III Całka Itô

Niech $\Omega, \mathcal{F}, P$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $\mathbb{B} = \{B_t,\ t \geq 0\}$ będzie standardowym procesem ruchu Browna, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ *zupełną* filtracją naturalną procesu ruchu Browna i $[0,T]$, $T < \infty$ skończonym przedziałem.
$\mathcal{E}$ – rodzina procesów elementarnych (elementarnych procesów prognozowalnych), tj. adaptowanych procesów prostych.
$L^2([0,T]\times\Omega, \lambda\otimes P) = \{f : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R},\ \mathcal{B}_{[0,T]}\otimes\mathcal{F}$ mierzalnych, z normą $\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^T \mathbb{E}\,|f(s)|^2\,ds < \infty\}$.

Zadania
Niech proces $\{X(t), t \geq 0\}$ będzie deterministyczną funkcją rzeczywistą zmiennej t. Proces $X(t)$ nazywamy procesem prostym (funkcją prostą) jeśli istnieją czasy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ i stałe $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ takie, że

$$X(t) = c_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Całkę Itô funkcji prostej definiujemy jako

$$\int_0^T X(t)dB(t) := \sum_{i=0}^{n-1} c_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

Zadanie 3-1: Wyznacz rozkład $\int_0^T X(t)dB(t)$.

Zadanie 3-2: Niech $X_t = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 2, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$. Oblicz $\int_0^3 X(t)dB(t)$.

Zadania
Proces $\{X(t), t \geq 0\}$ nazywamy procesem prostym adaptowanym do $\mathbb{F}$ jeśli istnieją czasy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ i zmienne losowe $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$, gdzie ξ_0 jest stała z prawdopodobieństwem 1, ξ_i są $\mathcal{F}_{t_i}$ mierzalne i $\mathbb{E}\,\xi_i^2 < \infty$ dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$; takie, że

$$X(t) = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Zauważmy, że proces prosty adaptowany (do $\mathbb{F}$) określony jest jako proces lewostronnie ciągły.
Całkę Itô procesu prostego definiujemy jako

$$\int_0^T X(t)dB(t) := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

Zauważmy, że proces określony jest jako lewostronnie ciągły. Procesy adaptowane, lewostronnie ciągłe (prawostronnie ciągłe) są procesami prognozowalnymi (por. Zadanie 31). Procesy adaptowane, lewostronnie ciągłe będziemy nazywać procesami regularnymi. Procesy proste adaptowane określa się jako procesy elementarne. Rodzinę takich procesów oznaczamy $\mathcal{E}$.

Zadanie 3-3: Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$, $\{Y(t),\ t \in [0,T]\}$ będą procesami elementarnymi i niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Udowodnij

liniowość
$$\int_0^T \alpha X(t) + \beta Y(t) dB(t) = \alpha \int_0^T X(t) dB(t) + \beta \int_0^T Y(t) dB(t),$$
$$\int_0^T \mathbb{1}_{(a,b]}(t) dB(t) = B(b) - B(a), \quad \int_0^T \mathbb{1}_{(a,b]} X(t) dB(t) = \int_a^b X(t) dB(t),$$

zero mean property
$$\mathbb{E} \int_0^T X(t) dB(t) = 0,$$

własność izometrii
$$\mathbb{E} \left(\int_0^T X(t) dB(t) \right)^2 = \int_0^T \mathbb{E}\, X^2(t) dt,$$

tzn.
$$\left\| \int_0^T X(t) dB(t) \right\|^2_{L^2(P)} = \|X(\cdot)\|^2_{L^2([0,T]\times\Omega, \lambda\otimes P)}.$$

Zadanie 3-4: Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$ będzie procesem elementarnym. Rozważmy proces $\{I(t),\ t \in [0,T]\}$, $I(t) = \int_0^t X(s) dB(s)$. Wykaż, że $I(t)$ jest ciągłym martyngałem względem $\mathbb{F}$.

Zadanie 3-5: Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$ będzie procesem elementarnym. Rozważmy proces $\{I(t),\ t \in [0,T]\}$, $I(t) = \int_0^t X(s) dB(s)$. Wykaż, że $I^2(t) - \int_0^t X^2(u) du$ jest ciągłym martyngałem względem $\mathbb{F}$.

Zadania

Całka Itô procesu regularnego

Niech $\{X(t), t \geq 0\}$ będzie procesem adaptowanym, całkowalnym z kwadratem

$$P\left(\int_0^T X^2(t) dt < \infty \right) = 1.$$

Niech $(\Pi_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[0,T]$ takim, że $\delta_n = \max_i (t^n_{i+1} - t^n_i) \to 0$. Rozważmy ciąg procesów elementarnych $(X^n(t))_n \geq 1$

$$X^n(t) = X(0) + \sum_{i=0}^{n-1} X(t^n_i) \mathbb{1}_{(t^n_i, t^n_{i+1}]}(t),$$

takich, że $X^n(t) = X(t)$ w punktach podziału. Zauważmy, że

$$\int_0^T (X^n(t))^2 dt = \sum_{i=0}^{n-1} X^2(t^n_i) \left(t^n_{i+1} - t^n_i\right) \to \int_0^T X^2(t) dt,$$
$$\int_0^T \mathbb{E}(X^n(t))^2 dt = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\, X^2(t^n_i) \left(t^n_{i+1} - t^n_i\right) \to \int_0^T \mathbb{E}\, X^2(t) dt,$$

jako sumy Riemanna odpowiednich całek. Zatem można pokazać, że X^n jest ciągiem aproksymującym proces $X(t)$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{E}(X^n(t) - X(t))^2 dt = 0$.

Załóżmy, że
$$\int_0^T \mathbb{E}\, X^2(t) dt < \infty.$$

Całka z procesu prostego $I^n = \int_0^T X^n(t) dB(t)$ określona jest jak poprzednio, $\mathbb{E}(I^n) = 0$ oraz $\mathbb{E}(I^n - I^m)^2 \to 0$ dla $n, m \to \infty$. Przestrzeń $L^2(\Omega)$ (zmiennych losowych o średniej 0, skończonym drugim momencie, zbieżność w sensie średniokwadratowym) jest zupełna – stąd istnieje I takie, że $I^n \to I$ w $L^2(\Omega)$, granica nie zależy od ciągu aproksymującego.

Jeżeli proces jest adaptowany, całkowalny z kwadratem, ale niekoniecznie o skończonej wartości oczekiwanej, to można pokazać, że taki proces jest granicą, wg prawdopodobieństwa, procesów prostych.

Dowód istnienia całki Itô przedstawiony został na wykładzie. Fragmenty powyższego rozumowania dowodzimy również w kolejnych zadaniach.

Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$ będzie procesem regularnym ($\mathbb{F}$ adaptowany, o lewostronnie ciągłych trajektoriach). Całkę stochastyczną (całkę Itô procesu X) definiujemy jako

$$\int_0^t X(s)dB(s) := \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_0^t X^n(s)dB(s), \quad 0 \le t \le T,$$

gdzie $(X^n(t))_{n\ge 1}$ jest dowolnym ciągiem procesów elementarnych aproksymującym $X(t)$ w $L^2([0,T]\times\Omega, \lambda\otimes P)$.

Zadanie 3-6: Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}, \{Y(t),\ t \in [0,T]\}$ będą procesami regularnymi, dla których z prawdopodobieństwem 1, $\int_0^T X^2(t)dt < \infty$, $\int_0^T Y^2(t)dt < \infty$ i niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Udowodnij

liniowość
$$\int_0^T \alpha X(t) + \beta Y(t)dB(t) = \alpha\int_0^T X(t)dB(t) + \beta\int_0^T Y(t)dB(t),$$
$$\int_0^T \mathbb{1}_{(a,b]}(t)dB(t) = B(b) - B(a), \qquad \int_0^T \mathbb{1}_{(a,b]}X(t)dB(t) = \int_a^b X(t)dB(t),$$

Jeżeli ponadto $\int_0^T \mathbb{E}\, X^2(t)dt < \infty$, to zachodzi

zero mean property
$$\mathbb{E}\int_0^T X(t)dB(t) = 0,$$

własność izometrii
$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)dB(t)\right)^2 = \int_0^T \mathbb{E}\, X^2(t)dt.$$

Zadanie 3-7: Oblicz $\int_0^T B(t)dB(t)$.

Zadanie 3-8: Wykaż, że

$$\int_a^b B^2(t)dB(t) = \frac{1}{3}\left(B^3(b) - B^3(a)\right) - \int_a^b B(t)dt.$$

Zadanie 3-9: Udowodnij, że jeżeli $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$ jest procesem ciągłym, $\mathbb{F}$ adaptowanym, to całka Itô $\int_0^T X(t)dB(t)$ istnieje. Wyciągnij stąd wniosek, że dla każdej funkcji f ciągłej na $\mathbb{R}$ całka $\int_0^T f(B(t))dB(t)$ jest dobrze określona.

Zadanie 3-10: Wykaż, że całka Itô nie jest monotoniczna, tzn. $X(t) \le Y(t) \not\Rightarrow \int_0^T X(t)dB(t) \le \int_0^T Y(t)dB(t)$.

Zadanie 3-11: Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}, \{Y(t),\ t \in [0,T]\}$ będą regularnymi procesami (przy ustalonej filtracji $\mathbb{F}$ procesu ruchu Browna $\{B(t),\ t \in [0,T]\}$) spełniającymi $\mathbb{E}\int_0^T X^2(t)dt < \infty$, $\mathbb{E}\int_0^T Y^2(t)dt < \infty$. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)dB(t)\int_0^T Y(t)dB(t)\right) = \int_0^T \mathbb{E}\left(X(t)Y(t)\right)dt.$$

Zadanie 3-12: Zbadaj istnienie całek Itô (określ pierwszy i drugi moment):

$$(a) \int_0^1 t dB(t),$$
$$(b) \int_0^1 \exp(B(t)) dB(t),$$
$$(c) \int_0^1 (1-t)^{-\alpha} dB(t).$$

Zadanie 3-13: Zbadaj istnienie całki $\int_0^T \exp(B^2(t))dB(t)$ (czy $P\left(\int_0^T X^2(t)dt < \infty\right) = 1$, czy może $\int_0^T \mathbb{E}\, X^2(t)dt < \infty$, $T = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, 1$).

Zadanie 3-14: Niech $X(t)$ będzie procesem ciągłym, adaptowalnym, którego trajektorie mają o skończone wahanie. Wykaż, że całkę stochastyczną $\int_0^T X(t)dB(t)$ można zdefiniować jako

$$\int_0^T X(t)dB(t) = X(T)B(T) - X(0)B(0) - \int_0^T B(t)dX(t),$$

tzn. zachodzi formalnie całkowanie przez części. (wskazówka: można założyć, że $X(0) = 0$ z pr. 1.)

Zadania

Proces całki Itô (procesu regularnego)

Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$ będzie procesem regularnym adaptowanym takim, że z prawdopodobieństwem 1, $\int_0^T X^2(t)dt < \infty$, dla którego całka Itô $\int_0^t X(s)dB(s)$ jest określona dla wszystkich $t \leq T$. Funkcja (losowa) górnej granicy całkowania zadaje proces stochastyczny $\{Y(t),\ t \in [0,T]\}$:

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s).$$

Można pokazać, że istnieje wersja procesu $\{Y(t), t \in [0,T]\}$ o ciągłych trajektoriach i takie też będziemy rozważać.

Zadanie 3-15: Niech $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$ będzie procesem regularnym oraz $\int_0^T \mathbb{E}\, X^2(t)dt < \infty$. Wykaż, że $\{Y(t),\ t \in [0,T]\}$ jest całkowalnym z kwadratem $\mathbb{F}$ martyngałem o średniej 0 i z pr. 1 o ciągłych trajektoriach.

Zadanie 3-16: Udowodnij, że dla każdej funkcji ograniczonej f na $\mathbb{R}$, $\{\int_0^t f(B(s))dB(s),\ t \in [0,T]\}$ jest $\mathbb{F}$ całkowalnym z kwadratem martyngałem o średniej zero.

Zadanie 3-17: Niech f będzie całkowalną z kwadratem funkcją deterministyczną. Pokaż, że proces $\{Y(t) = \int_0^t f(s)dB(s)\}_{t\in[0,T]}$ jest procesem gaussowskim o średniej 0 i autokowariancji

$$c(t, t+u) = \mathrm{Cov}\,(Y(t),\ Y(t+u)) = \int_0^t f^2(s)ds,\ u > 0.$$

Ponadto wykaż, że jest całkowalnym z kwadratem martyngałem.

Zadanie 3-18: Niech $X(t) = 2\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + 3\mathbb{1}_{(1,3]}(t) - 5\mathbb{1}_{(3,4]}(t)$. Oblicz $\int_0^4 X(t)dB(t)$. Pokaż, że proces $\left(Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s),\ t \in [0,4]\right)$ jest procesem gaussowskim oraz martyngałem.

Zadanie 3-19: Niech dla $t \le T$, $(X(t,s),\ s \in [0,T])$ będzie regularnym deterministycznym procesem takim, że $\int_0^t X^2(t,s)ds < \infty$ (tzn. proces zależy od górnej granicy całkowania t. Udowodnij, że proces całki Itô $Y(t) = \int_0^t X(t,s)dB(s)$ jest procesem gaussowskim, o średniej 0 i funkcji kowariancji

$$c(t, t+u) = \mathrm{Cov}(Y(t), Y(t+u)) = \int_0^t X(t,s)X(t+u,s)ds.$$

Ponadto pokaż, że $Y(t)$ nie musi być martyngałem.

Zadanie 3-20: Wykaż, że każdy gaussowski martyngał na $[0,T]$ jest całkowalnym z kwadratem martyngałem o przyrostach niezależnych.

IV Wahanie kwadratowe procesu całki Itô

Proces całki Itô $\left\{Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s),\ t \in [0,T]\right\}$ jest procesem ciągłym i adaptowalnym.
Wahanie kwadratowe procesu Y definiujemy jako:

$$[Y,Y](t) = \lim \sum_{i=0}^{n-1} \left(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)\right)^2,$$

dla $n \in \mathbb{N}$ ustalonego, gdzie $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ jest podziałem $[0,t]$, granica wg prawdopodobieństwa po wszystkich podziałach o średnicy $\delta_n = \max_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$.

Niech $\left(Y_1(t) = \int_0^t X_1(s)dB(s),\ t \in [0,T]\right)$, $\left(Y_2(t) = \int_0^t X_2(s)dB(s),\ t \in [0,T]\right)$ będą procesami całki Itô względem tego samego procesu ruchu Browna $\{B(t),\ t \geq 0\}$.
Kowariację kwadratową procesów Y_1 i Y_2 na $[0,t]$ definiujemy jako

$$[Y_1,Y_2](t) = \frac{1}{2}\left([Y_1+Y_2, Y_1+Y_2](t) - [Y_1,Y_1](t) - [Y_2,Y_2](t)\right).$$

Zatem

$$[Y_1,Y_2](t) = \int_0^t X_1(s)X_2(s)ds = \lim \sum_{i=0}^{n-1} \left(Y_1(t_{i+1}^n) - Y_1(t_i^n)\right)\left(Y_2(t_{i+1}^n) - Y_2(t_i^n)\right).$$

Uwaga 1. *Jeżeli $\int_0^t X^2(s)ds > 0$ dla wszystkich $t \leq T$, to całka Itô $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$ ma nieskończone wahanie na $[0,t]$, dla wszystkich $t \leq T$.* (Gdyby wahanie było skończone to wahanie kwadratowe musiałoby być zero.)
Uwaga 2. Tak jak proces ruchu Browna, proces całki Itô $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$ ma ciągłe, ale nigdzie różniczkowalne trajektorie.

Zadanie 4-1: Udowodnij, że wahanie kwadratowe całki Itô $\int_0^t X(s)dB(s)$ dane jest wzorem

$$\left[\int_0^\cdot X(s)dB(s), \int_0^\cdot X(s)dB(s)\right](t) = \int_0^t X^2(s)ds.$$

V Proces Itô i różniczka stochastyczna, wzór Itô

Niech $T \in [0, \infty)$. Proces stochastyczny postaci

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s) dB(s) + \int_0^t \mu(s) ds, \ t < T$$

nazywamy procesem Itô, gdzie $X(0)$ jest $\mathcal{F}_0$ mierzalną zmienną losową, procesy $\sigma(t), \mu(t)$ są $\mathcal{F}_t$ adaptowane oraz $\int_0^T \sigma^2(t) dt < \infty$, $\int_0^t |\mu(t)| \, dt < \infty$ p.n. Powyższe warunki gwarantują sens całek.

Mówimy, że proces Itô ma różniczkę stochastyczną na $[0, T]$ i piszemy

$$dX(t, \omega) = \sigma(t, \omega) dB(t, \omega) + \mu(t, \omega) dt.$$

Zadanie 5-1: Oblicz wahanie kwadratowe procesu Itô.

Formuła Itô dla procesu ruchu Browna

Twierdzenie: *Niech $\{B(t), \ t \in [0, T]\}$ będzie procesem ruchu Browna i niech $f \in C^2$ będzie funkcją rzeczywistą. Wtedy dla każdego $t \leq T$*

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s)) ds.$$

Zadanie 5-2: Udowodnij wzór Itô dla procesu ruchu Browna.

Zadanie 5-3: Korzystając ze wzoru Itô przedstaw w postaci całek procesy

(a) $B^2(t)$;
(b) $B^m(t), \ m \geq 2$;
(c) $\exp(B(t))$.

Zadanie 5-4: Za pomocą wzoru Itô wyznacz różniczkę procesu

(a) $tB^2(t)$;
(b) $\frac{1}{2} B^2(t)$.

Zadanie 5-5: Korzystając ze wzoru Itô przedstaw w postaci nie zawierających całek Itô

(a) $X(t) = \int_0^t \exp(B(s)) dB(s)$;
(b) $X(t) = \int_0^t B(s) \exp(B^2(s)) dB(s)$.

Zadanie 5-6: Oblicz wahanie kwadratowe $[X](t)$ procesu

(a) $X(t) = tB(t)$;
(b) $X(t) = \int_0^t (t - s) dB(s)$.

Zadanie 5-7: Niech f i g będą klasy C^2 oraz niech $B(t)$ oznacza proces ruchu Browna. Wyznacz $d\left(f(B)g(B)\right)$.

Zadanie 5-8: Wykorzystując wzór Itô sprawdź czy poniższe procesy są $\mathbb{F}$ martyngałami

(a) $X(t) = \exp(t/2)\cos B(t)$;
(b) $X(t) = (B(t)+t)\exp(-B(t)-t/2)$;
(b) $X(t) = B^3(t) - 3tB(t)$.

Formuła Itô dla procesu Itô

Niech $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ będzie procesem Itô o różniczcze

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$$

i niech $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Wtedy różniczka procesu $Y(t) = f(X(t), t)$ istnieje oraz

$$\begin{aligned} df(X(t),t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),t)d[X](t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t) + \mu(t)\frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),t)\right)dt + \sigma(t)\frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)dB(t). \end{aligned}$$

Wzór Itô dla funkcji wielu zmiennych

Niech $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ będzie wektorem procesów Itô i niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie funkcją klasy C^2 n zmiennych. Wtedy $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jest także procesem Itô oraz

$$df(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_1, X_2, \ldots, X_n)dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X_1, X_2, \ldots, X_n)d[X_i, X_j](t).$$

Zadanie 5-9: Niech $X(t), Y(t)$ będą dwoma procesami Itô względem tego samego procesu ruchu Browna. Wykaż, że

$$dX(t)Y(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d[X,Y](t).$$

Zadanie 5-10: Niech $X(t), Y(t)$ będą dwoma procesami Itô, adaptowanymi do *niezależnych* procesów ruchu Browna B_1, B_2. Wykaż, że

$$dX(t)Y(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t)$$

Zadanie 5-11: Niech

$$S(t) = \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)\right).$$

Wykaż, że

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t),$$

tzn. $S(t) = 1 + \mu\int_0^t S(s)ds + \sigma\int_0^t S(s)dB(s)$. $(\mu, \sigma \in \mathbb{R})$

Zadanie 5-12: Niech

$$Y(t) = Y_0 \exp\left(\int_0^t (\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)\right).$$

Wykaż, że

$$dY(t) = \mu(t)Y(t)dt + \sigma(t)Y(t)dB(t),$$

tzn. $Y(t) = Y_0 + \int_0^t \mu(s)Y(s)ds + \int_0^t \sigma(s)Y(s)dB(s)$.

Zadanie 5-13: Niech $X(t) = Y(t)Z(t)$, gdzie

$$Y(t) = \exp\left(\int_0^t (a(s) - \frac{1}{2}c^2(s))ds + \int_0^t c(s)dB(s)\right),$$
$$Z(t) = X_0 + \int_0^t \frac{b(s) - c(s)g(s)}{Y(s)}ds + \int_0^t \frac{g(s)}{Y(s)}dB(s).$$

Wykaż, że

$$dX(t) = (a(t)X(t) + b(t))dt + (c(t)X(t) + g(t))dB(t).$$