大学物理

College Physics

主讲

华 中 科 技 大 学

刘超飞

动生电动势

$$\varepsilon_i=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon=\int_-^+\vec{E}_K\cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$：导线上任意选定的一小段（足够短）

$\vec{v}$：以上这段导线的速度

$\vec{B}$：以上这段导线处的磁感应强度

感生电动势

$$\varepsilon_i=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}=\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}$$

感应电场

$$\begin{cases}\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{s}=0\\ \oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}\end{cases}$$

感应电场 $\vec{E}_i$

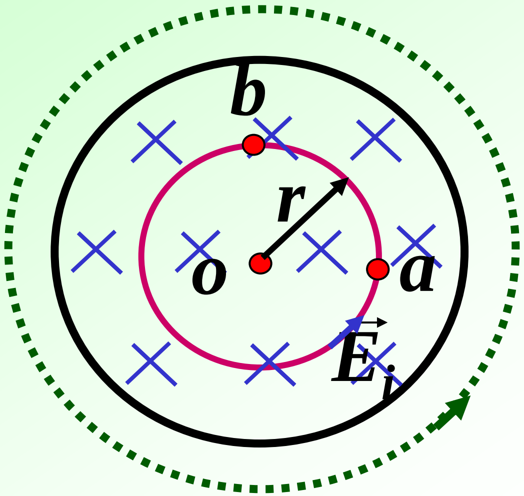
由于磁场随时间变化而产生的电场，无源、有旋。

5. $\vec{E}_i$的计算　一般情况下的 $\vec{E}_i$的计算较复杂

例：求一个轴对称磁场变化时的涡旋电场。已知磁场均匀分布在半径为R的范围内，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，而且大于零。

求：1）任意距中心o为r处的$\vec{E}_i$=?

2）计算将单位正电荷从$a\rightarrow b$，$\vec{E}_i$的功。



解：1)由$\vec{B}$的均匀及柱对称性可知，在同一圆周上$\vec{E}_i$的大小相等，且沿切线方向，

取半径为r的电力线为积分路径，

方向为逆时针方向:

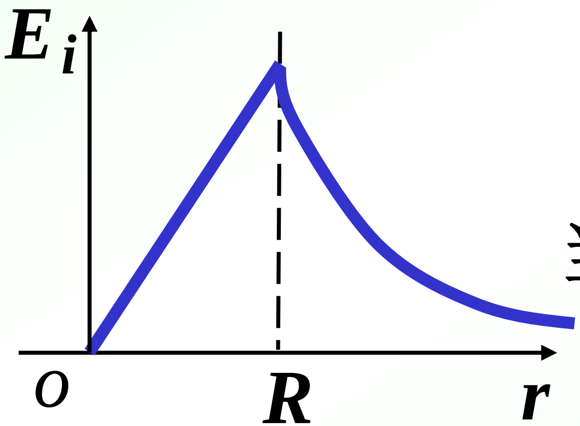
$$\oint \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

当$r<R$时：

$$\oint \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=E_i\cdot 2\pi r$$

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot(-\pi r^2)$$

$$\Bigg\}\ E_i=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



当$r>R$时：

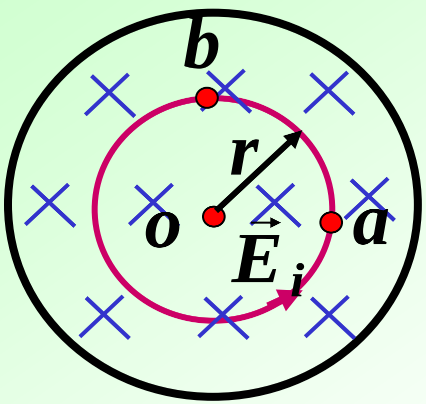
$$\oint \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=E_i\cdot 2\pi r$$

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$

$$\Bigg\}\ E_i=\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$E_i=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

2）沿1/4圆周将单位正电荷从$a\rightarrow b$，$\vec{E}_i$做功



$$A_{\frac{1}{4}ab}=\int\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^{\frac{\pi r}{2}}\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}l=\frac{\pi}{4}r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

沿3/4圆周$\vec{E}_i$做功

$$A_{\frac{3}{4}ab}=\int\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_0^{\frac{3\pi r}{2}}\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}l=-\frac{3\pi}{4}r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

结论：

1）$E_i\propto \mathrm{d}B/\mathrm{d}t$，与$B$大小无关

2）$r>R$，磁场外$E_i\neq 0$。

3）$A_{1/4ab}\neq A_{3/4ab}$

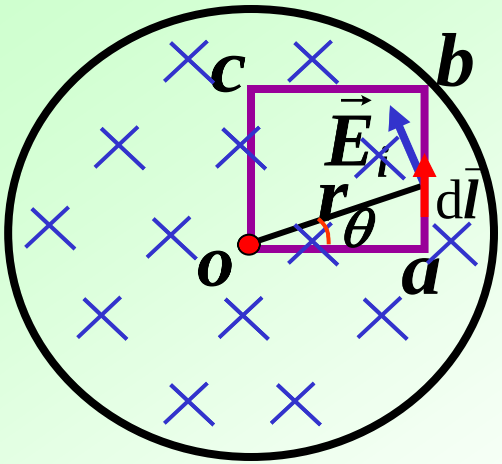
即:$\vec{E}_i$做功与路径有关——非保守场

例：在上例的磁场中,放入一边长为L 的正方形导体回路$oabc$。

求：1）回路各边的感应电动势； 2) $\varepsilon_{i总}$；

3）回路内有静电场吗？

若有，c与a哪点电势高？



解：1） $\because oa \perp \vec{E}_i$, $oc \perp \vec{E}_i$ $\quad \therefore \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{oc} = 0$

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b E\cos\theta \mathrm{d}l = \int_a^b \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\theta \mathrm{d}l$$

$$= \int_a^b \frac{L}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}L^2$$

$$\boxed{\varepsilon_i = \int_-^+ \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$\boxed{E_i = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

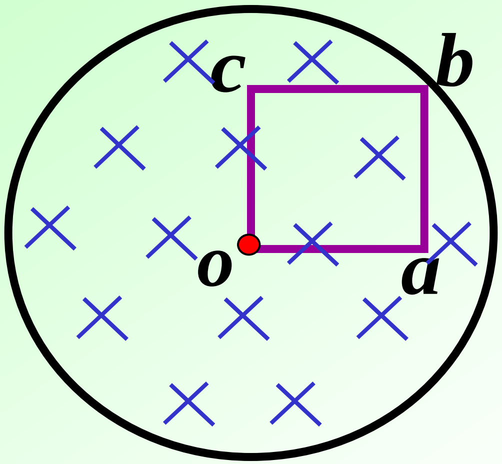
同理：$\varepsilon_{bc} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}L^2$

2） $\varepsilon_{i总} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} = L^2\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$,

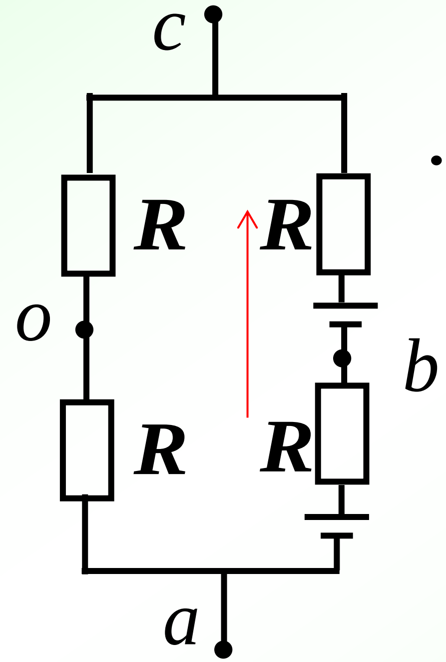
或$\varepsilon_{i总} = -\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}\cdot\vec{s}) = s\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = L^2\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

注：根据对称性：1）、2）的计算可以倒过来进行。

3）有静电场。电荷积累在哪?



等效电路



$$\boxed{\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{bc}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}l^2}$$

$\because \varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0$,

ε_{ab}, ε_{bc}会使正电荷在c点聚集,而a点有负电荷积累.

$$\therefore V_c > V_a$$

另，可考虑从a到c的电势变化：

$$V_a+|\varepsilon_{ab}|-iR+|\varepsilon_{bc}|-iR=V_c$$

$$V_a-V_c=2iR-2|\varepsilon_{ab}|$$

$$i=\frac{2|\varepsilon_{ab}|}{4R}$$

$$V_a-V_c=|\varepsilon_{ab}|-2|\varepsilon_{ab}|=-|\varepsilon_{ab}|<0$$

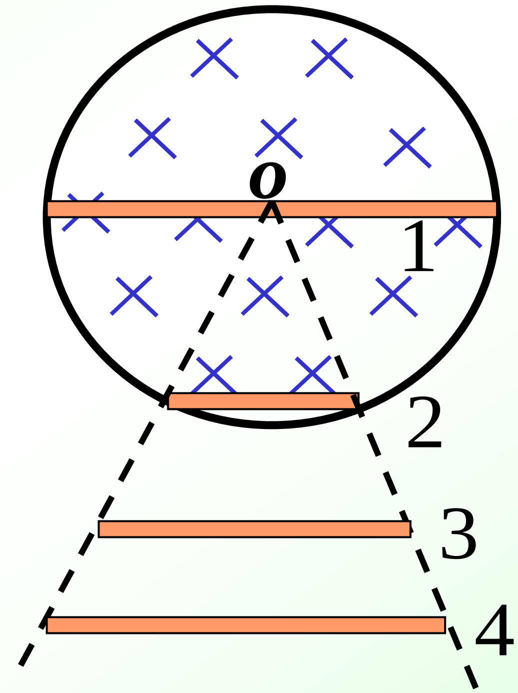
$$\therefore V_c > V_a$$

例：在上例的磁场的磁场中，放有四根导体棒。

1）比较各棒中的ε_i。

2）3，4连成通路I_i=？

3）棒中哪端电势高？



解：

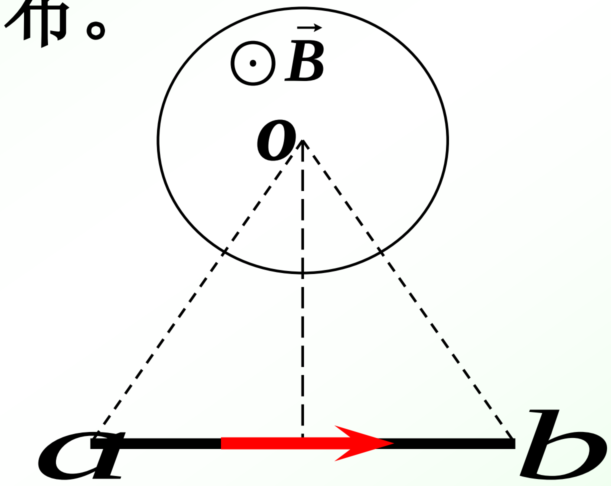
1）$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 = 0$

2）I_i=0

3）$V_{右} > V_{左}$

例：磁力线限制在圆柱体内，沿轴向均匀分布。

$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=c$，求：$\varepsilon_{ab}$



解：补上半径 oa , ob,

设回路方向如图.

$$\boxed{\varepsilon_{oabo}=\varepsilon_{oa}+\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bo}=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{oa}=0,\varepsilon_{bo}=0}$$

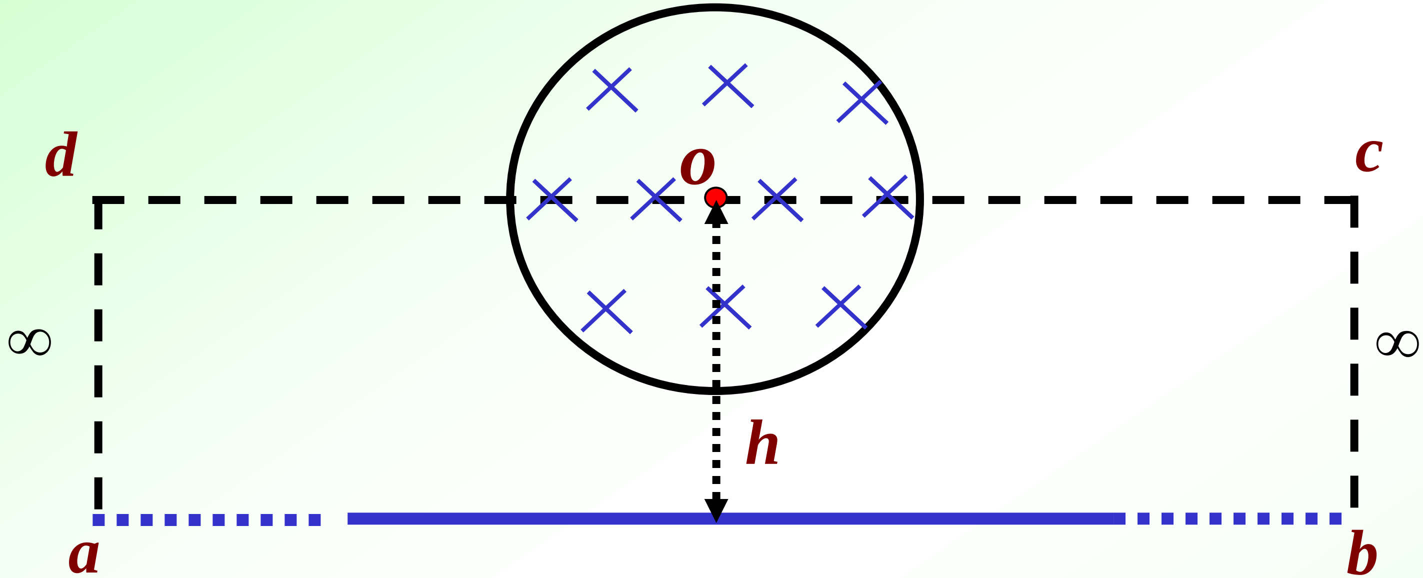
$$\boxed{\varepsilon_{ab}=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\phi=BS_{\text{扇形}}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ab}=-S_{\text{扇形}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

若ab 无限长呢？

例：磁场均匀分布在半径为R的范围，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，且大于零。求无限长直导线ab上的电动势。



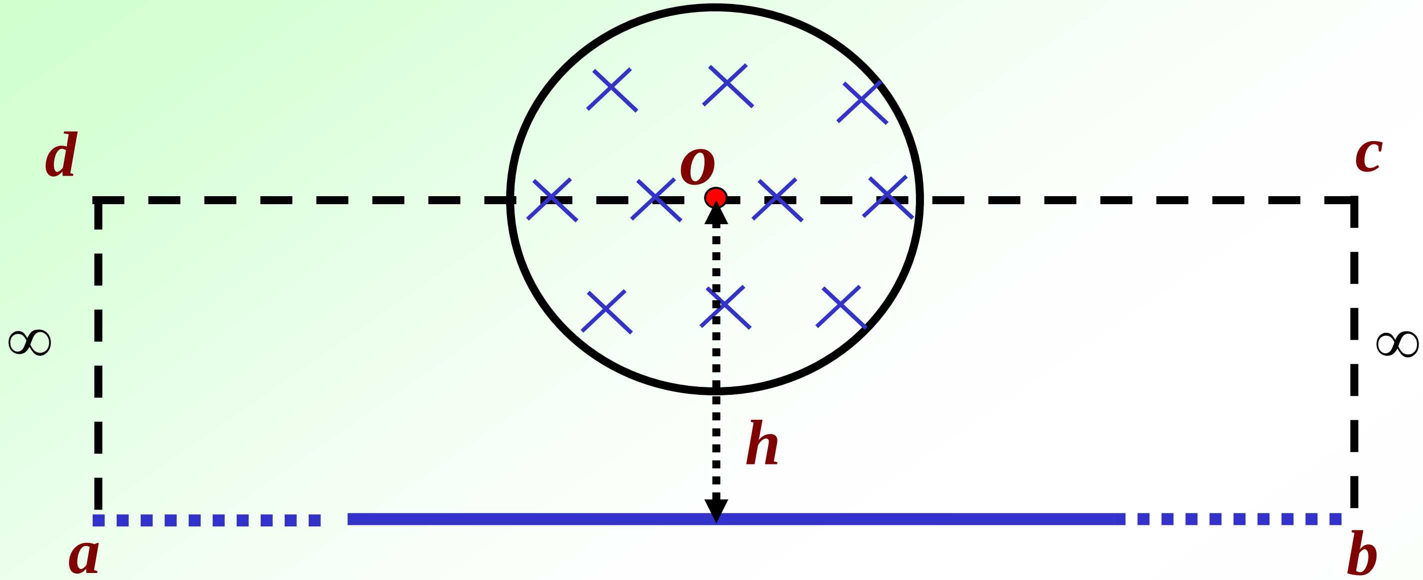
解：由$\vec{B}$的均匀及柱对称性可知，在同一圆周上$\vec{E}_i$的大小相等，方向沿切线方向. 当$r>R$时，$E_i=\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\varepsilon_i=\int_-^+\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$$

另解：

取如图所示的矩形回路。

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$



解：考虑回路*abcd*，$\varepsilon_{abcd}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}+\varepsilon_{cd}+\varepsilon_{da}$，

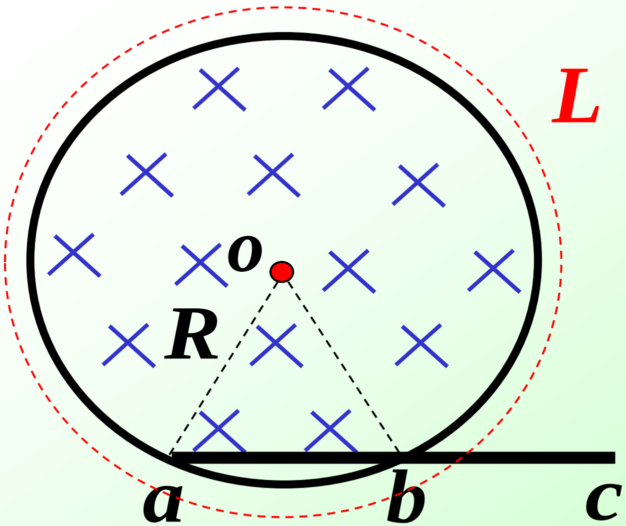
而 $\varepsilon_{bc}=\varepsilon_{cd}=\varepsilon_{da}=0$，

故 $\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{abcd}=-\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t=-(\pi R^2/2)\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$

方向：由愣次定律知 $a\rightarrow b$

例: 在半径为R的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在匀速减小。有一金属棒abc放在图示位置，已知$ab=bc=R$，求（1）a、b、c三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；（2）棒上感应电动势ε_{abc}为多大；（3）a、c哪点电势高。

解:（1）$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \; (= -\frac{d\phi}{dt})$



取回路L，且绕行方向为顺时针。

由楞次规律知，感应电场的方向是顺时针沿L回路。

由对称性知，$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$

$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi R^2$

$\Rightarrow E_i = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$

例: 在半径为R的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在速减小。有一金属棒abc放在图示位置，已知$ab=bc=R$，求

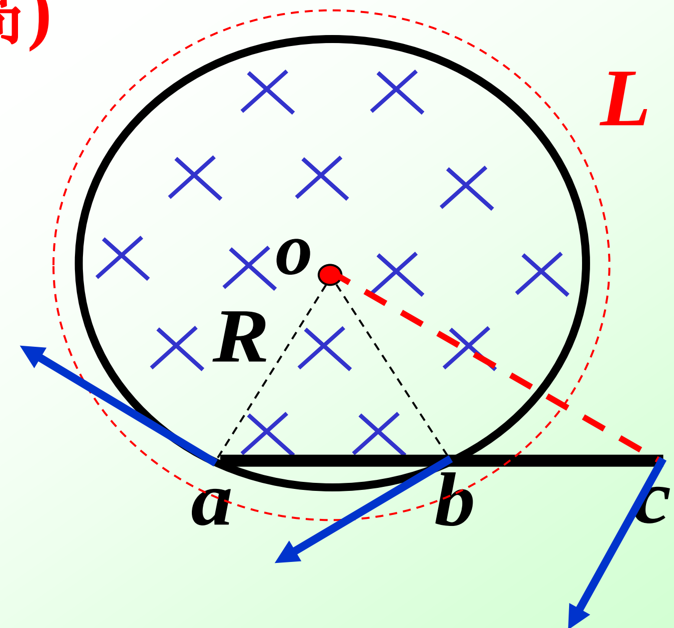
（1）a、b、c三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；

（2）棒上感应电动势ε_{abc}为多大；（3）a、c哪点电势高。

（3）a点电势高。(正极高)

解:

$$E_a = E_b = -\frac{R}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



$$E_c = -\frac{R^2}{2\overline{oc}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{2\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

感应电场的方向如图所示。

（2）$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc}$

分别对oab、obc回路应用

$$E_i = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

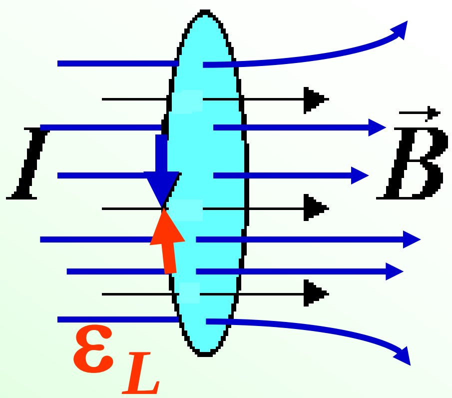
$\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ 即可。或直接考虑oac回路。

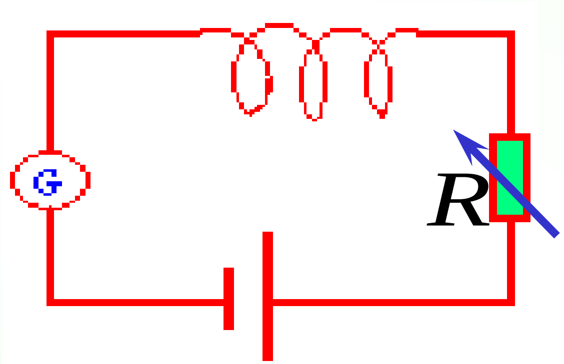
$$\vec{B}=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

五. 自感与互感

1、自感（也称自感应）

由于通电线圈中电流发生变化导致电流产生的磁通量发生变化，而在线圈自身产生感应电动势的现象(自感)。





$$\begin{cases}\varepsilon_L=-\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\varepsilon_L=-N\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

(1)自感电动势的大小

若回路中通有电流 I ，几何形状不变，空间没有铁磁质，根据毕奥—萨伐尔定律：

$$B\propto I,\varphi\propto I,\psi\propto I$$

$$\rightarrow\psi=LI$$

L称为自感系数、电感、自感

$\psi = LI$

对一定几何形状的线圈，在一定的磁介质中（除铁磁质外）L 是常量。（L只与线圈几何形状和周围的磁介质有关，与电流无关）

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -\left(L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)$$

L 为常量时：

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

(2)自感电动势的方向：反抗回路中电流的改变

$$\begin{cases}\text{电流增加时，自感电动势与原电流方向相反}\\ \text{电流减小时，自感电动势与原电流方向相同}\end{cases}$$

(3)自感系数“L”的定义：

$$\begin{cases} L = \Psi / I & \text{（普适）}\\ L = \left|-\dfrac{\varepsilon_L}{\mathrm{d}I/\mathrm{d}t}\right| & \text{（仅}L\text{ 为常量时）}\end{cases}$$

L的单位：亨利（H）

$1\ \mathrm{H} = 1000\ \mathrm{mH} = 10^6\ \mu\mathrm{H}$

注意：

（1）“L”的两个定义式只有在 L 是常量时是一致的。

（2）“L”是线圈**电磁惯性**的量度。

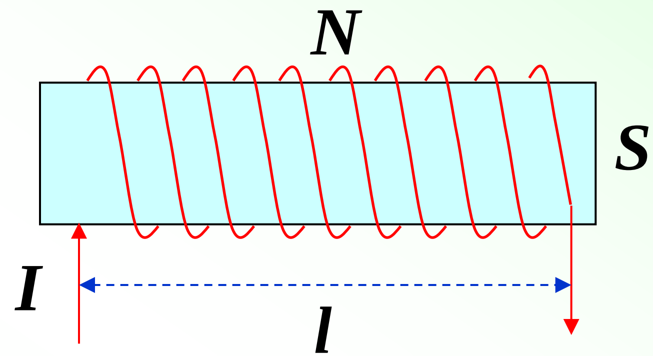
$$\begin{cases} F = ma \\ \varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

(4) 自感系数 L 的计算：

例： 求细长直螺线管的自感系数（l、S、N）

假定螺线管通入电流 I，因管中各处的 $\vec{B}$ 是均匀的.

$$\psi = N\varphi = NBS = N\mu_0 nIS = \mu_0 IS\frac{N^2}{l}$$



真空中 $L = \dfrac{\psi}{I} = \mu_0 S \dfrac{N^2}{l} = \mu_0 n^2 V_{体}$

介质中 $\mu_0 \to \mu_0\mu_r$

$$\boxed{L = \frac{\psi}{I}}$$

注意： （1）铁磁质不能用上式计算

（2）不仅线圈有自感，任何电路都有

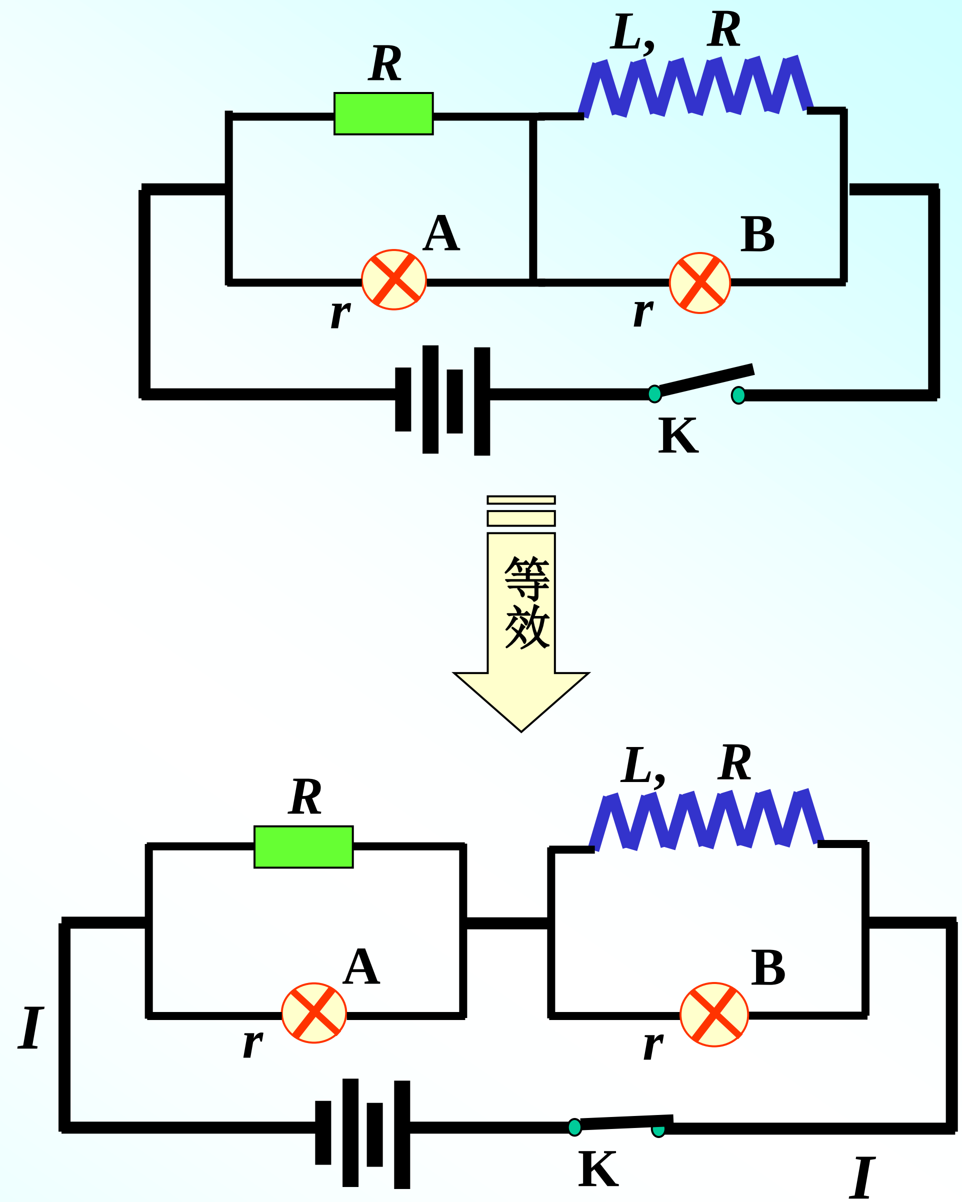
例：A、B是相同的两灯泡，内阻$r>>R$. 线圈的电阻为R，L很大。则下面正确的是[　　　].

(A) K接通时，$I_A<I_B$.

(B) K接通时，$I_A=I_B$.

(C) K断开时，A、B同时灭.

(D) K断开时，$I_A=I_B$.



解：

K接通时，因$r>>R$，故$I_A<<I$.

又因L很大，故 ε_L 大，

所以$I_L\approx 0$，$I_B\approx I$

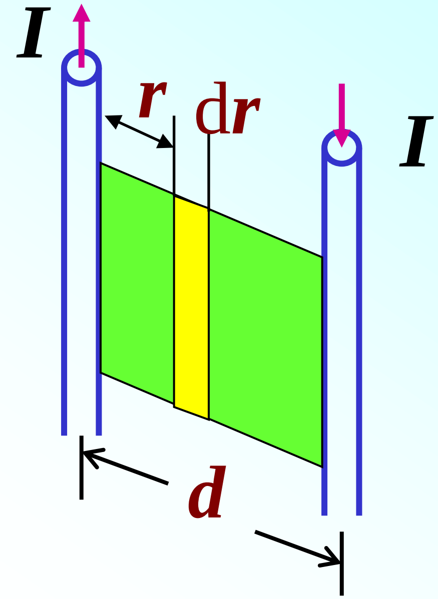
故，K接通时，$I_B>I_A$.

K断开时，仍有$I_B>I_A$.

L称为自感系数、电感、自感

例： 两根平行输电导线，中心距离为d，半径为a，求：两导线单位长度上的分布电感（$d>>a$）。

解： 如图，设导线中有电流I.



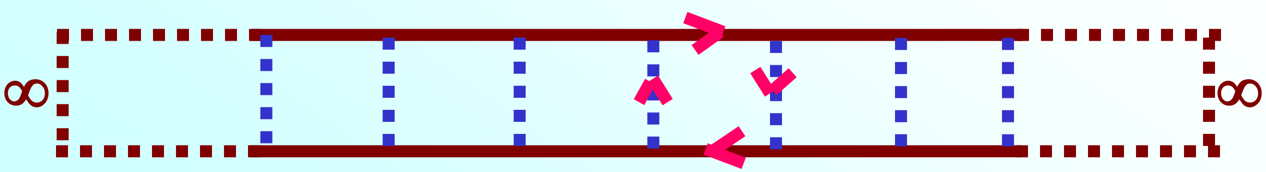
单位长度上的磁通量：

$$\Psi=\phi=\int \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$=\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr+\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}dr$$

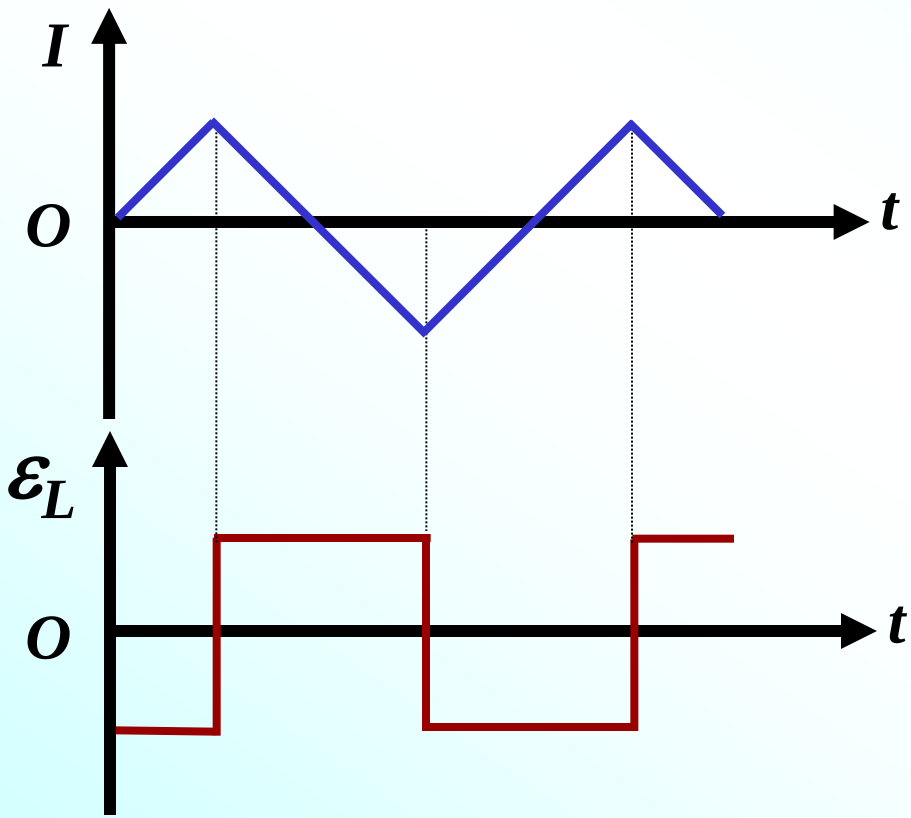
$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\quad(d>>a)$$



(合理吗？)

例: 一线圈中通过的电流I随时间t变化的规律如图.试画出自感电动势ε_L随时间t变化的规律(以I的正方向为ε_L的正向).



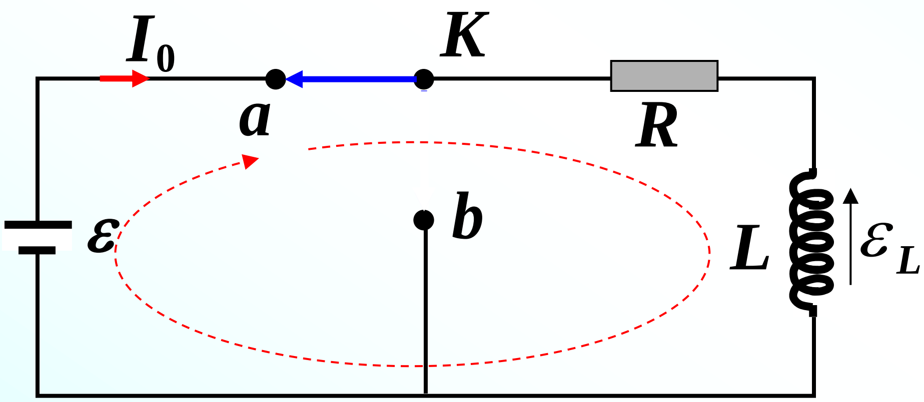
解: 根据

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

可得左边的ε_L随t变化的曲线。

2、自感电路中电流的滋涨和衰减情况

"*LR*"电路的暂态过程：由于电感线圈对电流的阻碍作用，使电流的增减需要一个过程。



(I_0是稳定后的电流)

$I_0=\dfrac{\varepsilon}{R}$ **(因为稳定时自感电动势为零)**

滋涨的暂态过程：

电键拨到 *a* 后某瞬间，回路中的电流为i, 电感线圈内自感电动势

$$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$V_a-iR-|\varepsilon_L|+|\varepsilon|=V_a$$

$$iR+|\varepsilon_L|-|\varepsilon|=0$$

$$iR+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\varepsilon=0 \rightarrow \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon}{R}-i=I_0-i$$

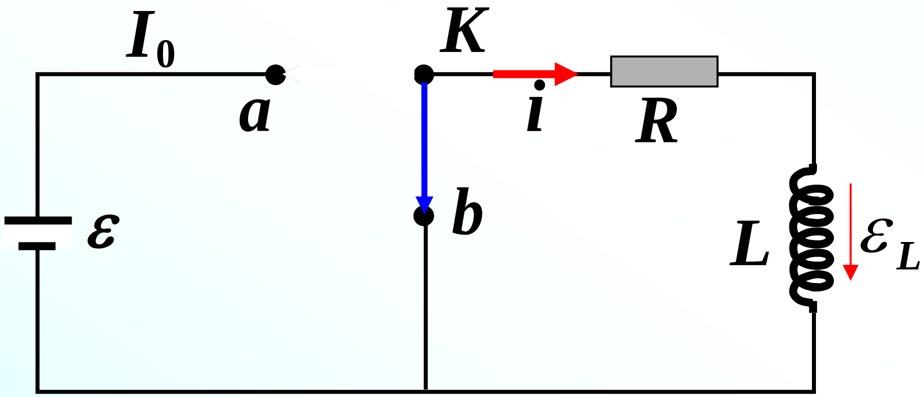
$$\therefore \frac{\mathrm{d}(i-I_0)}{i-I_0}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

取 $t=0$ 时， $i=0$

$$\therefore \int_0^i\frac{\mathrm{d}(i-I_0)}{i-I_0}=-\int_0^t\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{i=I_0(1-e^{-\frac{R}{L}t})}$$

衰减的暂态过程：



(I_0是稳定后的电流)

电键由 a 拨到 b后某瞬间，回路中的电流为i，电感线圈内自感电动势 $\varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$$V_k - iR + |\varepsilon_L| = V_k \longrightarrow |\varepsilon_L| = iR$$

$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=iR$$

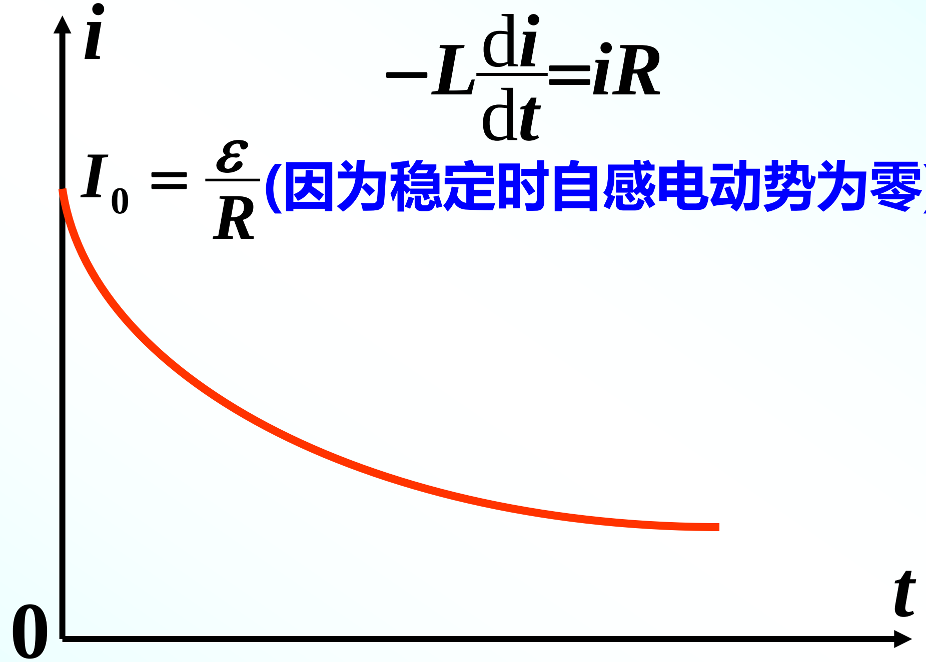
设 $t=0$ 时， $i=I_0$

$$\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\int_{I_0}^{i}\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\int_0^t\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

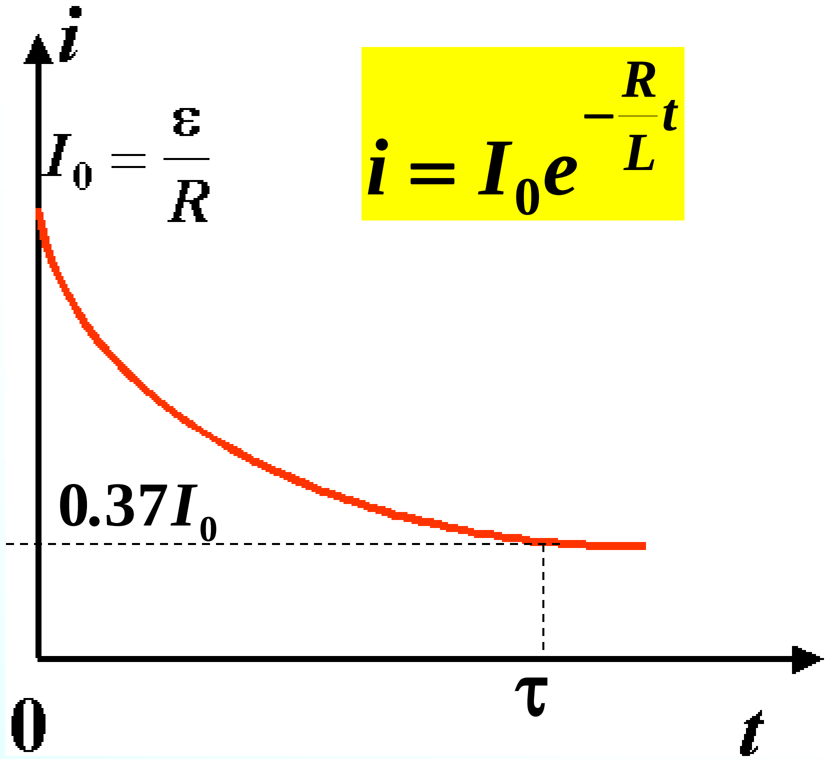
$$\ln\frac{i}{I_0}=-\frac{R}{L}t$$

$$\boxed{i=I_0e^{-\frac{R}{L}t}}$$



$I_0=\dfrac{\varepsilon}{R}$(因为稳定时自感电动势为零)

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



电流 i 随时间指数形式地衰减.

当 $t = L/R$ 时，$i = I_0 \frac{1}{e}$

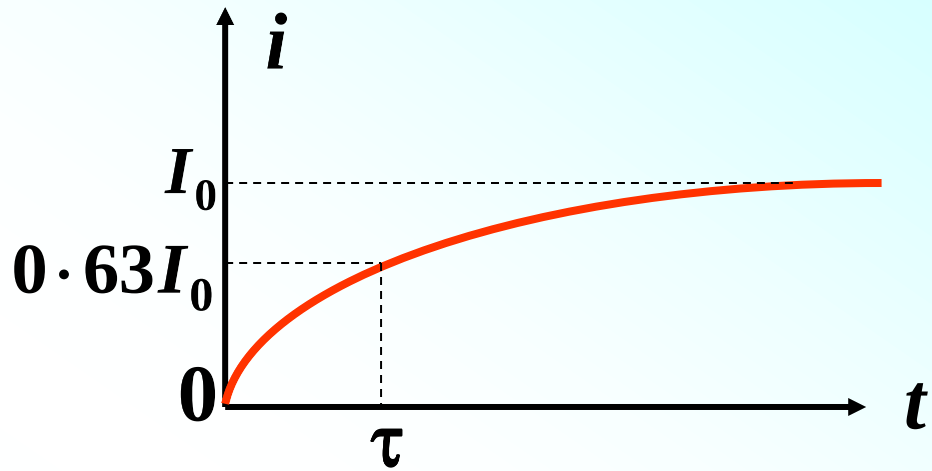
$\tau = \frac{L}{R}$ 称为电路的时间常数或弛豫时间

在 L=1 亨利，R=1000 欧姆的电路中弛豫时间为1毫秒

注意

（1）滋涨的暂态过程：

$$i = I_0 (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$



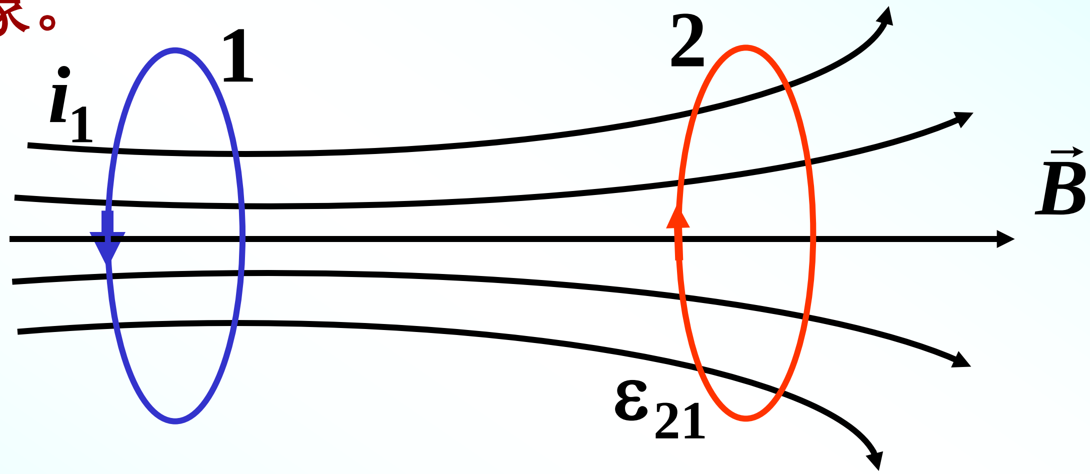
（2）断路时，必须采用逐渐增大电阻的方法

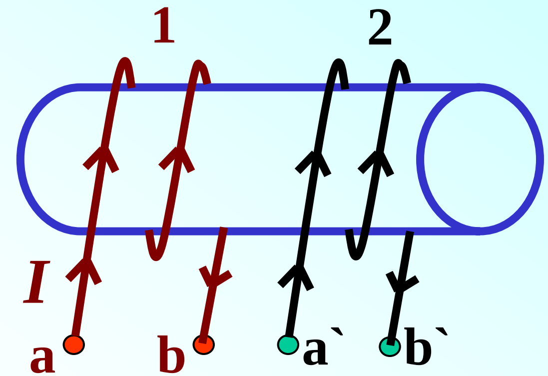
$$\boxed{i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}} \quad \boxed{\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

3、互感（也称互感应）

$B \propto I, \varphi \propto I, \psi \propto I$

一个回路中的电流变化，在邻近的另一回路中产生感生电动势的现象。





根据毕奥—萨伐尔定律以及 $\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ 知：$\psi = MI$

若两线圈的相对位置确定：

设 L_1 的电流为 i_1，在 L_2 中产生的磁通匝链数为 ψ_2

$\because B_1 \propto i_1$， 则 $\Psi_2 \propto B_1 \propto i_1$， $\Psi_2 \propto i_1$

$\Psi_2 = M_{21} i_1$ 同理可得：$\Psi_1 = M_{12} i_2$

M_{ij} 是比例系数——互感系数，简称互感。

M_{ij}与 $\begin{cases} \text{两回路的位置有关} \\ \text{线圈的几何形状及介质}(\mu)\text{有关} \end{cases}$

互感系数M的单位： 亨利（H）

可证明对给定的一对导体回路有：$M_{12}= M_{21}=M$

物理意义：$M=\Psi/I$, 单位电流的磁场在另一线圈中产生的ψ

互感电动势：$\varepsilon_M=-\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-i\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$

当 M=常数时： $\varepsilon_M=-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $\begin{cases} \varepsilon_2=-M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_1=-M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

方向？

楞次定律

作业：8 —T8-T11

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写姓名以及学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周二交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。