VI Nierówność Gronwalla

Nierówność Gronwalla wykorzystywana jest w dowodzie twierdzenia o (istnieniu i) jednoznaczności rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych.

Lemat Gronwalla: *Niech* $u, a, b\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *będą nieujemnymi mierzalnymi funkcjami spełniającymi nierówność*

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)u(s)ds, \text{ dla wszystkich } t \geq 0.$$

Wtedy

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\exp\left(\int_s^t b(r)dr\right)ds, \text{ dla wszystkich } t \geq 0.$$

Zadanie 6-1: Niech $A, B, T \geq 0$ oraz niech $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że

$$\forall t \in [0,T] \;\; u(t) \leq A + B\int_0^t u(s)ds.$$

Wykaż, że

$$u(T) \leq A\exp(BT).$$

Zadanie 6-2: Niech $T \geq 0$ oraz niech $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}_+$ i $a\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1. Jeżeli istnieje stała $B > 0$ taka, że

$$\forall t \in [0,T] \;\; u(t) \leq a(t) + B\int_0^t u(s)ds,$$

to

$$\forall t \in [0,T] \;\; u(t) \leq a(t) + B\int_0^t a(s)\exp\left(B(t-s)\right)ds.$$

Zadanie 6-3: Udowodnij lemat Gronwalla. (Zauważmy, że w przypadku gdy $a(t) = a, b(t) = b$ są stałe, to teza mówi, że dla wszystkich $t \geq 0$, $u(t) \leq a\exp(bt)$.)

VII Charakteryzacja Levy'ego procesu ruchu Browna

Twierdzenie Levy'ego (1948). *Niech* $(X(t),\ \mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$, $X(0) = 0$, *będzie rzeczywistym, adaptowanym procesem o ciągłych trajektoriach. Jeżeli* $(X(t),\ \mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$ *i* $(X^2(t) - t,\ \mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$ *są martyngałami, to* $\{X(t),\ t \geq 0\}$ *jest standardowym procesem ruchu Browna z filtracją* $\{\mathcal{F}(t),\ t \geq 0\}$.
W szczególności, proces ruchu Browna jest jedynym ciągłym martyngałem o wahaniu kwadratowym $[B](t) = t$.

Zadanie 7-1: Dowód twierdzenia Levy'ego.

VIII Stochastyczne równanie różniczkowe

Niech $(B(t), t \geq 0)$ będzie procesem ruchu Browna oraz będą dane funkcje $\mu = \mu(x,t)$, $\sigma = \sigma(x,t)$. Równanie postaci

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t),$$

nieznanego procesu $X(t)$ nazywamy **stochastycznym równaniem różniczkowym** (*SDE*) względem procesu ruchu Browna (*SDE* typu dyfuzji), a funkcje μ i σ nazywamy jego współczynnikami.

Niech $(B(t), t \geq 0)$ będzie procesem ruchu Browna z filtracją $\mathbb{F}$ i niech $\mu \colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\sigma \colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będą mierzalnymi funkcjami. Rozwiązaniem (**mocnym rozwiązaniem**) *SDE* z warunkiem początkowym $X(0) = \xi$ nazywamy progresywnie mierzalny proces stochastyczny $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$, dla którego całki $\int_0^t \mu(X(s), s)ds$ oraz $\int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s)$ istnieją oraz spełnione jest równanie

$$X(t) = \xi + \int_0^t \mu(X(s), s)ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s), \quad t \in [0,T].$$

Uwaga 1. Mocne rozwiązanie jest pewną funkcją danego procesu ruchu Browna tj. $X(t) = F(t, (B(s),\ s \leq t))$.
Uwaga 2. $\sigma \equiv 0$ sprowadza *SDE* do zwyczajnego równania różniczkowego (*ODE*).
Uwaga 3. Rozwiązując przykłady będziemy zakładać, że odpowiednie całki istnieją, tzn.

$$\int_0^T |\sigma(X(s), s)|^2\, ds \quad i \quad \int_0^T |\mu(X(s), s)|\, ds$$

mają skończone wartości oczekiwane albo są co najmniej skończone z prawdopodobieństwem 1.

Zadanie 8-1:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X(0) = 1.$$

Zadanie 8-2: *Równanie Langevin.* Niech $\mu, \sigma \geq 0$.

$$dX(t) = -\mu X(t)dt + \sigma dB(t), \quad X(0) = x_0.$$

Zadanie 8-3:

$$dX(t) = B(t)dB(t), \quad X(0) = x_0.$$

Zadanie 8-4: *Proces Doléans-Dade, eksponenta stochastyczna* Niech $X(t)$ posiada różniczkę stochastyczną i niech proces $U(t)$ spełnia równanie

$$dU(t) = U(t)dX(t), \quad U(0) = 1. \left(U(t) = 1 + \int_0^t U(s)dX(s) \right)$$

Wykaż, że jedyne rozwiązanie dane jest poprzez

$$U(t) = \mathcal{E}(X)(t) := \exp\left(X(t) - X(0) - \frac{1}{2}[X,X](t) \right).$$

Proces $\mathcal{E}(X)(t)$ nazywamy eksponentą stochastyczną procesu $X(t)$. Zauważmy, że w odróżnieniu od deterministycznej eksponenty, eksponenta stochastyczna $\mathcal{E}(X)(t)$zależy od wszystkich wartości procesu do chwili t.

Zadanie 8-5: Wyznacz $\mathcal{E}(B)(t)$.

Zadanie 8-6: Niech $f \in L^2([0,T] \times \Omega, \lambda_T \otimes P)$ dla każdego $T > 0$ i niech $|f(s,\omega)| \le C$ dla pewnego $C > 0$ i wszystkich $s \ge 0, \omega \in \Omega$. Udowodnij, że

$$\exp\left(\int_0^t f(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right), \quad t \ge 0$$

jest $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t,\ t \ge 0)$ martyngałem.

Zadanie 8-7: *Logarytm stochastyczny* Jeżeli $U = \mathcal{E}(X)$, wtedy proces X nazywamy stochastycznym logarytmem procesu U (i piszemy $X = \mathcal{L}(U)$).

Niech U ma różniczkę stochastyczną i wartości różne od 0. Wykaż, że stochastyczny logarytm procesu U spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX(t) = \frac{dU(t)}{U(t)}, \quad X(0) = 0,$$

ponadto

$$X(t) = \mathcal{L}(U)(t) = \ln\left(\frac{U(t)}{U(0)}\right) + \int_0^t \frac{1}{2U^2(s)} d[U,U](s).$$

Zadanie 8-8: Niech $U(t) = \exp^{B(t)}$. Oblicz wprost $\mathcal{L}(U)$, a następnie zweryfikuj prawdziwość równania

$$\mathcal{L}(U)(t) = \ln\left(\frac{U(t)}{U(0)}\right) + \int_0^t \frac{1}{2U^2(s)} d[U,U](s).$$

Równania różniczkowe liniowe

Równanie postaci

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))\,dt + (C(t)X(t) + c(t))\,dB(t)$$

nazywamy **liniowym (skalarnym) stochastycznym równaniem różniczkowym**.
Funkcje $A(t), a(t), C(t), c(t) \in \mathbb{R}$ nazywamy skalarami.
Jeżeli $C(t) \equiv 0$ mówimy o równaniu stochastycznym *liniowym w węższym sensie*.
Jeżeli $c(t) \equiv 0$ mówimy o równaniu stochastycznym *jednorodnym*.

Zadanie 8-9: *Jednorodne liniowe SDE*. Niech $A, C\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będą deterministycznymi funkcjami. Wyznacz rozwiązanie *SDE*

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + C(t)X(t)dB(t), \quad X(0) = x_0.$$

Istotną własnością liniowych *SDE* jest fakt, że funkcja wartości oczekiwanej rozwiązania jest równa rozwiązaniu odpowiedniego równania deterministycznego (wynika to z faktu, że całka Itô funkcji podcałkowej jest niezależna od $dB(t)$).

Zadanie 8-10: Wykaż, że wartość oczekiwana $m(t) = \mathbb{E}\,X(t)$ oraz drugi moment $m_2(t) = \mathbb{E}\,X^2(t)$ rozwiązania *SDE*

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))\,dt + (C(t)X(t) + c(t))\,dB(t), \quad X(0),$$

gdzie $A(t), a(t), C(t), c(t)$ są deterministycznymi funkcjami rzeczywistymi można otrzymać jako rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{cases} m'(t) &= A(t)m(t) + a(t) \\ m(0) &= \mathbb{E}\,X(0) \end{cases}, \quad \begin{cases} m_2'(t) &= \left(2A(t) + C^2(t)\right) m_2(t) + 2m(t)\left(a(t) + C(t)c(t)\right) + c^2(t) \\ m_2(0) &= \mathbb{E}\,X^2(0) \end{cases}.$$

Zadanie 8-11: Wyznacz kolejne momenty procesu $X(t) = t + \int_0^t X(s)dB(s)$, $t \geq 0$.

Zadanie 8-12: Rozważmy liniowe w węższym sensie *SDE* postaci

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))\,dt + c(t)dB(t), \quad X(0) = x_0,$$

gdzie $A(t), a(t), C(t), c(t)$ są deterministycznymi funkcjami rzeczywistymi. Określ rozkład procesu $X(t) \mid x_0$.

Zadanie 8-13: Wyznacz rozkład $(X(t) \mid X(s))$ w przypadku procesu danego równaniem

(a) $dX(t) = \sigma dB(t),\ X(0) = X_0$ – proces Wienera;

(b) $dX(t) = \underline{\mu}dt + \sigma dB(t),\ X(0) = X_0$ – z dryfem;

(c) $dX(t) = \theta + \underline{\mu X(t)}dt + \sigma dB(t),\ X(0) = X_0$ – z dryfem zależnym od stanu procesu;

(d) $dX(t) = \mu X(t)dt + \underline{\sigma X(t)}dB(t),\ X(0) = X_0 > 0$ – współczynnik dyfuzji zależny od stanu procesu (*geometryczny ruch Browna*).

Zadanie 8-14: *Równanie Langevin* raz jeszcze, ogólny *proces Ornsteina-Uhlenbecka – model Vasicka*. Niech $\theta > 0, \mu, \sigma \geq 0$ będą ustalonymi parametrami. Wyznacz rozwiązanie i określ rozkład $X(t)$, $t \geq 0$:

$$dX(t) = \theta(\mu - X(t))dt + \sigma dB(t), \quad X(0)$$

Zadanie 8-15: Niech a, f będą funkcjami nielosowymi. Rozważmy *SDE* postaci

$$\begin{cases} dX(t) & = a(t)X(t)dt + f(t)X(t)dB(t) \\ X(0) & = x_0 \text{ z pr. } 1 \end{cases}.$$

Wykaż, że rozwiązanie $X(t) = X_1(t)X_2(t)$ spełnia układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} dX_1(t) & = f(t)X_1(t)dB(t) \\ X_1(0) & = x_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} dX_2(t) & = Adt + CdB(t) \\ X_2(0) & = 1 \end{cases}$$

dla odpowiednio dobranych $A(t) = A(t, X)$, $C(t) = C(t, X)$.

Zadanie 8-16: Niech a, c, e, f będą funkcjami nielosowymi. Rozważmy *SDE* postaci

$$\begin{cases} dX(t) & = (c(t) + a(t)X(t))dt + (e(t) + f(t)X(t))dB(t) \\ X(0) & = x_0 \text{ z pr. } 1 \end{cases}.$$

Wykaż, że rozwiązanie $X(t) = X_1(t)X_2(t)$ spełnia układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} dX_1(t) & = a(t)X_1(t)dt + f(t)X_1(t)dB(t) \\ X_1(0) & = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} dX_2(t) & = Adt + CdB(t) \\ X_2(0) & = x_0 \end{cases}$$

dla odpowiednio dobranych $A(t) = A(t, X)$, $C(t) = C(t, X)$.

Zadania
Most Browna

Zadanie 8-17:

$$dX(t) = -\frac{X(t)}{1-t}dt + dB(t), \quad 0 \leq t < 1,\ X(0) = 0 \text{ z pr. } 1$$

Znajdź proces $\{X(t),\ t \in [0, 1)\}$. Określ funkcję wartości oczekiwanej i kowariancji procesu $X(t)$. Czy $X(t)$ jest procesem gaussowskim?

Zadanie 8-18: (kont. Zadania 8-17) Wykaż, że $\lim_{t\to 1}(1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dB(s) = 0$ p.n.

Zadanie 8-19: Powtórz Zadania 8-17, 8-18 w ogólnym przypadku:

$$dX(t) = \frac{b - X(t)}{T-t}dt + dB(t), \quad 0 \le t < T,\ X(0) = a.$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań *SDE*

Zadanie 8-20: Rozważmy

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dB(t),$$

gdzie współczynniki $\mu\colon \mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ i $\sigma\colon \mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\mu(x,t) = \mu(y,t)|^2 + |\sigma(x,t) = \sigma(y,t)|^2 \le L^2\,|x-y|^2$$

dla każdego $t\in[0,T]$ ze stałą (globalną) Lipschitza $L = L(T)$.
Udowodnij, że jeżeli $X(t)$ i $Y(t)$ są dwoma dowolnymi rozwiązaniami równania, to

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\le T}|X(t)-Y(t)|^2\right) \le 3\,\mathbb{E}\,|X(0)-Y(0)|^2\exp\left(3L^2T(T+4)\right).$$

Wyciągnij stąd wniosek, że wówczas *SDE* ma dokładnie jedno rozwiązanie (z dokładnością do procesów nierozróżnialnych).

Zadanie 8-21: Rozważmy

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dB(t),$$

gdzie współczynniki $\mu\colon \mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ i $\sigma\colon \mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\mu(x,t) - \mu(y,t)|^2 + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)|^2 \le L^2\,|x-y|^2$$

dla każdego $t\in[0,T]$ ze stałą (globalną) Lipschitza $L = L(T)$
oraz spełniają warunek liniowego wzrostu

$$|\mu(x,t)|^2 + |\sigma(x,t)|^2 \le M^2\,(1+|x|)^2$$

z pewną stałą $M = M(T) > 0$ dla $T > 0$.
Udowodnij, że dla każdego mierzalnego warunku początkowego $X(0)\in L^2$ istnieje jedyne rozwiązanie $X(t),\ t\ge 0$. Ponadto rozwiązanie spełnia

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\le T}|X(s)|^2\right) \le C(T)\,\mathbb{E}\,(1+|X(0)|)^2.$$

Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań *SDE* są prawdziwe także w przypadku spełnienia lokalnego warunku Lipschitza i globalnego warunku liniowego wzrostu.

Zadanie 8-22: Rozważmy

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t),$$

gdzie współczynniki $\mu\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ i $\sigma\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza dla wszystkich $x, y \in I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)|^2 + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)|^2 \leq L^2 |x - y|^2$$

dla każdego $t \in [0, T]$ ze stałą (lokalną) Lipschitza $L = L(T, I)$
oraz spełniają warunek liniowego wzrostu

$$|\mu(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \leq M^2 (1 + |x|)^2$$

z pewną stałą $M = M(T) > 0$ dla $T > 0$.
Udowodnij, że dla każdego mierzalnego warunku początkowego $X(0) \in L^2$ istnieje jedyne rozwiązanie $X(t),\ t \in [0, T]$. Ponadto rozwiązanie spełnia (dla wszystkich $T > 0$)

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s \leq T} |X(s)|^2\right) \leq C(T)\, \mathbb{E}\, (1 + |X(0)|)^2 .$$

Zadanie 8-23: Rozważmy

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t),$$

gdzie współczynniki $\mu\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ i $\sigma\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)|^2 + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)|^2 \leq L^2 |x - y|^2$$

dla każdego $t \in [0, T]$ ze stałą (globalną) Lipschitza $L = L(T)$.
Oznaczmy przez $\{X^x(t),\ t \geq 0\}$ rozwiązanie *SDE* z warunkiem początkowym $X(0) \equiv x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$x \mapsto \mathbb{E}\, f(X^x(t)) \text{ jest ciągłe dla wszystkich } f \in C_b(\mathbb{R}).$$

Równania różniczkowe nieliniowe

Zadania

Scalar square root process SDE postaci

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t)$$

jednowymiarowego procesu, o współczynnikach

$$f(t, X(t)) = A(t)X(t) + a(t),$$
$$g(t, X(t)) = C(t)\sqrt{(}X(t)),$$

gdzie $A(t), a(t), C(t)$ są rzeczywistymi funkcjami nielosowymi (skalarami) nazywamy *scalar square root process*.

Zadanie 8-24: Wykaż, że *SDE*

$$dX(t) = dt + 2\sqrt{X(t)}dB(t), \quad X(0) = x_0 \geq 0,$$

ma rozwiązanie postaci $X(t) = \left(B(t) + \sqrt{x_0}\right)^2$.

Zadanie 8-25: Wykaż, że proces $X(t)$ będący rozwiązaniem *SDE*

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma\sqrt{X(t)}dB(t), \quad X(0) = x_0,$$

ma $\mathbb{E}\, X(t) = x_0 \exp^{\mu t}$, $\mathrm{Var}\, X(t) = \frac{\sigma^2}{\mu} x_0 \left(\exp^{2\mu t} - \exp^{\mu t}\right)$.

Zadanie 8-26: *Cox-Ingresoll-Ross process* Określ funkcje wartości oczekiwanej i wariancji procesu będącego rozwiązaniem *SDE*

$$X(t) = \int_0^t a\,(b - X(t))\,dt + \int_0^t \sigma\sqrt{X(t)}dB(t).$$

$\star$ Czy potrafisz określić własności procesu $X(t)$? Czy jest to proces dodatni/ nieujemny? Czy potrafisz określić rozkład $X(t)$?

Zadanie 8-27: Rozwiąż *SDE*

$$dX(t) = X(t)dt + B(t)dB(t), \quad X(0) = 1.$$

Jakiego typu jest to równanie?

Zadanie 8-28: *SDE*

$$dX(t) = B(t)X(t)dt + B(t)X(t)dB(t), \quad X(0) = 1.$$

Zadanie 8-29: Wyznacz funkcję wartości oczekiwanej procesu $X(t)$ będącego rozwiązaniem *SDE*

$$dX(t) = -\frac{1}{4}X^3(t)dt + \frac{1}{2}X^2(t)dB(t), \quad X(0) = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 8-30: Wyznacz funkcję wartości oczekiwanej i drugiego momentu procesu $X(t)$ będącego rozwiązaniem *SDE*

$$dX(t) = \left(\frac{1}{3}X^{1/3}(t) + 6X^{2/3}(t)\right)dt + X^{2/3}(t)dB(t), \quad X(0) = 1.$$

Zadanie 8-31: Niech $X(t)$ spełnia *SDE* postaci

$$dX(t) = \left(\frac{2}{5}X^{3/5}(t) + 5X^{4/5}(t)\right)dt + X^{4/5}(t)dB(t), \quad X(0) = 1.$$

Korzystając ze wzoru Itô dla $f(t, X(t)) = X^{1/5}(t)$ wykaż, że rozwiązaniem jest proces

$$X(t) = \left(t + 1 + \frac{1}{5}B(t)\right)^5.$$

Zadanie 8-32: Rozwiąż *SDE*

$$dX(t) = \left(-\frac{1}{2}X(t) - \frac{1}{8}\frac{1}{X^3(t)}\right)dt + \frac{1}{2X(t)}dB(t), \quad X(0) = 1.$$

Zadanie 8-33: Określ rozkład, funkcje wartości średniej oraz wariancji procesu będącego rozwiązaniem *SDE*

$$dX(t) = X(t)\,(\mu - \ln X(t))\,dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X(0) = x_0.$$

Zadanie 8-34: *Model wzrostu Gompertza*
Rozwiąż *SDE*

$$dX(t) = X(t)\,(\mu - \ln X(t))\,dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X(0) = x_0 > 0.$$

Zadanie 8-35: Sprawdź, że rozwiązaniem *SDE*

$$dX(t) = (\alpha + \beta X(t))\, dt + \gamma X(t) dB(t), \quad X(0) = X_0,$$

jest proces $X(t) = R(t)\left(X_0 + \alpha \int_0^t (R(s))^{-1} ds\right)$, gdzie α, β, γ są stałymi rzeczywistymi oraz $R(t) = \exp\left((\beta - \frac{\gamma^2}{2})t + \gamma B(t)\right)$.
Wykorzystaj ten fakt, by pokazać, że rozwiązaniem *SDE*

$$dX(t) = \left(aX(t) + bX^2(t)\right) dt + cX(t) dB(t), \quad X(0) = X_0,$$

ze stałymi rzeczywistymi a, b, c jest proces

$$X(t) = U(t) / \left((X_0)^{-1} - b \int_0^t U(s) ds\right),$$

gdzie $U(t) = \exp\left((a - \frac{c^2}{2})t + cB(t)\right)$.

Zadanie 8-36: Niech $\mu, \sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą ciągłe, lipschitzowskie i niech $\sigma \in C^2$. Udowodnij, że *SDE*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \left(\mu(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma(X(s))\sigma'(X(s))\right) ds + \int_0^t \sigma(X(s)) dB(s)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 8-37: Niech $\sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ustaloną różniczkowalną funkcją. Wykaż, że *SDE*

$$dX(t) = \frac{1}{2}\sigma(X(t))\sigma'(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dB(t)$$

jest redukowalne do liniowego *SDE* i ma rozwiązanie w postaci ogólnej

$$X(t) = h^{-1}\left(B(t) + h(X_0)\right),$$

gdzie $h(x) = \int^x \frac{ds}{\sigma(s)}$.

Zadanie 8-38: Rozwiąż *SDE*

$$dX(t) = \left(\sqrt{1 + X^2(t)} + \frac{1}{2}X(t)\right) dt + \sqrt{1 + X^2(t)} dB(t), \quad X(0) = 0.$$

VIII.1 Transformacja Lampertiego

Przedstawimy metodę pozwalającą na zredukowanie współczynnika zależnego od wartości procesu $X(t)$ przy $dB(t)$ do jedności. Ogólna klasa przekształceń, które sprowadzają *SDE* do równania o współczynniku przy $dB(t)$ niezależnym od szukanego procesu $X(t)$ określa się jako przekszałcenia Lampertiego (*Lamperti transforms*).

Zadanie 8.1-1: FAKT (Lamperti '64) *Niech $\mu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^1 oraz $\sigma \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$, klasy C^2 takie, że*

$$\mu' - \frac{1}{2}\sigma\sigma'' - \mu\sigma'/\sigma$$

jest ograniczone oraz $1/\sigma$ jest niecałkowalne w $+\infty$ i $-\infty$. Wtedy

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dB(t), \quad 0 \le t < \infty$$

ma jedyne mocne rozwiązanie.
Ponadto rozwiązanie otrzymujemy poprzez zastosowanie wzoru Itô do $f(X(t))$, gdzie $f(x) := \int_0^x \frac{1}{\sigma(y)} dy$.

Zadanie 8.1-2: *Transformacja Lampertiego* Niech $X(t)$ będzie procesem Itô

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t)$$

i niech

$$\psi(t, X(t)) = \int \frac{1}{\sigma(t, x)} dx \,|_{x=X(t)},$$

jeżeli ψ jest wzajemnie jednoznaczną funkcją ze zbioru wartości $X(t)$ na $\mathbb{R}$ dla każdego $t \in [0, \infty)$, to zdefiniujmy proces $Z(t) = \psi(t, X(t))$.
W przeciwnym razie, jeżeli dla każdego $(t, X(t))$, $\sigma(t, X(t)) > 0$, to weźmy

$$Z(t) = \psi(t, X(t)) = \int_{\xi}^{x} \frac{1}{\sigma(t, u)} du \,|_{x=X(t)},$$

gdzie ξ jest pewnym punktem ze zbioru wartości $X(t)$.
Tak określony proces $Z(t)$ ma jednostkową wartość współczynnika dyfuzji i jest rozwiązaniem *SDE* postaci

$$dZ(t) = \left(\psi_t(t, \psi^{-1}(t, Z(t))) + \frac{f(t, \psi^{-1}(t, Z(t)))}{\sigma(t, \psi^{-1}(t, Z(t)))} - \frac{1}{2}\sigma_x(t, \psi^{-1}(t, Z(t))) \right) dt + dB(t).$$

Uwaga 1 Transformacja przestrzeni stanów (wartości) procesu musi być 1-1, by możliwe było jednoznaczne określenie procesu $X(t)$ za pomocą transformacji odwrotnej $Z(t)$.
Uwaga 2 Jeżeli transformacja nie jest 1-1, to nowa transformacja będzie juz dobrze określona, gdyż ψ będzie rosnącą funkcją $X(t)$.

W zadaniach będziemy wykorzystywać transformację Lampertiego.

Zadania
Współczynnik dyfuzji niezależny od czasu

Zadanie 8.1-3:

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X(0) = 1, \quad (a, \sigma \in \mathbb{R}).$$

W powyższym zadaniu transformacja Lampertiego pozwoliła na rozwiązanie *SDE* . W ogólności nie musi tak być – zauważmy, że w tym przypadku równanie dla $dZ(t)$ nie zależało od $Z^{-1}(t)$. Poniższy przykład pokazuje, że nawet relatywnie proste równania nie muszą być rozwiązywalne przy pomocy tej transformacji.

Zadanie 8.1-4:

$$dX(t) = (b + aX(t))dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X(0) = 1, \quad (a, b, \sigma \in \mathbb{R}).$$

Praktyczne zastosowania transformacji Lampertiego w rozwiązywaniu *SDE* są ograniczone przez możliwość wyznaczenia postaci analitycznej odwrotnej transformacji $X(t) = \psi^{-1}(t, Z(t))$. Rozwiązania te nie muszą być obliczalne:

Zadanie 8.1-5:

$$dX(t) = f(X(t))dt + (\sigma_0 + \sigma_1\sqrt{X(t)})dB(t), \quad X(0) = x_0.$$

Wiele spośród użytecznych (wykorzystywanych w praktyce) modeli pozwalają na analityczne odwrócenie transformacji ψ. Na przykład analityczna postać ψ^{-1} jest zawsze określona, gdy $\sigma(X(t)) = \sigma_1 X^{\gamma}(t)$, dla dowolnej stałej γ. W finansach takie modele są szczególnie istotne, gdyż γ wyraża *volatility*. W biomatematyce często wykorzystuje się model, gdzie rozważa się tzw. dyfuzję typu Pearsona, co pokazuje poniższy przykład.

Zadanie 8.1-6:

$$dX(t) = f(X(t))dt + \sqrt{\sigma_0 + \sigma_1 X(t) + \sigma_2 X^2(t)}dB(t).$$

Uwaga W zadaniu pomijamy postać funkcji f. W klasycznych równaniach opisujących dyfuzję typu Pearsona (w szczególności w modelach biologicznych) mamy $f(X(t)) = (b - aX(t))$.
Uwaga W rozwiązaniu można przyjąć, że przynajmniej $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 > 0$.

Zadania
Współczynnik dyfuzji zależny od czasu
W ogólności możliwe jest wykorzystanie transformacji Lampertiego w przypadku, gdy $\sigma(t, X(t)) = \alpha(t)\beta(X(t)$.

$$Z(t) = \psi(X(t)) = \int \frac{1}{\beta(x)}dx \mid_{x=X(t)},$$

pozostawiając czynnik zależny od czasu $\alpha(t)$. Otrzymujemy

$$dZ(t) = \left(\frac{f\left(t, \psi^{-1}(Z(t))\right)}{\beta\left(\psi^{-1}(Z(t))\right)} - \frac{1}{2}\beta_x\left(\psi^{-1}(Z(t))\right)\alpha^2(t) \right) dt + \alpha(t)dB(t).$$

Oczywiście w zależności od postaci $\alpha(t)$ i f zależy w znacznym stopniu na ile rozwiązanie będzie miało skomplikowaną i użyteczną postać.

Zadanie 8.1-7: Niech $a > 0$, $b(t) > 0$ dla wszystkich t;

$$dX(t) = (b(t) + aX(t))dt + (\sigma_0 b(t) + \sigma_1 X(t))dB(t)$$

(możemy myśleć jak o procesie zależnym od stałej intensywności śmierci, procesu narodzin zależnemu od czasu $b(t)$ — jednak nie zależnemu od procesu $X(t)$ — i współczynnikowi dyfuzji zależnemu od ich kombinacji liniowej).

VIII.2 Rozwiązania słabe *SDE*

Rozważmy *SDE* postaci $dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t)$.
Jeżeli istnieje przestrzeń stochastyczna (przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z filtracją $\mathbb{F}$ spełniającą zwykłe warunki), proces ruchu Browna $\widetilde{B}(t)$ i adaptowany do filtracji proces $\widetilde{X}(t)$ taki, że: $\widetilde{X}(0)$ ma zadany rozkład i dla wszystkich $t \geq 0$ odpowiednie całki są określone oraz $\widetilde{X}(t)$ spełnia

$$\widetilde{X}(t) = \widetilde{X}(0) + \int_0^t \mu(s, \widetilde{X}(s))ds + \int_0^t \sigma(s, \widetilde{X}(s))d\widetilde{B}(s),$$

wtedy $\widetilde{X}(t)$ nazywamy **słabym rozwiązaniem** *SDE*.
Słabe rozwiązanie nazywamy *jedynym* (w sensie rozkładu), jeżeli dowolne dwa rozwiązania $X_1(t), X_2(t)$ (być może określone na różnych przestrzeniach) takie, że $X_1(0)$, $X_2(0)$ mają takie same rozkłady, mają wszystkie rozkłady skończenie wymiarowe takie same.

Zadanie 8.2-1: *Równanie Tanaki*
Niech dane jest *SDE*
$$dX(t) = \mathrm{sign}(X(t))dB(t), \quad X(0) = 0.$$
Uzasadnij nieistnienie mocnego rozwiązania. Udowodnij, że proces ruchu Browna jest jedynym słabym rozwiązaniem równania Tanaki.
Uwaga $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$, by zapewnić lewostronną ciągłość.

Zauważmy, że w poprzednim zadaniu *w pewnym sensie* otrzymaliśmy formalnie wzór Itô dla funkcji $f(x) = |x|$, która jest nieróżniczkowalna w 0. Z „różniczkowania" (w pewnym ogólnym sensie) otrzymujemy $f'(x) = \mathrm{sign}(x)$, $f''(x) = \delta_0(x)$, gdzie ostatnia funkcja jest deltą Diraca (w sensie fizycznym) $\delta_0(0) = \infty$. Zatem formalny wzór Itô wyglądałby następująco:
$$|B(t)| = \int_0^t \mathrm{sign}(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \delta_0(B(s))ds.$$
By uzasadnić powyższy wzór, potrzebujemy „wygładzenia" funkcji $f(x) = |x|$ (przynajmniej do klasy C^2.

Zadanie 8.2-2: Ćwiczenie pokazujące przykład gładkiej aproksymacji funkcji $x \mapsto |x|$.

Zauważmy, że w Zadaniu 8.2-1 otrzymaliśmy:
$$|B(t)| - \int_0^t \mathrm{sign}(B(s)dB(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^t f_n'(|B(s)|)ds.$$
Zatem prawa strona równości istnieje i jest procesem stochastycznym.

Zadanie 8.2-3: *Brownian local time*