	67
5.3	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA . . . . .	68
<b>6</b>	<b>DESCRIÇÃO DO ESTUDO PROPOSTO . . . . .</b>	<b>70</b>
6.1	PARÂMETROS DE INTERESSE . . . . .	70
6.1.1	COEFICIENTE DE ARRASTO . . . . .	70
6.1.2	COEFFICIENTE DE PRESSÃO . . . . .	70
6.1.3	PARÂMETRO DE INJEÇÃO . . . . .	71
6.2	GERAÇÃO DE MALHA . . . . .	71
6.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO . . . . .	73
6.4	MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS SIMULAÇÕES CFD . . . . .	74
6.5	IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE TRAJETÓRIA . . . . .	75
6.5.1	CONDIÇÕES GEOMÉTRICAS . . . . .	75
6.5.2	CONDIÇÕES BALÍSTICAS . . . . .	76
6.5.3	CONDIÇÕES ATMOSFÉRICAS . . . . .	77
6.5.4	CONDIÇÕES AERODINÂMICAS . . . . .	77
<b>7</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>78</b>
7.1	PROJETIL INERTE (SEM <i>BASE BLEED</i> ) . . . . .	78
7.2	PROJETIL ATIVO (COM <i>BASE BLEED</i> ) . . . . .	79
7.2.1	INFLUÊNCIA NO DIÂMETRO DE SAÍDA DO <i>BASE BLEED</i> . . . . .	80
7.2.2	INFLUÊNCIA DA VAZÃO MÁSSICA NO SISTEMA <i>BASE BLEED</i> . . . . .	83
7.2.3	INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA . . . . .	84
7.2.4	INFLUÊNCIA DA ABORDAGEM RANS . . . . .	85
7.3	RESULTADOS DA TRAJETÓRIA . . . . .	86
<b>8</b>	<b>COMENTÁRIOS FINAIS . . . . .</b>	<b>90</b>
8.1	CONCLUSÃO . . . . .	91
8.2	RECOMENDAÇÕES . . . . .	92
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>93</b>
	<b>APÊNDICE A – COEFICIENTES AERODINÂMICOS - SEM BASE BLEED . . . . .</b>	<b>99</b>
	<b>APÊNDICE B – COEFICIENTES AERODINÂMICOS - TEMPE- RATURA DE SAÍDA 300K . . . . .</b>	<b>100</b>

APÊNDICE C – COEFICIENTES AERODINÂMICOS - TEMPERATURA DE SAÍDA 1500K . . . . .	101
APÊNDICE D – COEFICIENTES AERODINÂMICOS - DIÂMETRO 1 POLEGADA E VAZÃO 15 G/S . . . . .	102
APÊNDICE E – COEFICIENTES AERODINÂMICOS - DIÂMETRO 1 POLEGADA E VAZÃO 30 G/S . . . . .	103
APÊNDICE F – COEFICIENTES AERODINÂMICOS - DIÂMETRO 2 POLEGADAS E VAZÃO 30 G/S . . . . .	104
APÊNDICE G – COEFICIENTES AERODINÂMICOS - DIÂMETRO 2 POLEGADAS E VAZÃO 60 G/S . . . . .	105

# 1 INTRODUÇÃO

A extensão de alcance em projéteis é um tema de grande interesse para pesquisas sobre aerodinâmica. Isto se deve ao fato de que estes corpos são lançados a altas velocidades, com o objetivo de se chegar o mais longe possível, portanto é necessário entender as forças atuantes a cada disparo. Para aumentar o deslocamento do corpo, procura-se reduzir o arrasto aerodinâmico, tendo em vista que é a principal força atuante em escoamentos viscosos. A Figura 1 traz um resumo acerca das possibilidades em reduzir esse efeito no deslocamento, como Dali e Jaramaz(1) demonstrou em seus estudos.

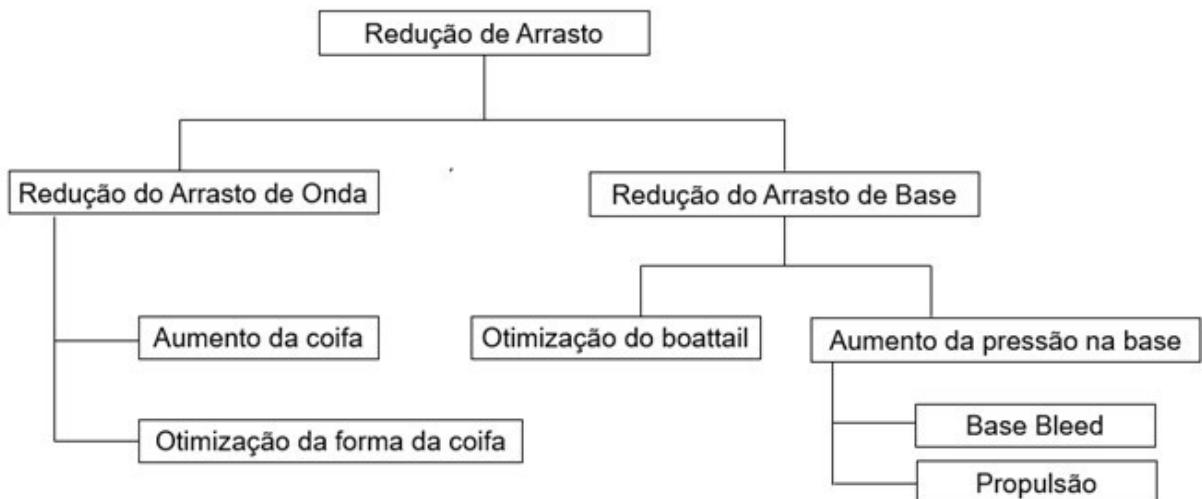


Figura 1 – Técnicas de redução de arrasto (1).

Para os projetos, o arrasto se divide em três grandes grupos: o arrasto de pressão (excluindo a base), o arrasto viscoso e o arrasto de base. Sahu, Nietubicz e Steger(2) argumenta que em regime transônico, o arrasto de base pode compreender 50% da magnitude da força de resistência do ar. Como a própria Figura 1 indica, pode-se modificar a forma do *boattail* ou fazer uso de uma tecnologia que aumente a pressão na base do projétil. Sedney(3) apresentou em seu trabalho que modificar o *boattail* pode ser uma saída complexa, pois há a possibilidade de incrementar a expansão de Prandtl-Meyer, dificultando a medição do arrasto total presente.

Com esta informação, o foco deste trabalho é estudar a influência do escoamento existente na base do armamento com alcance estendido (ER), já que há muitos desafios para o desenvolvimento destes produtos. A granada a ser estudada possui calibre 155mm (vide Figura 2), devido à sua larga aplicação militar. O perfil axissimétrico possui características de design similares ao estudo feito por Mahmoud et al.(4).

Apesar de sua geometria relativamente simples, há necessidade de analisar como a

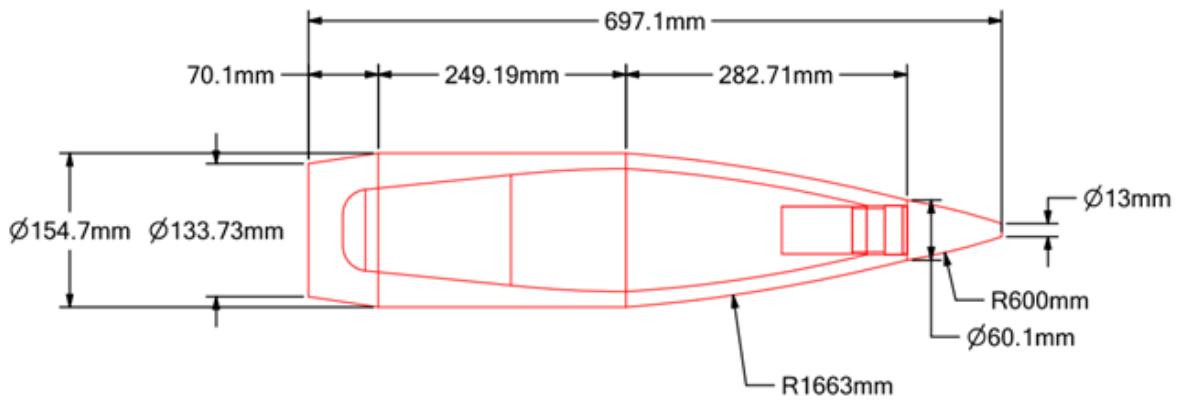


Figura 2 – Granada hipotética de calibre 155mm M107 HE.

injeção de massa de gases em altas temperaturas contribuem para a mudança do escoamento na base do projétil de tal forma que reduzam o arrasto ali presente. A tecnologia que aplica esses gases a partir da combustão de propelentes químicos se chama *Base Bleed* (BB). A Figura 3 apresenta como o escoamento percorre na região de maior interesse para o projeto.

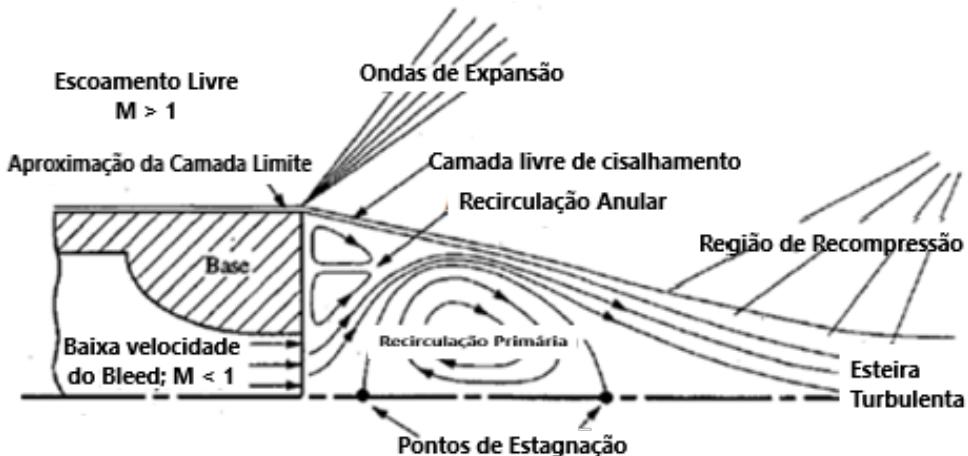


Figura 3 – Escoamento supersônico na base de um projetil com *Base Bleed* (5).

Para analisar qualitativamente o desempenho da tecnologia BB, o parâmetro adimensional de injeção,  $Inj$ , foi definido como a razão entre taxa de vazão mássica dos gases e o produto do fluxo de massa do ar livre pela área da base do projétil. Atender valores ideais deste número adimensional é um grande desafio em desenvolver um projétil com *Base Bleed*. Andersson, Gunners e Hellgren(6) demonstra a importância deste controle, pois o fluxo de massa deve ser um valor muito pequeno, conforme a Figura 4 abaixo.

Segundo Jelić(7), a existência do fenômeno de redução do arrasto de base através de um gerador de gás é datada desde a Segunda Guerra Mundial, quando se fazia uso de mísseis balísticos com traçadores que retardavam a redução de velocidade de voo, prolongando o alcance. Contudo, somente após a década de 1960 é que começou a se

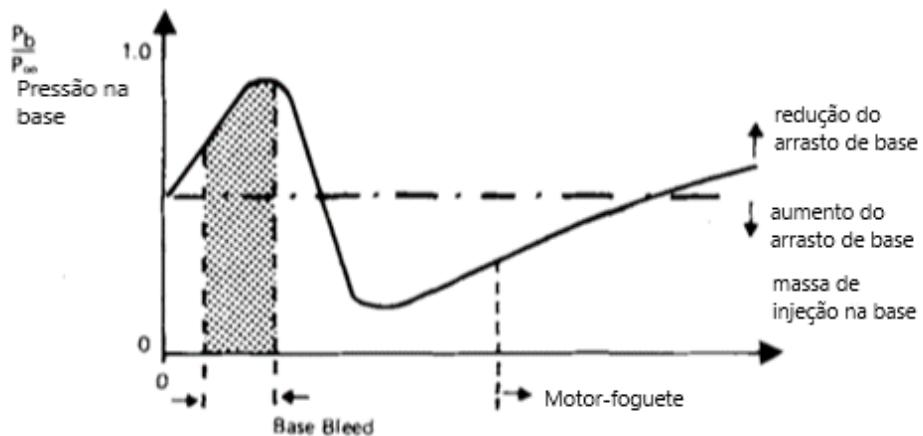


Figura 4 – Pressão na base por fluxo de massa (6).

desenvolver pesquisas mais profundas, sendo o hidrogênio ( $H_2$ ) o principal material usado nos geradores por ter baixo peso molecular e operar em altas temperaturas.

Os grandes questionamentos acerca deste combustível é que, apesar de muito eficiente, se permitia muito pouca estocagem dentro das munições e diminuía a vida útil delas. Outro fator relevante é que o gerador deveria conter muitos componentes, dificultando a manutenção. A solução encontrada foi trabalhar com propulsão sólida, já que se faz uso de muito menos equipamentos e o propelente poderia ser produzido através de compósitos com características adequadas às necessidades do projeto.

Segundo Mahmoud et al.(4), para poder predizer as forças e momentos presentes na trajetória do projétil, existem quatro técnicas: os métodos empíricos; os testes em túneis de vento; simulação de fluidodinâmica computacional; e teste *spark range*. As simulações recorrem métodos numéricos de fluidodinâmica computacional (CFD). Em razão das altas velocidades de disparo e das condições ambientais, considera-se o escoamento como compressível e turbulento, o que influencia nas equações de governo (Navier-Stokes) e de estado, assumindo que o ar do meio externo seja tratado como um gás perfeito. Em se tratando de turbulência, pretende-se verificar quais técnicas de abordagem sobre as equações de governo oferecem resultados satisfatórios a menor custo computacional. Em primeira análise, o objetivo é predizer os coeficientes aerodinâmicos sem a influência do *Base Bleed* sob o ângulo de ataque (AOA) igual a zero.

Ao final deste trabalho é esperado concluir se a injeção de propelentes em combustão na base do projétil é um método eficiente para redução de arrasto. Para tal conclusão, será necessário validar os resultados das simulações CFD com o modelo de trajetória, como apresentado por Silva et al.(8), atestando a influência da vazão e da temperatura dos gases injetados a montante do projétil. Em razão do projétil ser perfeitamente axissimétrico, a predição de trajetória é feita a partir do modelo ponto-massa modificado (MPMTM), desenvolvido por Lieske e Reiter(9) e padronizado pela OTAN através de um acordo de

padronização chamado STANAG 4355 (10).

Para assegurar a eficácia do software desenvolvido, uma comparação com o PRODAS®, software comercial para cálculos de dinâmica de voo para mísseis e foguetes, foi realizada considerando vários ângulos de elevação (QE) do tiro. Após a ratificação do código foram implementados os resultados do CFD para coeficiente de arrasto, seja a munição com ou sem *Base Bleed*.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

O estudo sobre projéteis com alcance estendido (ER) que utilizam *Base Bleed* começaram por meio de estudos experimentais que pretendiam verificar formas de reduzir o arrasto de base. Sedney(3) e Andersson, Gunners e Hellgren(6) revelaram em seus trabalhos os testes realizados, sejam por testes de tiro ou em túneis de vento, com o objetivo de verificar a influência das forças de translação ou de rotação, além de verificar o efeito que o movimento rotacional causava no processo de combustão.

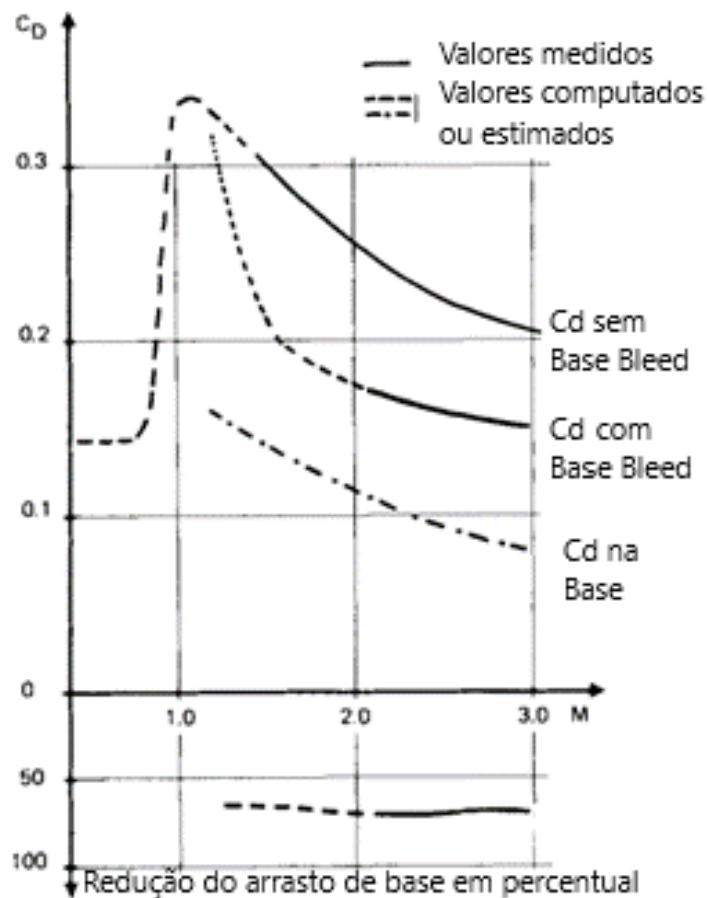


Figura 5 – Coeficiente de Arrasto em função do número de Mach para um projétil calibre 120mm obtido por testes de tiro, com ou sem *Base Bleed* (6)

Lieske e Reiter(9) explica que o modelo MPMTM é o método principal de preparação de tabelas de tiro, desde que se saiba as propriedades de massa do projétil; os coeficientes

aerodinâmicos e os valores experimentais dos testes de alcance. Para aprimoramento do trabalho, o projétil 155mm M107 foi analisado, principalmente para ajustar o coeficiente da força Magnus para as simulações. A relevância deste trabalho recai até os dias atuais, tendo em vista que os países-membros da Organização do Tratado do Atlântico Norte (OTAN) fazem uso deste recurso para desenvolver projéteis de longo alcance, sejam eles estabilizados por rotação ou por aletas (10).

Sahu, Nietubicz e Steger(2) apresenta uma proposta de analisar o escoamento na base do projétil a partir de simulações computacionais com métodos numéricos para resolução das equações de Navier-Stokes. As munições 155mm foram analisadas a partir do regime transônico, pois segundo os autores, o arrasto de base representa 50% de todo o arrasto presente na dinâmica de voo. Neste trabalho, também é possível verificar a adição de massa de gás na base do projétil, o que demonstrou os efeitos do *Base Bleed* de acordo com vários parâmetros de injeção. Por fim os resultados são comparados valores experimentais e recursos semi-empíricos, seja para as granadas que possuem a tecnologia inserida ou não. A relevância deste trabalho é muito grande, pois serve como modelo de referência para todos os trabalhos com CFD que estudam arrasto de base em projéteis com alcance estendido por BB.

Mathur e Dutton(5) manusearam velocímetros de laser Doppler para mensurar perfis de velocidade e turbulência na região próxima à esteira depois do corpo cilíndrico em escoamento com número de Mach (M) igual a 2,5. Neste mesmo trabalho, estimaram valores ideais de injeção do fluxo de massa na base, ou seja, o ponto que oferece a maior pressão na base, onde a região primária de recirculação é mínima, assim como a esteira turbulenta. Esse adimensional também serve até hoje como referência para calcular o efeito *Base Bleed* na trajetória.

Kaurinkoski e Hellsten(11) já lida com simulações computacionais desenvolvidas por códigos autorais em que se aplica o modelo de turbulência  $\kappa - \varepsilon$  para um escoamento supersônico ( $M = 1,2$ ) a uma granada 155mm com ângulo de ataque igual a  $5^\circ$ . Este modelo foi escolhido porque havia o interesse em evitar problemas com as regiões dos pontos de estagnação. Neste trabalho, conclui-se que a aplicação do método baseado na vorticidade (VBPL) até oferece bons resultados para a hipótese de Boussinesq, a não ser que haja muita turbulência.

Sahu e Heavey(12) resolveu numericamente as equações de Navier-Stokes de forma implícita usando dois modelos de turbulência: modelo algébrico para viscosidade turbulenta (Baldwin-Lomax) e o esquema de duas equações  $\kappa - \varepsilon$ . O escoamento foi aplicado apenas na região da base e após o corpo do projétil a com  $M = 2,46$  e ângulo de ataque nulo. Para verificar os resultados, dados experimentais em testes sob mesmas condições foram obtidos e usados. A conclusão que se chegou nesta pesquisa é que os melhores resultados foram apresentados com o modelo  $\kappa - \varepsilon$  para a região próxima à esteira turbulenta e prediz a

pressão na base com maior precisão.

Lee e Kim(13) examinou diferentes perfis de orifícios para um corpo de revolução em escoamento livre a  $M = 2,47$ . As seguintes considerações foram feitas para resolver as equações de Navier-Stokes com o modelo de turbulência  $\kappa - \omega$ : perfil axissimétrico, escoamento compressível, com a média das massas, esquema totalmente implícito de volumes finitos e esquema *upwind* de 2<sup>a</sup> ordem para discretização espacial. A motivação inicial deste trabalho partiu do interesse em entender a redução do arrasto no regime supersônico, e verificar se estava de acordo com os resultados dos experimentos encontrados (14).

Para averiguar a qualidade da simulação em CFD, o escoamento na saída do *Base Bleed* foi calculado a partir das relações isentrópicas. O perfil da munição estudado concentrou somente a região da base, como mostra a Figura 6. Adotando um software comercial, foi possível gerar uma malha computacional que garantiu as condições de contorno e melhor convergência. As regiões com maior gradiente de pressão concentraram maior quantidade de elementos. Ao todo, 50.000 elementos foram suficientes para adquirir soluções com este domínio.

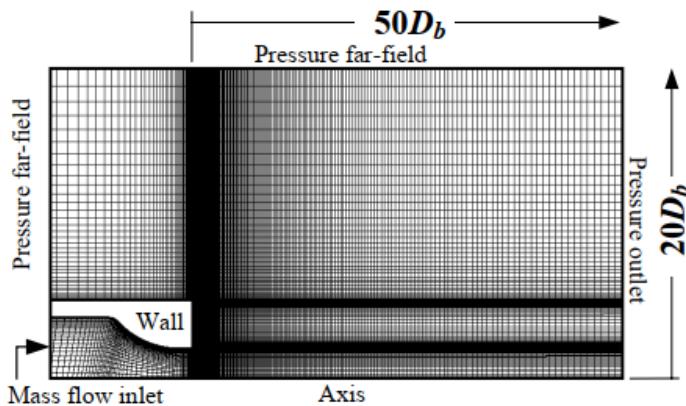


Figura 6 – Malha computacional (13)

O escoamento na base pode ser visto na Figura 7 a partir dos resultados experimentais (14). As imagens foram conseguidas utilizando a técnica de fluorescência planar em laser induzido (PLIF), que são mais profundamente detalhadas na referência. Já na Figura 8, Lee e Kim(13) reproduziu computacionalmente as recirculações mais presentes próximas à base e ao eixo de simetria. Conforme I aumenta, a região primário de recirculação (PRR) é praticamente nula, embora haja a formação de uma nova recirculação próximo à camada de formação da esteira turbulenta. A conclusão confirma que há um valor adimensional que varia a cada projétil e suas condições de voo que maximiza a pressão na base. Uma configuração de design com maior área do orifício de saída dos gases ofereceu melhor controle na redução do arrasto, enquanto os casos em que a área de saída dos gases era muito pequena o incremento de injeção de massa resultou no efeito adverso na diminuição do arrasto de base.

A influência do trabalho de Lee e Kim(13) é vista nas referências para as simulações em CFD sobre o arrasto de base, cujo modelo de turbulência  $\kappa - \omega$  é abordado em muitos estudos devido às limitações do sistema  $\kappa - \varepsilon$  em analisar a região próxima à parede. A abordagem sobre a independência de malha é percebida através dos resultados sobre o perfil de velocidades em função do raio do projétil. As condições de contorno serviram como parâmetros norteadores para aplicação na proposta da dissertação.

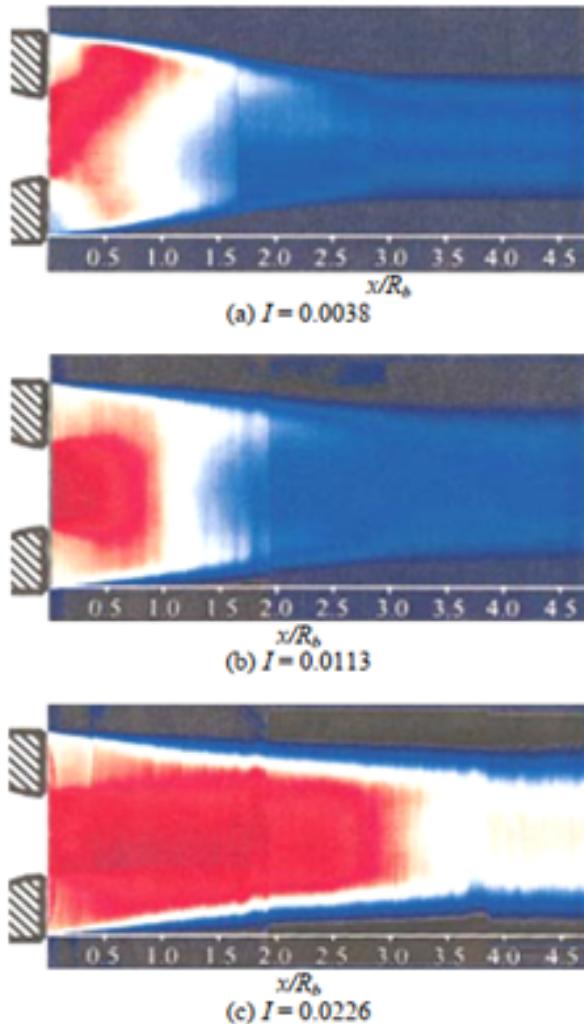


Figura 7 – Visualização experimental (14)

Mahmoud et al.(4) analisou três perfis diferentes para investigar as propriedades do escoamento no entorno da munição em diferentes números de Mach com ângulo de ataque zero. Os três casos foram: com *boattail*, com cavidade na base e com *Base Bleed*. Além do mais, combinações entre eles foram investigadas. A maior redução de arrasto de base foi verificada quando se alinhava as três técnicas juntas. Para este caso, foi constatado uma redução de 60% do coeficiente de arrasto em regime subsônico e algo de 20 a 30 por cento para os regimes transônico e supersônico.

Ainda se tratando do trabalho de Mahmoud et al.(4), percebe-se um detalhamento acerca dos fatores que afetam o arrasto na base do projétil, além do esclarecimento sobre

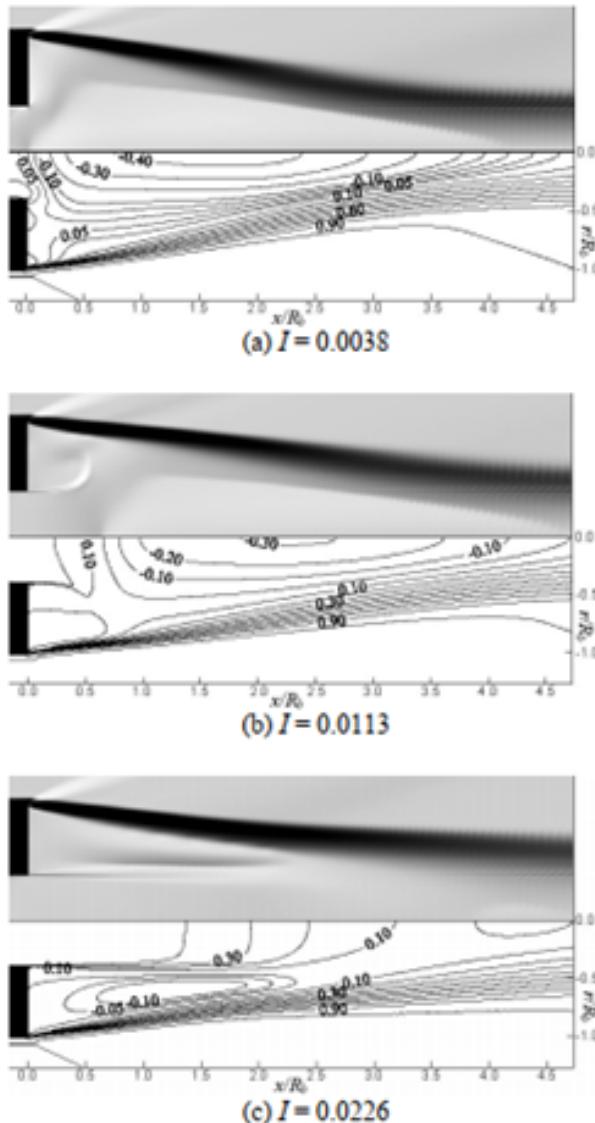


Figura 8 – Imagens computacionais baseadas no gradiente de densidade e contornos de velocidade adimensional em função do fluxo de ar no meio externo. (13)

o tratamento da malha em seu domínio, que pode ser visto na Figura 9. Por fim, o modelo RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) atribuído a esta pesquisa é o Spalart-Allmaras, cujas principais aplicações envolvem pesquisas sobre aerodinâmica.

Torangatti e Basawaraj(15) concentrou as análises nas comparações entre as simulações computacionais por volumes finitos (CFD) e as abordagens semiempíricas para obtenção do arrasto, tais como MCDRAG, NSWCAP e Aero-Prediction. O modelo de turbulência RANS utilizado neste trabalho foi o  $\kappa - \varepsilon$ . Ao contrário da maioria dos estudos sobre CFD para problemas relacionados a este, foi usado o esquema explícito de resolução do caso. A malha computacional desenvolvida utilizando softwares comerciais apresentou uma forma de criar uma região com elementos estruturados.

Sor(16) faz um estudo similar ao anterior (15), embora haja um aprofundamento maior acerca dos efeitos de compressibilidade e das teorias as forças aerodinâmicas. Em

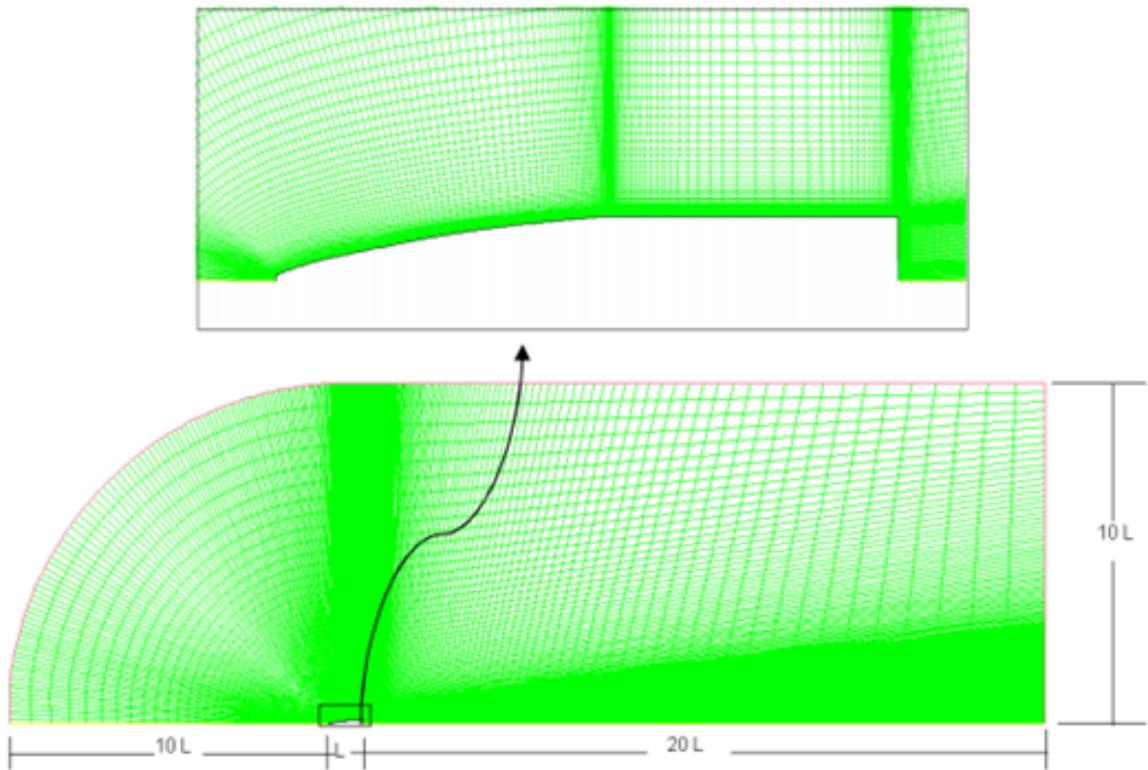


Figura 9 – Modelo computacional para um projétil 155mm. (4)

relação ao CFD, comparou-se os coeficientes de sustentação e de arrasto com possíveis ângulos de ataque, exceto os efeitos relacionados à rotação do projétil no disparo.

Para aprimorar o modelo com 4 graus de liberdade (4-DOF) que é desenvolvido para descrever a trajetória do projétil, estudos mais recentes foram realizados para mitigar as limitações existentes da STANAG 4355 (17, 18, 19). Para isso, foi necessário comparar o modelo 4-DOF com o clássico modelo de corpo rígido de 6 graus de liberdade (6-DOF) a partir de 5 ângulos de elevação para ajustar os fatores de forma, tal como descreve a STANAG 4144. O grande benefício do MPMTM é prover resultados ao menor custo computacional possível, o que significa menor tempo para resolver um problema durante uma guerra, onde este fator é crítico (18).

Jelić(7) teve como principal objetivo investigar vários métodos de incremento de alcance e propor soluções ótimas para estender alcance de sistemas de artilharia existentes. Dentre todas as metodologias para estender o alcance, o foco do trabalho foi pesquisar sobre *Base Bleed* e motores com propulsão sólida (SRM). A pesquisa envolveu cálculos teóricos, simulações numéricas e validação através de experimentos, com resultados que confirmaram a viabilidade do conceito.

Xue e Yu(20) desenvolveu simulações numéricas para investigar o arrasto de base e os efeitos causados pela injeção de gases pós-combustão em regime supersônico. Modelos químicos detalhados de combustão de  $H_2 - CO$  foram incorporados dentro do código

computacional produzido em FORTRAN com as equações de Navier-Stokes com a aplicação do modelo RANS SST  $\kappa - \omega$  (21). Por fim, os resultados foram validados a partir de dados experimentais e providenciaram uma melhor compreensão dos benefícios de utilizar a tecnologia *Base Bleed*. O ponto alto deste estudo é permitir aplicar os efeitos da combustão dentro da pesquisa sobre a aerodinâmica do projétil.

Belaidouni, Zivkovic e Samardzic(22) estudou um armamento de calibre 122mm com perfil axissimétrico resolvendo numericamente as equações de governo para os regimes transônico e supersônico com dois modelos diferentes de turbulência por meio de volumes finitos. Ambos os resultados foram comparados com dados de previsões semi-empíricas para os coeficientes aerodinâmicos. Ao contrário dos outros trabalhos, apostou-se numa malha tridimensional para o domínio do trabalho. No desenvolvimento deste projeto a injeção de massa é calculada através das equações correspondentes para a balística interna que serviram aos testes estáticos da geradora de gás. Considerando ângulo de ataque nulo, verificou-se a redução de 12% do arrasto gerado na base da munição. A escolha final do autor pelo modelo de turbulência foi o  $\kappa - \varepsilon$  realizável.

Nicolás-Pérez et al.(23) tratou de abordar diferentes modelos RANS, DES (*Detached eddy Simulation*) e LES (*Large-eddy Simulation*) para estimar o coeficiente de arrasto de corpos delgados com rotação e *Base Bleed* sob regimes transônico e supersônico quase-permanentes (número de Mach entre 0,9 e 1,5). Diferentes malhas foram testadas, além de simular condições com ou sem injeção de massa gasosa na base do projétil, como na Figura 10. Uma observação relevante neste trabalho é do esquema de fluxo ROE-FDS, pois se afirma que este recurso oferece bons resultados em casos com escoamento compressível.

A constatação sobre os resultados foi de que as abordagens RANS e DES obtiveram baixa acurácia em predizer o arrasto quando encararam o problema envolvendo uma camada de gases misturados em alta temperatura com a esteira transônica, ou seja, dificuldade em analisar a eficiência da geradora de gás. Quando inativo, os dois modelos recém citados ofereceram dados relevantes, se comparados aos valores de referência para o projeto em questão. Por fim, acrescentou o fato de que a temperatura dos gases injetados foi muito mais influente do que o peso molecular deles. Dentre os modelos de turbulência aplicados, o que melhor se adaptou aos resultados experimentais foi o caso LES WALE (*Wall Adapting Local Eddy*) (23).

Dali e Jaramaz(1) utilizou simulações CFD para analisar propriedades do arrasto de base em projéteis com BB. Mais de um tipo de grão propelente foi usado. A meta era encontrar um caminho para efetivamente controlar o fluxo na base para reduzir o arrasto na região e otimizar utilizando um software adequado para tal. Os modelos de turbulências aplicados foram o SST  $\kappa - \omega$ , transição  $\kappa - \kappa l - \omega$  e modelo de tensão de Reynolds (RSM). As propriedades da vazão mássica foram adimensionalizadas para melhor compreensão dos resultados. Para cada grão propelente, observou-se um parâmetro ótimo de injeção

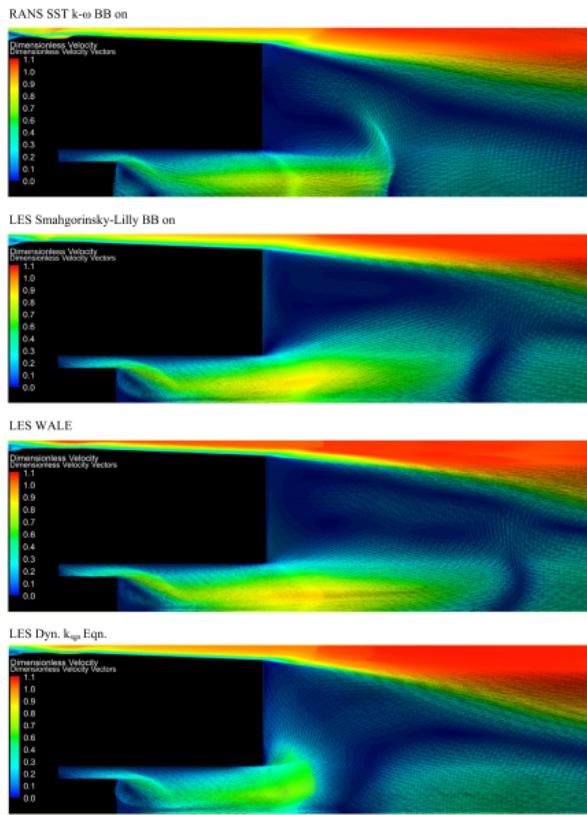


Figura 10 – Campo de velocidade com  $M = 1,5$  em diferentes modelos de turbulência. (23)

e depende da temperatura dos produtos da combustão. Em valores concretos, o arrasto reduziu em torno de 7% para o *Base Bleed* a 300K e mais de 28% para os gases ejetados a 2500K. Este estudo também reafirmou a irrelevância do peso molecular dos produtos da combustão na redução do arrasto.

Dali e Jaramaz(24), por meio de um software proprietário CFD, analisou as duas principais formas de redução de arrasto na base de uma munição 122mm. Primeiro, a área de concentração esteve na otimização da estrutura do *boattail*. Em seguida, pesquisou a influência de alterar a pressão na base do projétil com *Base Bleed*, inclusive com variações de ângulos de saída dos gases em relação ao eixo longitudinal da granada. Comparando os valores obtidos com as referências encontradas em previsões semi-empíricas, as diferenças foram quase imperceptíveis. Acerca da verificação com dados de radares 3D, a hipótese mais viável é do nível de ruído dos sinais, que dificultam as medidas de velocidade durante o voo. O trabalho serviu como uma referência introdutória ao assunto discutido na proposta da dissertação e oferece outras possibilidades de estudo sobre a otimização da aerodinâmica de perfis balísticos.

Há trabalhos no Brasil acerca do mesmo tema, como (25, 8, 26), que exploraram uma abordagem semelhante a esta pesquisa, contudo enfatizando a munição 114mm desenvolvida pela EMGEPRON, uma empresa estatal ligada à Marinha do Brasil. Na questão da simulação de fluidodinâmica computacional, o foco foi num domínio bidimensional e

axissimétrico, com a malha não estruturada, além de não aplicar nenhum modelo de turbulência para resolver o escoamento. O OpenFOAM®, um software *open-source*, foi escolhido para resolver o caso, onde se desenvolveu um modelo viável para predizer uma específica formulação para um propelente a ser utilizado em munições com alcance estendido, tendo em vista que não havia no mercado softwares comerciais para entregar tal serviço.

O único caminho que a Marinha do Brasil até então encontrava era a partir de lançamentos balísticos de granadas como teste, o que era caro e com alto risco de segurança. Logo, através de um domínio bidimensional e axissimétrico, as equações de governo para um escoamento supersônico de uma granada calibre 114mm foram resolvidas. A conclusão desta pesquisa é que a velocidade e a temperatura de injeção dos gases do *Base Bleed* possuem um valor ideal para reduzir o arrasto.

Reddy, Sah e Sharma(27) apresentou simulações numéricas sobre projétils calibre 155mm, seja com ou sem *Base Bleed*, em regime supersônico ( $M = 2,26$ ). Para tal trabalho, todo o desenvolvimento foi realizado de uma ferramenta comercial. O algoritmo aplica o modelo de turbulência SST  $\kappa - \omega$ , variando o ângulo de ataque entre 0 e 10 graus. Usando os recursos experimentais, as simulações foram comparadas e observou-se uma redução do coeficiente de arrasto na ordem de 14% ao considerar o efeito *Base Bleed*.

## 1.2 Motivação

A dinâmica dos fluidos computacional trata-se de uma área da engenharia que vem crescendo ao longo dos últimos anos, com o avanço tecnológico. Existem inúmeros casos na natureza e na engenharia de escoamentos turbulentos com separação de fluxo que merecem ser estudados, que podem ser aprofundados e facilitados através de simulações numéricas computacionais. Nos problemas aerobalísticos, a redução de arrasto é objeto de estudo de muitas pesquisas, pois cria oportunidades em atuar na fronteira do conhecimento sobre desempenho de corpos balísticos, sejam projéteis, mísseis ou foguetes. A utilização da tecnologia *Base Bleed* se apresenta como um desses casos porque permite a fabricação de equipamentos com um princípio de funcionamento relativamente simples, contudo há um desafio em matéria de design do produto e da dinâmica de fluidos existente na base do armamento.

Ao longo das últimas décadas os estudos sobre redução de arrasto na base manejando simulações numéricas computacionais tornaram-se mais frequentes. Primeiramente a abordagem CFD permitiu diminuição de testes experimentais para validação dos produtos, tendo em vista que os testes de tiro são dispendiosos, ainda mais quando se adota diferentes configurações de granadas para o disparo (com ou sem BB; com ou sem *boattail*, fora os diferentes formatos). Após esses fatos, este projeto pretende aumentar a cadeia de

pesquisas relacionadas com este tema no Brasil, além dos já estabelecidos (25, 8, 26). Inclui-se ao fato de que no mercado não há modelos ou mesmo serviços que permitam estudar os efeitos da combustão do *Base Bleed* de acordo com a composição química de seus propelentes.

Os fenômenos de turbulência presentes no escoamento no entorno do projétil, sobretudo à jusante de sua base, serão estudados e analisados com duas abordagens RANS para descrever a turbulência do ar, principal fluido de escoamento da granada. Ao escolher os modelos RANS, espera-se obter resultados com maior agilidade e razoável confiabilidade, motivo que é amplamente mais usado na indústria ao ser comparado com modelos DES, LES ou DNS. Todavia, há de se olhar para os valores de referência ou de dados experimentais, se houver. Incorpora-se os resultados obtidos com os códigos desenvolvidos para a predição de trajetória para ofertar uma solução mais acessível se comparado ao PRODAS®, principal referência do setor aeroespacial para resolução deste tipo de problema.

Sendo assim, o presente trabalho contribuirá para a comunidade da dinâmica dos fluidos computacional tanto em relação ao estudo de metodologias para redução de arrasto na base em perfis aerodinâmicos quanto para o estudo da formulação da geradora de gás e os possíveis propelentes a serem utilizados. Há também uma contribuição para o estudo de dinâmica de corpos rígidos para oferecer soluções mais fidedignas e práticas para aplicações das normas técnicas que envolvem as tecnologias militares, como ocorrem ao fazer uso dos acordos de padronização (STANAG) para produção de armamentos com respostas mais ágeis em situações reais de combate. Com o avanço da tecnologia computacional, a mitigação dos riscos associados aos materiais aplicados à produção do BB está cada vez maior.

### 1.3 Objetivo de Estudo

O presente trabalho tem como objetivo o estudo sobre a aerodinâmica de um projétil de calibre 155mm, principalmente sobre a influência da força de arrasto durante a trajetória balística. Nesta granada, será verificado o comportamento do arrasto total e na região da base, comparando os casos inerte (sem *Base Bleed*) e o ativo (com *Base Bleed*). Alguns parâmetros serão modificados para descobrir a melhor configuração possível do sistema BB, ou seja, qual situação que permite a maior redução do arrasto e como isso influencia a trajetória.

Em se tratando da fluidodinâmica computacional, as equações de governo consideram as seguintes propriedades: compressível, pois o regime de velocidades ( $0,4 \leq M \leq 3,0$ ) apresenta variações na densidade do fluido do meio externo; permanente, logo as propriedades do fluido não variam em função do tempo; axissimétrico, porque o projétil possui um

formato perfeitamente simétrico ao longo de um único eixo, o que é vantajoso para a análise CFD, pois essa aproximação é considerada uma técnica poderosa para reduzir o custo computacional (25). Enquanto isso, as equações de estado consideraram o ar como gás ideal, assim como o gás ejetado pelo *Base Bleed* e, especialmente a viscosidade dinâmica do fluido, que aplicou a Lei de Sutherland como técnica para registrar as variações do fluido de acordo com o gradiente de temperatura.

Acerca dos modelos de turbulência, o presente trabalho utilizou duas abordagens RANS. O escoamento turbulento é caracterizado por ter um comportamento difusivo, tridimensional e transiente (28). A turbulência pode sofrer flutuações nas quais é possível aproximar de um escoamento estacionário, desde que se considere um intervalo de tempo adequado para a análise (29, 30). Em geral, a turbulência envolve grandes escalas temporais e espaciais, o que exige alto esforço computacional para obter resultados com qualidade através de simulações DNS. Por essa razão, os modelos RANS são considerados as opções mais práticas para predição numérica e são as mais empregadas pela indústria.

Dentre os modelos RANS existentes, foram escolhidos o Spalart-Allmaras (31) e o SST  $\kappa - \omega$  (*Shear-Stress Transport*  $\kappa - \omega$ ) (21, 32). Cada modelo possui vantagens e desvantagens a serem exploradas, principalmente em problemas aerodinâmicos. A modelagem que oferecer os resultados mais confiáveis terão seus valores acoplados ao simulador desenvolvido neste projeto, assim como os coeficientes extraídos do PRODAS® para predizer o voo da granada.

Para determinar a influência na dinâmica de voo do projétil, um código computacional foi desenvolvido em MATLAB® para comparar com o PRODAS®, fazendo uso das mesmas condições de entrada necessárias para calcular o trajeto com 4 graus de liberdade. Atingindo os objetivos, atesta-se que o software autoral está dentro do que é estabelecido pela STANAG 4355. Entretanto, a validação inicial não considera o uso da tecnologia BB, portanto é de suma importância verificar a influência da injeção de gases na base do projétil em função do alcance e do apogeu da munição.

## 1.4 Organização do Trabalho

O segundo capítulo descreve uma revisão bibliográfica sobre o fenômeno físico da compressibilidade e das equações de governo que regem o fluido. A seguir, o Capítulo 3 introduz os métodos numéricos e as possíveis abordagens de discretização para as equações de transporte, com ênfase no Método de Volumes Finitos (MVF). No Capítulo 4, a turbulência é apresentada como tópico de grande interesse devido aos altos números de Reynolds presentes no escoamento em torno da munição 155mm. Em especial, será tratado com mais afínco os modelos de turbulência baseados nas médias de Reynolds (RANS) e as condições necessárias para o fechamento do sistema de equações de transporte resultante.

Com estes tópicos, é possível analisar e compreender os efeitos aerodinâmicos a partir das simulações CFD.

Os modelos RANS selecionados para analisar o escoamento, são Spalart-Allmaras (31) e SST  $\kappa-\omega$  (21, 33, 32). Para a análise de trajetória, bem como a teoria necessária para implementação do modelo ponto-material modificado (10), foi desenvolvido o Capítulo 5. A descrição do estudo proposto, explicando detalhadamente as condições de contorno para as simulações CFD e os valores iniciais para a predição de voo da munição 155mm, pode ser encontrada no Capítulo 6.

O Capítulo 7 finalmente apresenta e analisa os resultados obtidos com a variação de 3 parâmetros: o diâmetro de saída, a vazão mássica e a temperatura do propelente expelido pelo sistema *Base Bleed*, referente ao escoamento compressível a jusante do projétil. Os principais resultados contidos neste capítulo são os coeficientes de arrasto sem ângulo de ataque em função do número de Mach; os contornos de pressão e velocidade, além das linhas de corrente para demonstrar a formação da recirculação anular e do deslocamento da região de recirculação primária dentro da esteira turbulenta. A conclusão do trabalho encontra-se no Capítulo 8, resumindo os pontos principais, e discutindo os principais problemas encontrados e recomendações para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

### 2.1 Escoamentos Compressíveis

Para entender o conceito de compressibilidade, Anderson(34) afirma que escoamento compressível é definido rotineiramente como regime de densidade variável. Essa propriedade restringe-se aos fluidos. A variação infinitesimal de densidade ( $d\rho$ ) pode ser vista na equação 2.1.

$$d\rho = \rho\beta dp \quad (2.1)$$

Sob regime de altas velocidades, o gradiente de pressão ( $dp$ ) costuma ser elevado, donde se conclui que a variação da densidade é elevada, portanto não pode ser desprezada. Como os gases possuem alta compressibilidade ( $\beta$ ), os valores moderados a altos de variação da pressão resultam em consideráveis mudanças de densidade, tanto que esses fluidos são comumente tratados como compressíveis.

Os fundamentos dos escoamentos compressíveis são vastos para a engenharia, muito aplicados em problemas de aerodinâmica e propulsão, como é o caso do presente trabalho. Para entender os regimes de voo nos quais o projétil é submetido, deve-se considerar os três principais campos de velocidades do fluxo de ar externo: subsônico, transônico e supersônico. Todos eles dependem da propriedade termodinâmica do gás conhecida como velocidade do som ao escoamento livre ( $a_\infty$ ), cuja relação com a velocidade do escoamento livre ( $U_\infty$ ) é chamada de Número de Mach ( $M$ ), como visto na equação 2.2

$$M = \frac{U_\infty}{a_\infty} \quad (2.2)$$

Para os casos em que o  $M < 1,0$  para todo o escoamento presente, define-se o regime como subsônico. As propriedades do fluido variam continuamente e adiciona ao fato de que para se ter certeza de que o fluido está completamente inserido nestas condições se  $M \leq 0,8$  (34).

O regime transônico  $0,8 \leq M \leq 1,2$  é uma situação particular do caso anterior, porque há a formação de uma região supersônica em alguns locais. Isto significa que há energia suficiente para se desencadear ondas de choque ao longo da superfície que podem alterar consideravelmente as propriedades do fluido. A Figura 11 apresenta um súbito acréscimo no coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) na faixa de  $0,8 \leq M \leq 1,2$  em diferentes modelagens de turbulência RANS para munição 122 mm com *Base Bleed* (24).

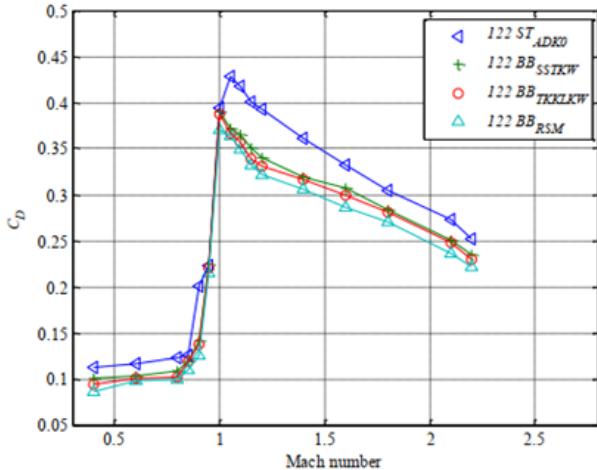


Figura 11 – Coeficiente de Arrasto versus Mach para o projétil com *Base Bleed* pelas simulações CFD usando os modelos SST  $\kappa - \omega$ , Transição  $\kappa - \kappa l - \kappa - \omega$  e RSM e comparando com resultados semi-empíricos (24).

O regime supersônico é válido se ao longo de todo o escoamento  $M \geq 1,0$ . A onda de choque existente redireciona completamente o escoamento após esta região e o fluxo do fluido só se altera quando há o encontro com o corpo. No caso de gases, os escoamentos incompressíveis são casos especiais do regime subsônico e considerados apenas quando todo o fluxo se encontra em  $M \leq 0,3$ .

Há outras formas de classificar os escoamentos, por exemplo, a partir da viscosidade. Onde os efeitos da viscosidade, condução térmica e difusividade são relevantes podemos chamar de escoamentos viscosos. A importância deste tema é considerável, tendo em vista que afeta os modelos de turbulência utilizados para compreender o arrasto de base e as técnicas para reduzi-lo. Em todos os regimes de velocidade, o ar é analisado como um meio contínuo (*hipótese do continuum*), isto é, as distâncias médias entre as moléculas do gás são infinitamente menores do que o comprimento característico do escoamento.

## 2.2 Equações de Governo

Neste presente trabalho, as equações de Navier-Stokes são resolvidas para um fluido compressível e em regime estacionário, logo as propriedades não variam em função do tempo. Elas servem como pré-requisito para compreender o comportamento do fluido. Em todos os casos, as formulações são obtidas a partir do equilíbrio sobre um volume de controle. Para um fluido newtoniano atuando como um gás ideal, as equações de Navier-Stokes são dadas a seguir.

### 2.2.1 Conservação de massa

O princípio da conservação de massa indica que, na ausência de fontes e sumidouros, a região conservará a massa a nível local. O resultado disso é explicado na equação 2.3 (35, 36).

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i) = 0 \quad (2.3)$$

A equação acima considera o efeito da compressibilidade, fenômeno presente no problema a ser estudado nesta pesquisa.

### 2.2.2 Conservação do momento linear

O princípio da conservação do momento linear indica que, na ausência de forças externas atuando sobre um corpo, o corpo retém seu momento, ou seja, o produto da massa pelo vetor velocidade. Em suma, a conservação de momento linear só é modificada na presença de uma força líquida, causada por forças de corpo e de superfície. Na forma conservativa, a conservação do momento linear é dada pela equação 2.4 (35, 36)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

Considerando que o fluido é newtoniano, o tensor das tensões viscosas ( $t_{ji}$ ) é uma função linear da taxa de deformação, demonstrado pela equação 2.5:

$$t_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.5)$$

Onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica e  $\zeta$  é o coeficiente de dilatação da viscosidade para um gás monoatômico ( $\zeta = -(2/3)\mu$ ) e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

### 2.2.3 Conservação de energia

A conservação de energia é sustentada pela primeira lei da Termodinâmica, donde se conclui que a energia não é criada, tampouco destruída durante um processo; apenas se converte de forma (ex: energia química se transformando em energia cinética). Considerando um sistema isolado, a energia existente no processo é constante. Assumindo que o fluido é um gás ideal, a conservação de energia para escoamento compressível é definida pela equação 2.6 (35, 36).

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho u_j \left( h + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i t_{ij}) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

Para facilitar o cálculo da equação de energia, é necessário definir uma equação de estado (36). Assumindo o fluido de trabalho como um gás ideal, a lei dos gases perfeitos pode ser aplicada para correlacionar pressão, densidade e temperatura através da equação 2.7

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (2.7)$$

cujo  $R$ , presente na equação 2.7, é a constante específica do gás. O termo  $e$  presente na equação 2.6 é a energia interna específica e  $h = e + p/\rho$  é a entalpia específica. O vetor de fluxo de calor é definido pela Lei de Fourier, então a equação 2.8 fica

$$q_j = -c_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.8)$$

sendo  $c_T$  a condutividade térmica do fluido; por aplicar a lei dos gases perfeitos, tanto a energia interna específica  $e$  e a entalpia específica  $h$  são definidas por

$$e = c_v T \quad e \quad h = c_p T \quad (2.9)$$

onde  $c_v$  e  $c_p$  são os calores específicos para volume e pressão constantes, respectivamente. Consequentemente, a lei de Fourier 2.8 pode ser reescrita por

$$q_j = -c_T \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\mu}{Pr_L} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (2.10)$$

o termo  $Pr_L$  é o número de Prandtl laminar, definido por

$$Pr_L = \frac{c_p \mu}{c_T} \quad (2.11)$$

### 3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Em todo caso de aplicação de um método numérico, deve-se iniciar pela modelagem matemática do problema. Desta forma, comprehende-se como se encontra uma possível solução a partir das considerações necessárias para o problema. Após modelar o problema, faz-se necessário o uso de técnicas de discretização espaciais e temporais para transformar as equações diferenciais em equações algébricas.

As equações de Navier-Stokes podem ser escritas em variadas formas, a depender dos sistemas de coordenadas. Neste presente trabalho, as coordenadas cartesianas e ortogonais serão exploradas. Por necessidade da discretização, há alguns tipos de malhas que podem ser desenvolvidas:

1. Estruturadas: normalmente são produzidas através de uma mesma família de elementos (ex: formato quadrilátero numa malha 2D). A sua maior restrição é que normalmente se aplica estas malhas em geometria bastante simplificadas. Em malhas 3D, os erros se propagam em razão da dificuldade de controlar a distribuição de pontos;
2. Estruturadas em blocos: há subdivisões do domínio para facilitar o refino somente onde é necessário. Contudo, há de se considerar os tratamentos nas interfaces dos subdomínios para manter a boa qualidade da malha. Em geometrias mais complexas, esta técnica costuma ter maior aplicação quando se deseja manter uma só família de elementos;
3. Não-estruturadas: esse tipo de malha é a mais flexível para qualquer tipo de geometria. Na prática, os elementos podem ter várias formas, seja em malha 2D ou 3D. Para aplicações industriais, as malhas não-estruturadas são mais aplicadas, mesmo que haja uma perda de eficiência computacional, se comparadas com as malhas estruturadas.

Sobre os métodos de solução, depende do problema. Seja um problema estacionário ou transiente, os problemas são altamente não-lineares, logo exige um processo iterativo para resolver. Em regra, o tipo de malha e o número de nós envolvidos é o que define a escolha pelo método mais eficiente. Por último, considera-se o critério de convergência, pois é com eles que se analisa as iterações para o método de solução escolhido.

As mais importantes propriedades são consideradas a partir do que é proposto por Ferziger, Perić e Street(37):

1. Consistência: para o método ser considerado *consistente*, o valor do erro de truncamento causado pela diferença entre a equação exata e a algébrica deve ser igual a zero.

Para uma simulação ter consistência, é preciso se atentar com erros na mesma ordem de precisão, principalmente termos convectivos para altos números de Reynolds ou para os termos difusivos quando se tem baixos números de Reynolds. Contudo, essa propriedade não garante que a solução das equações discretas serão as soluções exatas no limite do intervalo de tempo. Para isso ocorrer, a solução deve ser *estável*.

2. Estabilidade: uma solução numérica é *estável* quando os erros não se sobressaem ao longo das iterações e garante que a solução seja limitada na mesma ordem que a solução exata. Em suma, um método estável é aquele que não diverge.
3. Convergência: um método é dito convergente quando a solução das equações discretas tendem à solução exata da equação diferencial quando o refino de malha reduz o espaçamento dos elementos a zero. Como é difícil verificar matematicamente se a solução convergiu, testes experimentais ou valores de referências são comparados com o que se obteve numericamente. Teste de independência de malha também costumam ser feitos para verificar se a solução também é estável e consistente.
4. Conservação: como as equações a serem resolvidas são leis de conservação, para um volume de controle uma quantidade especificada saindo deste em regime estacionário e ausente de agentes externos significa que é igual ao valor de entrada neste mesmo volume.
5. Limitado: as propriedades devem satisfazer suas próprias restrições. Propriedades escalares não-negativas (ex: densidade) devem resultar em valores positivos. Sem termos-fonte, propriedades como temperatura precisam se enquadrar entre os valores das condições de contorno.
6. Realizável: o objetivo desta propriedade é garantir que as soluções sejam realistas, principalmente quando há fenômenos complexos, como a turbulência.;
7. Precisão: como os métodos numéricos apenas oferecem soluções aproximadas, logo possui erros que se encaixam em um desses três perfis:
  - a) erros de modelo: diferença entre o escoamento simulado e a solução exata do modelo matemático. No caso de escoamentos turbulentos, o modelo pode ter assumido erros durante a derivação das equações de transporte. Pode acontecer quando há uma simplificação da geometria do domínio ou da condição de contorno. Por esta razão, é muito relevante ter acesso a valores de referência, seja de testes experimentais ou de soluções diretas de turbulência, etc.
  - b) erros de discretização: diferença entre a solução exata das equações de conservação e a solução algébrica do sistema de equações obtida pela discretização dessas formulações. Com refino de malha, espera-se que esses erros diminuam.

- c) erros de iteração: diferença entre a solução exata da solução do sistema algébrico e do processo iterativo. São também chamados de *erros de convergência*.

Como pré-requisitos para transformar as equações analíticas em algébricas, as técnicas de discretização mais aplicadas aos problemas de dinâmicas dos fluidos computacional são descritas a seguir (37).

1. Diferenças Finitas: é o método mais antigo e simples para resolver equações diferenciais parciais (EDP). O ponto inicial é colocar as equações de conservação na forma diferencial, sendo o domínio da solução uma malha discretizada, onde cada nó representa os valores aproximados das funções discretas obtidas através das EDP. É mais aplicado em geometrias simples, onde a malha é estruturada. A maior desvantagem é que a conservação das propriedades não é garantida, exceto se houve um tratamento específico.
2. Volumes Finitos: neste método a malha se divide em um número finito de volumes de controle (VC) de tal forma que as propriedades do fluido são calculadas para a superfície do VC através de interpolações nos nós. Esta técnica pode ser aplicada em qualquer tipo de malha, inclusive em geometrias complexas. Esta abordagem de discretização é conservativa por natureza, sendo uma razão pela qual as análises em CFD a tornam mais usual. Sua principal desvantagem é aplicar métodos acima de segunda ordem em malhas 3D, pois exige interpolação, diferenciação e integração.
3. Elementos Finitos: apesar de haver uma similaridade com o método de volumes finitos, suas equações são multiplicadas por funções peso antes de serem integradas num domínio. No casos mais simples, a função é aproximada por uma função linear. O resultado desta técnica é gerar um sistema de equações algébricas não-lineares. É ótimo para lidar com geometrias arbitrárias. Sua principal deficiência está na resolução de malhas não-estruturadas, pois a construção de matrizes do sistema não-linear não se forma a permitir aplicações de técnicas para solucionar.

### 3.1 Método dos Volumes Finitos

Supondo que  $\phi$  seja uma variável referente a uma propriedade do fluido, o método de volumes finitos (MVF) se utiliza da forma integral da equação de transporte, como é apresentado na equação 3.1.

$$\int_{\forall} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\forall + \int_A \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\forall} S_\phi d\forall \quad (3.1)$$

Os dois termos à esquerda se referem ao termo transiente por unidade de volume e o termo convectivo, respectivamente. Enquanto isso, do outro lado da equação tem-se,

seguindo da esquerda para a direita, o termo difusivo e o termo-fonte. As notações em negrito são vetores. O domínio da solução é subdividido em vários volumes de controle dentro de uma malha. Acerca dos sistemas de coordenadas, este trabalho utilizará o sistema cartesiano. A abordagem de volumes finitos aplicará os resultados das integrações das equações de conservação para o centro dos volumes de controle, embora haja outras variantes. O somatório dos resultados será o valor global das equações e é por isso que o MVF se apresenta como uma técnica vantajosa para simulações CFD.

A discretização geral das equações de conservação 3.1 se resume a equação 3.2:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \nabla \phi + \sum_f^{N_{faces}} \rho_f \phi_f \mathbf{u}_f \mathbf{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\phi \nabla \phi_f \mathbf{A}_f + S_\phi \nabla \forall \quad (3.2)$$

onde  $N_{faces}$  é igual ao número de faces envolvendo a célula;  $\phi_f$ , o valor de  $\phi$  convectada através da face  $f$ ;  $\rho_f \mathbf{u}_f \mathbf{A}_f$  é o fluxo de massa através da face;  $\mathbf{A}_f$ , o vetor da área da face;  $\nabla \phi_f$  equivale ao gradiente de  $\phi$  na face  $f$  e  $\nabla \forall$  é o volume de controle arbitrário. A forma linearizada da equação 3.2 é apresentada em 3.3:

$$a_p \phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.3)$$

onde o subscrito  $nb$  se refere às células vizinhas, enquanto que  $a_p$  e  $a_{nb}$  são coeficientes linearizados de  $\phi$  e  $\phi_{nb}$ . O número de vizinhos depende da topologia da malha, mas o resultado é um sistema de equações com matriz de coeficientes esparsos.

### 3.1.1 Algoritmos de resolução de escoamentos

Há dois tipos principais de algoritmos para resolver as equações de transporte de continuidade, momentum e energia:

1. *Pressure-based*: costumam atender os casos de baixas velocidades e em regime incompressível.
2. *Density-based*: costumam ser usados em escoamentos compressíveis a altas velocidades.

Apesar de suas aplicações usuais, os métodos já foram reformulados para atender uma variedade de condições além do que foram propostos a fazer. Em ambos os casos, o campo de velocidade é obtido pela equação de momentum, enquanto que no algoritmo *density-based* resolve a densidade pela conservação de massa e o campo de pressão a partir de uma equação de estado. Por outro lado, na abordagem *pressure-based*, o campo de pressão é resolvido por uma equação para a pressão ou o ajuste desta propriedade que é obtida pela manipulação das equações de continuidade e momentum.

Seja qual for o método, serão resolvidas as equações de transporte para a continuidade e momentum, assim como para a energia, turbulência e espécies químicas, se houver necessidade. A maneira que as equações de governo são linearizadas podem resultar numa forma “implícita” ou “explícita”. Tal explicação é demonstrada a seguir:

1. Implícita: para uma dada variável, o valor a descobrir em cada volume de controle  $\forall$  é computado usando uma relação que inclui os valores existentes e desconhecidos das células vizinhas. Portanto, cada valor desejado aparecerá em mais de uma equação algébrica, onde essas equações devem ser resolvidas simultaneamente para obter os valores desconhecidos.
2. Explícita: para uma dada variável, o valor a descobrir lume de controle  $\forall$  é computado usando uma relação que inclui só os valores existentes das células vizinhas. Portanto, cada valor desejado aparecerá em apenas uma equação algébrica, onde essas equações são resolvidas sequencialmente para obter os valores desconhecidos.

### 3.1.1.1 Algoritmo *Pressure-Based*

O campo de velocidade é calculado após resolver uma equação para o campo de pressão (ou o ajuste da pressão). Essa equação é derivada das conservações de massa e momentum, onde o campo de velocidade também satisfaz a continuidade (38). Por ser um sistema altamente não-linear e acoplado, necessita-se de um processo iterativo até atingir a convergência da solução. Há duas possibilidades de algoritmos *pressure-based*, como mostra a Figura 12.

Ambos os casos tem prós e contras, quando analisadas as convergências das soluções e o uso de memória computacional. A Tabela 1 resume as diferenças entre os tipos de algoritmos.

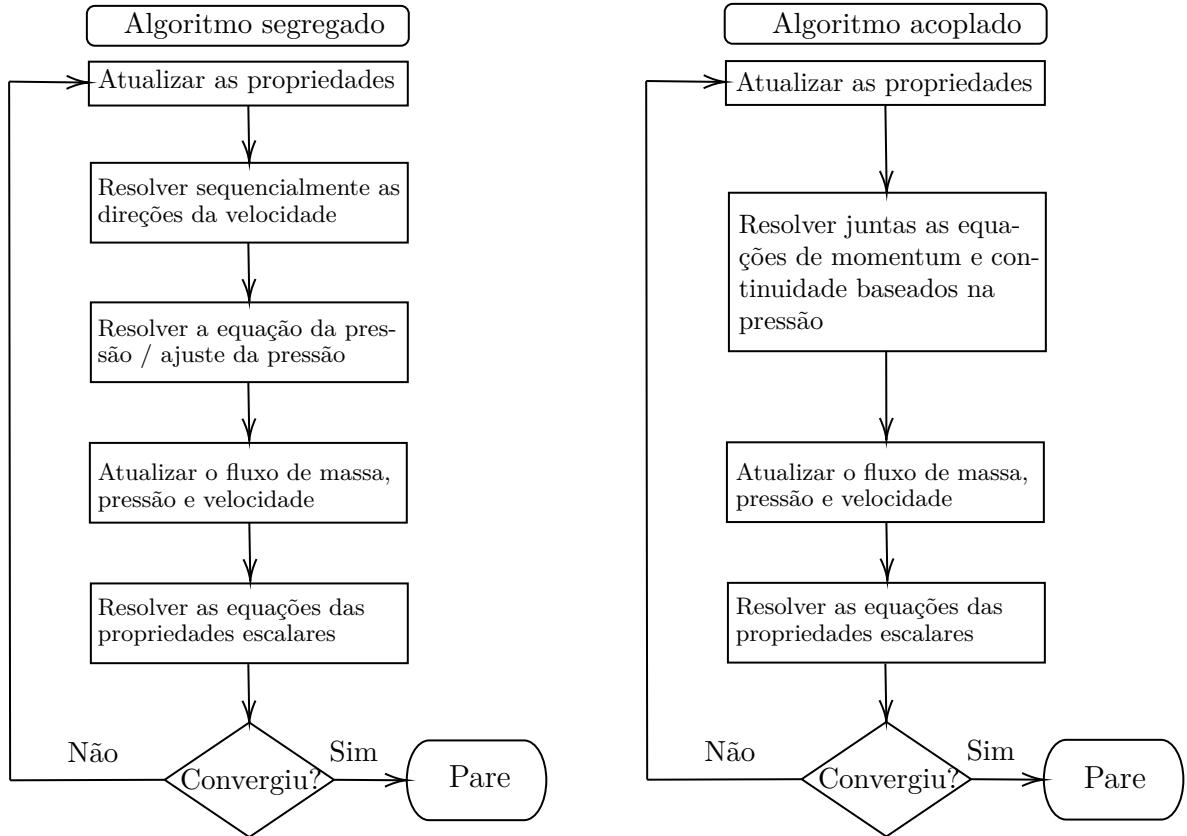
Tabela 1 – Comparações entre os algoritmos segregados e acoplados.

Tipo de algoritmo	Convergência da solução	Uso de memória
Segregado	Baixo	Baixo
Acoplado	Baixo	Alto

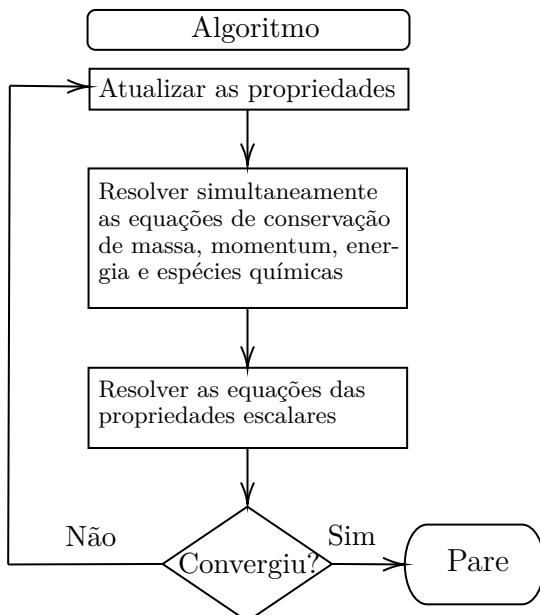
As comparações da Tabela 1 são baseadas nos desempenhos dos próprios algoritmos.

### 3.1.1.2 Algoritmo *Density-Based*

Esse algoritmo busca resolver as equações de transporte para a conservação da massa, momentum e energia simultaneamente (40, 41, 42). As equações adicionais de turbulência e espécies químicas (se houver) são resolvidas sequencialmente. Assim como o método *pressure-based*, há a necessidade de se resolver iterativamente até atingir a

Figura 12 – Fluxogramas para algoritmo *pressure-based* segregado e acoplado (39).

convergência da solução. Na Figura 13 é apresentado o fluxograma para a compreensão do método (39).

Figura 13 – Fluxograma para algoritmo *density-based* (39).

### 3.1.2 Discretização espacial

Assumindo que se trata de um problema em regime estacionário, o termo  $\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} \nabla \phi$  pode ser desconsiderado da equação 3.1, resultando na equação 3.4:

$$\int_A \rho\phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_V S_\phi dV \quad (3.4)$$

Os valores discretos de  $\phi$  são obtidos no centros dos volumes de controle, mas os valores referentes às faces de  $\phi$  são interpolados através dos valores centrais dos volumes de controle (28). Os seguintes esquemas de discretização espacial serão tratados: diferenças centrais; *upwind* de 1<sup>a</sup> ordem e 2<sup>a</sup> ordem e QUICK.

#### 3.1.2.1 Esquema de diferenças centrais

O valor da variável na face do volume de controle  $\phi_f$  é calculado da seguinte forma no esquema de diferenças centrais (CDS), conforme equação 3.5 (28).

$$\phi_f = \frac{1}{2} (\phi_0 + \phi_1) + \frac{1}{2} (\nabla \phi_0 \cdot \vec{r}_0 + \nabla \phi_1 \cdot \vec{r}_1) \quad (3.5)$$

sendo 0 e 1 os índices das células representadas na Figura 14, sendo  $\vec{r}$  o vetor deslocamento que liga o centro da célula a montante à face do volume de controle. A Figura 14 ilustra a discretização de uma célula triangular bidimensional como exemplo de volume de controle (39).

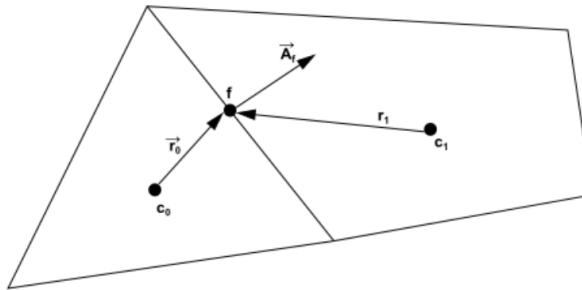


Figura 14 – Volume de controle usado para ilustrar a discretização da equação do transporte escalar (39).

Portanto, esse esquema não reconhece a direção do escoamento ou a influência da convecção em relação à difusão (43). Ainda se tratando da mesma referência, o CDS não é um modelo mais indicado para resolver casos genéricos e, por esta razão, os esquemas *upwind* de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordem, além do QUICK serão apresentados.

#### 3.1.2.2 Esquema *upwind* de primeira ordem

Considerando que o esquema anterior tem uma dificuldade de identificar a direção do escoamento, o esquema *upwind* de 1<sup>a</sup> ordem (UDS-1) determina o valor de  $\phi_f$  convectada

na face  $f$  a partir do valor  $\phi_{up}$  a montante. A equação 3.6 apresenta a aproximação inicial para as propriedades de interesse do fluido (28).

$$\phi_f = \phi_{up} \quad (3.6)$$

Versteeg e Malalasekera(43) explica que a simplicidade deste método é o que fez ser tão aplicado em simulações CFD até os dias atuais. O seu maior entrave está na produção de um erro que aparenta um comportamento difusivo e por essa razão se chama de "falsa difusão". Esse fenômeno se agrava em casos que o número de Reynolds é elevado, logo não costuma ser aplicado em problemas com necessidade de alta precisão.

### 3.1.2.3 Esquema *upwind* de segunda ordem

Quando uma precisão de segunda ordem é requerida, apela-se à interpolação linear com mais de um elemento adjacente, onde a precisão de ordem elevada é atingida a partir da expansão por série de Taylor da solução no centroide do volume de controle (28). O esquema *upwind* de 2<sup>a</sup> ordem (UDS-2) envolve dois valores a montante, resultando na seguinte equação 3.7 para  $\phi_f$ :

$$\phi_f = \phi_{c0} + (\nabla\phi \cdot \vec{r})_{up} \quad (3.7)$$

Considere  $\phi_{c0}$  o valor de  $\phi$  na célula central. A equação 3.7 assume que o escoamento está na direção positiva, já que a face analisada está a leste, conforme o subscrito *e* surge na variável  $\phi$ . Na direção negativa, o gradiente da função ainda terá a mesma magnitude, porém com sentido inverso. Para definir o gradiente de  $\phi$ ,  $\nabla\phi$ , assume-se neste projeto que foi usado o método dos mínimos quadrados (44), cuja proposta é admitir que a solução varia linearmente. Conforme demonstrado na equação 3.8, espera-se que calcule os valores para as células  $c0$  e  $ci$  (ver Figura 15)

$$(\nabla\phi)_{c0} \cdot \Delta r_i = \phi_{ci} - \phi_{c0} \quad (3.8)$$

### 3.1.2.4 Esquema QUICK

O esquema QUICK (45) se baseia em uma média ponderada entre os esquemas *upwind* de 2<sup>a</sup> ordem (UDS-2) e diferenças centradas (CDS). Para um problema em 1-D, temos a Figura 16 para explicar a lógica por trás dessa interpolação da seguinte forma (vide equação 3.9):

$$\phi_e = \theta \left[ \frac{S_d}{S_c + S_d} \phi_P + \frac{S_c}{S_c + S_d} \phi_E \right] + (1 - \theta) \left[ \frac{S_u + 2S_c}{S_u + S_c} \phi_P - \frac{S_c}{S_c + S_u} \phi_W \right] \quad (3.9)$$

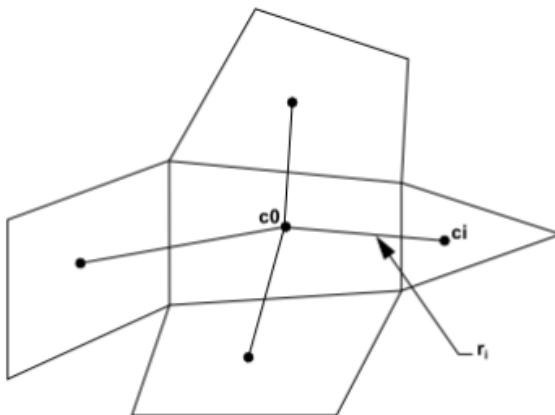


Figura 15 – Avaliação do gradiente do volume de controle (39).

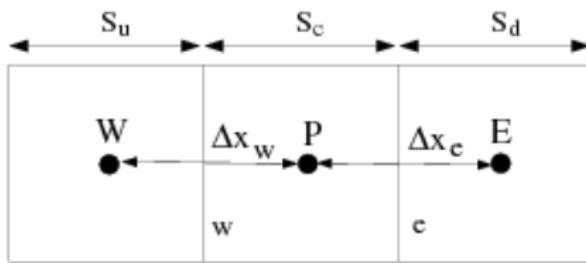


Figura 16 – Esquema QUICK para um escoamento unidimensional (39).

A equação acima resulta no esquema CDS quando  $\theta = 1$  e no UDS-2 quando  $\theta = 0$ . A versão tradicional do QUICK (46) considera  $\theta = 1/8$ . Comparado aos esquemas *upwind* de 1<sup>a</sup> ordem e diferenças centrais, é um modelo mais eficiente. A falsa difusão é baixa, mas deve-se levar em consideração de desvios nos resultados quando a geometria do problema for complexa (46).

### 3.1.3 Relaxação dos termos de alta ordem

A proposta da relaxação é melhorar a inicialização e o comportamento da solução geral das simulações do escoamento quando discretizações espaciais de ordem superior são utilizadas (acima de 1<sup>a</sup> ordem) (39). A sub-relaxação desses termos segue a equação 3.10 para qualquer propriedade  $\phi$ :

$$\phi_{novo} = \phi_{velho} + f(\phi_{novo} - \phi_{velho}) \quad (3.10)$$

Considera-se como padrão  $f = 0,25$  em regime estacionário, foco deste presente trabalho.

### 3.1.4 Método Multigrid

O método *Multigrid* (47) é usado no software desta pesquisa porque acelera a convergência através de uma sequência de correções em uma série de níveis de refino da malha. É um método bom para remover erros locais (alta frequência) e menos efetivo em erros globais (baixa frequência). Logo, o aumento no número de volumes de controle diminui o desempenho da técnica.

O *Multigrid* é bastante eficiente quando se trata do esquema *density-based* para remover os erros de alta frequência. Ele trabalha com uma sequência de malhas  $M_1$  até  $M_n$ , cada vez mais grossas, onde o erro pode ser suavizado. Considerando um sistema linear do seguinte tipo:

$$N_{ref}\phi + c = d \quad (3.11)$$

Sendo  $d$  um erro associado à solução aproximada  $\phi$ . Assumindo que  $\phi_{ex} = \phi + \Psi$ , onde  $\phi_{ex}$  seria a solução exata e  $\Psi$  um fator de correção do sistema linear acima 3.11:

$$N_{ref}(\phi + \Psi) + b = 0 \quad (3.12a)$$

$$\Psi + (N_{ref}\phi + b) = 0 \quad (3.12b)$$

$$N_{ref}\Psi + d = 0 \quad (3.12c)$$

A equação 3.12 serve para corrigir o operador original de nível de refino de malha  $N_{ref}$  e o defeito  $d$ . Em cada etapa o valor de  $\Psi$  será amortecido pelo esquema de relaxação e cada vez mais efetivo na próxima malha mais grosseira.

### 3.1.5 Critério de Convergência

O resíduo normalizado  $R^\phi$  da equação de transporte discretizada é calculado a partir da equação 3.3 (28):

$$R^\phi = \frac{\sum_{células} [\sum_{nb} a_{nb}\phi_{nb} + b - a_P\phi_P]}{\sum_{células} [a_P\phi_P]} \quad (3.13)$$

Assume-se que a solução está convergida quando  $R^\phi < 10^{-6}$ .

## 4 MODELAGEM DE TURBULÊNCIA

No âmbito da modelagem de turbulência computacional, existem três principais campos primários (28):

1. RANS – Equações Médias de Reynolds para Navier-Stokes (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*): as equações dessa técnica são obtidas por meio de um conjunto de médias das equações de continuidade e Navier-Stokes. Na modelagem RANS, os valores instantâneos das grandezas de interesse são substituídos pela soma de seus valores médios com as suas flutuações, sendo feita uma avaliação das médias temporais das equações de governo.
2. LES – Simulações em Grandes Escalas (*Large Eddy Simulation*): trata-se da técnica intermediária em relação a custo e tempo computacional, ao analisar as três principais técnicas aqui tratadas. Na modelagem LES, as grandes escalas são calculadas de forma direta, enquanto as pequenas escalas são calculadas por meio de modelos de sub-malha seguindo a hipótese de Boussinesq.
3. DNS – Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation*): é a técnica que requer maior refinamento da malha e consequente o custo computacional mais elevado entre as três técnicas. Nessa técnica, as equações de governo são resolvidas de maneira direta, sem modelagem. Diz respeito a técnica mais natural para resolver o escoamento turbulento.

Por exigir menor esforço computacional e apresentar resultados satisfatórios, a modelagem RANS tem ganhado notoriedade na comunidade de dinâmica dos fluidos computacional. No presente trabalho foram usados dois modelos de turbulência do tipo RANS, o modelo Spalart-Allmaras (S-A) (31) e o SST  $\kappa - \omega$  (*Shear Stress Transport*  $\kappa - \omega$ ) (21).

### 4.1 O problema de fechamento

A turbulência se deve às flutuações aleatórias presentes nas propriedades dos fluidos, por isso os modelos RANS necessitam de uma abordagem estatística (36). Os procedimentos formulados por Osborne Reynolds ainda no século XIX são aplicados até os dias atuais no estudo de fluidos, principalmente nos casos incompressíveis. A estatística aplica permite criar um número suficiente de equações para resolver os problemas existentes nas equações de governo.

### 4.1.1 Decomposição de Reynolds

As médias de Reynolds usadas para a decomposição são baseadas em valores temporários, apropriados para casos estacionários. Isto quer dizer que num regime turbulento, em valores médios, as propriedades não variam com o tempo. Neste caso, assume-se uma função instantânea  $f(\mathbf{x}, t)$  cuja média  $F_\tau(\mathbf{x})$  é definida por

$$F_\tau(\mathbf{x}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(\mathbf{x}, t) dt \quad (4.1)$$

A velocidade instantânea,  $u_i(\mathbf{x}, t)$ , pode ser expressão pela soma da média,  $U_i(\mathbf{x})$ , com suas flutuações,  $u'_i(\mathbf{x}, t)$ , como na equação 4.2

$$u_i(\mathbf{x}, t) = U_i(\mathbf{x}) + u'_i(\mathbf{x}, t) \quad (4.2)$$

Como  $U_i(\mathbf{x})$  é o valor médio da velocidade, pode ser definido por

$$U_i(\mathbf{x}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} u_i(\mathbf{x}, t) dt \quad (4.3)$$

Por sua vez, a média temporal da velocidade média é o próprio valores médio, ou seja,

$$\overline{U_i}(\mathbf{x}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} U_i(\mathbf{x}) dt = U_i(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

onde uma barra acima da variável indica média temporal. Quando se calcula a média temporal da flutuação da velocidade, o resultado é zero, como se vê a seguir

$$\overline{u'_i} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [u_i(\mathbf{x}, t) - U_i(\mathbf{x})] dt = U_i(\mathbf{x}) - \overline{U_i}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.5)$$

A Figura 17 é apresentada para um caso estacionário, mas na prática esse intervalo de tempo  $\tau$  não é fisicamente realista. Contudo, o que se espera desse intervalo de tempo é que seja muito maior do que o período das flutuações da velocidade (36).

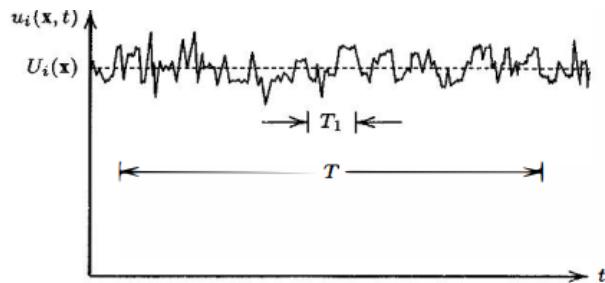


Figura 17 – Média temporal para turbulência estacionária para a velocidade instantânea  $u_i(\mathbf{x}, t)$  (36).

Como o foco da decomposição de Reynolds é resolver os problemas incompressíveis, as equações de Navier-Stokes para médias de Reynolds na forma conservativa são

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.6)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j U_i + \overline{u'_j u'_i}) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu S_{ji}) \quad (4.7)$$

o termo  $S_{ij}$ , presente na equação 4.7, se trata do valor médio do tensor taxa de deformação, dado por

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.8)$$

O maior problema da turbulência é prescrever o termo  $\overline{u'_i u'_j}$ , mas ao reescrever a equação 4.7 conforme a equação RANS padrão (36):

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu S_{ji} - \rho \overline{u'_j u'_i}) \quad (4.9)$$

A quantidade  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  é conhecido por tensor tensão de Reynolds, também escrito como  $\rho \tau_{ij}$ , logo  $\tau_{ij}$  é o tensor tensão de Reynolds específico dado por

$$\tau_{ij} = -\overline{u'_j u'_i} \quad (4.10)$$

onde se verifica que é um tensor simétrico ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ) com 6 variáveis independentes e desconhecidas. Por esta razão, é preciso encontrar mais equações para fechar o sistema, que já possui 4 variáveis a serem calculadas num escoamento tridimensional, o que implica em assumir 10 equações ao todo.

#### 4.1.2 Decomposição de Favre

Nos escoamentos compressíveis as variações de densidade do fluido não são desprezíveis com o gradiente de pressão, permitindo criar novos termos para as equações de governo. Para solucionar este problema, deve-se aplicar as decomposições de Favre (ou pela médias das massas). O procedimento visto em seu trabalho afirma que a propriedade pode ser vista como uma média no tempo ponderada pela densidade, definida como a equação 4.11

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (4.11)$$

Introduzindo a velocidade média pela massa,  $\tilde{u}_i$ , tem-se a equação 4.12

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \rho(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) dt \quad (4.12)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a densidade média da decomposição de Reynolds. Dentre as propriedades mais relevantes para as equações de conservação, a decomposição de Favre resulta nas seguintes expressões:

$$\left. \begin{array}{l} u_i = \tilde{u}_i + u''_i \\ p = P + p' \\ h = \tilde{h} + h'' \\ e = \tilde{e} + e'' \\ T = \tilde{T} + T'' \\ q_j = q_{L_j} + q'_j \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

as notações com til (ex:  $\tilde{u}_i$ ) são médias pelas densidade, enquanto que as variáveis com " (ex:  $u''_i$ ) denotam as flutuações estatísticas geradas pelas médias de densidade. Logo abaixo estão as equações de governo para fluidos compressíveis de continuidade 4.14, momento 4.15 e energia 4.16 que utilizam a decomposição de Favre (36):

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{t}_{ji} + \bar{\rho} \tau_{ji}] \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} E) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j H) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -q_{L_j} - q_{T_j} + \overline{t_{ij} u''_i} - \overline{\rho u''_j \frac{1}{2} u''_i u''_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{u}_i (\bar{t}_{ij} + \bar{\rho} \tau_{ij})] \quad (4.16)$$

Conforme nota-se ao longo do desenvolvimento das equações de Navier-Stokes, o termo  $P$  presente na equação 4.15 é a pressão corrigida para a decomposição de Favre, dada pela equação 4.17

$$P = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (4.17)$$

Os termos  $E$  e  $H$  referem-se à energia total do sistema e a entalpia total do sistema, cujas equações demonstram ser funções da energia cinética turbulenta

$$E = \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \kappa \quad \text{e} \quad H = \tilde{h} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \kappa \quad (4.18)$$

#### 4.1.2.1 Aproximações de Fechamento para os Escoamentos Compressíveis

O fato de calcular as equações de Navier-Stokes a partir da decomposição de Favre resulta em resultados afetados pelos flutuações da densidade. Em qualquer modelo de

transporte, aproximações de fechamento de caráter difusivo são normalmente postulados para as propriedades médias pela massa do tensor tensão de Reynolds e o vetor fluxo de calor (36).

Para os modelos de zero até 2 equações, a hipótese de Boussinesq é uma razoável generalização dos escoamentos compressíveis, ou seja, o tensor tensão de Reynolds pela média das massas  $\rho\tau_{ij}$  e a viscosidade dinâmica turbulenta  $\mu_t$  é assumido da forma a seguir na equação 4.19

$$\rho\tau_{ij} \equiv -\overline{\rho u''_i u''_j} = 2\mu_t \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} \kappa \delta_{ij} \quad (4.19)$$

Outro termo que surgiu na equação 4.16 é o vetor fluxo turbulento de calor,  $q_{T_j}$ , cuja aproximação para o fechamento foi proposta por Reynolds (1874), que assume ser proporcional ao gradiente médio de temperatura, como visto na equação 4.20

$$q_{T_j} = \overline{\rho u''_j h''} = -\frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j} \quad (4.20)$$

onde  $Pr_t$  é o número de Prandtl turbulento, que costuma ser aplicado como uma constante nos modelos RANS de turbulência (36).

## 4.2 Modelo Spalart-Allmaras

Esse modelo (31) envolve uma equação de transporte para a viscosidade cinética turbulenta ( $\nu_t$ ). É amplamente utilizado em estudos sobre camadas-limites em projetos aerodinâmicos. O objetivo da aplicação deste modelo é possibilitar resultados prévios com alguma precisão ao menor custo computacional. Este método desejava remover as incompletudes dos modelos algébricos para cálculo da turbulência e, ao mesmo tempo, ser computacionalmente mais simples do que os modelos com duas equações (48). A viscosidade turbulenta é aplicada da forma vista na equação 4.21:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu 1} \quad f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (4.21)$$

E  $\tilde{\nu}$  obedece a equação de transporte 4.22

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{\nu}}{Dt} &= c_{b1}[1 - f_{t2}]\tilde{S}\tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} [\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu})\nabla \tilde{\nu}) + c_{b2}(\nabla \tilde{\nu})^2] \\ &\quad - \left[ c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2}f_{t2} \right] \left[ \frac{\nu}{d} \right]^2 + f_{t1}\Delta U^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Considerando que

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (4.23)$$

Onde  $S$  é a vorticidade e  $d$  a distância até a parede mais próxima. Já a função  $f_w$  é dada por

$$f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2} \quad (4.24)$$

Pode-se assumir  $f_w = 10$  quando  $r$  é um valor grande. Enquanto isso, a função  $f_{t2}$  é dada por

$$f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4}\chi^2) \quad (4.25)$$

A última função  $f_{t1}$  que aparece na equação 4.22 pode ser deduzida da forma a seguir:

$$f_{t1} = c_{t1} g_t \exp\left(-c_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} [d^2 + g_t^2 d_t^2]\right) \quad g_t \equiv \min(0, 1, \Delta U / \omega_t \Delta x_t) \quad (4.26)$$

onde  $\Delta x_t$  é o espaçamento ao longo da malha. As constantes utilizadas das equações 4.21 até 4.26 podem ser vistas na Tabela 2. Os resultados obtidos mostraram a baixa influência da variação de densidade ao estudar os regimes supersônico (31).

Tabela 2 – Constantes usadas no modelo Spalart-Allmaras (31)

Constante	Valor
$c_{b1}$	0,1355
$\sigma$	2/3
$c_{b2}$	0,622
$\kappa$	0,41
$c_{w1}$	$c_{b1}/\kappa + (1 + c_{b2})/\sigma$
$c_{w2}$	0,3
$c_{w3}$	2,0
$c_{\nu1}$	7,1
$c_{t1}$	1,0
$c_{t2}$	2,0
$c_{t3}$	1,2
$c_{t4}$	0,5

Fonte: (31)

### 4.3 Modelo $\kappa$ - $\varepsilon$ Padrão

O modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  (49, 50, 51) apresenta uma forma de compreender a viscosidade turbulenta local através da energia cinética turbulenta ( $\kappa$ ) e pela taxa de dissipação dessa energia por unidade de massa ( $\varepsilon$ ). A viscosidade cinemática turbulenta ( $\nu_t$ ) é apresentada abaixo na equação 4.27

$$\nu_t = \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \quad (4.27)$$

Em altos números de Reynolds, as propriedades envolvidas possuem suas equações de transporte para a energia cinética turbulenta 4.28 e para a taxa de dissipação específica 4.29 a serem resolvidas (36)

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + U_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t/\sigma_\kappa) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_1 \frac{\varepsilon}{\kappa} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t/\sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4.29)$$

As constantes utilizadas neste método foram obtidas a partir de testes experimentais (49), cujos resultados são apresentados na Tabela 3. Embora o presente modelo seja bastante utilizado e obtenha bons resultados para escoamentos simples com gradientes de pressão considerados pequenos, o mesmo possui imprecisão nas proximidades de gradientes de pressão adversos (52). Portanto, há uma restrição deste modelo para análise de camada limite, a não ser que aplique um tratamento para amortecer a viscosidade turbulenta nessa região em que o número de Reynolds é baixo (35).

Tabela 3 – Constantes usadas no modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  (49)

Constante	Valor
$C_\mu$	0,09
$C_1$	1,44
$C_2$	1,92
$\sigma_\kappa$	1,0
$\sigma_\varepsilon$	1,3

Fonte: (49)

### 4.4 Modelo $\kappa$ - $\omega$ Padrão

O modelo  $\kappa$ - $\omega$  padrão (52, 36, 53) constata as dificuldades do modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  em predizer as camadas limites em gradientes adversos de pressão. A aplicação da lei da parede tende a esconder as imperfeições desses métodos. As análises feitas pelo desenvolvedor deste modelo

permitiram-no concluir que a abordagem  $\kappa-\omega$  é satisfatória em escoamentos compressíveis, seja na camada limite ou em meio livre. Partindo da mesma sequência feita no modelo anterior, a viscosidade cinemática turbulenta ( $\nu_t$ ) é apresentada abaixo na equação 4.30.

$$\nu_t = \frac{k}{\tilde{\omega}} \quad \tilde{\omega} = \max \left\{ \omega, C_{lim} \sqrt{\frac{2S_{ij}S_{ij}}{\beta^*}} \right\} \quad C_{lim} = \frac{7}{8} \quad (4.30)$$

Mesmo sem fatores de amortecimento para a viscosidade turbulenta ou o uso da lei da parede, os resultados foram satisfatórios para estudos sobre a região da subcamada viscosa dentro da camada limite. Em adição aos fatos, os estudos também foram precisos em superfícies rugosas ou em escoamentos com adição de massa. Considerando  $\omega$  como a taxa específica de dissipação da energia, ela é definida pela equação 4.31

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* \kappa} \quad (4.31)$$

As vantagens de escolher esse modelo em vez do  $\kappa - \varepsilon$  padrão são (35):

1. Mais robusto, por ser mais fácil de integrar numericamente;
2. Pode ser integrado na região da subcamada limite viscosa sem aplicar funções de parede;
3. Performa melhor com baixo gradiente adverso de pressão.

As equações de transporte para a energia cinética turbulenta ( $\kappa$ ) 4.32 e para a taxa específica de dissipação de energia ( $\omega$ ) 4.33 são apresentadas abaixo (52, 36, 53)

$$\frac{\partial \rho \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \kappa}{\partial x_j} = \rho \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \kappa \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \sigma^* \frac{\rho \kappa}{\omega} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{\kappa} \rho \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \sigma_d \frac{\rho}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \sigma \frac{\rho \kappa}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (4.33)$$

As relações auxiliares para calcular o modelo são descritas a seguir:

$$\beta = \beta_0 f_\beta \quad \sigma_d = \begin{cases} 0, & \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \leq 0 \\ \sigma_d, & \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} > 0 \end{cases} \quad f_\beta = \frac{1 + 85\chi_\omega}{1 + 100\chi_\omega} \quad (4.34)$$

$$\chi_\omega \equiv \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{ij} \hat{S}_{ki}}{(\beta^* \omega)^3} \right| \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \hat{S}_{ki} = S_{ki} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ki}$$

O maior contraponto a este modelo é a sensibilidade aos valores especificados para o escoamento livre (54), o que leva a forte dependência da solução arbitrária de  $\omega$  no meio

livre, o que já não acontece no modelo  $\kappa - \varepsilon$ . Os coeficientes utilizados no modelo  $\kappa-\omega$  são fornecidos na Tabela 4

Tabela 4 – Constantes usadas no modelo  $\kappa-\omega$  (52, 36, 53).

Constante	Valor
$\alpha$	13/25
$\beta^*$	0,09
$\beta_0$	0,0708
$\sigma$	1/2
$\sigma^*$	3/5
$\sigma_{do}$	1/8

Fonte: (52, 36, 53)

## 4.5 Modelo *Shear Stress Transport* $\kappa-\omega$

O modelo SST k- $\omega$  (21, 33, 32) é baseado em duas equações para descrever a viscosidade turbulenta. Durante o desenvolvimento do modelo, muitos testes experimentais foram realizados, com ênfase em projetos aerodinâmicos. Foi proposto para as simulações de escoamentos aeronáuticos com altos gradientes adversos de pressão e separação de camada limite, por meio de uma combinação dos modelos  $\kappa-\varepsilon$  e  $\kappa-\omega$ .

Com respeito a casos de escoamentos com camada limite, o modelo  $\kappa-\omega$  apresenta melhores resultados que o modelo  $\kappa-\varepsilon$  na solução da região viscosa próxima a parede, e seus resultados tem sido satisfatórios em casos que envolvem gradientes de pressão adversos. Entretanto, o modelo  $\kappa-\omega$  exige uma condição de contorno não nula para  $\omega$  para correntes livres não turbulentas, e o fluxo calculado apresenta elevada sensibilidade ao valor especificado (21). Foi demonstrado que o modelo  $\kappa-\varepsilon$  não apresenta essa deficiência (55).

Logo, o modelo SST  $\kappa-\omega$  trata-se da combinação robusta e precisa do modelo  $\kappa-\omega$  na região próxima das paredes com a independência da corrente livre do modelo  $\kappa-\varepsilon$  fora da camada limite. Para isso, o modelo  $\kappa-\varepsilon$  é escrito em termos da taxa de dissipação específica,  $\omega$ . Em seguida, o modelo  $\kappa-\omega$  padrão e o modelo  $\kappa-\varepsilon$  modificado são multiplicados por uma função de mistura e somados. As equações de transporte são desenvolvidas como a seguir em 4.35 e 4.36.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\kappa) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \kappa) = \tilde{P}_\kappa - \beta^* \rho \kappa \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\mu + \sigma_\kappa \mu_t) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \omega) = \alpha \frac{1}{\nu_t} \tilde{P}_\kappa - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{w2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (4.36)$$

cujos coeficientes dos modelos  $\kappa - \varepsilon$  e  $\kappa - \omega$  dependem da função de mistura  $F_1$ , que é obtido pela equação 4.37

$$\tilde{\Gamma} = F_1 \Gamma_1 + (1 - F_1) \Gamma_2 \quad (4.37)$$

onde

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad \arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{\kappa}}{\beta^* \omega d(\perp)}; \frac{500\nu}{d(\perp)^2 \omega} \right); \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}\kappa}{CD_{k\omega}d(\perp)^2} \right] \quad (4.38)$$

considere que  $d(\perp)$  é a distância perpendicular mais próxima à superfície e  $CD_{k\omega}$  é a parte positiva do termo de difusão cruzada.

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \quad (4.39)$$

Neste modelo há uma relação que satisfaz a relação de Bradshaw, que apresenta a equação 4.40 para correlacionar as tensões principais,  $\tau_{xy}$ , com a energia cinética turbulenta (21).

$$\tau_{xy} = \mu_t \Omega = \rho \sqrt{\frac{\text{Produção de } \kappa}{\text{Dissipação de } \kappa}} a_1 \kappa \quad (4.40)$$

Assumindo que  $\Omega$  é a vorticidade, dada pela seguinte equação 4.41.

$$\Omega = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (4.41)$$

Para a viscosidade cinemática turbulenta  $\nu_t$ , a equação 4.42 é dada por

$$\nu_t = \frac{a_1 \kappa}{\max(a_1 \omega; \Omega F_2)} \quad F_2 = \tanh \left( \max \left( 2 \frac{\sqrt{\kappa}}{\beta^* \omega d(\perp)}; \frac{500\nu}{d(\perp)^2 \omega} \right)^2 \right) \quad (4.42)$$

onde  $a_1 = 0,31$ . O termo  $\tilde{P}_\kappa$  também significa a produção de energia cinética turbulenta, mas usada neste modelo para prevenir o crescimento da turbulência em regiões de estagnação (32). A equação 4.43 se refere a esse ajuste do modelo SST

$$P_\kappa = \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \tilde{P}_\kappa = \min(P_\kappa, 10 \cdot \beta^* \rho \kappa \omega) \quad (4.43)$$

Houve uma ligeira alteração na primeira versão deste modelo RANS (21), pois o  $\tilde{P}_\kappa$  era proposto num fator de 20 em vez de 10. A Tabela 5 apresenta as constantes utilizadas para a formulação deste modelo de 2 equações:

Tabela 5 – Constantes usadas no modelo SST  $\kappa-\omega$  (21, 33, 32).

Constante ( $\Gamma_1$ )	Valor	Constante ( $\Gamma_2$ )	Valor
$\alpha_1$	0,5532	$\alpha_2$	0,4403
$\beta_1$	0,075	$\beta_2$	0,0828
$\sigma_{\kappa 1}$	0,85	$\sigma_{\kappa 2}$	1,0
$\sigma_{\omega 1}$	0,50	$\sigma_{\omega 2}$	0,856
$\beta^*$	0,09	$\beta^*$	0,09
$k$	0,41	$k$	0,41

Fonte: (21, 33, 32)

O modelo SST  $\kappa-\omega$  levou a uma grande melhoria, se comparado aos modelos  $\kappa-\omega$  e  $\kappa-\varepsilon$ , para todos os escoamentos que envolvem gradientes adversos de pressão e Menter(21) sugere que seja a técnica mais utilizada quando se trata de problemas de aerodinâmica. Outro fato importante é que nenhum outro método de duas equações para descrever a turbulência conseguiu predizer com acurácia a separação da pressão induzida e a interação viscosa-invísida do escoamento.

## 5 MODELO DE TRAJETÓRIA

Modelar uma trajetória para projetis estabilizados por rotação por ser uma tarefa complexa, principalmente pela obtenção de dados como o coeficiente de arrasto. A sugestão a seguir se propõe a reduzir os custos computacionais de modelos tradicionais como a dinâmica de corpo rígido em seis graus de liberdade (56).

### 5.1 Modelo de Trajetória Ponto-Material Modificado - MTPMM

O modelo ponto-material modificado foi proposto por Lieske e Reiter(9) e revisto por Baranowski(19), sendo hoje um recurso disponível para os países membros da Organização do Tratado do Atlântico Norte (OTAN) (10) por meio do acordo de padronização (STANAG) 4355, que analisa a dinâmica de voo através de 4 graus de liberdade, sendo três de translação e um por rotação. O objetivo deste modelo é oferecer um padrão a ser seguido para elaboração das tabelas de tiro dos projetis analisados (56, 57).

Neste modelo o corpo é tratado como um ponto material, embora haja estabilidade dinâmica a estudar. O grau de liberdade para a rotação pode ser chamado de "guinada de reposição", um método implícito para calcular todos os efeitos causados pelos momentos no corpo durante o voo. Neste trabalho serão consideradas as forças gravitacionais, o efeito de *Coriolis* e as forças aerodinâmicas de arrasto, sustentação e *Magnus*. Como pode ser percebido nas expressões a seguir, é um modelo altamente não-linear e há um grande acoplamento entre os movimentos translacionais e rotacionais:

$$\Sigma \mathbf{F} = m \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_{BB} \quad (5.1)$$

Para introduzir as descrições das forças na equação 5.1, é necessário frisar que as descrições seguintes das forças e das variáveis presentes que descrevem os movimentos translacional e rotacional advêm da norma proposta pela OTAN, isto é, respeitar um acordo que contempla toda a indústria de defesa e espaço.

Sobre a força gravitacional  $\mathbf{F}_G$  descreve a interação entre o corpo e o campo gravitacional da Terra, sendo igual ao produto da massa do projétil, m, com o vetor de aceleração pela gravidade,  $\mathbf{g}$ , cuja fórmula pode ser vista na equação 5.2. O vetor  $\mathbf{g}$  considera o efeito da trajetória sobre uma aproximação esférica da Terra, bem como os efeitos de latitude. Tais questões são vistas nas equações 5.3 e 5.4.

$$\mathbf{F}_G = -m\mathbf{g} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{g} = -g_0 \begin{bmatrix} \frac{X}{R_T} \\ 1 - \frac{2Y}{R_T} \\ \frac{Z}{R_T} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$g_0 = 9,80665[1 - 0,0026\cos(2lat)] \quad (5.4)$$

Onde  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são as coordenadas cartesianas com o referencial inercial da Terra. Como já citado, a latitude,  $lat$ , e o raio do planeta Terra,  $R_T$ , influenciam a força causada pela gravidade.

O Efeito de Coriolis  $\mathbf{F}_C$  é usado em predições de trajetória, pois seu efeito é significativo em deslocamentos horizontais relativamente longos, algo em torno de 20 km (56). Sua equação 5.5 é resultante da relação entre os efeitos de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo e a velocidade de deslocamento do projétil em relação ao ar, de tal maneira que a aproximação esférica deste planeta também se faz presente por conta dos efeitos de latitude ( $lat$ ) e de azimute ( $az$ ), como descrito na equação 5.6.

$$\mathbf{F}_C = -m\boldsymbol{\Lambda} \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = 2\varphi \begin{bmatrix} -V_y\cos(lat)\cos(az) - V_z\sin(lat) \\ V_x\cos(lat)\sin(az) + V_z\cos(lat)\cos(az) \\ V_x\sin(lat) - V_y\cos(lat)\cos(az) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  são coordenadas da velocidade em relação ao ar,  $\mathbf{V}$ . A constante  $\varphi = 7,292 \times 10^{-5}$  rad/s é a velocidade angular sobre seu próprio eixo polar.

A força de arrasto  $\mathbf{F}_D$  é a mais importante força aerodinâmica a ser calculada em um sistema de dinâmica de voo. Seu efeito é assunto de grande interesse pelas aplicações em extensão de alcance e otimização da dispersão. O arrasto pode ser representado pela equação 5.7:

$$\mathbf{F}_D = -\frac{\pi\rho D^2}{8}(C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}}[Q_D\alpha_e]^2)V\mathbf{V} \quad (5.7)$$

Onde  $\rho$  é a densidade do ar,  $D$  é o diâmetro de referência do projétil,  $C_{D_0}$  é o coeficiente de arrasto aerodinâmico com ângulo de ataque nulo,  $C_{D_{\alpha^2}}$  é o coeficiente de arrasto aerodinâmico proporcional ao quadrado do ângulo de ataque,  $Q_D$  é uma constante que representa o fator de ajuste do arrasto em função do ângulo de ataque,  $\alpha_e$  é a magnitude da guinada de repouso,  $V$  é a magnitude da velocidade em respeito ao ar, e sua notação vetorial é reproduzida em  $\mathbf{V}$ .

A força de sustentação  $\mathbf{F}_L$  age perpendicularmente à voo, tendendo a ajustar o projétil na direção da ponta da ogiva (56). Devido à forte relação com o ângulo de ataque, sem ângulo de ataque não existe sustentação, sendo esta força responsável por grande parte do deslocamento lateral. A equação 5.8 explica as variáveis envolvidas no processo.

$$\mathbf{F}_L = \frac{\pi \rho D^2 f_L}{8} (C_{L\alpha} + C_{L\alpha^3} \alpha_e^2) V^2 \boldsymbol{\alpha}_e \quad (5.8)$$

Onde  $C_{L\alpha}$  é o coeficiente de sustentação derivado do ângulo de ataque,  $C_{L\alpha^3}$  é o coeficiente de sustentação derivado do cubo do ângulo de ataque,  $f_L$  é o fator de sustentação e  $\boldsymbol{\alpha}_e$  é o vetor guinada de repouso.

A força de *Magnus*  $\mathbf{F}_M$  é produzida através da diferença de pressão em lados opostos de corpos em rotação. Neste caso, a viscosidade do ar interage com a superfície girando, contudo esta força interfere muito menos no sistema, se comparada ao arrasto e ao efeito gravitacional. A equação 5.9 expressa esse efeito:

$$\mathbf{F}_M = -\frac{\pi \rho D^3 Q_M \varrho C_{mag-f}}{8} (\boldsymbol{\alpha}_e \times \mathbf{V}) \quad (5.9)$$

Onde  $C_{mag-f}$  é o coeficiente da força de Magnus,  $Q_M$  é a constante que representa o fator de ajuste da força de Magnus e  $\varrho$  é taxa de rotação axial do projétil.

Embora o Base Bleed não tenha por objetivo produzir força de empuxo, a equação 5.10 demonstra a força  $\mathbf{F}_{BB}$  através do efeito causado pela injeção de gases na base do projétil, sempre na direção axial da trajetória. Este equacionamento permite entender como o alívio de pressão na base do projétil pode ser traduzido no movimento translacional.

$$\mathbf{F}_{BB} = \frac{\pi \rho i_{BB} D^2}{8} f(Inj) C_{D_{BB}} V^2 \left( \frac{\mathbf{V} \cos(\alpha_e)}{V} + \boldsymbol{\alpha}_e \right) \quad (5.10)$$

$$f(Inj) = \begin{cases} \frac{Inj}{Inj_0}, & \text{se } Inj < Inj_0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.11)$$

Onde  $C_{D_{BB}}$  é o coeficiente da força produzida na base do equipamento,  $i_{BB}$  é o fator de ajuste do arrasto em função do ângulo de elevação,  $f(Inj)$  é a função que descreve a razão de injeção da queima do propelente com o valor ótimo de injeção  $Inj_0$ . Contudo, existe um valor ótimo de injeção devido a muitos fatores, seja pela geometria do armamento, pelo design da geradora de gás que produz o efeito BB ou pelas condições de tiro. A definição mais enxuta do parâmetro de injeção é entendê-la como uma relação adimensional entre o fluxo de massa dos gases resultante da queima do propelente e o escoamento do ar externo que percorre o corpo.

Em razão do movimento referencial e das condições atmosféricas que geram velocidades de vento,  $\mathbf{W}$ , há uma diferença de velocidades em respeito ao solo,  $\mathbf{U}_{solo}$ , e ao ar,  $\mathbf{V}$ . Essa relação pode ser vista nas equações 5.12 e 5.13.

$$V = |\mathbf{U}_{solo} - \mathbf{W}| \quad (5.12)$$

$$V = \sqrt{(U_{x_{solo}} - W_x)^2 + (U_{y_{solo}} - W_y)^2 + (U_{z_{solo}} - W_z)^2} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{U}_{solo} = \begin{bmatrix} U_{disp} \cos(QE) \cos(az) \\ U_{disp} \sin(QE) \\ U_{disp} \cos(QE) \sin(az) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

onde a velocidade  $U_{disp}$  possui as condições iniciais de disparo,  $QE$  é igual ao ângulo de elevação do canhão e  $az$  representa o azimute de lançamento, sendo o ângulo nulo direcionado para o norte geográfico.

Como todo projétil que usa a tecnologia BB deve ser dinamicamente estabilizado pela rotação,  $\varrho$ , a aceleração angular em torno de seu próprio eixo,  $\dot{\varrho}$ , pode ser explicada pela equação 5.15, donde se deduz a rotação do projétil durante o voo.

$$\dot{\varrho} = \frac{\pi \rho D^4 V C_{spin} \varrho}{8 I_x} \quad \varrho = \varrho_0 + \int_0^t \dot{\varrho} dt \quad \varrho_0 = \frac{2\pi U_{disp}}{t_c D} \quad (5.15)$$

A condição inicial da rotação prevista em  $\varrho_0$  é calculada em função das características do canhão, como a taxa de torção,  $t_c$ ; do diâmetro de referência do projétil,  $D$ , além da própria velocidade de disparo,  $U_{disp}$ . A variável  $C_{spin}$  se refere ao coeficiente do momento de amortecimento da rotação (*spin*).

A guinada de repouso  $\boldsymbol{\alpha}_e$  e os valores iniciais deste ângulo  $\boldsymbol{\alpha}_{e_0}$  são demonstrados na equação 5.16

$$\boldsymbol{\alpha}_e = -\frac{8 I_x \varrho (\mathbf{V} \times \dot{\mathbf{U}}_{solo})}{\rho \pi D^3 (C_{m\alpha} + C_{m\alpha^3} \alpha_e^2) V^4} \quad \boldsymbol{\alpha}_{e_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

onde  $C_{m\alpha}$  and  $C_{m\alpha^3}$  são, respectivamente, os coeficientes de momento de derrubada linear ao ângulo de ataque e proporcional ao cubo do ângulo de ataque.

## 5.2 Modelo de Atmosfera

Modelar as condições atmosféricas é de suma importância para cada problema que envolva sistemas dinâmicos de voo porque as forças aerodinâmicas são fortemente impactadas por elas. Por exemplo, a densidade atmosférica padrão proposta pela Organização Internacional de Aviação Civil (ICAO) (58) na Troposfera (como também é conhecida a

camada inferior da atmosfera) reduz-se em quase 75 % conforme o projétil avance desde o solo até o valor limítrofe da camada, em torno de 11 km de altura. Esse é um dos motivos que afetam diretamente a injeção de gases pelo gerador de *Base Bleed*. Nesta convenção, o ar atmosférico é tratado como gás ideal nas camadas inferiores.

$$\begin{aligned} p(Y) &= \begin{cases} p_{Y=0 \text{ m}} \left[ 1 + \frac{\eta Y}{T_B} \right]^{\frac{-g_0}{\eta R}}, & Y < 11000 \text{ m} \\ p_{Y=11000 \text{ m}} \exp \left[ -\frac{g_0}{RT} (Y - 11000) \right], & 11000 \text{ m} \leq Y < 20000 \text{ m} \end{cases} \\ T(Y) &= \begin{cases} 288,15 + \eta Y, & Y < 11000 \text{ m} \\ 216,15, & 11000 \text{ m} \leq Y < 20000 \text{ m} \end{cases} \\ \rho &= \frac{p(Y)}{RT(Y)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Onde  $\eta = 6,5 \times 10^{-3}$  K/m é igual ao gradiente de temperatura e  $R = 287,05 \text{ J/(K kg)}$  é a constante dos gases ideais. Deve-se atentar ao fato que as funções presentes na equação 5.17 são dependentes do deslocamento vertical,  $Y$ . Outra propriedade importante para predizer a trajetória é a viscosidade dinâmica,  $\mu$ . Pela lei de Sutherland, o valor local da viscosidade dinâmica é calculado em função da temperatura em certa altitude,  $T(Y)$ , a partir da seguinte equação 5.18:

$$\mu = \frac{\beta_S T^{\frac{3}{2}}}{T + S} \quad (5.18)$$

Considere  $\beta_S = 1,458 \times 10^{-6} \text{ kg}/(\text{m s K}^{1/2})$  e  $S = 110,4 \text{ K}$  os valores para as constantes empíricas. Essa formulação ajuda a fechar as equações de Navier-Stokes, principalmente os casos compressíveis, assim como também permite determinar os coeficientes aerodinâmicos durante a trajetória a partir dos números de Reynolds,  $Re$  e de Mach,  $M$ . Esses parâmetros adimensionais do escoamento podem ser vistos na equação a seguir:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad M = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT(Y)}} \quad (5.19)$$

onde  $\gamma = 1,4$ , que é a razão de expansão adiabática do ar.

### 5.3 Integração Numérica

A solução numérica do modelo de trajetória de ponto-material modificado demanda certos recursos computacionais, o que significa que métodos de alta ordem precisam ser usados para resolver o problema. Uma boa aproximação dos resultados é usar o método Runge-Kutta de quarta-ordem (RK-4). Toda equação diferencial ordinária de primeira ordem pode ser expressa da seguinte forma (59).

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.20)$$

Todas as forças e a guinada de repouso são inclusas nesta equação 5.20, ainda que sejam equações não-lineares. Nesta situação, a variável independente da função é o tempo, o que é preferível do que usar coordenadas de deslocamento. O integrador numérico RK-4 usa a equação geral 5.21:

$$y_{i+1} = y_i + h_{RK4}\psi(x_i, y_i, h) \quad (5.21)$$

Cujo o subscrito **i** representa o índice do integrador, enquanto que x e y significam as variáveis dependentes a um i-ésimo tempo. A variável  $h_{RK4}$  é definida como o passo do integrador e  $\psi$  a função incremental, em outras palavras, uma função que ajusta  $f(x, y)$  de tal maneira que cubra toda a região da integral definida. Método RK-4 completo pode ser visto a seguir na equação 5.22.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_{RK4}}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.22)$$

As notações  $k_1, k_2, k_3, k_4$  são funções baseadas na função incremental, como as demonstrações feitas a seguir, das equações 5.23a até 5.23d:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (5.23a)$$

$$k_2 = f(x_i + 0,5h_{RK4}, y_i + 0,5h_{RK4}k_1) \quad (5.23b)$$

$$k_3 = f(x_i + 0,5h_{RK4}, y_i + 0,5h_{RK4}k_2) \quad (5.23c)$$

$$k_4 = f(x_i + 1,0h_{RK4}, y_i + 1,0h_{RK4}k_3) \quad (5.23d)$$

Este método de integração precisa ser testado inúmeras vezes devido a influência do passo de tempo. Caso use um passo muito grande, os resultados possivelmente não estarão precisos. Todavia, usar pequenos intervalos de tempo requerem alto processamento de CPU, o que significa muitas horas para cada simulação.

## 6 DESCRIÇÃO DO ESTUDO PROPOSTO

No presente trabalho serão ilustrados e analisados os resultados obtidos pelas análises numéricas computacionais para um escoamento compressível, axissimétrico e em regime permanente baseado na abordagem RANS para descrever a turbulência, em especial os modelos Spalart-Allmaras e SST  $\kappa-\omega$ . Dentre os trabalhos já citados, as referências (1, 2, 4, 15, 22, 23, 25, 27) serviram como norteadoras para o emprego dessas simulações.

Ademais, a implementação do MPMTM faz uso dos recursos disponíveis pelas simulações CFD a fim de comparar o funcionamento do projétil em duas situações: o voo inerte, que seria o voo sem uso do *Base Bleed*; voo ativo, com o uso do *Base Bleed*. Desta forma, aplica-se o que já foi desenvolvido e consolidado em trabalhos anteriores (8, 60, 61, 62, 63, 64).

### 6.1 Parâmetros de Interesse

Nesta seção espera-se definir quais variáveis de saída são relevantes para o projeto. Por razões técnicas, a tecnologia *Base Bleed* procura resolver o problema do arrasto induzido na base do projétil, logo são calculados os valores necessários para a compreensão desta força aerodinâmica.

#### 6.1.1 Coeficiente de Arrasto

Esse coeficiente ( $C_D$ ) é um número adimensional que pode ser obtido de acordo com a equação 6.1:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \quad (6.1)$$

os termos  $F_D$ ,  $\frac{1}{2}\rho V^2$  e  $A$  representam, respectivamente, a força de arrasto aerodinâmico, a pressão dinâmica exercida pelo fluido e a área de referência da munição. Neste trabalho em específico, não são considerados os efeitos causados pelo ângulo de ataque.

#### 6.1.2 Coeficiente de Pressão

A pressão é uma das propriedades de maior interesse do fluido, portanto calculase um adimensional que permite entender como as forças de sustentação e arrasto se comportam no escoamento. O coeficiente de pressão ( $C_P$ ) é um número adimensional que descreve as pressões relativas no escoamento independente do tamanho do corpo. Ele pode ser calculado a partir da expressão (6.2):

$$C_P = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad (6.2)$$

onde  $p_\infty$  é a pressão do meio livre. Quando os contornos de pressão indicam regiões com  $C_P > 1$ , o escoamento é compressível.

### 6.1.3 Parâmetro de Injeção

Para aplicar o conceito do parâmetro,  $Inj$ , é necessário olhar para a equação 6.3:

$$Inj = \frac{\dot{m}_{BB}}{\rho V A_b} \quad (6.3)$$

onde  $A_b$  significa a área da base do projétil.

Ao observar a equação 6.3, o maior desafio é obter valores razoáveis para a injeção de gases na base do projétil, pois o  $Inj$  tem influência na equação 5.10. Para isto, deve-se ter em mãos os valores de vazão mássica do propelente injetado pelo sistema BB,  $\dot{m}_{BB}$ . Como o fluido de trabalho é considerado ideal, portanto a vazão mássica pode ser calculada através da equação 6.4 (26):

$$\dot{m}_{BB} = \rho_t A_t V_t = \frac{p_c A_t}{\sqrt{\gamma R T_c}} \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{p_t}{p_c}\right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p_t}{p_c}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]} \quad (6.4)$$

Sejam  $p_c$  e  $p_t$  as pressões na câmara geradora de gás e na saída do sistema, respectivamente. Os termos  $\rho_t$ ,  $V_t$  e  $A_t$  se referem a densidade, a velocidade e a área na saída do *Base Bleed*.

Como requisitos das simulações de dinâmica dos fluidos computacional, a temperatura e velocidade de saída dos gases (em função do número de Mach) são computadas com base na pressão da câmara, que é obtida a partir da equação 6.4. Como o gás é isentrópico, as equações para essas propriedades são as seguintes:

$$T_t = T_c \left(\frac{p_t}{p_c}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (6.5)$$

$$M_t = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_c}{p_t}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right]} \quad (6.6)$$

## 6.2 Geração de malha

Para conseguir formular a abordagem numérica exigida pelo método de volumes finitos, a ser empregado no presente trabalho, foi necessário construir um domínio computacional através de uma malha. Com a evolução do projeto, foi construída um domínio axissimétrico em formato de "C", assim como visto em trabalhos anteriores (4, 23). Uma

vantagem desse tipo de malha é permitir simplificações nas fronteiras para imposição das condições de contorno, além de reduzir o custo computacional para obtenção de resultados.

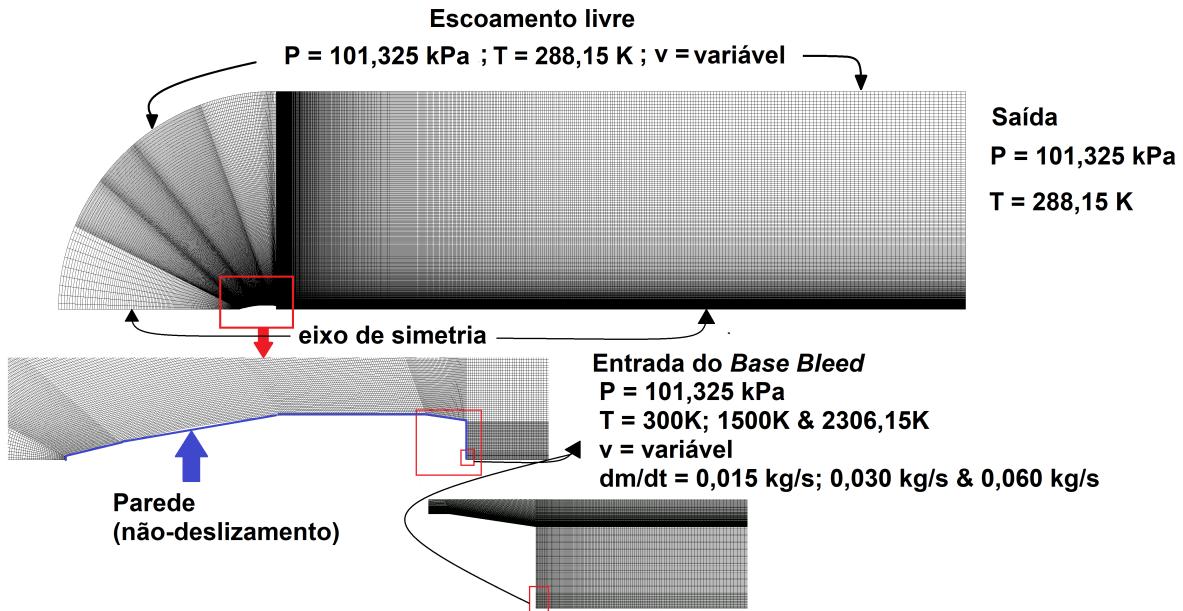


Figura 18 – Domínio computacional

E com o domínio preparado, foram feitas 2 malhas (vide Tabela 6), objetivando comparar valores com referências já citadas (4) para obter convergência dos resultados. Na direção vertical, a maior distância ao projétil é da ordem de 20 vezes o próprio calibre, enquanto que na direção horizontal à montante a maior distância ao projétil ficou na ordem de 5 vezes o comprimento longitudinal e à jusante na ordem de 15 vezes o valor do comprimento de referência da munição. Em ambos os casos, o diâmetro de saída do bocal do sistema *Base Bleed* é de 1" (25,4 mm).

Tabela 6 – Malhas desenvolvidas para o domínio computacional (sem *Base Bleed*)

1º Teste de Convergência	
Número da Malha	Quantidade de elementos
1	186.500
2	380.000

Fonte: Autor.

A seguir a segunda fase de testes de convergência foi realizada, assumindo que o diâmetro de saída do bocal do sistema BB seja igual a 50,8 mm e a temperatura de saída com valor de 2306,15 K. Nesta etapa, foram testadas 4 malhas, de acordo com a Tabela 7, com a finalidade era ratificar a suficiência da malha com 380.000 elementos para obtenção dos resultados finais.

Após a ratificação dos valores encontrados para o coeficiente de arrasto, atestou-se a influência do efeito *Base Bleed* pela temperatura de injeção dos gases. É importante

Tabela 7 – Malhas desenvolvidas para o domínio computacional (com *Base Bleed*)

2º Teste de Convergência	
Número da Malha	Quantidade de elementos
1	380.000
2	453.600
3	514.800
4	566.550

Fonte: Autor.

salientar que a maior temperatura foi extraída de outro trabalho desenvolvido pelo autor desta dissertação em que se fez presente como co-autor (26).

Tabela 8 – Efeito *Base Bleed* em função da temperatura

Diâmetro do Base Bleed	Temperatura
25,4 mm	300 K
	1500 K
	2306,15 K

Fonte: Autor.

Após esse passo, foram comparados dois diâmetros possíveis para saída da câmara geradora de gás (sistema BB) com a mesma temperatura ( $T_{BB} = 2306,15\text{ K}$ ), conforme a Tabela 9.

Tabela 9 – Diâmetros testados para analisar o efeito *Base Bleed*

Diâmetro do <i>Base Bleed</i> (mm)	Vazão nº1	Vazão nº 2
25,4 mm	0,015 kg/s	0,030 kg/s
50,8 mm	0,030 kg/s	0,060 kg/s

Fonte: Autor.

### 6.3 Condições de Contorno

No local descrito como "Escoamento livre" (*far-field*), o conceito por trás dessa condição é definir o meio livre do escoamento e, como requisito do software comercial utilizado, se fez necessário tratar o fluido (ar) como gás ideal. A pressão  $p = 101,325\text{ kPa}$  e a temperatura  $T = 288,15\text{ K}$  são prescritas de acordo com as condições ambientais para um disparo a nível do mar. A velocidade é prescrita conforme os valores de entrada do escoamento, variando o número de Mach de 0,4 a 3.

A região denominada "Entrada do *Base Bleed*" (*Base Bleed inlet*) mostrada na figura anterior representa a entrada de fluxo de gases injetados na base do projétil, onde a

velocidade de entrada possui valor apenas na direção axial. A vazão mássica e a temperatura do BB foram prescritas para descobrir a velocidade do escoamento nesta região. A pressão na saída dos gases BB é definida como sendo igual a pressão no "Escoamento livre" ( $\nabla p = 0$ ).

No local descrito como "Saída" (*outlet*) são prescritas apenas a pressão e a temperatura do contorno, que são iguais aos valores determinados no "Escoamento livre" ( $\nabla p = 0, \nabla T = 0$ ).

A região da parede, que descreve o contorno do formato do projétil, possui a condição de não-deslizamento, portanto  $V_{parede} = 0$  para desconsiderar o efeito dissipativo causado pela rugosidade da superfície. A parede é considerada como adiabática, logo o fluxo de temperatura nesta região é nulo ( $\nabla T = 0$ ).

Há a referência para o eixo de simetria, a fim de se garantir que os cálculos sejam feitos de acordo com o estudo proposto. Em todas as regiões definidas o valor da intensidade de turbulência determinado é de 0% e o comprimento da escala turbulenta igual a 0,7 m, aproximadamente o valor do comprimento do projétil.

## 6.4 Método de Resolução das Simulações CFD

Em todos os casos simulados no presente trabalho foi utilizado o método numérico denominado método dos volumes finitos (65, 66) para discretizar as equações de governo. O esquema de interpolação para os termos advectivos e difusivos foi o *upwind* de 2<sup>a</sup> ordem.

Para lidar com a compressibilidade existente no regime de voo desta munição estudada, o esquema *density-based* totalmente implícito foi aplicado (40, 41, 42). Em todos os casos simulados o regime estacionário foi considerado, portanto as propriedades calculadas não variam em função do tempo.

Para o cálculo dos gradientes foi utilizado o método dos Mínimos Quadrados e o esquema de avaliação do fluxo optou pelo ROE-FDS, pois demonstra bons resultados para problemas com escoamentos compressíveis (23). Para a resolução do sistema de equações lineares foi utilizada a técnica *multigrid* (47).

O problema foi considerado convergido quando todos os resíduos forem menores que  $1 \times 10^{-6}$ . Um software comercial foi usado para a construção da geometria, construção das malhas, além de suporte aos métodos numéricos e equações de governo e no pós-processamento dos casos construídos (39).

## 6.5 Implementação do Modelo de Trajetória

No trabalho de Silva et al.(8) cita-se a necessidade de dividir os dados de entrada relevantes de projeto em 4 grandes seções: aerodinâmicos, ambientais, balísticos e geométricos. A Figura 19 apresenta o fluxograma com as condições necessárias, que são apresentadas da subseção 6.5.1 a subseção 6.5.4, bem como a aplicação do integrador numérico Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, anteriormente explicado na seção 5.3. Destaca-se três pontos importantes: as funções para o parâmetro de injeção e a guinada de repouso, pois são parâmetros essenciais ao projeto e permitem calcular o desempenho da munição com e sem *Base Bleed*, além da definição da altura que o projétil atinge o solo, pois serve como limitador do processo iterativo.

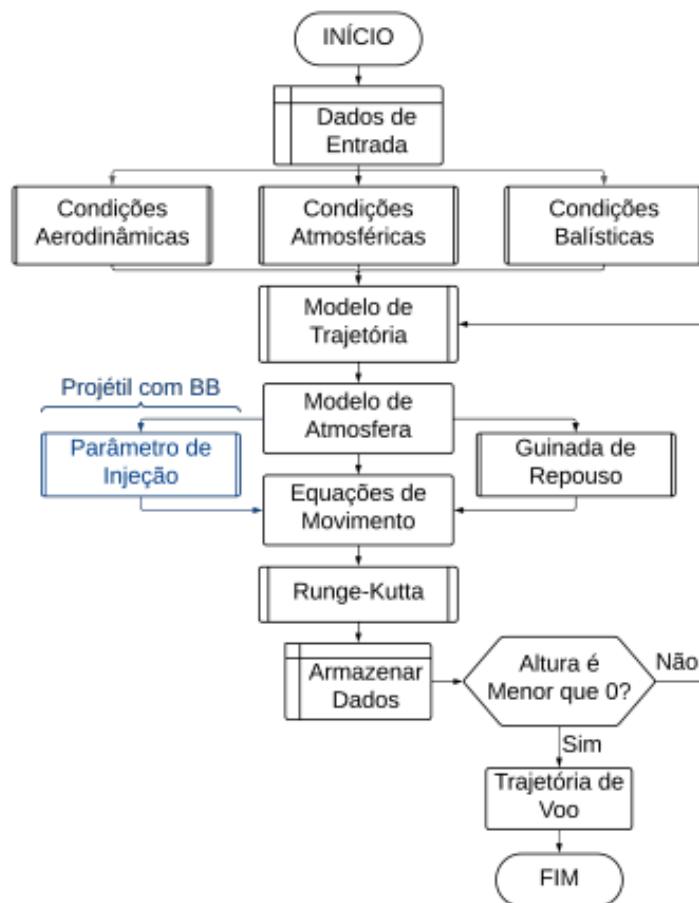


Figura 19 – Domínio computacional

### 6.5.1 Condições Geométricas

O projétil de calibre 155 mm possui um formato axissimétrico, portanto ele permite aplicar o modelo MPMTM. Isto é, o corpo rígido é tratado como um ponto material. Contudo, o Quadro 1 apresenta quais informações são exigidas para implementação do código que calcula a trajetória, conforme previsto pela STANAG 4355.

Quadro 1 – Dados Geométricos

Descrição	Valores
Diâmetro de referência	0,15470 m
Diâmetro do boat-tail	0,13373 m
Massa (sem propelente)	42,9850 kg
Massa do propelente	0,5600 kg
Momento de inércia axial no início	0,14245 kg/m <sup>2</sup>
Momento de inércia axial após a queima	0,13730 kg/m <sup>2</sup>
Centro de gravidade no início (a partir da ponta da ogiva)	0,45835 m
Centro de gravidade após a queima (a partir da ponta da ogiva)	0,44645 m

Fonte: Autor.

### 6.5.2 Condições Balísticas

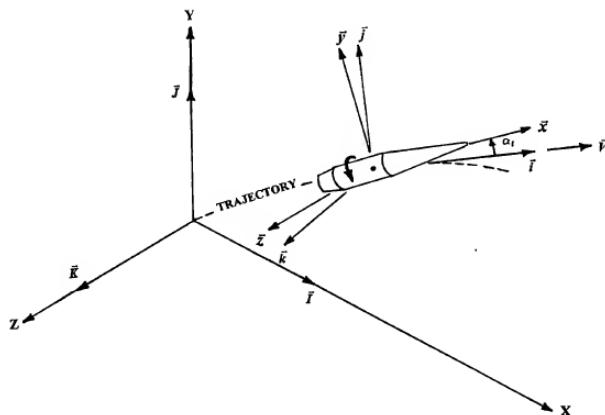


Figura 20 – Sistema de referência para o cálculo de trajetória (56)

Neste sistema o canhão é centrado no eixo de referência da Terra em  $O_{XYZ}$ , conforme Figura 20 e programado para lançar com ângulos de elevação (QE) de  $40^\circ$  e  $45^\circ$  (711,1 mil e 800,0 mil) a partir da horizontal, partindo com a mesma velocidade (Mach aproximadamente 2,58, a nível do mar). Como citado na Quadro 2, os fatores de arrasto e Magnus são constantes expressadas na STANAG 4355. A latitude do Rio de Janeiro foi considerada para vias de estudo.

Quadro 2 – Dados Balísticos

Descrição	Valores
Velocidade de disparo	878 m/s
Ângulo de elevação	711,1 mil e 800,0 mil
Latitude	$-23\pi/180$ rad
Azimute	0 rad
Taxa de torção no disparo	25 cal/rev
Fator de arrasto	1,2
Fator de Magnus	1,2

Fonte: Autor.

### 6.5.3 Condições Atmosféricas

Respeitando o modelo da ICAO (58), existem algumas variáveis de interesse no início do lançamento. Elas estão representadas no Quadro 3. A velocidade do vento foi desconsiderada porque o simulador necessitava criar confiabilidade antes de aumentar as incertezas, assim como os fatores de umidade foram desprezados pela mesma razão.

Quadro 3 – Dados Atmosféricos

Descrição	Valores
Temperatura ao nível do mar	288,15 K
Gradiente de Temperatura	$6,5 \times 10^{-3}$ K/m
Pressão do ar ao nível do mar	$1,01325 \times 10^5$ Pa
Densidade do ar ao nível do mar	$1,225 \text{ kg/m}^3$
Razão de expansão adiabática do ar	1,4
Aceleração da gravidade ao nível do mar	$9,80665 \text{ m/s}^2$
Raio da Terra	$6,371 \times 10^6$ m
Velocidade angular da Terra	$7,292 \times 10^{-5}$ rad/s

Fonte: 58

### 6.5.4 Condições Aerodinâmicas

Com o suporte do PRODAS®, os coeficientes aerodinâmicos foram calculados usando formulações semi-empíricas a partir das propriedades geométricas e de massa do projétil sem alcance estendido. Essas variáveis adimensionais são funções do número de Mach e da guinada de repouso.

A norma compara os coeficientes aerodinâmicos da STANAG 4355 com o que a NACA (Comitê Nacional para Aconselhamento da Aeronáutica) oferece (10). Os coeficientes obtidos no PRODAS® são calculados em função dos eixos da munição, enquanto que os valores adimensionais de interesse são em respeito ao vetor de velocidade do centro de massa. Logo, são feitas algumas transformações rotacionais para se chegar nos coeficientes desejados:

$$\begin{aligned}
 C_{D_0} &= C_{X_0} \\
 C_{D_{\alpha^2}} &= C_{X_{\alpha^2}} + C_{Z_{\alpha}} - \frac{1}{2}C_{X_0} \\
 C_{L_{\alpha}} &= C_{Z_{\alpha}} - C_{X_0} \\
 C_{mag-f} &= \frac{1}{2}C_{y_{pa}} \\
 C_{spin} &= \frac{1}{2}C_{l_p}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

os valores dos coeficientes que foram aplicados ao modelo de trajetória podem ser vistos do Apêndice A ao Apêndice G.

## 7 RESULTADOS

### 7.1 Projétil inerte (sem *Base Bleed*)

Os valores encontrados para o coeficiente de arrasto aerodinâmico em um projétil de artilharia sem uso de *Base Bleed* foram desenvolvidos a partir do modelo SST  $\kappa - \omega$ , como visto na Figura 21. As curvas de arrasto foram desenvolvidas com base nas malhas citadas na Tabela 6 e foram comparadas com os resultados obtidos em simulação computacional desenvolvida por Mahmoud et al.(4).

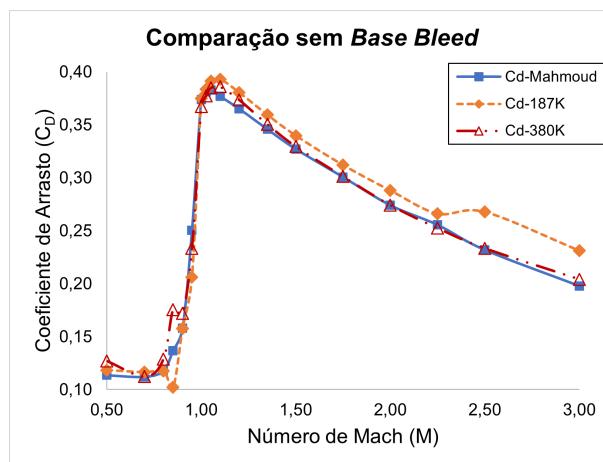
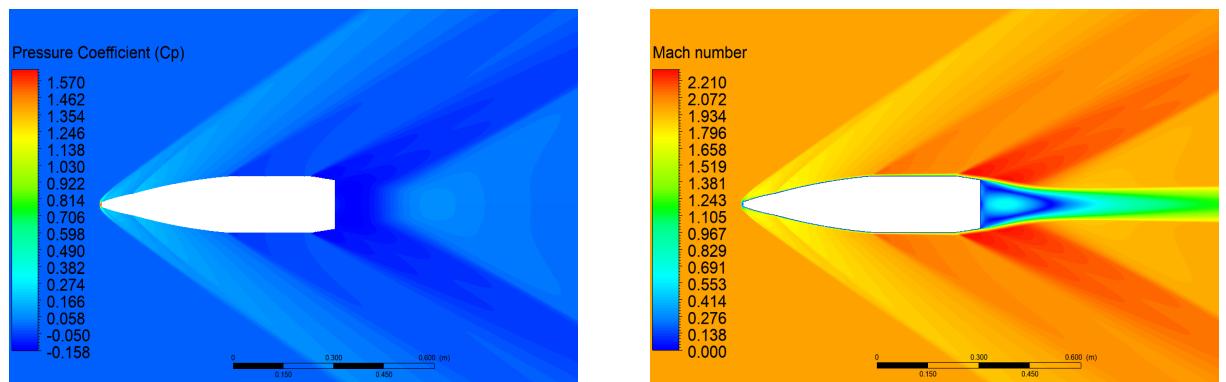


Figura 21 – Coeficiente de Arrasto  $C_D$  em função do número de Mach (sem BB)

Através do que é demonstrado na Figura Figura 21, percebe-se que a curva referente a malha com 380.000 elementos (380K) se aproximou consideravelmente da referência. Por esta razão, a implementação do domínio computacional foi considerada válida para as próximas análises com a tecnologia *Base Bleed* como condição de contorno.



(a) Contornos de Pressão

(b) Contornos de Velocidade

Figura 22 – Projétil sob regime de velocidade igual a Mach 2

Antes de iniciar as validações das simulações que incluem o efeito *Base Bleed*, é necessário observar a Figura 22, pois os contornos de pressão (Figura 22a) e de velocidade (Figura 22b) demonstram o escoamento do ar em torno do projétil. Além da onda de choque causada pela velocidade supersônica ( $M = 2,0$ ), existe uma região de baixa pressão na base da munição cuja consequência é criar uma região de recirculação com baixas velocidades. Contudo, é a partir da Figura 23 que se examina com maiores detalhes o comportamento desta recirculação outrora citada.

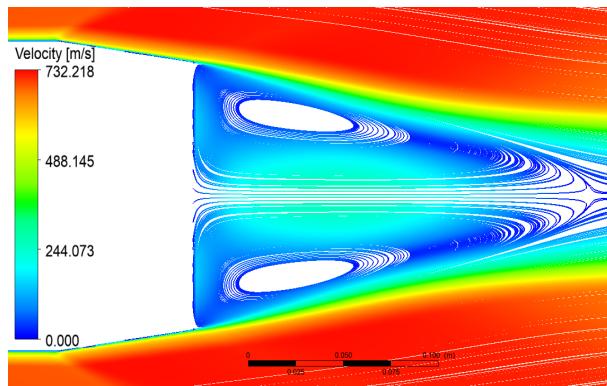


Figura 23 – Linhas de corrente para a velocidade sob regime  $M = 2,0$

## 7.2 Projétil ativo (com *Base Bleed*)

A Tabela 7, presente na Seção 6.2, demonstra as malhas testadas para o projétil ativo. A malha com 380.000 elementos foi utilizada como referência, tendo em vista a convergência dos resultados com valores de trabalhos anteriores (4). Com estas malhas foram feitos testes de convergência, em dois regimes de velocidade (Mach igual a 1,0 e 2,0), cujos resultados são apresentados na Tabela 10. Em ambos os casos o modelo SST  $\kappa - \omega$  foi usado para descrever a turbulência. A condição de contorno "Entrada do *Base Bleed*" considerou a saída dos gases com a seguinte configuração:  $\phi_{BB} = 50,8$  mm;  $\dot{m}_{BB} = 0,030$  kg/s;  $T_{BB} = 2306,15$  K.

Tabela 10 – Teste de convergência (com *Base Bleed*)

Segundo Teste de Convergência

Número de elementos	$C_D$ ( $M = 1$ )	Diferença	$C_D$ ( $M = 2$ )	Diferença
380.000	0,32784	–	0,26330	–
453.600	0,33064	0,854 %	0,26364	0,129 %
514.800	0,32912	0,390 %	0,26185	0,551 %
566.550	0,32656	0,394 %	0,26143	0,710 %

Fonte: Autor.

Para o projétil em velocidade sônica ( $M = 1,0$ ), a maior diferença percentual ficou na ordem de 0,85 %, enquanto que para  $M = 2,0$  o maior desvio foi de aproximadamente 0,7 %, o que denota quase nenhuma diferença nos resultados mesmo aumentando significativamente

o número de elementos. Desta forma, o custo computacional para resolver a malha com 380.000 elementos é suficiente para predizer o coeficiente de arrasto.

### 7.2.1 Influência no diâmetro de saída do *Base Bleed*

Outro parâmetro considerado foi o aumento do diâmetro da saída do bocal (ver Tabela 9), de 25,4 mm a 50,8 mm (de 1" a 2"). A temperatura na condição de contorno "Entrada do *Base Bleed*" foi fixada em  $T_{BB} = 2306,15\text{ K}$ . Desta forma, a Figura 24b demonstra uma redução do coeficiente de arrasto para um diâmetro de 2", enquanto que a Figura 24a mostrou que o diâmetro de 1" aumentou o perfil de arrasto, se comparado ao sistema BB desativado.

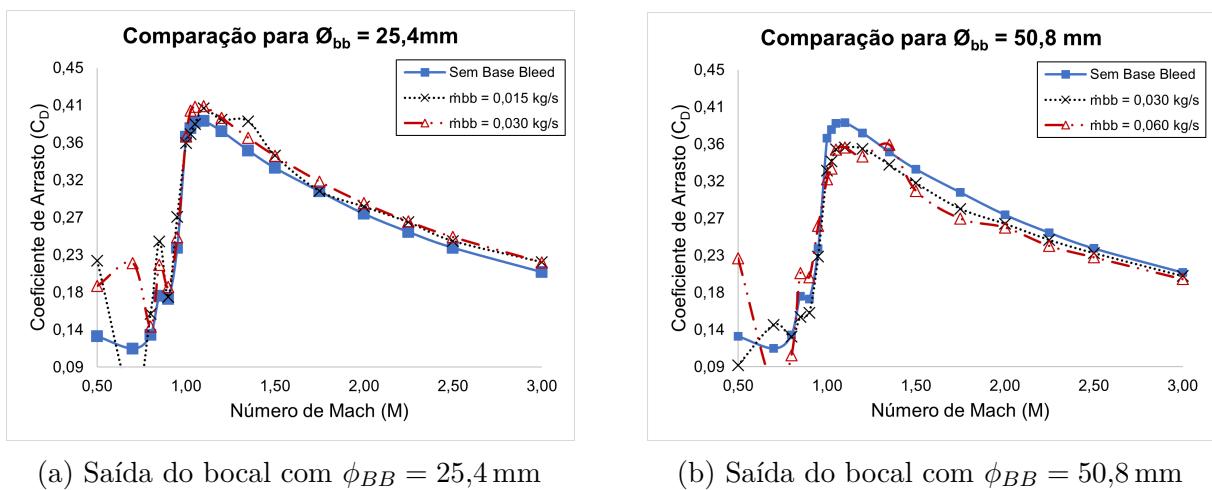


Figura 24 – Influência do diâmetro sobre o coeficiente de arrasto.

Há de se notar uma oscilação presente nas curvas de arrasto no regime subsônico com o *base bleed* funcionando, especialmente na faixa  $M < 0,8$ . A escolha das vazões de 0,015 kg/s e 0,060 kg/s foi para garantir a conservação da velocidade ao aumentar em 4 vezes a área de saída dos gases do *Base Bleed*. Ainda analisando os resultados pelas vazões mássicas, atesta-se da Figura 24 que os coeficientes de arrasto sofreram redução em ambos os casos, embora pouco relevantes.

Para entender o que ocorreu para acrescentar o arrasto nos projetos com diâmetro de saída do *Base Bleed* iguais a 1" ( $\phi_{BB} = 25,4\text{ mm}$ ), a Figura 25 apresenta os campos de pressão e velocidade sob regime  $M = 2,0$ . Conforme esperado pela literatura, as Figuras 25a e 25b demonstram o campo de pressão à jusante da base do projétil, que está abaixo do valor prescrito da região denominada "Escoamento livre" do domínio computacional. Tanto na Figura 25a quanto na Figura 25b não há um aumento significativo da pressão atmosférica na região, apesar da diferenciação do campo de velocidades ser demonstrada pelas Figuras 25c e 25d. Contudo, a apresentação do campo de velocidades da Figura 25d reflete uma vazão mássica excedente que aumenta a força de arrasto.

As Figuras 25e e 25f mostram as linhas de corrente para a velocidade nas duas condições impostas para o sistema BB com 1". Da Figura 25e se conclui que a injeção de gases nessa vazão mássica produz nenhum efeito significativo no que diz respeito ao deslocamento da região primária de recirculação e da formação da recirculação anular.

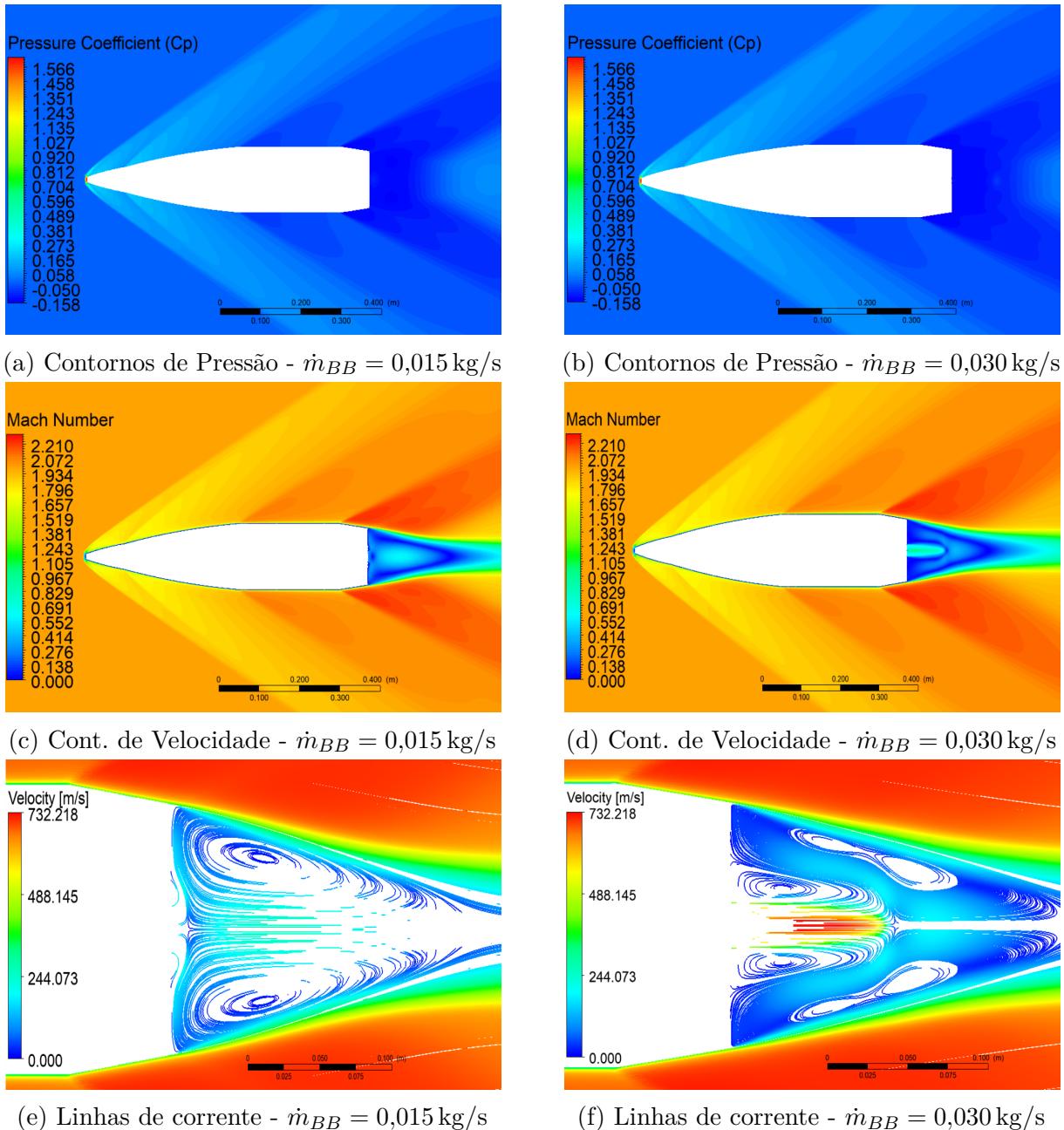


Figura 25 – Projétil sob diferentes condições de vazão mássica sob regime  $M = 2,0$   
 $(\phi_{BB} = 25,4 \text{ mm}; T_{BB} = 2306,15 \text{ K})$

O passo seguinte foi apresentar o escoamento no entorno do projétil assumindo que o diâmetro de saída do bocal,  $\phi_{BB}$ , seja igual a 50,8 mm. Assim como na Figura 25, a velocidade do meio livre foi definida como  $M = 2,0$  para os contornos de pressão e de velocidade, além das linhas de corrente, sendo todos esses perfis vistos na Figura 26.

Seja na Figura 26c ou na Figura 26d, a formação da recirculação é bastante

proeminente, acima de tudo no caso em que a vazão mássica é igual a 0,060 kg/s. Todavia, não se relata nenhuma variação significativa no campo de pressão, como demonstrado nas Figuras 26a e 26b. No entanto, é com as Figuras 26e e 26f que se ratifica a influência do diâmetro do bocal. As linhas de corrente observadas na Figura 26f se aproximam das referências (2, 4, 25). Por esta razão acredita-se que houve a maior redução do arrasto na escolha do maior diâmetro de saída do sistema BB (2").

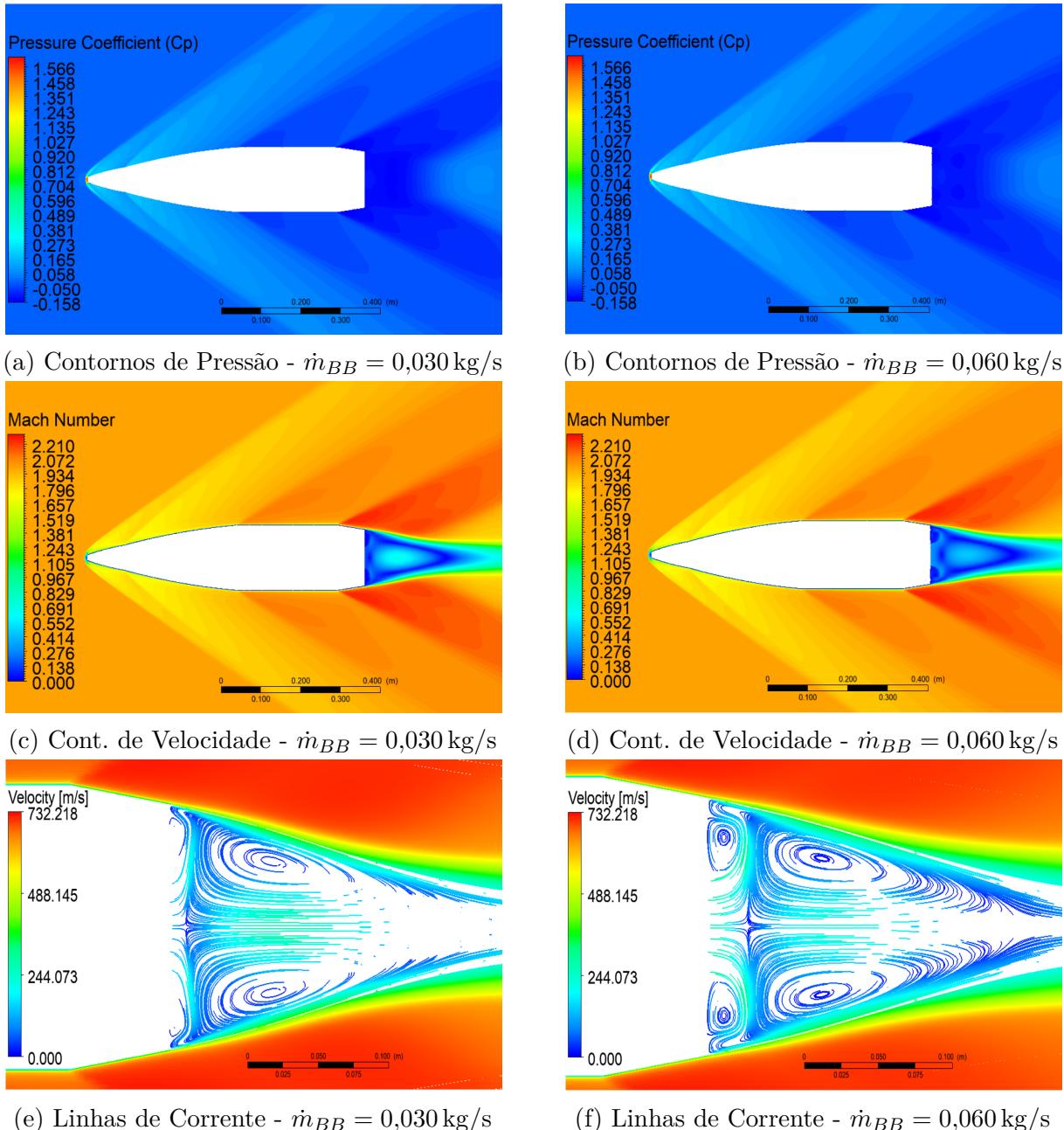


Figura 26 – Projétil sob diferentes condições de vazão mássica sob regime  $M = 2,0$   
 $(\phi_{BB} = 50,8 \text{ mm}; T_{BB} = 2306,15 \text{ K})$

### 7.2.2 Influência da vazão mássica no sistema *Base Bleed*

A Figura 27 demonstra a influência da vazão nos resultados obtidos nas simulações computacionais com o efeito *Base Bleed* na base do projétil, assumindo que a temperatura de saída dos gases foi fixada em 1500 K e o diâmetro de saída do *Base Bleed* escolhido foi de 2" ( $\phi_{BB} = 50,8 \text{ mm}$ ). A escolha por esse diâmetro de saída se deve aos melhores resultados produzidos na subseção 7.2.1.

Acerca do coeficiente de arrasto, nota-se na Figura 27 uma redução dos valores conforme aumenta a vazão mássica,  $\dot{m}_{BB}$ . As oscilações nos valores continuam aparecendo no regime subsônico, apesar de seguirem a mesma tendência, não importando qual vazão seja. O regime transônico reúne as maiores reduções do arrasto aerodinâmico, mas a redução do arrasto se faz menos efeito conforme aumenta a velocidade, passando pelo supersônico, especialmente quando  $M > 2,0$ .

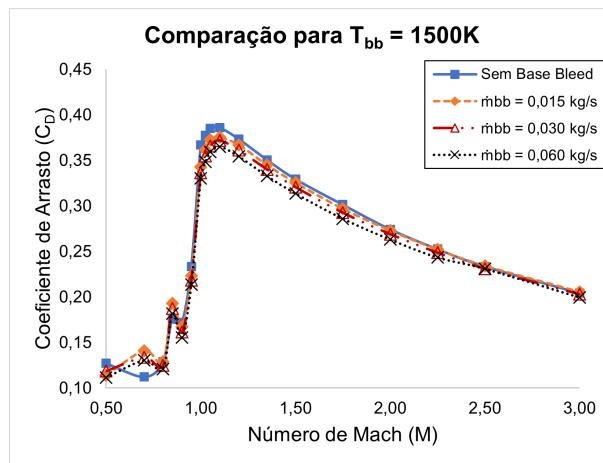


Figura 27 – Influência da vazão mássica do *Base Bleed* sobre o coeficiente de arrasto com  $T_{BB} = 1500 \text{ K}$

Conforme aumenta a vazão, há um aumento de velocidade, apesar de não haver acréscimo de pressão, o que é demonstrado pela Figura 28a ou Figura 28b. Os contornos de velocidade, presentes nas Figuras 28c e 28d, apresentam o deslocamento da região primária de recirculação, além do aumento da esteira turbulenta.

Pelas Figuras 28e e 28f se observam as linhas de corrente para a velocidade. Em ambos os casos há a formação da recirculação anular, mas essa zona secundária de recirculação é mais proeminente conforme o aumento da vazão. A Figura 28f apresenta com maior clareza um valor mais próximo do que se espera ocorrer na região, dentro do que a literatura demonstrou em trabalhos anteriores (2, 6). Assume-se que todos os contornos da Figura 28 estão sob regime  $M = 2,0$ .

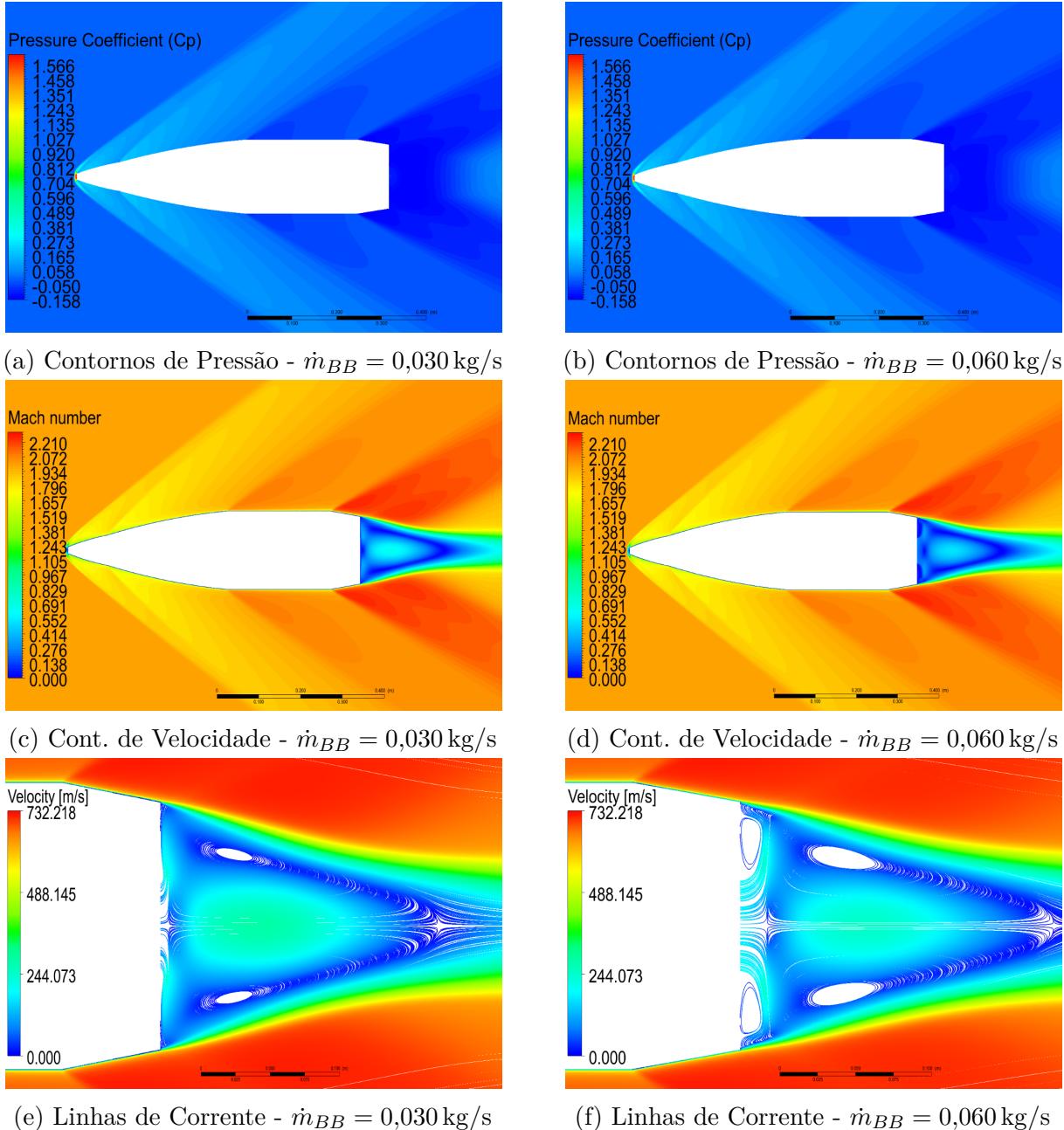


Figura 28 – Projétil sob diferentes condições de vazão mássica sob regime  $M = 2,0$   
( $\phi_{BB} = 50,8 \text{ mm}$ ;  $T_{BB} = 1500 \text{ K}$ )

### 7.2.3 Influência da temperatura

A Figura 29 demonstra a influência da temperatura nos resultados obtidos nas simulações computacionais com o efeito *Base Bleed* na base do projétil, assumindo que a vazão mássica de saída dos gases foi fixada em  $0,060 \text{ kg/s}$  e o diâmetro de saída do *Base Bleed* escolhido foi de  $2"$  ( $\phi_{BB} = 50,8 \text{ mm}$ ). A escolha por esse diâmetro de saída se deve aos melhores resultados produzidos na subseção 7.2.1. A escolha pela vazão de  $0,060 \text{ kg/s}$  se baseou nos resultados das subseções 7.2.2, em que a redução do coeficiente de arrasto foi mais significativa quando comparado ao projétil inerte.

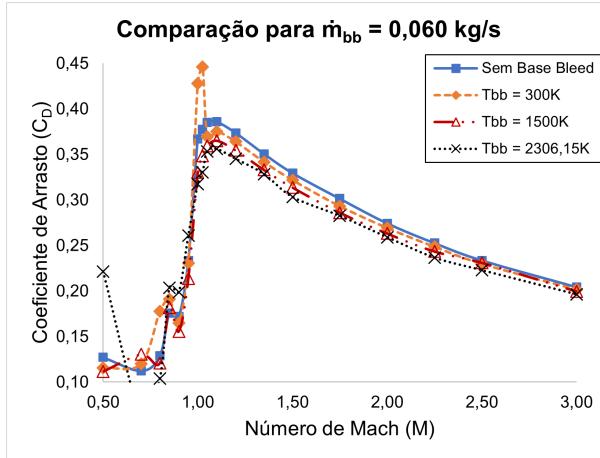


Figura 29 – Influência da temperatura do *Base Bleed* sobre o coeficiente de arrasto com  $\dot{m}_{BB} = 0,060 \text{ kg/s}$

Acerca do coeficiente de arrasto, nota-se na Figura 29 uma redução dos valores conforme aumenta a temperatura,  $\dot{m}_{BB}$ . As oscilações nos valores continuam aparecendo no regime subsônico, embora tenham valores discrepantes no início da curva no caso em que a temperatura é mais elevada ( $T_{BB} = 2306,15 \text{ K}$ ). Mesmo assim, seguem a mesma tendência, não importando qual vazão seja. O regime transônico reúne as maiores reduções do arrasto aerodinâmico, mas a redução do arrasto também é considerável no regime supersônico, principalmente o valor de Mach entre 1,5 a 2,0. Após esse intervalo, a redução é mais gradual.

#### 7.2.4 Influência da abordagem RANS

Conforme foi citado anteriormente, o modelo Spalart-Allmaras (31) foi manejado para atestar a eficiência de outra técnica RANS para descrição da turbulência além do que foi proposto por Menter(21). A comparação foi realizada somente para os seguintes valores na condição de contorno *base bleed inlet*:  $\phi_{BB} = 50,8 \text{ mm}$ ,  $T_{BB} = 2306,15 \text{ K}$  e  $\dot{m}_{BB} = 0,030 \text{ kg/s}$ .

Entretanto, é notório que o modelo Spalart-Allmaras (S-A) superestimou a curva de arrasto em todos os regimes de velocidade, relatado pela Figura 30.

De acordo com a apresentação da Figura 31, o modelo S-A não conseguiu encontrar a zona de recirculação gerada pelo sistema *base bleed* como tampouco registra o momento provocado pela vazão mássica de gases do propelente.

Para assegurar o que foi demonstrado na Figura 31a, a Figura 32 foi elaborada para analisar as linhas de corrente com o modelo de 1 equação, donde se concluiu que o alto gradiente adverso de pressão existente no sistema BB resultou em desvios que fogem da explicação do fenômeno físico real, ainda que as técnicas RANS enxerguem os valores médios das propriedades do fluido.

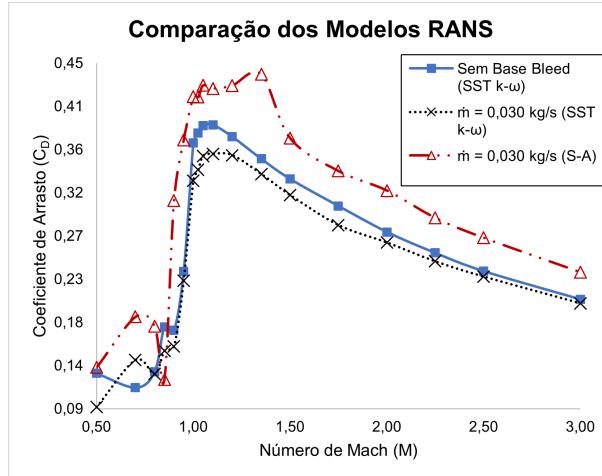
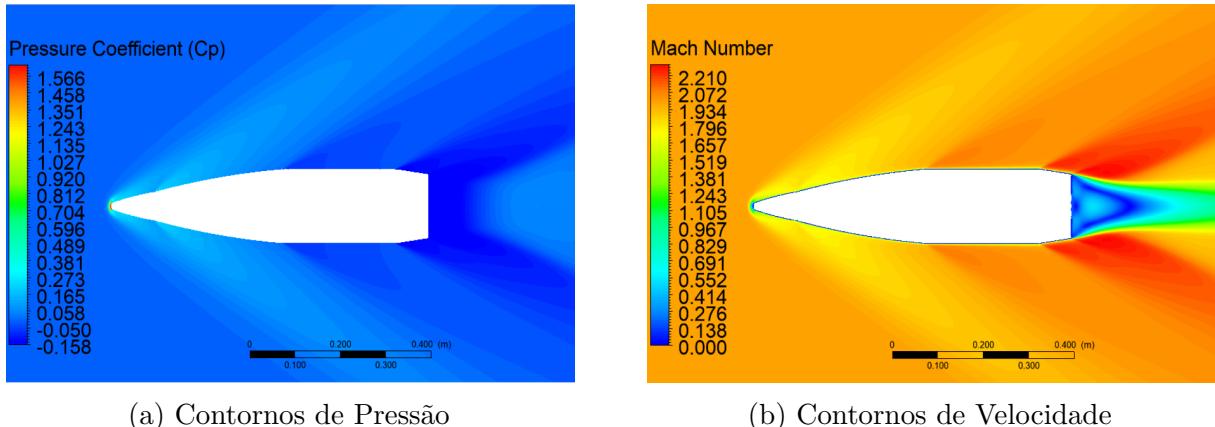


Figura 30 – Curvas de arrasto de acordo com modelos de turbulência RANS



(a) Contornos de Pressão

(b) Contornos de Velocidade

Figura 31 – Projétil sob modelo Spalart-Allmaras

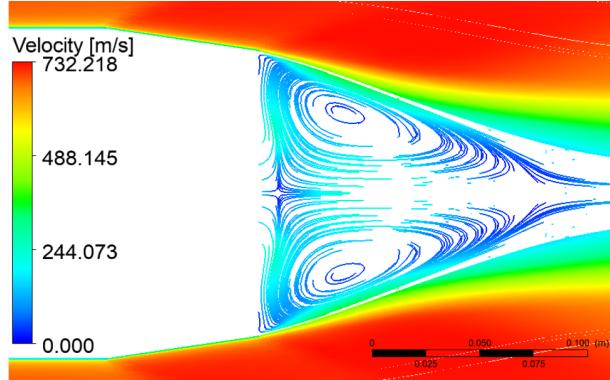


Figura 32 – Linhas de corrente para o modelo Spalart-Allmaras

### 7.3 Resultados da Trajetória

A partir do momento em que há disponibilidade das condições citadas na seção 6.5 e dos resultados das simulações de fluidodinâmica computacional, pode-se calcular a predição da trajetória MPMTM. Apesar do suporte do PRODAS® e das informações obtidas, algumas premissas foram consideradas:

- Lançamento do Rio de Janeiro, logo a latitude é de  $23^\circ$ ;
- Desprezando efeitos da umidade sobre a atmosfera;
- Sem velocidade do vento, assim como citado por Silva et al.(8);
- Vazão mássica do propelente é constante durante o acionamento do BB;
- Parâmetro ótimo de injeção ( $Inj_0$ ) igual a  $5 \times 10^{-3}$ , tal como descrito por Davenas(67);
- Assumir que os coeficientes aerodinâmicos são linearmente dependentes do ângulo  $\alpha_e$

Pela última condição assumida, logo  $C_{L\alpha^3}$  e  $C_{m\alpha^3}$  não interferem significativamente as equações 5.8 e 5.16. Embora a ignição seja um tópico relevante no desempenho, a dificuldade em modelar adequadamente à realidade tornou o assunto um caso a ser tratado em estudos posteriores.

De acordo com o STANAG 4355 (10), é necessário obter os fatores  $f_L$  e  $i_{BB}$  tais que se adéquem à cada simulação realizada. Os dados de entrada são comparados com os testes reais de tiro feito com os projetis. Contudo, o simulador desenvolvido neste trabalho comprovou que, mesmo não sendo utilizados em suas respectivas equações 5.8 e 5.10, os valores finais de trajetória foram considerados com boa acurácia, se comparados aos lançamentos reais de projetis.

A metodologia para provar a eficiência do *Base Bleed* foi demonstrar os alcances obtidos em simulações computacionais. A Figura 33 esclarece os resultados das previsões de voo. Sobre a Figura 33a, os resultados não demonstraram um efeito positivo, seja sobre o alcance ou o apogeu, como visto na Tabela 11.

Tabela 11 – Trajetória Balística com QE = 711 mil e v = 878 m/s ( $\phi_{BB} = 25,4$  mm)

Vazão Mássica	Alcance	Aumento	Apogeu	Aumento
0 kg/s	23922,2 m	–	7256,8 m	–
0,015 kg/s	22647,8 m	-5,3 %	7145,0 m	-1,5 %
0,030 kg/s	23069,0 m	-3,6 %	7093,4 m	-2,3 %

Fonte: Autor.

Acerca da Figura 33b, apesar de haver um aumento do alcance dos lançamentos sob efeito BB, os resultados também foram piores, quando comparados com o lançamento inerte. A Tabela 12 demonstra resultados percentuais muito próximos dos que foram apresentados na tabela anterior.

Ao verificar a Tabela 13, percebe-se uma tendência positiva nos resultados da Figura 33c, sobretudo com a vazão mássica de 0,060 kg/s. Há o aumento do alcance de quase 6 %, mesmo com um modelo simplificado para reproduzir o efeito BB.

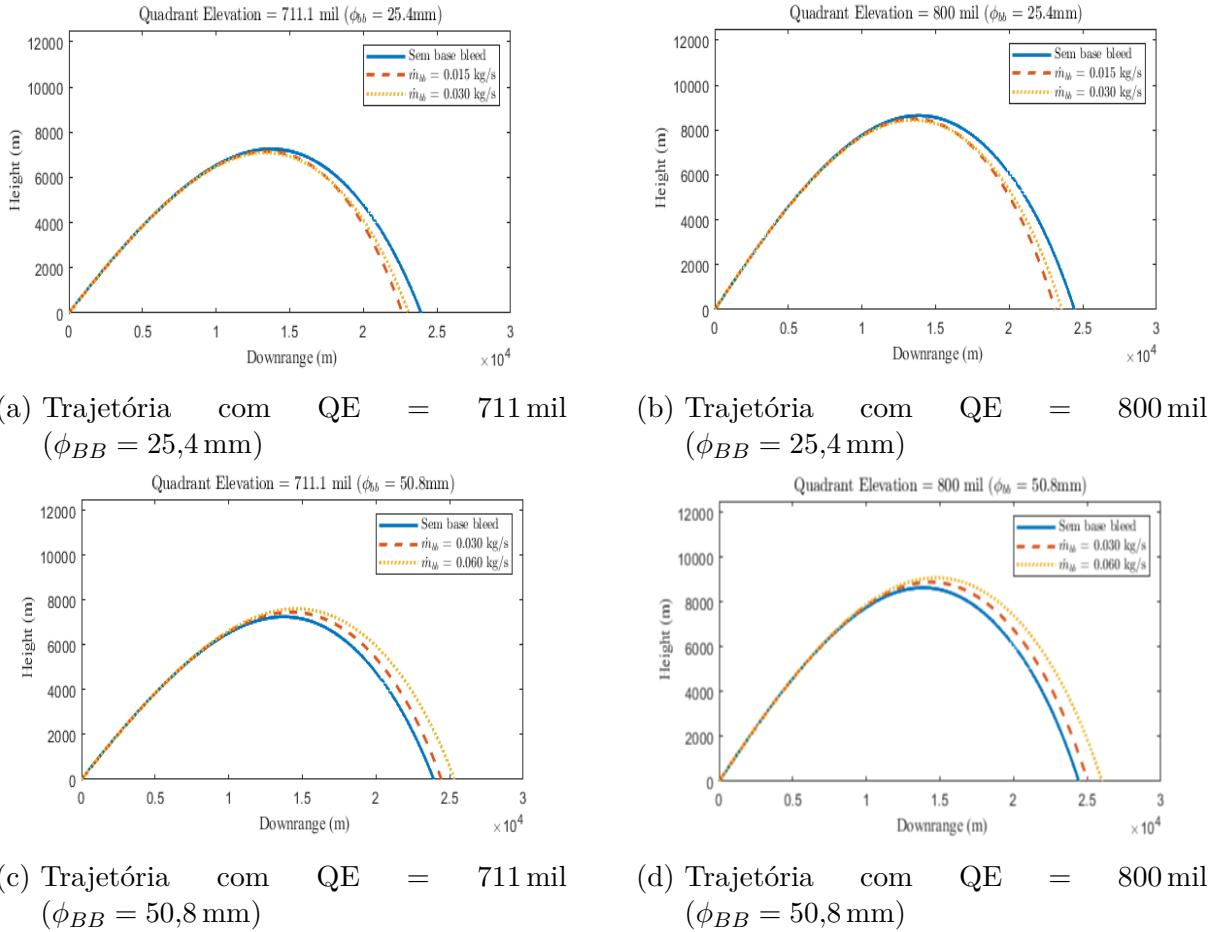


Figura 33 – Projétil com diferentes saídas de bocal e diferentes vazões

Tabela 12 – Trajetória Balística com QE = 800 mil e  $v = 878$  m/s ( $\phi_{BB} = 25,4$  mm)

Vazão Mássica	Alcance	Aumento	Apogeu	Aumento
0 kg/s	24429,5 m	–	8638,6 m	–
0,015 kg/s	23117,9 m	-5,4 %	8493,6 m	-1,7 %
0,030 kg/s	23577,0 m	-3,5 %	8435,9 m	-2,3 %

Fonte: Autor.

Ao aumentar o ângulo de elevação de disparo houve um incremento percentual sobre o alcance e o apogeu também, como demonstrado na Figura 33d. Os resultados seguiram a mesma ordem de crescimento do deslocamento, quando se compara a Tabela 13 com a Tabela 14. De qualquer forma, o diâmetro de saída do bocal tem forte influência na balística externa do projétil.

Tabela 13 – Trajetória Balística com QE = 711 mil e v = 878 m/s ( $\phi_{BB} = 50,8 \text{ mm}$ )

Vazão Mássica	Alcance	Aumento	Apogeu	Aumento
0 kg/s	23922,2 m	–	7256,8 m	–
0,030 kg/s	24439,8 m	2,2 %	7463,5 m	2,8 %
0,060 kg/s	25334,3 m	5,9 %	7616,6 m	5,0 %

Fonte: Autor.

Tabela 14 – Trajetória Balística com QE = 800 mil e v = 878 m/s ( $\phi_{BB} = 50,8 \text{ mm}$ )

Vazão Mássica	Alcance	Aumento	Apogeu	Aumento
0 kg/s	24429,5 m	–	8638,6 m	–
0,030 kg/s	25030,7 m	2,5 %	8892,7 m	2,9 %
0,060 kg/s	26008,5 m	6,5 %	9084,5 m	5,2 %

Fonte: Autor.

## 8 COMENTÁRIOS FINAIS

O trabalho iniciou a partir da pesquisa bibliográfica sobre aerodinâmica de um projétil de artilharia. A partir deste ponto, duas regiões de domínio foram modeladas sob as mesmas condições de contorno. Definindo-se estas condições e modificando o regime de velocidade do escoamento, foram realizados testes com CFD a partir dos modelos RANS de turbulência Spalart-Allmaras (31) e SST  $\kappa-\omega$  (21, 33, 32), considerando ou não o efeito *Base Bleed*.

Como se trabalha com fenômenos de turbulência aplicados em escoamentos compressíveis, algumas simplificações foram implementadas nas simulações CFD: domínio bidimensional e axissimétrico, conforme as principais referências (4, 25); regime estacionário, logo não se analisou a influência do tempo no escoamento; fluido como gás ideal para fechar o algoritmo *density-based* com as equações de gases perfeitos para a pressão em função da densidade e temperatura e a viscosidade pela lei de Sutherland.

As primeiras soluções para os modelos SST  $\kappa - \omega$  foram baseadas no projétil inerte (sem *Base Bleed*) para análise de convergência, pautados em valores de referência (4) do coeficiente de arrasto aerodinâmico para um projétil de calibre 155mm. Duas malhas foram testadas sob o mesmo domínio computacional, a fim de analisar qualitativamente e quantitativamente os resultados de acordo com o número de elementos. Só então que foram verificadas as influências do diâmetro de injeção,  $d_{BB}$ ; da temperatura dos gases na saída do bocal,  $T_{BB}$ , e da vazão do sistema *Base Bleed*,  $\dot{m}_{BB}$ . Para o modelo Spalart-Allmaras (S-A), a verificação foi feita apenas com projétil ativo (com *Base Bleed*) com diâmetro e vazão do sistema *Base Bleed* fixados para verificar a diferença dos resultados entre as metodologias S-A e SST  $\kappa - \omega$ .

Utilizou-se o software Fluent (39) para aplicação dos modelos de turbulência e respectivas soluções. A abordagem de discretização do código é baseada no Método de Volumes Finitos (65, 66). Todos os casos supracitados fizeram uso do esquema *upwind* de segunda ordem para a discretização dos termos advectivos e difusivos. Para os gradientes das propriedades foi escolhido o método dos Mínimos Quadrados por ser um método mais barato computacionalmente (39). Em razão do regime de voo do projétil, o algoritmo *density-based* (40, 41, 42) foi aplicado em razão da compressibilidade. Para resolução do sistemas algébricos gerados em cada simulação CFD o método *multigrid* (47) foi selecionado. A conjunção dessas técnicas garantiu os resultados nos dois modelos RANS selecionados.

Os valores encontrados pelas simulações CFD possibilitaram a aplicação do modelo de trajetória ponto-massa modificado (MPMTM), padronização organizada pela OTAN (10) e aplicada para projetos axissimétrica estabilizados pela rotação. Esse modelo tem

o foco em reduzir custos computacionais quando comparado ao modelo de dinâmica de corpo rígido, inclusive para operações de combate, fazendo dele o mais indicado para elaboração de tabela de tiros de munições. O código desenvolvido em MATLAB® calculou as condições da munição 155mm disparadas em 2 ângulos de elevação diferentes; com e sem *Base Bleed*; assim como a variação de parâmetros nos casos em que disparou o projétil ativo: o diâmetro de saída do bocal de injeção e a vazão mássica do propelente.

## 8.1 Conclusão

Os resultados para as simulações de fluidodinâmica computacional mostraram uma tendência positiva no que se refere aos valores do coeficiente de arrasto, tendo em vista que a implementação da tecnologia *Base Bleed* implica em mexer em parâmetros sensíveis, inclusive de design da munição. A abordagem deste estudo foi desenvolver estimativas iniciais, mesmo sem formulações químicas realísticas para simular a queima do propelente atuante na região a jusante do projétil. Contudo, os parâmetros avaliados como o diâmetro de saída do bocal de injeção, a temperatura e a vazão mostraram influência significativa nos resultados finais.

O modelo SST  $\kappa - \omega$  conseguiu predizer os valores do  $C_D$  para o projétil inerte com certa razoabilidade, assim como descrito nas referências (4, 23). Contudo, a interação entre a frente de chama do *Base Bleed* e a esteira turbulenta presente na base do projétil dificulta as estimativas com maior acurácia usando modelos RANS (23). Em seu estudo, Spalart e Allmaras(31) afirma que é difícil modelar um choque quando há um alto gradiente adverso de pressão, além de outros colaboradores da pesquisa deste artigo mencionarem que são produzidos resultados de baixa qualidade em escoamentos que há um degrau descendente (*backward-facing step*) por causa das tensões produzidas. Este argumento também pode explicar a falta de precisão dos resultados na região após o *boat-tail*.

Conforme visto nas referências, o regime transônico apresentou os valores mais elevados para o coeficiente de arrasto, enquanto o regime supersônico relatou uma queda mais gradual neste coeficiente com o aumento do número de Mach, com algumas singularidades ao mudar certas variáveis. O parâmetro mais relevante para mudar o arrasto de base foi o diâmetro de saída do bocal, apesar de tanto a vazão mássica e a temperatura mostrarem uma redução.

A implementação do software para o cálculo da trajetória com 4 graus de liberdade foi feita sem considerar os efeitos de ignição e com vazão constante do *Base Bleed* durante toda a queima, o que não é um modelo realístico, tendo em vista que a taxa de queima de propelente tem grande influência da rotação e da pressão atmosférica. Como a geometria do projétil foi simplificada para se ter estimativas do  $C_D$ , a massa da câmara foi considerada apenas o conteúdo do propelente. Sabe-se que em projéteis de artilharia a base contém

cavidade, fora os componentes adicionados para fazer a propulsão sólida que adicionam massa e mudam a estrutura.

## 8.2 Recomendações

Espera-se em estudos futuros que novos fatores geométricos sejam considerados em projeto, como o design da câmara geradora de gás acoplada à munição; os efeitos de rotação do projétil; a contribuição do sistema de ignição para a tecnologia *Base Bleed* e implementação de possíveis formulações para o propelente a ser inserido na câmara geradora de gás, já que assumir os gases em combustão como perfeitos é uma simplificação para garantir um ponto de partida do projeto.

Em se tratando de simulações numéricas, recomenda-se implementar modelos de turbulência LES ou DNS para captar a mistura do jato do *Base Bleed* com a esteira produzida no escoamento na base da munição, seguindo a linha das principais referências bibliográficas (23, 25). A simplificação da malha bidimensional e axissimétrica só foi possível pois não se estudou a influência do ângulo de ataque nos coeficientes aerodinâmicos. Portanto, um caminho natural para esta análise seria desenvolver uma malha tridimensional.

Com os avanços tecnológicos, espera-se que simulações com processamento em placa gráfica (GPU) possam ser utilizados para otimização dos resultados e permitindo análises mais refinadas, inclusive com malhas com um número maior de elementos e modelos de turbulência mais complexos do que os baseados em RANS.

Sobre o modelo de trajetória, um estudo de eficiência computacional para limpeza do código seria um passo concreto para otimização dos processos de predição de voo. O uso de uma linguagem de programação compilada além do MATLAB® também seria interessante para aumentar a velocidade de processamento, já que se trata de uma linguagem interpretada e por ser um produto comercial, tem restrições de uso para desenvolver um software que contemple os interesses de pesquisa e de transferência tecnológica para o Exército Brasileiro.

Finalmente, os estudos desenvolvidos neste projeto produziram conteúdos para publicação em congressos científicos, dentre os quais 1 publicação para a Revista Militar de Ciência e Tecnologia (RMCT) e 4 artigos para congressos de Engenharia realizados em 2022 (III CBCFD, XIX ENCIT, XI CONEM e XLIII CILAMCE). Acredita-se que esforços futuros em novas simulações numéricas permitam a esta linha de pesquisa um potencial de desenvolvimento tecnológico de interesse para o Exército Brasileiro.

## REFERÊNCIAS

- 1 DALI, M. A.; JARAMAZ, S. Optimization of artillery projectiles base drag reduction using hot base flow. *Thermal Science*, v. 23, n. 01, p. 353–364, 2018. Disponível em: <<http://www.doiserbia.nb.rs/Article.aspx?id=0354-98361800210D#.YxIKTHbMLrc>>.
- 2 SAHU, J.; NIETUBICZ, C. J.; STEGER, J. L. Navier-stokes computations of projectile base flow with and without mass injection. *AIAA Journal*, v. 23, n. 9, p. 1348–1355, 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.9091>>.
- 3 SEDNEY, R. *Review of base drag*. Aberdeen, Maryland, USA: U.S. Army Ballistic Research Laboratories Aberdeen Proving Ground, 1966. 50 p.
- 4 MAHMOUD, O. M. K. M.; SULIMAN, M. A. Y.; AL-SANABAWY, M.; ABDEL-HAMID, O. E. Computational investigation of base drag reduction for a projectile at different flight regimes. In: *International Conference on Aerospace Sciences & Aviation Technology*. Cairo, Egito: Military Technical College, 2009. p. 14. 25 jun. de 2021. Disponível em: <[https://asat.journals.ekb.eg/article\\_22270\\_3367f3fe4aaf5352ba793eb772bcda01.pdf](https://asat.journals.ekb.eg/article_22270_3367f3fe4aaf5352ba793eb772bcda01.pdf)>.
- 5 MATHUR, T.; DUTTON, J. C. Velocity and turbulence measurements in a supersonic base flow with mass bleed. *AIAA Journal*, AIAA, v. 34, n. 6, p. 1153–1159, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.13206>>.
- 6 ANDERSSON, K.; GUNNERS, N.; HELLGREN, R. "swedish base bleed"— increasing the range of artillery projectiles through base flow. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, Wiley Online Library, v. 1, p. 69 – 73, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/prep.19760010402>>.
- 7 JELIĆ, Z. *Optimisation of design parameters for modular range enhanced projectile*. 303 p. Tese (Doutorado) — Cranfield University, Cranfield, UK, 2016. Disponível em: <<https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/handle/1826/10260>>.
- 8 SILVA, W. R. R. da; LUCENA, R. M. de; MANGIAVACCHI, N.; PONTES, J. da R. M.; CHALHUB, D.; PINHEIRO, G. R. V.; NEUBARTH, L.; LEMOS, M. F.; JUNIOR, L. S. Numerical solutions for a ballistic trajectory with drag reduction provided by a base bleed unit. In: *Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*. Bento Gonçalves, RS, Brasil: ABCM, 2020. p. 7. 04 set. 2022. Disponível em: <<https://abcm.org.br/proceedings/view/CIT20/0600>>.
- 9 LIESKE, R.; REITER, M. Equations of motion for a modified point mass trajectory. *Ballistic Research Laboratories*, v. 1, n. 1, p. 24, 1966.
- 10 ORGANIZAÇÃO DO TRATADO DO ATLÂNTICO NORTE. *The Lieske Modified Point Mass and Five Degrees of Freedom Trajectory Models - AOP-4355 EDITION A*. 3. ed. Washington DC, Estados Unidos da América, 2009. 95 p.
- 11 KAURINKOSKI, P.; HELLSTEN, A. Numerical simulation of a supersonic base-bleed projectile with improved turbulence modeling. *Journal of Spacecraft and Rockets*, AIAA, v. 35, n. 5, p. 602–611, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/2.3392>>.

- 12 SAHU, J.; HEAVEY, K. R. Numerical investigation of supersonic base flow with base bleed. *AIAA Journal*, AIAA, v. 34, n. 1, p. 62–69, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/2.3173>>.
- 13 LEE, Y.-K.; KIM, H.-D. Optimization of mass bleed control for base drag reduction of supersonic flight bodies. *Journal of Thermal Sciences*, v. 15, n. 3, p. 206–212, 2006.
- 14 BOURDON, C. J.; DUTTON, J. C. Visualization of a central bleed jet in an axisymmetric, compressible base flow. *Physics of Fluids*, American Institute of Physics, v. 15, n. 2, p. 499–510, 2003. ISSN 1070-6631.
- 15 TORANGATTI, K.; BASAWARAJ, D. Drag prediction and validation of standard m549 155mm projectile. *International Journal of Engineering Research and Reviews*, v. 2, n. 3, p. 26–32, 2014. ISSN 2348-697X.
- 16 SOR, W. L. *Aerodynamic Validation of Emerging Projectile Configurations*. 85 p. Master of Science in Mechanical Engineering — Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2012. 01 set. de 2022. Disponível em: <<https://calhoun.nps.edu/handle/10945/14852?show=full>>.
- 17 BARANOWSKI, L. Equations of motion of a spin-stabilized projectile for flight stability testing. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, v. 51, n. 1, p. 235–246, November 2013. ISSN 1429-2955. Disponível em: <<http://www.ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v51n1p235>>.
- 18 BARANOWSKI, L. Numerical testing of flight stability of spin-stabilized artillery projectiles. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, v. 51, n. 2, p. 375–385, November 2013. ISSN 1429-2955. Disponível em: <<http://www.ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v51n2p375>>.
- 19 BARANOWSKI, L. Feasibility analysis of the modified point mass trajectory model for the need of ground artillery fire control systems. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, v. 51, n. 3, p. 511–522, August 2013. ISSN 1429-2955. Disponível em: <<http://www.ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v51n3p511>>.
- 20 XUE, X.; YU, Y. An improvement of the base bleed unit on base drag reduction and heat energy addition as well as mass addition. *Applied Thermal Engineering*, v. 109, p. 238–250, 2016. ISSN 1359-4311.
- 21 MENTER, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, AIAA, v. 32, n. 8, p. 1598–1605, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.12149>>.
- 22 BELAIDOUNI, H.; ZIVKOVIC, S.; SAMARDZIC, M. Numerical simulations in obtaining drag reduction for projectile with base bleed. *Scientific Technical Review*, v. 66, n. 2, p. 36–42, 2016.
- 23 NICOLÁS-PÉREZ, F.; VELASCO, F. J. S. V.; GARCÍA-CASCALES, J. R.; OTÓN-MARTÍNEZ, R. A.; LOPEZ-BELCHI, A.; MORATILLA, D.; REY, F.; LASO, A. On the accuracy of RANS, DES and LES turbulence models for predicting drag reduction with Base Bleed technology. *Aerospace Science and Technology*, v. 67, p. 126–140, 2017. ISSN 1270-9638. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963816302577>>.

- 24 DALI, M. A.; JARAMAZ, S. Various methods of artillery projectiles base drag reduction. In: *International Scientific Conference on Defensive Technologie*. Belgrado, Sérvia: OTEH Defensive Technologies, 2018. p. 6. 04 set. 2022. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/329522542\\_VARIOUS\\_METHODS\\_OF\\_ARTILLERY\\_PROJECTILES\\_BASE\\_DRAG\\_REDUCTION](https://www.researchgate.net/publication/329522542_VARIOUS_METHODS_OF_ARTILLERY_PROJECTILES_BASE_DRAG_REDUCTION)>.
- 25 LUCENA, R. M. de; MANGIAVACCHI, N.; PONTES, J. da R. M.; CHALHUB, D.; PINHEIRO, G. R. V.; SILVA, W. R. R. da; NEUBARTH, L.; LEMOS, M. F.; JUNIOR, L. S. Numerical aerodynamic simulation of an artillery projectile with a base bleed system. In: *Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*. Bento Gonçalves, RS, Brasil: ABCM, 2020. p. 7. 04 set. 2022. Disponível em: <<https://abcm.org.br/proceedings/view/CIT20/0617>>.
- 26 PINHEIRO, G. R. V.; LUCENA, R. M. de; MANGIAVACCHI, N.; PONTES, J. da R. M.; CHALHUB, D.; SILVA, W. R. R. da; NEUBARTH, L.; LEMOS, M. F.; JUNIOR, L. S. Simulation and static tests of base bleed gas generators. In: *Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*. Bento Gonçalves, RS, Brasil: ABCM, 2020. p. 5. 04 set. 2022. Disponível em: <<https://abcm.org.br/proceedings/view/CIT20/0626>>.
- 27 REDDY, D. S. K.; SAH, P. K.; SHARMA, A. Prediction of drag coefficient of a base bleed artillery projectile at supersonic mach number. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 2054, n. 1, p. 012–013, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2054/1/012013>>.
- 28 REZENDE, A. L. T. *Numerical Investigation of the Turbulent Flow Separation Bubble Over Inclined Thin Flat Plate*. 263 p. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- 29 SOUZA, J. F. A. de; OLIVEIRA, L. R. de; AZEVEDO, J. L. L. de; SOARES, I. D.; MATA, M. M. Uma revisão sobre a turbulência e sua modelagem. *Revista Brasileira de Geofísica (online)*, v. 29, n. 1, p. 21–41, 2011. ISSN 0102-261X.
- 30 NETO, A. da S. Fundamentos da turbulência nos fluidos. In: \_\_\_\_\_. *Coleção Cadernos de Turbulência*. Rio de Janeiro: ABCM, 2002. v. 1, cap. 1, p. 1–48.
- 31 SPALART, P.; ALLMARAS, S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA, v. 439, n. 8, p. 5–21, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.1992-439>>.
- 32 MENTER, F. R. Review of the shear-stress transport turbulence model experience from an industrial perspective. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, v. 23, n. 4, p. 305–316, 2009.
- 33 MENTER, F.; KUNTZ, M.; LANGTRY, R. Ten years of industrial experience with the sst turbulence model. *Heat and Mass Transfer*, Springer Nature, v. 4, p. 625–632, 1 2003. ISSN 1432-1181.
- 34 ANDERSON, J. D. *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. 3. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2002. 784 p.
- 35 MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®*. 1. ed. Beirute, Líbano: Springer Cham, 2015. 791 p.

- 36 WILCOX, D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. 3. ed. La Cañada: DCW Industries, 2006. 522 p.
- 37 FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M.; STREET, R. L. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 4. ed. Switzerland: Springer Cham, 2020. 596 p.
- 38 CHORIN, A. J. Numerical solutions of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 22, n. 104, p. 18, 1968.
- 39 ANSYS® Academic Research Fluent, Help System, Fluent Theory Guide. Release 2021r2. USA: Ansys Inc., 2021. 1024 p.
- 40 WEISS, J. M.; MARUSZEWSKI, J. P.; SMITH, W. A. Preconditioning applied to variable and constant density flows. *AIAA Journal*, AIAA, v. 33, n. 11, p. 2050–2057, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.12946>>.
- 41 WEISS, J. M.; MARUSZEWSKI, J. P.; SMITH, W. Implicit solution of the navier-stokes equations on unstructured meshes. In: *Computational Fluid Dynamics Conference*. Snowmass Village, Colorado, USA: AIAA, 1997. p. 139–149. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.1997-2103>>.
- 42 WEISS, J. M.; MARUSZEWSKI, J. P.; SMITH, W. A. Implicit solution of preconditioned navier- stokes equations using algebraic multigrid. *AIAA Journal*, AIAA, v. 37, n. 1, p. 29–36, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/2.689>>.
- 43 VERSTEEG, H.; MALALASEKERA, W. *Introduction to Computational Fluid Dynamics, An: The Finite Volume Method*. 2. ed. Loughborough University, UK: Pearson Prentice-Hall, 2007. 517 p.
- 44 ANDERSON, W. K.; BONHAUS, D. L. An implicit upwind algorithm for computing turbulent flows on unstructured grids. *Computers Fluids*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 1–21, 1994. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20040112057/downloads/20040112057.pdf>>.
- 45 LEONARD, B. P.; MOKHTARI, S. Ultra-sharp nonoscillatory convection schemes for high-speed steady multidimensional flow. *NASA Technical Memorandum 102568 (ICOMP-90-12)*, p. 48, 1990. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19900012254/downloads/19900012254.pdf?attachment=true>>.
- 46 LEONARD, B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North-Holland Publishing Company, v. 19, n. 1, p. 59–98, 1979. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782579900343>>.
- 47 HUTCHINSON, B. R.; RAITHBY, G. D. A multigrid method based on the additive correction strategy. *Numerical Heat Transfer*, Taylor & Francis, v. 9, n. 5, p. 511–537, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10407788608913491>>.
- 48 POPE, S. B. *Turbulent Flows*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 802 p.

- 49 JONES, W.; LAUNDER, B. E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Pergamon Press, v. 15, n. 2, p. 301–314, 1972. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931072900762>>.
- 50 LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North-Holland Publishing Company, v. 3, n. 2, p. 269–289, 1974. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782574900292>>.
- 51 LAUNDER, B. E.; SHARMA, B. I. Application of the energy-dissipation model of flow near a spinning disc. *Letters in Heat Mass Transfer*, Pergamon Press, v. 1, p. 131–138, 1974. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0094-4548\(74\)90150-7](https://doi.org/10.1016/0094-4548(74)90150-7)>.
- 52 WILCOX, D. C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, v. 26, n. 11, p. 1299–1310, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.10041>>.
- 53 WILCOX, D. C. Formulation of the k-w turbulence model revisited. *AIAA Journal*, v. 46, n. 11, p. 2823–2838, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/1.36541>>.
- 54 MENTER, F. R. Influence of freestream values on k-omega turbulence model predictions. *AIAA Journal*, AIAA, v. 30, n. 6, p. 1657–1659, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.11115>>.
- 55 CAZALBOU, J. B.; SPALART, P. R.; BRADSHAW, P. On the behavior of two-equation models at the edge of a turbulent region. *Physics of Fluids*, AIP Publishing LLC., v. 6, n. 5, p. 1797–1804, 1994. 15 de nov. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.868241>>.
- 56 MCCOY, R. *Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. 2. ed. Atglen, USA: Schiffer Publishing, 2012. 328 p.
- 57 CARLUCCI, D. E.; JACOBSON, S. S. *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition*. 3. ed. Boca Raton, Florida, United States of America: CRC Press Taylor & Francis Group, 2018. 654 p.
- 58 INTERNATIONAL CIVIL AVIATION ORGANIZATION. *Manual of the ICAO Standard Atmosphere: Extended to 80 Kilometres (262 500 Feet)*. Illinois, Chicago, USA, 1993. 304 p.
- 59 RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. Campinas, São Paulo: Pearson Makron Books, 1997.
- 60 GAUCHOUX, J.; COUPEZ, D.; LECOUSTRE, M. Base bleed solid propellant - properties and processibility for industrial solid propellant. *International Symposium on Special Topics in Chemical Propulsion*, v. 1, n. 1-6, p. 19–31, 1991. ISSN 2150-766X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1615/IntJEnergeticMaterialsChemProp.v1.i1-6.30>>.
- 61 BALON, R.; KOMENDA, J. Analysis of the 155-mm erfbb/bb projectile trajectory. *Advances in Military Technology*, v. 1, n. 1, p. 91–114, 2006. ISSN 1802-2308. Disponível em: <<https://www.aimt.cz/index.php/aimt/article/view/1718>>.

- 62 ABOU-ELELA, H.; IBRAHIM, A.; MAHMOUD, O. M. K. M.; ABDEL-HAMID, O. E. Ballistic analysis of a projectile provided with base bleed unit. In: *International Conference on Aerospace Sciences & Aviation Technology*. Cairo, Egito: Military Technical College, 2013. p. 1–22. 10 fev. de 2022. Disponível em: <[https://asat.journals.ekb.eg/article\\_22270\\_3367f3fe4aaf5352ba793eb772bcd01.pdf](https://asat.journals.ekb.eg/article_22270_3367f3fe4aaf5352ba793eb772bcd01.pdf)>.
- 63 SKANDE, M. *Numerical Solution to a nonlinear external ballistics model for a direct fire control system*. 78 p. Master of Science — KTH Vetenstap Och Konst, Stockholm, Sweden, 2014. 01 set. de 2022. Disponível em: <<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:767625/FULLTEXT01.pdf>>.
- 64 LIM, W. Y. *Predicting the Accuracy of Unguided Artillery Projectiles*. 113 p. Master of Science in Mechanical Engineering — Naval Postgraduate School, Monterey, Califórnia, USA, 2016. 10 ago. de 2022. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10945/50581>>.
- 65 McDONALD, P. W. The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades. In: *ASME 1971 International Gas Turbine Conference and Products Show*. Houston, Texas, USA: ASME Digital Collection, 1971. (Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 1), p. 7. Disponível em: <<https://asmedigitalcollection.asme.org/GT/proceedings-pdf/GT1971/79825/V001T01A089/2390644/v001t01a089-71-gt-89.pdf>>.
- 66 MACCOMARCK, R. W.; PAULLAY, A. J. Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators. In: *Aerospace Sciences Meeting*. San Diego, CA, USA: AIAA, 1972. p. 8. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.1972-154>>.
- 67 DAVENAS, A. Chapter 8: The main families and use of solid propellants. In: \_\_\_\_\_. *Solid Rocket Propulsion Technology*. Amsterdam: Pergamon, 1993. p. 329–367. ISBN 978-0-08-040999-3. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080409993500138>>.

## APÊNDICE A – COEFICIENTES AERODINÂMICOS - SEM BASE BLEED

Neste apêndice, a Tabela 15 mostra os coeficientes aerodinâmicos calculados para o lançamento do projétil sem *Base Bleed*.

Tabela 15 – Coeficientes Aerodinâmicos (sem *Base Bleed*)

Mach	$C_{X_0}$	$C_{X_{\alpha^2}}$	$C_{Z_\alpha}$	$C_{mag-f}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{spin}$	$C_{X_b}$
0,01	0,1359	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,4	0,1359	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,6	0,1288	1,9900	1,6800	-0,3550	3,3000	-0,0270	0,0930
0,7	0,06345	2,2200	1,6900	-0,3600	3,3500	-0,0260	0,0960
0,75	0,1539	2,3100	1,6900	-0,3600	3,4000	-0,0250	0,0980
0,8	0,10402	2,3900	1,7300	-0,3700	3,5000	-0,0250	0,1000
0,85	0,20344	2,5300	1,7600	-0,3800	3,6000	-0,0240	0,1020
0,875	0,2845	2,6400	1,8100	-0,3850	3,7500	-0,0240	0,1030
0,9	0,19867	2,7400	1,8800	-0,3950	3,9000	-0,0240	0,1040
0,925	0,2433	2,8600	1,9900	-0,4450	4,2000	-0,0240	0,1050
0,95	0,26077	3,0000	2,0900	-0,5050	4,2000	-0,0230	0,1060
0,975	0,2854	3,1800	2,1700	-0,4500	4,0000	-0,0230	0,1070
1,0	0,3172	3,3900	2,2100	-0,4150	3,7120	-0,0248	0,0000
1,025	0,3303	3,6100	2,2400	-0,4650	3,5810	-0,0248	0,0000
1,05	0,3533	3,8400	2,2600	-0,4450	3,4990	-0,0246	0,0000
1,1	0,3558	4,3500	2,2900	-0,4150	3,4600	-0,0242	0,0000
1,2	0,3450	4,8210	2,3500	-0,3750	3,4850	-0,0238	0,0000
1,35	0,3593	4,3100	2,4300	-0,3400	3,4740	-0,0230	0,0000
1,5	0,3032	3,8100	2,5300	-0,3250	3,2650	-0,0222	0,0000
1,75	0,2696	3,3400	2,6400	-0,3150	3,0660	-0,0212	0,0000
2,0	0,2589	2,8100	2,7400	-0,2950	3,0070	-0,0206	0,0000
2,25	0,2366	2,5100	2,8000	-0,2900	2,9210	-0,0198	0,0000
2,5	0,2227	2,2300	2,8100	-0,2900	2,8770	-0,0192	0,0000
3,0	0,1962	1,7800	2,7700	-0,2900	2,8280	-0,0180	0,0000

## APÊNDICE B – COEFICIENTES AERODINÂMICOS – TEMPERATURA DE SAÍDA 300K

Neste apêndice, a Tabela 16 mostra os coeficientes aerodinâmicos calculados para o lançamento do projétil com *Base Bleed* em que a temperatura de saída dos gases foi fixada em 300K.

Tabela 16 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed -  $T_{bb} = 300K$ )

Mach	$C_{X_0}$	$C_{X_{\alpha^2}}$	$C_{Z_\alpha}$	$C_{mag-f}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{spin}$	$C_{X_b}$
0,01	0,1705	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,4	0,1705	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,6	0,1342	1,9900	1,6800	-0,3550	3,3000	-0,0270	0,0930
0,7	0,1265	2,2200	1,6900	-0,3600	3,3500	-0,0260	0,0960
0,75	0,1499	2,3100	1,6900	-0,3600	3,4000	-0,0250	0,0980
0,8	0,1210	2,3900	1,7300	-0,3700	3,5000	-0,0250	0,1000
0,85	0,1319	2,5300	1,7600	-0,3800	3,6000	-0,0240	0,1020
0,875	0,1286	2,6400	1,8100	-0,3850	3,7500	-0,0240	0,1030
0,9	0,1578	2,7400	1,8800	-0,3950	3,9000	-0,0240	0,1040
0,925	0,2129	2,8600	1,9900	-0,4450	4,2000	-0,0240	0,1050
0,95	0,2100	3,0000	2,0900	-0,5050	4,2000	-0,0230	0,1060
0,975	0,3152	3,1800	2,1700	-0,4500	4,0000	-0,0230	0,1070
1,0	0,3641	3,3900	2,2100	-0,4150	3,7120	-0,0248	0,0000
1,025	0,3724	3,6100	2,2400	-0,4650	3,5810	-0,0248	0,0000
1,05	0,3795	3,8400	2,2600	-0,4450	3,4990	-0,0246	0,0000
1,1	0,3805	4,3500	2,2900	-0,4150	3,4600	-0,0242	0,0000
1,2	0,3675	4,8210	2,3500	-0,3750	3,4850	-0,0238	0,0000
1,35	0,3454	4,3100	2,4300	-0,3400	3,4740	-0,0230	0,0000
1,5	0,3254	3,8100	2,5300	-0,3250	3,2650	-0,0222	0,0000
1,75	0,2950	3,3400	2,6400	-0,3150	3,0660	-0,0212	0,0000
2,0	0,2711	2,8100	2,7400	-0,2950	3,0070	-0,0206	0,0000
2,25	0,2499	2,5100	2,8000	-0,2900	2,9210	-0,0198	0,0000
2,5	0,2314	2,2300	2,8100	-0,2900	2,8770	-0,0192	0,0000
3,0	0,2023	1,7800	2,7700	-0,2900	2,8280	-0,0180	0,0000

## APÊNDICE C – COEFICIENTES AERODINÂMICOS – TEMPERATURA DE SAÍDA 1500K

Neste apêndice, a Tabela 17 mostra os coeficientes aerodinâmicos calculados para o lançamento do projétil com *Base Bleed* em que a temperatura de saída dos gases foi fixada em 1500K.

Tabela 17 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed -  $T_{bb} = 1500\text{K}$ )

Mach	$C_{X_0}$	$C_{X_{\alpha^2}}$	$C_{Z_\alpha}$	$C_{mag-f}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{spin}$	$C_{X_b}$
0,01	0,1705	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,4	0,1705	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,6	0,1342	1,9900	1,6800	-0,3550	3,3000	-0,0270	0,0930
0,7	0,12857	2,2200	1,6900	-0,3600	3,3500	-0,0260	0,0960
0,75	0,1499	2,3100	1,6900	-0,3600	3,4000	-0,0250	0,0980
0,8	0,12349	2,3900	1,7300	-0,3700	3,5000	-0,0250	0,1000
0,85	0,13390	2,5300	1,7600	-0,3800	3,6000	-0,0240	0,1020
0,875	0,1452	2,6400	1,8100	-0,3850	3,7500	-0,0240	0,1030
0,9	0,15865	2,7400	1,8800	-0,3950	3,9000	-0,0240	0,1040
0,925	0,2129	2,8600	1,9900	-0,4450	4,2000	-0,0240	0,1050
0,95	0,21207	3,0000	2,0900	-0,5050	4,2000	-0,0230	0,1060
0,975	0,3152	3,1800	2,1700	-0,4500	4,0000	-0,0230	0,1070
1,0	0,3660	3,3900	2,2100	-0,4150	3,7120	-0,0248	0,0000
1,025	0,3744	3,6100	2,2400	-0,4650	3,5810	-0,0248	0,0000
1,05	0,3812	3,8400	2,2600	-0,4450	3,4990	-0,0246	0,0000
1,1	0,3814	4,3500	2,2900	-0,4150	3,4600	-0,0242	0,0000
1,2	0,3673	4,8210	2,3500	-0,3750	3,4850	-0,0238	0,0000
1,35	0,3438	4,3100	2,4300	-0,3400	3,4740	-0,0230	0,0000
1,5	0,3233	3,8100	2,5300	-0,3250	3,2650	-0,0222	0,0000
1,75	0,2943	3,3400	2,6400	-0,3150	3,0660	-0,0212	0,0000
2,0	0,2698	2,8100	2,7400	-0,2950	3,0070	-0,0206	0,0000
2,25	0,2493	2,5100	2,8000	-0,2900	2,9210	-0,0198	0,0000
2,5	0,2286	2,2300	2,8100	-0,2900	2,8770	-0,0192	0,0000
3,0	0,1963	1,7800	2,7700	-0,2900	2,8280	-0,0180	0,0000

## APÊNDICE D – COEFICIENTES AERODINÂMICOS – DIÂMETRO 1 POLEGADA E VAZÃO 15 G/S

Neste apêndice, a Tabela 18 mostra os coeficientes aerodinâmicos calculados para o lançamento do projétil com *Base Bleed* em que a temperatura de saída dos gases foi fixada em 2306,15K, o diâmetro da saída do bocal foi de 25,4 mm (1 polegada) e vazão mássica de 0,015 kg/s.

Tabela 18 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed -  $\phi_{bb} = 25,4\text{mm}$ ,  $\dot{m}_{bb} = 0,015 \text{ kg/s}$  e  $T_{bb} = 2306,15\text{K}$ )

Mach	$C_{X_0}$	$C_{X_{\alpha^2}}$	$C_{Z_\alpha}$	$C_{mag-f}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{spin}$	$C_{X_b}$
0,01	0,1561	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,4	0,1561	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,6	0,1654	1,9900	1,6800	-0,3550	3,3000	-0,0270	0,0930
0,7	0,04748	2,2200	1,6900	-0,3600	3,3500	-0,0260	0,0960
0,75	0,1982	2,3100	1,6900	-0,3600	3,4000	-0,0250	0,0980
0,8	0,15409	2,3900	1,7300	-0,3700	3,5000	-0,0250	0,1000
0,85	0,24103	2,5300	1,7600	-0,3800	3,6000	-0,0240	0,1020
0,875	0,3356	2,6400	1,8100	-0,3850	3,7500	-0,0240	0,1030
0,9	0,17424	2,7400	1,8800	-0,3950	3,9000	-0,0240	0,1040
0,925	0,2601	2,8600	1,9900	-0,4450	4,2000	-0,0240	0,1050
0,95	0,27058	3,0000	2,0900	-0,5050	4,2000	-0,0230	0,1060
0,975	0,3020	3,1800	2,1700	-0,4500	4,0000	-0,0230	0,1070
1,0	0,3593	3,3900	2,2100	-0,4150	3,7120	-0,0248	0,0000
1,025	0,3701	3,6100	2,2400	-0,4650	3,5810	-0,0248	0,0000
1,05	0,3822	3,8400	2,2600	-0,4450	3,4990	-0,0246	0,0000
1,1	0,4013	4,3500	2,2900	-0,4150	3,4600	-0,0242	0,0000
1,2	0,3878	4,8210	2,3500	-0,3750	3,4850	-0,0238	0,0000
1,35	0,3857	4,3100	2,4300	-0,3400	3,4740	-0,0230	0,0000
1,5	0,3445	3,8100	2,5300	-0,3250	3,2650	-0,0222	0,0000
1,75	0,3019	3,3400	2,6400	-0,3150	3,0660	-0,0212	0,0000
2,0	0,2829	2,8100	2,7400	-0,2950	3,0070	-0,0206	0,0000
2,25	0,2644	2,5100	2,8000	-0,2900	2,9210	-0,0198	0,0000
2,5	0,2417	2,2300	2,8100	-0,2900	2,8770	-0,0192	0,0000
3,0	0,2163	1,7800	2,7700	-0,2900	2,8280	-0,0180	0,0000

## APÊNDICE E – COEFICIENTES AERODINÂMICOS – DIÂMETRO 1 POLEGADA E VAZÃO 30 G/S

Neste apêndice, a Tabela 19 mostra os coeficientes aerodinâmicos calculados para o lançamento do projétil com *Base Bleed* em que a temperatura de saída dos gases foi fixada em 2306,15K, o diâmetro da saída do bocal foi de 25,4mm (1 polegada) e vazão mássica de 0,030 kg/s.

Tabela 19 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed -  $\phi_{bb} = 25,4\text{mm}$ ,  $\dot{m}_{bb} = 0,030 \text{ kg/s}$  e  $T_{bb} = 2306,15\text{K}$ )

Mach	$C_{X_0}$	$C_{X_{\alpha^2}}$	$C_{Z_\alpha}$	$C_{mag-f}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{spin}$	$C_{X_b}$
0,01	0,1750	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,4	0,1750	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,6	0,1691	1,9900	1,6800	-0,3550	3,3000	-0,0270	0,0930
0,7	0,21505	2,2200	1,6900	-0,3600	3,3500	-0,0260	0,0960
0,75	0,1701	2,3100	1,6900	-0,3600	3,4000	-0,0250	0,0980
0,8	0,13850	2,3900	1,7300	-0,3700	3,5000	-0,0250	0,1000
0,85	0,21317	2,5300	1,7600	-0,3800	3,6000	-0,0240	0,1020
0,875	0,1734	2,6400	1,8100	-0,3850	3,7500	-0,0240	0,1030
0,9	0,18623	2,7400	1,8800	-0,3950	3,9000	-0,0240	0,1040
0,925	0,2382	2,8600	1,9900	-0,4450	4,2000	-0,0240	0,1050
0,95	0,24622	3,0000	2,0900	-0,5050	4,2000	-0,0230	0,1060
0,975	0,3371	3,1800	2,1700	-0,4500	4,0000	-0,0230	0,1070
1,0	0,3675	3,3900	2,2100	-0,4150	3,7120	-0,0248	0,0000
1,025	0,3985	3,6100	2,2400	-0,4650	3,5810	-0,0248	0,0000
1,05	0,4032	3,8400	2,2600	-0,4450	3,4990	-0,0246	0,0000
1,1	0,4038	4,3500	2,2900	-0,4150	3,4600	-0,0242	0,0000
1,2	0,3897	4,8210	2,3500	-0,3750	3,4850	-0,0238	0,0000
1,35	0,3658	4,3100	2,4300	-0,3400	3,4740	-0,0230	0,0000
1,5	0,3441	3,8100	2,5300	-0,3250	3,2650	-0,0222	0,0000
1,75	0,3131	3,3400	2,6400	-0,3150	3,0660	-0,0212	0,0000
2,0	0,2871	2,8100	2,7400	-0,2950	3,0070	-0,0206	0,0000
2,25	0,2652	2,5100	2,8000	-0,2900	2,9210	-0,0198	0,0000
2,5	0,2464	2,2300	2,8100	-0,2900	2,8770	-0,0192	0,0000
3,0	0,2160	1,7800	2,7700	-0,2900	2,8280	-0,0180	0,0000

## APÊNDICE F – COEFICIENTES AERODINÂMICOS – DIÂMETRO 2 POLEGADAS E VAZÃO 30 G/S

Neste apêndice, a Tabela 20 mostra os coeficientes aerodinâmicos calculados para o lançamento do projétil com *Base Bleed* em que a temperatura de saída dos gases foi fixada em 2306,15K, o diâmetro da saída do bocal foi de 50,8mm (2 polegadas) e vazão mássica de 0,030 kg/s.

Tabela 20 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed -  $\phi_{bb} = 50,8\text{mm}$ ,  $\dot{m}_{bb} = 0,030 \text{ kg/s}$  e  $T_{bb} = 2306,15\text{K}$ )

Mach	$C_{X_0}$	$C_{X_{\alpha^2}}$	$C_{Z_\alpha}$	$C_{mag-f}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{spin}$	$C_{X_b}$
0,01	0,1294	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,4	0,1294	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,6	0,0720	1,9900	1,6800	-0,3550	3,3000	-0,0270	0,0930
0,7	0,14091	2,2200	1,6900	-0,3600	3,3500	-0,0260	0,0960
0,75	0,1620	2,3100	1,6900	-0,3600	3,4000	-0,0250	0,0980
0,8	0,12645	2,3900	1,7300	-0,3700	3,5000	-0,0250	0,1000
0,85	0,15056	2,5300	1,7600	-0,3800	3,6000	-0,0240	0,1020
0,875	0,1100	2,6400	1,8100	-0,3850	3,7500	-0,0240	0,1030
0,9	0,15525	2,7400	1,8800	-0,3950	3,9000	-0,0240	0,1040
0,925	0,2069	2,8600	1,9900	-0,4450	4,2000	-0,0240	0,1050
0,95	0,22370	3,0000	2,0900	-0,5050	4,2000	-0,0230	0,1060
0,975	0,3108	3,1800	2,1700	-0,4500	4,0000	-0,0230	0,1070
1,0	0,3278	3,3900	2,2100	-0,4150	3,7120	-0,0248	0,0000
1,025	0,3390	3,6100	2,2400	-0,4650	3,5810	-0,0248	0,0000
1,05	0,3535	3,8400	2,2600	-0,4450	3,4990	-0,0246	0,0000
1,1	0,3556	4,3500	2,2900	-0,4150	3,4600	-0,0242	0,0000
1,2	0,3543	4,8210	2,3500	-0,3750	3,4850	-0,0238	0,0000
1,35	0,3348	4,3100	2,4300	-0,3400	3,4740	-0,0230	0,0000
1,5	0,3127	3,8100	2,5300	-0,3250	3,2650	-0,0222	0,0000
1,75	0,2815	3,3400	2,6400	-0,3150	3,0660	-0,0212	0,0000
2,0	0,2633	2,8100	2,7400	-0,2950	3,0070	-0,0206	0,0000
2,25	0,2438	2,5100	2,8000	-0,2900	2,9210	-0,0198	0,0000
2,5	0,2278	2,2300	2,8100	-0,2900	2,8770	-0,0192	0,0000
3,0	0,2000	1,7800	2,7700	-0,2900	2,8280	-0,0180	0,0000

## APÊNDICE G – COEFICIENTES AERODINÂMICOS – DIÂMETRO 2 POLEGADAS E VAZÃO 60 G/S

Neste apêndice, a Tabela 21 mostra os coeficientes aerodinâmicos calculados para o lançamento do projétil com *Base Bleed* em que a temperatura de saída dos gases foi fixada em 2306,15K, o diâmetro da saída do bocal foi de 50,8mm (2 polegadas) e vazão mássica de 0,060 kg/s.

Tabela 21 – Coeficientes Aerodinâmicos (com Base Bleed -  $\phi_{bb} = 50,8\text{mm}$ ,  $\dot{m}_{bb} = 0,060 \text{ kg/s}$  e  $T_{bb} = 2306,15\text{K}$ )

Mach	$C_{X_0}$	$C_{X_{\alpha^2}}$	$C_{Z_\alpha}$	$C_{mag-f}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{spin}$	$C_{X_b}$
0,01	0,1359	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,4	0,1359	1,9800	1,6800	-0,3550	3,2000	-0,0270	0,0860
0,6	0,1288	1,9900	1,6800	-0,3550	3,3000	-0,0270	0,0930
0,7	0,06345	2,2200	1,6900	-0,3600	3,3500	-0,0260	0,0960
0,75	0,1539	2,3100	1,6900	-0,3600	3,4000	-0,0250	0,0980
0,8	0,10402	2,3900	1,7300	-0,3700	3,5000	-0,0250	0,1000
0,85	0,20344	2,5300	1,7600	-0,3800	3,6000	-0,0240	0,1020
0,875	0,2845	2,6400	1,8100	-0,3850	3,7500	-0,0240	0,1030
0,9	0,19867	2,7400	1,8800	-0,3950	3,9000	-0,0240	0,1040
0,925	0,2433	2,8600	1,9900	-0,4450	4,2000	-0,0240	0,1050
0,95	0,26077	3,0000	2,0900	-0,5050	4,2000	-0,0230	0,1060
0,975	0,2854	3,1800	2,1700	-0,4500	4,0000	-0,0230	0,1070
1,0	0,3172	3,3900	2,2100	-0,4150	3,7120	-0,0248	0,0000
1,025	0,3303	3,6100	2,2400	-0,4650	3,5810	-0,0248	0,0000
1,05	0,3533	3,8400	2,2600	-0,4450	3,4990	-0,0246	0,0000
1,1	0,3558	4,3500	2,2900	-0,4150	3,4600	-0,0242	0,0000
1,2	0,3450	4,8210	2,3500	-0,3750	3,4850	-0,0238	0,0000
1,35	0,3593	4,3100	2,4300	-0,3400	3,4740	-0,0230	0,0000
1,5	0,3032	3,8100	2,5300	-0,3250	3,2650	-0,0222	0,0000
1,75	0,2696	3,3400	2,6400	-0,3150	3,0660	-0,0212	0,0000
2,0	0,2589	2,8100	2,7400	-0,2950	3,0070	-0,0206	0,0000
2,25	0,2366	2,5100	2,8000	-0,2900	2,9210	-0,0198	0,0000
2,5	0,2227	2,2300	2,8100	-0,2900	2,8770	-0,0192	0,0000
3,0	0,1962	1,7800	2,7700	-0,2900	2,8280	-0,0180	0,0000