POLITECHNIKA GDAŃSKA

Zadania ze stochastycznych równań różniczkowych

seminarium 2018/2019

Krzemiński Michał

Katedra Rachunku Prawdopodobieństwa i Biomatematyki

Zadania ze stochastycznych równań różniczkowych 2018/2019

Michał Krzemiński

$\emptyset$ Powtórzenie

Zadania
Warunek Lipschitza i warunek Höldera

Zadanie 1: Wykaż, że funkcja $f(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$ spełnia warunek Höldera rzędu $\frac{1}{2}$, ale nie jest Lipschitza.

Zadanie 2: Analogicznie do zadania 1 wykaż, że funkcja $|x|^r$, $0 < r \leq 1$, jest Höldera rzędu r

Zadanie 3: Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Udowodnij, że f spełnia warunek Lipschitza ze stałą K wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna funkcji f jest ograniczona przez K.

Zadanie 4: Udowodnij, że każda funkcja Lipschitza jest funkcją jednostajnie ciągłą.

Zadanie 5: Udowodnij, że każda funkcja różniczkowalna w sposób ciągły jest lokalnie Lipschitza.

Zadanie 6: Podaj przykład funkcji Lipschitza, która nie jest różniczkowalna.

Zadanie 7: Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie lipschitzowska. Wykaż, że istnieją stałe $M > 0$, $K > 0$ takie, że

$$|f(x)| \leq M(1 + |x|) \leq K\sqrt{\left(1 + |x|^2\right)}.$$

Zadanie 8: Podaj przykłady funkcji lokalnie lipschitzowskich, ale nie lipschitzowskich.

Zadanie 9: ($\star$) Niech $f(x, t)$ będzie rzeczywistą funkcją dwóch zmiennych. Wykaż, że jeżeli $f(0, t)$ jest ograniczoną funkcją t (dla wszystkich t, $|f(0, t)| \leq C$) i $f(x, t)$ spełnia warunek Lipschitza względem x jednostajnie względem t (dla wszystkich t, $|f(x, t) - f(y, t)| \leq K\,|x - y|$), to $f(x, t)$ spełnia warunek liniowego wzrostu dla zmiennej x, $|f(x, t)| \leq M(1 + |x|)$.

Zadania
Elementy rachunku prawdopodobieństwa i teorii procesów stochastycznych

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	rozkład normalny o średniej m i wariancji σ^2
$X_n \xrightarrow{d} X$	zbieżność wg rozkładu (słaba)
$X_n \xrightarrow{p} X$	zbieżność wg prawdopodobieństwa (stochastyczna)
$X_n \xrightarrow{p.n.} X$	zbieżność prawie wszędzie (z prawdopodobieństwem 1, mocna)
$X_n \xrightarrow{L^r} X$	zbieżność względem momentu rzędu $r \geq 1$ (w L^r)
$\Phi(x)$	wartość dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego w punkcie x

Zadanie 10: Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ (standardowym normalnym). Wykaż, że

$$\forall x > 0 \qquad \frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp^{-\frac{1}{2}x^2} \leq P(X > x) \leq \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Zadanie 11: Wykaż, że dla $n > -1, a > 0$

$$\int_0^\infty x^n \exp^{-ax^2}\,dx = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{1}{2}a^{-\frac{n+1}{2}}.$$

W szczególności $\int_0^\infty \exp^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ oraz $\int_0^\infty x\exp^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}$.

Zadanie 12: Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ o średniej μ i wariancji σ^2. Wyznacz funkcję tworzącą momenty zmiennej X.

Zadanie 13: Niech $\{X_n\}_{n\geq 0}$ będzie ciągiem zmiennych losowych gaussowskich zbieżnych wg rozkładu do X. Pokazać, że X ma rozkład normalny (być może zdegenerowany).

Zadanie 14: Niech $X = \{X_t\}_{t\in T}, Y = \{Y_t\}_{t\in T}$ będą procesami stochastycznymi określonymi na $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Udowodnij (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), gdzie
(i) X, Y nierozróżnialne,
(ii) X, Y stochastycznie równoważne w węższym sensie (wzajemne modyfikacje),
(iii) X, Y stochastycznie równoważne w szerszym sensie.
Na przykładach pokaż, że (iii) $\not\Rightarrow$ (ii) $\not\Rightarrow$ (i).

Zadanie 15: Niech $X = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie procesem gaussowskim oraz $T_1, T_2 \subseteq T$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Udowodnić, że procesy $X^{(1)} = \{X_t\}_{t\in T_1}$, $X^{(2)} = \{X_t\}_{t\in T_2}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $t_1 \in T_1$ i $t_2 \in T_2$ zachodzi $\mathrm{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = 0$.

Zadanie 16: Udowodnij twierdzenie: *Jeżeli $\{X(t),\ t \geq 0\}$ jest procesem o przyrostach niezależnych i gaussowskich $\big($dla każdego $s < t$, $X(t) - X(s)$ ma rozkład normalny i jest niezależny od $\sigma(X(u), u \leq s)\big)$, to jest procesem gaussowskim.*

Zadanie 17: Podaj przykład procesu stochastycznego (wektora losowego), którego wszystkie rozkłady 1-wymiarowe są gaussowskie, ale który nie jest procesem (wektorem) gaussowskim.

Zadanie 18: Niech $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ będzie procesem gaussowskim takim, że trajektorie

$$[0,\infty) \ni t \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$$

są funkcjami ciągłymi zmiennej $t \in [0,\infty)$. Udowodnij, że proces

$$Y_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega)ds$$

jest procesem gaussowskim oraz znajdź funkcję wartości oczekiwanej procesu $m^Y(t) = \mathbb{E}\,Y_t$ oraz macierz kowariancji $V^Y = \left[\mathrm{Cov}(Y_{t_j}, Y_{t_k})\right]_{n\times n}$ dla $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$.

Zadanie 19: Niech $X = \{X_t,\ t\in T\}$ będzie procesem stochastycznym, a rodzina $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in T}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ s \leq t)$, filtracją generowaną przez X. Wykaż, że proces X ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $s < t,\ s,t\in T$ przyrosty $X_t - X_s$ są niezależne od σ-ciała $\mathcal{F}_s^X$.

Zadania
Moment Markowa (moment stopu) – zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 20: Udowodnić, że dla dowolnego momentu Markowa τ względem filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$ zachodzą:

$$a) \quad \forall_{t\in T} \quad \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \qquad b) \quad \forall_{t\in T} \quad \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Zadanie 21: Niech $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$ będzie prawostronnie ciągłą filtracją oraz τ zmienną losową o wartościach w T $(T = [0, \infty))$ taką, że $\forall\, t \in [0, \infty),\ \ \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$. Udowodnić, że τ jest momentem Markowa względem $\mathbb{F}$.

Zadanie 22: Niech $\tau_1, \tau_2, \ldots$ będą momentami Markowa względem filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, $(T = [0, \infty))$. Udowodnij, że $\tau_1 \wedge \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2$, $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$, $\sup\limits_{j\geq 1} \tau_j$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \tau_j$ są momentami Markowa. Przy dodatkowym założeniu, że $\mathbb{F}$ jest prawostronnie ciągła udowodnij, że także $\inf\limits_{j\geq 1} \tau_j$ jest momentem Markowa.

Zadanie 23: Niech τ będzie momentem Markowa względem filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ i niech

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \colon \forall t, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Wykaż, że $\mathcal{F}_\tau$ jest σ-ciałem, τ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalne oraz jeżeli $\tau_1 \leq \tau_2$, to $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Zadanie 24: Dla momentów Markowa τ_1, τ_2 względem $\mathbb{F}$ udowodnij, że $\{\tau_1 < \tau_2\}$, $\{\tau_1 \leq \tau_2\}$ i $\{\tau_1 = \tau_2\}$ należą do $\mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Zadanie 25: Wykaż, że dla dowolnej filtracji $\mathbb{F}$, $(\mathbb{F}_+)_+ = \mathbb{F}_+$. czy analogicznie $(\mathbb{F}_-)_- = \mathbb{F}_-$?

Zadanie 26: Niech τ będzie momentem stopu (względem $\mathcal{F}_t$). Wykaż, że istnieje ciąg momentów stopu (względem $\mathcal{F}_t$) taki, że

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \ldots \geq \tau_n \searrow \tau = \inf_j \tau_j,$$

gdzie dla każdego j, τ_j przyjmuje przeliczalnie wiele wartości:

$$\tau_j(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega), & \tau(\omega) = \infty, \\ m2^{-j}, & (m-1)2^{-j} \leq \tau(\omega) < m2^{-j},\ m \geq 1. \end{cases}$$

Ponadto, dla każdego $F \in \mathcal{F}_{\tau+}$, $F \cap \{\tau_j = m2^{-j}\} \in \mathcal{F}_{m/2^j}$.

Zadania
Martyngały z czasem ciągłym

Zadanie 27: Udowodnij, że jeżeli $\{X(t),\ t \geq 0\}$ jest martyngałem (podmartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}(t),\ t \geq 0\}$, a funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją wypukłą (wypukłą i niemalejącą) taką, że dla każdego $t \geq 0$, $\mathbb{E}\,|f(X(t))| < \infty$, to $\{f(X(t)),\ t \geq 0\}$ jest $\{\mathcal{F}(t),\ t \geq 0\}$ podmartyngałem.

Zadanie 28: Niech $\{X_n,\ n \in [0, N]\}$ będzie martyngałem (nieujemnym podmartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}_n,\ n \in [0, N]\}$. Udowodnij, że

$$\forall \alpha \geq 0\, \forall p \geq 1 \quad \alpha^p P\left(\max_{0\leq n\leq N} |X_n| \geq \alpha\right) \leq \mathbb{E}\,|X_N|^p\,,$$

$$\forall p > 1 \quad \mathbb{E}\,|X_N|^p \leq \mathbb{E}\left(\max_{0\leq n\leq N} |X_n|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\,|X_N|^p\,.$$

Zadanie 29: *Nierówności maksymalne* Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$, $T < \infty$, będzie martyngałem (nieujemnym podmartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}(t),\ t \in [0,T]\}$ o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Udowodnij, że

$$\forall \alpha \geq 0\ \forall p \geq 1 \quad \alpha^p P\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_n| \geq \alpha\right) \leq \mathbb{E}\,|X_T|^p\,,$$

$$\forall p > 1 \quad \sup_{t\in T} \mathbb{E}\,|X_t|^p \leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} |X_t|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in T} \mathbb{E}\,|X_t|^p\,.$$

Zadania
Progresywna mierzalność

Zadanie 30: Udowodnij, że progresywnie mierzalny względem $\mathbb{F}$ proces stochastyczny $X = \{X_t\}_{t\in T}$ jest procesem mierzalnym i $\mathbb{F}$-adaptowalnym.

Zadanie 31: Niech $X = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie adaptowanym do filtracji $\mathbb{F}$ procesem stochastycznym o prawostronnie (lewostronnie) ciągłych trajektoriach. Udowodnij, że X jest progresywnie mierzalny.

Zadanie 32: Podaj przykłady procesów stochastycznych niemierzalnych oraz mierzalnych, ale nie progresywnie mierzalnych.

Zadanie 33: Dla ustalonej filtracji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ ($T = [0,\infty)$) niech $X = \{X_t\}_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym progresywnie mierzalnym oraz τ momentem stopu względem $\mathbb{F}$ ($P(\tau < \infty) = 1$). Udowodnij, że X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna.

I Wahanie, wahanie kwadratowe i kowahanie funkcji

$\mathrm{V}_g([a,b])$	wahanie funkcji $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ na odcinku $[a,b]$
$\mathrm{V}_g(t)$	wahanie funkcji $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ na odcinku $[0,t]$, $\mathrm{V}_g([0,t])$
$[g]([a,b])$	wahanie kwadratowe funkcji g na odcinku $[a,b]$
$[g](t)$	wahanie kwadratowe funkcji g na odcinku $[0,t]$, $[g]([0,t])$
$[f,g](t)$	kowahanie funkcji f i g na odcinku $[0,t]$

Zadanie 1-1: Wykaż, że jeżeli funkcja $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca, to $\mathrm{V}_g(t) = g(t) - g(0)$. Podobnie, dla funkcji nierosnącej $\mathrm{V}_g(t) = g(0) - g(t)$.

Zadanie 1-2: Wykaż, że dowolna funkcja $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ ma skończone wahanie $V_f(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f można przedstawić w postaci $f = g - h$, gdzie $g,\ h\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ są niemalejące.

Zadanie 1-3: Wykaż, że jeżeli funkcja $f = f(t), t \geq 0$ jest klasy C^1 $\left(f(t) = \int_0^t f'(s)ds,\ \int_0^t |f'(s)|\, ds < \infty\right)$, to $\mathrm{V}_f(t) = \int_0^t |f'(s)|\, ds$.

Zadanie 1-4: Wykaż, że funkcja $g(t) = t\sin(1/t)$ dla $t > 0$ i $g(0) = 0$ jest ciągła na $[0,1]$, różniczkowalna na $(0,1)$, ale ma nieskończone wahanie na każdym przedziale zawierającym 0.

Zadanie 1-5: Wykaż, że funkcja $g(t) = t^2\sin(\pi/t)$ dla $t > 0$ i $g(0) = 0$ jest ciągła na $[0,1]$, różniczkowalna na $(0,1)$ i ma wahanie skończone.

Zadanie 1-6: Udowodnij, że funkcja o wahaniu skończonym może mieć co najwyżej przeliczalną liczbę punktów nieciągłości. Ponadto wszystkie te nieciągłości są skokami.

Zadanie 1-7: Wykaż, że funkcja spełniająca warunek Lipschitza ma skończone wahanie na skończonych przedziałach.

Zadanie 1-8: Udowodnij, dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ o skończonym wahaniu, wahanie kwadratowe $[f](t), t \in [0,T]$ wynosi 0.

Zadanie 1-9: Wykaż, że dla dowolnej funkcji deterministycznej $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ różniczkowalnej w sposób ciągły $\big($tzn. $f \in C^1([0,T])\big)$, wahanie kwadratowe $[f](T) = 0$, a wahanie $V_f\,(T) < \infty$.

Zadanie 1-10: Niech $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o dodatnim wahaniu kwadratowym $[f]([s,t]) > 0$ dla pewnych $[s,t] \subseteq [0,T]$. Wykaż, że $V_f\,([s,t]) = \infty$. Pokaż na przykładzie, że założenie o ciągłości f jest istotne.

Zadanie 1-11: Wykaż, że

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad [f,g]([s,t]) = [g,f]([s,t]); \\ &\text{(b)} \quad [\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g]([s,t]) = \alpha_1[f_1,g]([s,t]) + \alpha_2[f_2,g]([s,t]). \end{aligned}$$

Zadanie 1-12: Niech $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, a $g\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o skończonym wahaniu $V_g\,([s,t]) < \infty$ na pewnym odcinku $[s,t] \subseteq [0,T]$. Udowodnij, że ich kowahanie wynosi 0, $\big([f,g]([s,t]) = 0\big)$.

Zadanie 1-13: Niech $f,\ g\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ spełniają $[f](T) < \infty$, $[g](T) < \infty$ oraz $[f,g]([0,T]) \in \mathbb{R}$ (jest dobrze określona). Wykaż tzw. *tożsamość polaryzacyjną*:

$$[f,g] = \frac{1}{2}\left([f+g] - [f] - [g]\right) = \frac{1}{4}\left([f+g] - [f-g]\right).$$