
ZADANIE: Przeprowadzić analizę rozwiązania zadanego stochastycznego równania różniczkowego.

W części teoretycznej zadania należy:

- sprawdzić założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania,
- \wedge - zweryfikować, czy funkcje μ i σ przy dt i dB_t odpowiednio spełniają warunek Lipschitza i warunek liniowego wzrostu (patrz zadania 8.21 wzwyż z folderu SDE)
- znaleźć (w sposób analityczny) funkcję wartości średniej i wariancji,
- \wedge - znaleźć równanie różniczkowe na średnią i wariancję/drugi moment i przedstawić jego rozwiązanie
- \wedge - albo odczytać funkcję średniej/wariancji z rozwiązania analitycznego
- znaleźć rozwiązanie analityczne powyższego równania,
- \wedge - podać metodę rozwiązania (np. jako ogólne liniowe SDE) i ostateczny wynik, tzn. proces X_t
- (jeżeli to jest możliwe) znaleźć rozkład analityczny X_t .
- \wedge - jeżeli są spełnione założenia wniosków (patrz seminarium nt. liniowych SDE), to wówczas rozkład analityczny zawsze można wyznaczyć

W części symulacyjnej zadania należy:

- symulować proces $\{X_t\}$ metodą Eulera-Maruyamy bądź metodą Milsteina,
- \wedge - napisać metodę symulacji (np. $X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \dots$),
- \wedge - wygenerować jedną trajektorię oboma metodami (jeżeli są one różne), porównać z trajektorią rozwiązania teoretycznego wyznaczonego w pierwszej części.
- narysować kilka trajektorii symulowanego procesu, opisać pokrótce ich własności,
- \wedge - sprawdzić, czy jest nieujemny, niedodatni, ograniczony z jednej strony itp.,
- \wedge - przedyskutować periodyczność (dotyczy grup z funkcjami trygonometrycznymi),
- \wedge - zbadać zachowanie asymptotyczne (czy proces zbiega do określonej wartości, jest rozbieżny, a może zbieżny do jakiegoś nietrywialnego rozkładu stacjonarnego),
- \wedge - (można) narysować trajektorie wraz z funkcją wartości średniej, sprawdzić rozbieżność trajektorii od tej funkcji.
- oszacować (z trajektorii) funkcję wartości średniej i wariancji, następnie porównać z rezultatami analitycznymi,
- oszacować (z trajektorii) gęstość X_t dla dwóch/trzech wybranych t .
- \wedge - można to zrobić generując wartości X_T przy ustalonym T np. metodą Milsteina, następnie narysować histogram/gęstość jądrową opartą na tych danych,
- \wedge - (można) porównać wykres generowany powyżej z gęstością teoretyczną otrzymaną w pierwszej części (jeżeli rozkład nie został wyznaczony, to można narysować zamiast tego histogram oparty na wygenerowanych trajektoriach teoretycznych).