大学物理

College Physics

主讲
华 中 科 技 大 学
刘超飞

● 麦克斯韦方程组：

$$\left\{\begin{array}{ll} (1)\ \oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q_i & \text{——有源场} \\ (2)\ \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} & \text{——有旋场} \\ (3)\ \oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 & \text{——无源场} \\ (4)\ \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I+\int \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} & \text{——有旋场} \end{array}\right.$$

● 电磁场能量：**客观存在的一种物质形态**

$$W=W_e+W_m=\int_V w\,\mathrm{d}V \qquad w=w_e+w_m=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

● 能流密度矢量（坡印廷矢量）：

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

● 电磁场质量： $m=\dfrac{w}{c^2}=\dfrac{1}{2c^2}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})$ ——质量密度

第11章　振动与波动

● 定义: 振动 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 称为**谐振动**, 也称为简谐振动。

任何振动都是形如 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$的振动的叠加。

因此，谐振动是最基本、 最简单、最重要的振动。

A： **振幅**　振动的最大幅度(绝对值)。

ω： **圆频率** 描述谐振动快慢的物理量。

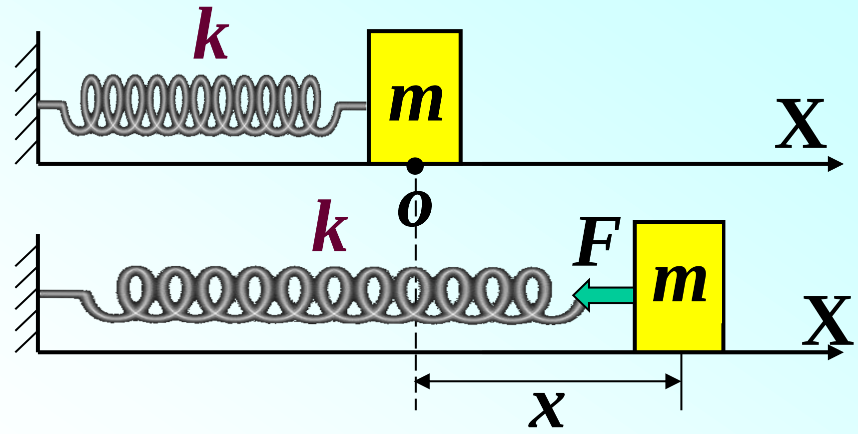
由系统的性质决定, 故称**故有频率**。

$\omega t + \varphi$： **位相**　表征任一时刻 t 的振动状态。

$t=0$ 时刻位相为φ——**初位相**。

三个特征量：A，ω，φ

● 谐振动实例：弹簧振子



受力：$F_{合}=-kx$

运动方程：$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$

位 移：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$　　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (由系统决定)

● 由初始条件 (x_0, v_0) 定A, φ

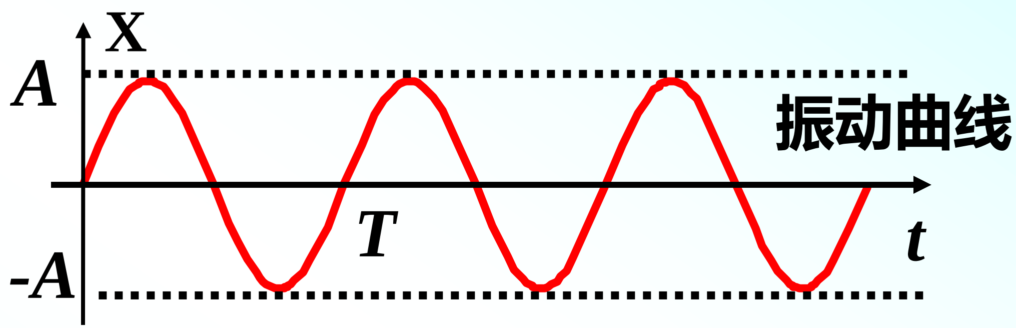
$$\begin{aligned} x&=A\cos(\omega t+\varphi)\\ v&=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2} \\ \mathrm{tg}\varphi=-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\end{cases}$$

再根据v_0的正负决定φ的取舍：$v_0=-\omega A\sin\varphi$

● 谐振动的表示法

1. 解析法 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

2. 振动曲线法



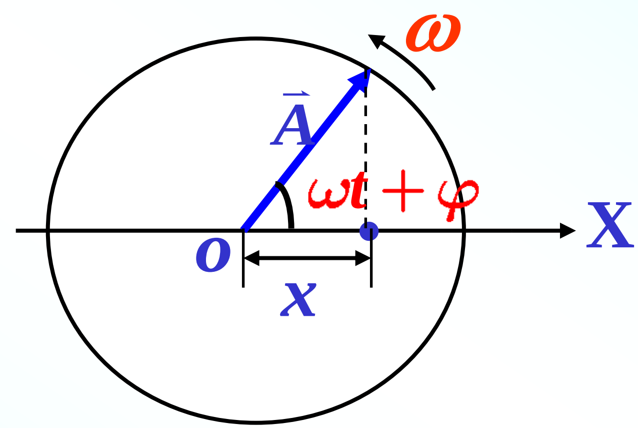
3. 旋转矢量法

旋转矢量的末端在X轴上的投影：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

即：投影点的运动是谐振动。

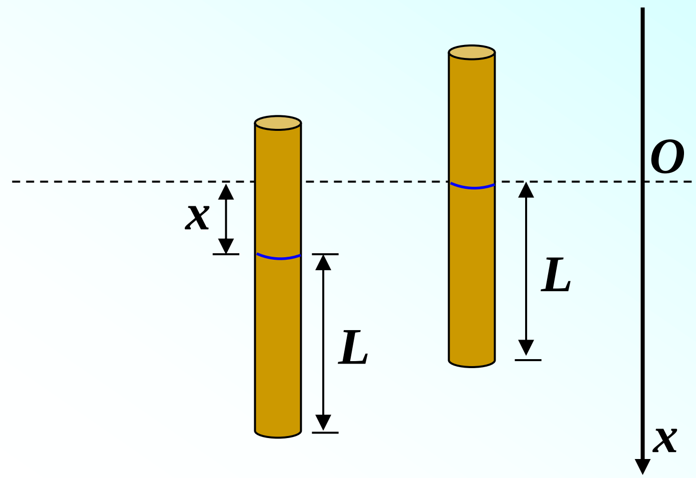
位相：$(\omega t + \varphi) = (\widehat{\vec{A}, \vec{X}})$



旋转矢量图

例：一质量为m的柱体浮在水面上，其横截面积为S。证明其在水中的铅直自由运动是谐振动，并求其振动周期。

解：$\begin{cases} \text{对平衡位置有：} mg = \rho g(SL) \\ \text{柱体偏离平衡位置受合力为：} \\ \quad f = -\rho gS(x+L)+mg \end{cases}$



$$\Rightarrow f = -\rho gSx$$

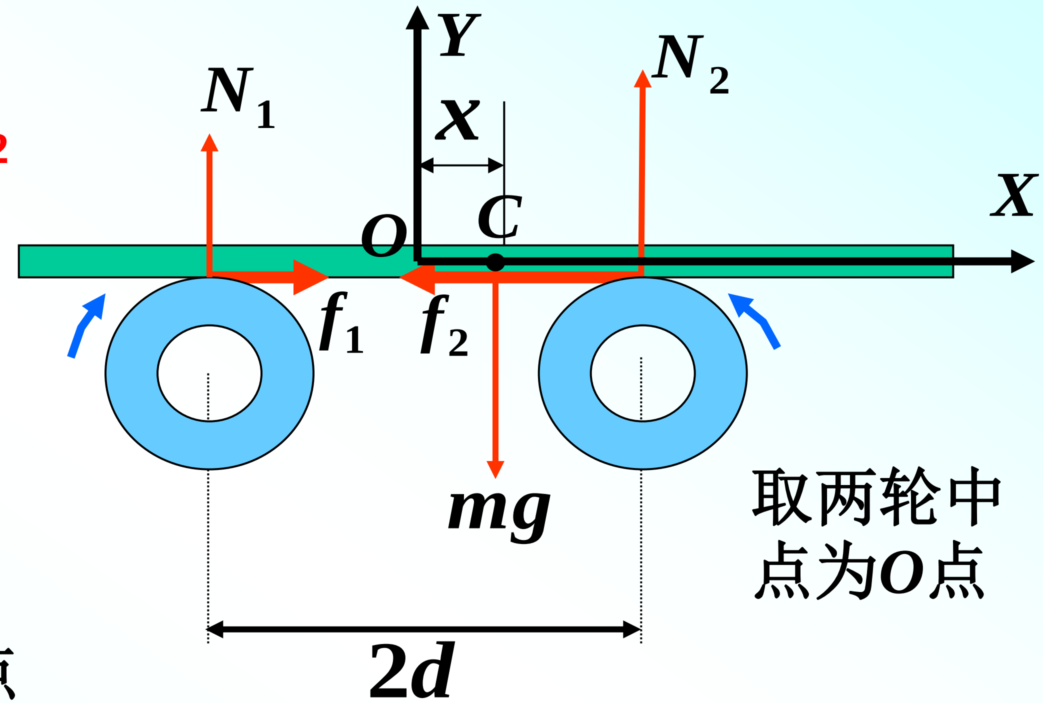
则运动方程为：

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}^2 t} = -\rho gSx$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}^2 t} + \frac{\rho gS}{m}x = 0 \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{\rho gS}{m}}} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}^2 t} + \omega^2 x = 0$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$$

例: 两轮的轴相距 $2d$，且互相平行。两轮转速相同而方向相反，将质量为m的一匀质薄板搁在两轮上，板与轮的摩擦系数为μ，若板的质心 C 起初距一轮较近（如图），试证明板作谐振动并求周期。



解: 板受力: mg, N_1, N_2, f_1, f_2

$$F_y = N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$F_x = f_1 + f_2 = \mu N_1 - \mu N_2$$

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

考察板受力矩，设转轴过O点且垂直于屏幕。

$$N_2 d - N_1 d - mgx = 0$$

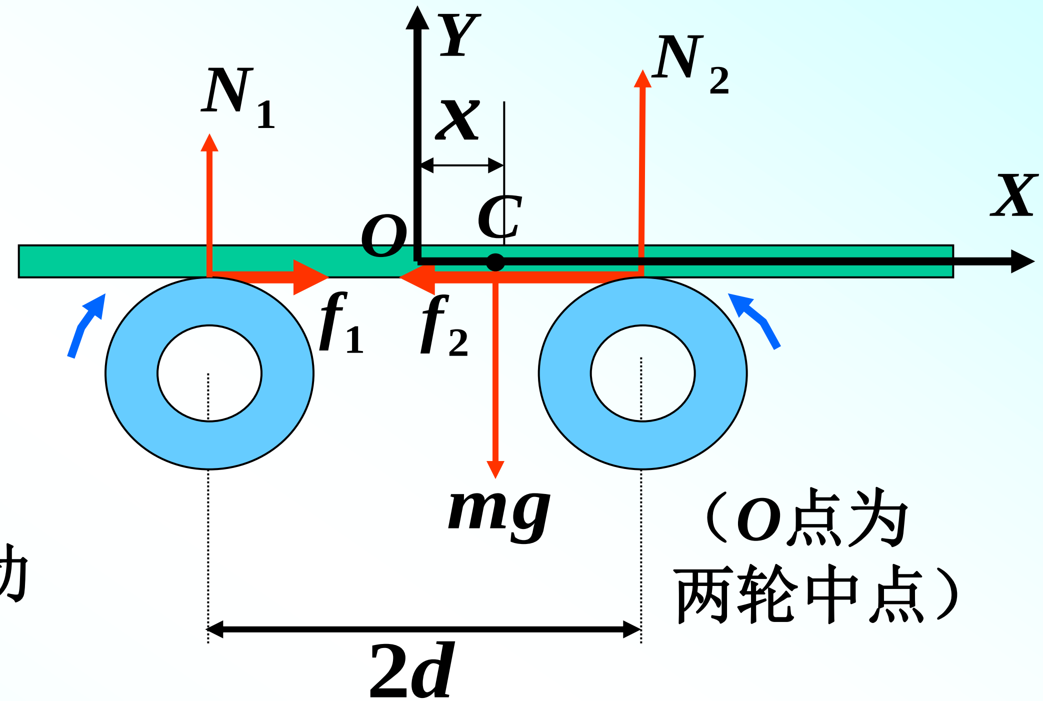
$$\Rightarrow N_1 - N_2 = -\frac{mgx}{d}$$

解：

$$\begin{cases} F_x = f_1 + f_2 = \mu N_1 - \mu N_2 \\ F_x = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ N_2 d - N_1 d - mgx = 0 \\ \quad \Rightarrow N_1 - N_2 = -\dfrac{mgx}{d} \end{cases}$$

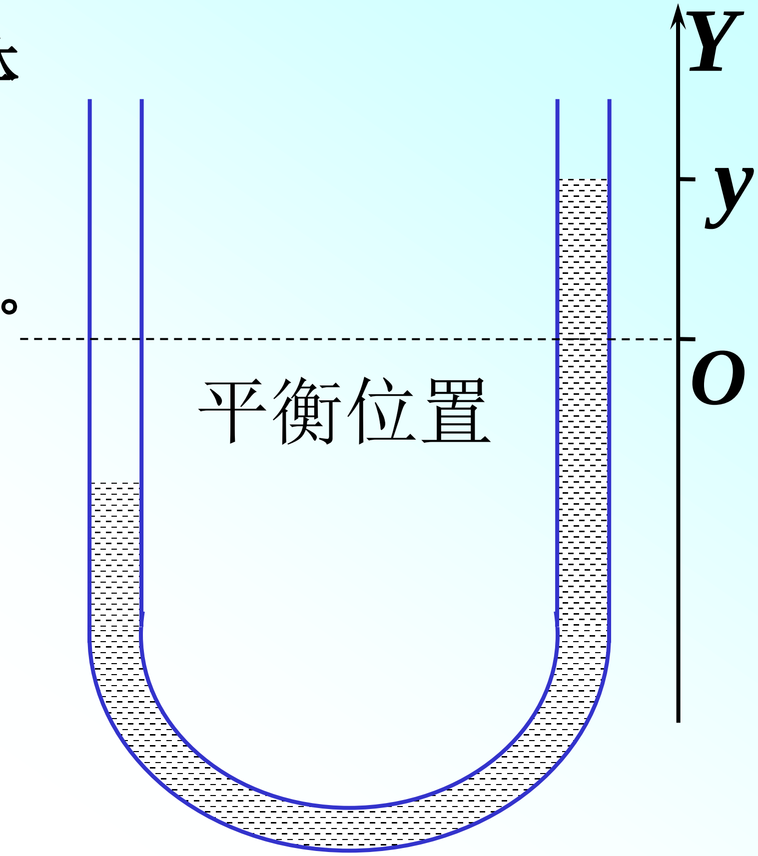
$$\Rightarrow -\mu\frac{mgx}{d} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu g}{d}x = 0$$ 作谐振动



$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}} \quad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

例：光滑U形管的截面面积为 S，管中流体的质量为 m、密度为ρ，求液体振荡周期。



解：设t时刻液面偏离平衡位置的高度为 y。

$$\begin{cases} F = -2yS\cdot\rho\cdot g \\ F = m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -2yS\cdot\rho\cdot g$$

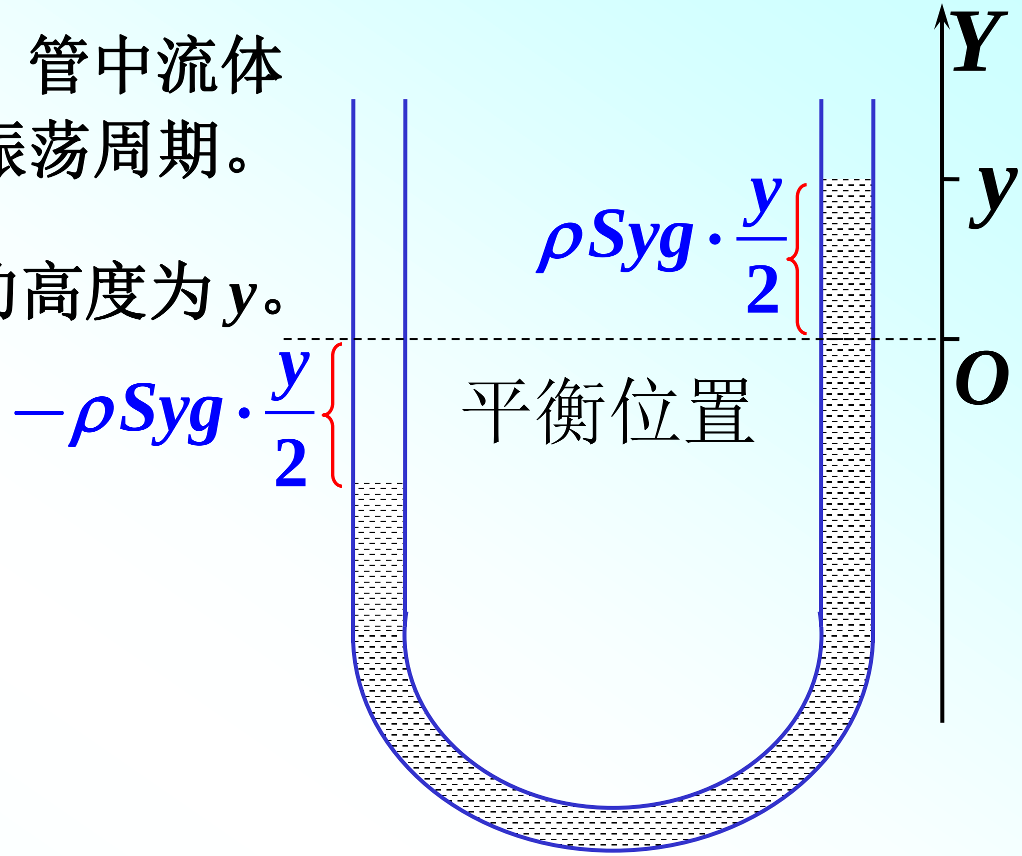
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\rho S g}{m}y = 0 \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0$$

故，液柱作谐振动。

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{2\rho S g}{m}} \quad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho S g}}$$

例：光滑U形管的截面面积为 S，管中流体的质量为 m、密度为ρ，求液体振荡周期。

解：设t时刻液面偏离平衡位置的高度为 y。



由机械能守恒，有:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 + (E_{P0} + \Delta E_P) = C \\ \Delta E_P = 2\left(\rho S y g \cdot \dfrac{y}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \rho S y^2 g = C - E_P$$

两边对t求导得:

$$\Rightarrow m\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\rho S g \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{\rho S g}{m}y = 0$$

故，液柱作谐振动。

二、 谐振动的矢量表示法－旋转矢量法

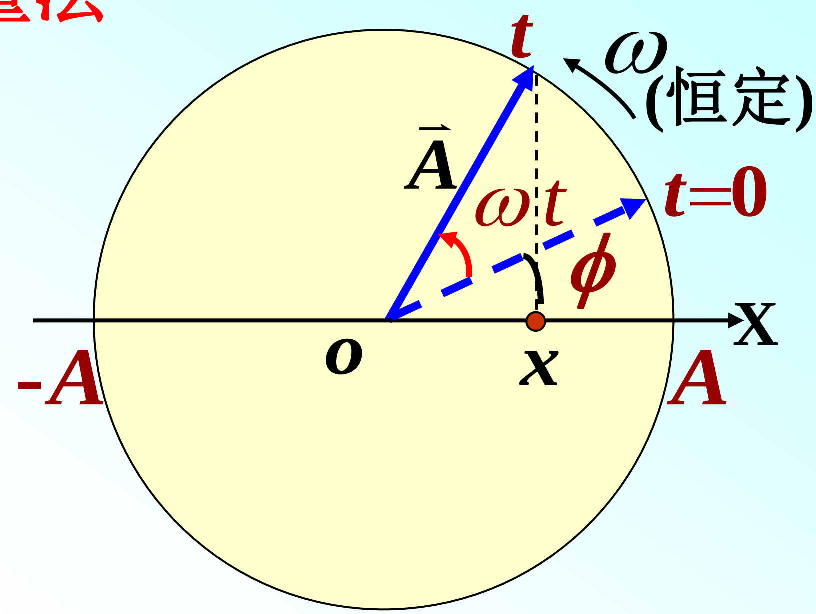
1. 旋转矢量与谐振动的位移 x

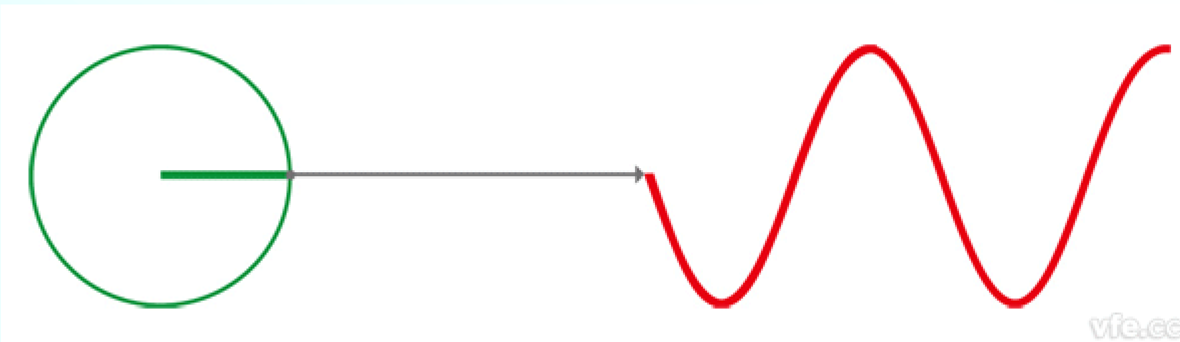
设 t=0 时：$\vec{A}$ 与X轴的夹角为 φ

旋转矢量的末端在X轴上的投影：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

即：投影点的运动就是谐振动。





矢量 $\vec{A}$ 以角速度 ω

逆时针转动

三个特征量在此的含义：

- 振幅A ：圆周半径
- 圆频率ω ：匀角速度
- 位相$\omega t+\varphi$ ：旋转矢量与x轴的夹角

2.　旋转矢量与谐振动的速度和加速度

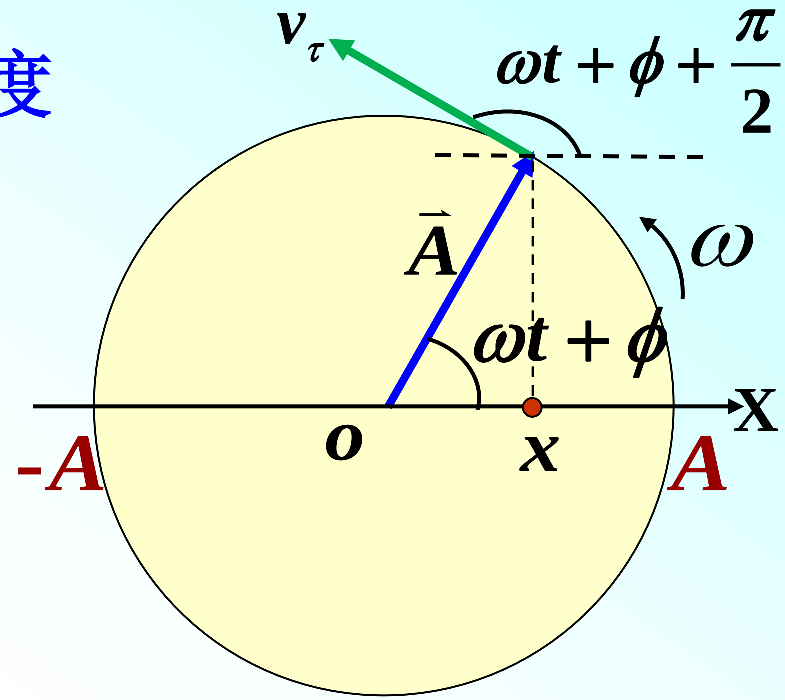
匀速圆周运动的速度：$v_\tau = A\omega$

v_τ 在X轴上的投影：

$$v_{\tau x} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

即投影点的速度(谐振动的速度)：

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$



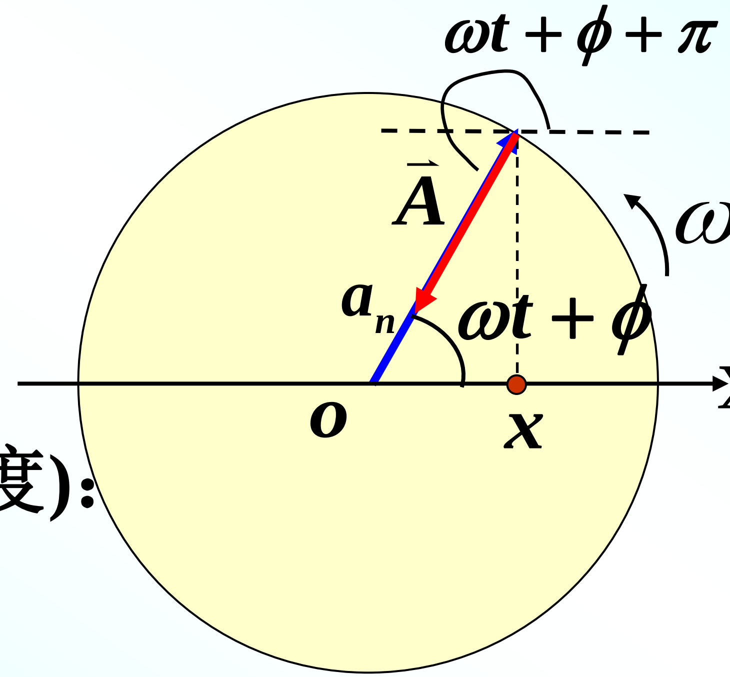
匀速圆周运动的加速度：$a_n = \dfrac{v_\tau^2}{A} = A\omega^2$

a_n 在X轴上的投影：

$$a_{nx} = A\omega^2 \cos(\omega t + \phi + \pi)$$

即投影点的加速度(谐振动的加速度)：

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

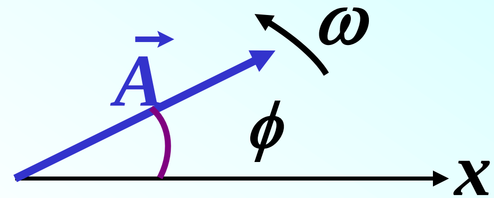


结论：

旋转矢量做匀速转动时，其端点的位移、速度和加速度在x轴上的投影，等于一特定的谐振动的位移、速度和加速度。

一般地：

给定三个特征量，A, ω, ϕ 就唯一地确定一个谐振动



旋转矢量图

注意：

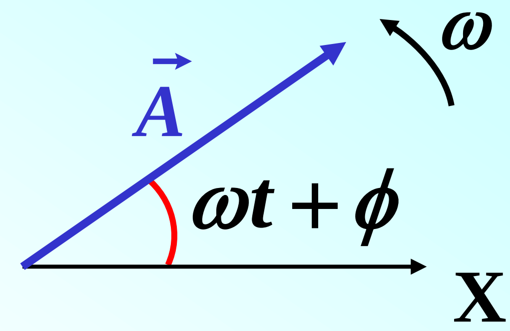
(1) 仅在旋转矢量法中，A, ω, ϕ 才有几何意义

(2) 此方法不仅是描述谐振动的一种工具，也具有实用意义

描述谐振动的其它方法：振动方程和振动曲线

3. 旋转矢量与谐振动的位相

位相 $(\omega t+\phi)=(\vec{A}\,\widehat{,}\,\vec{X})$



利用旋转矢量很容易求出谐振动的位相！

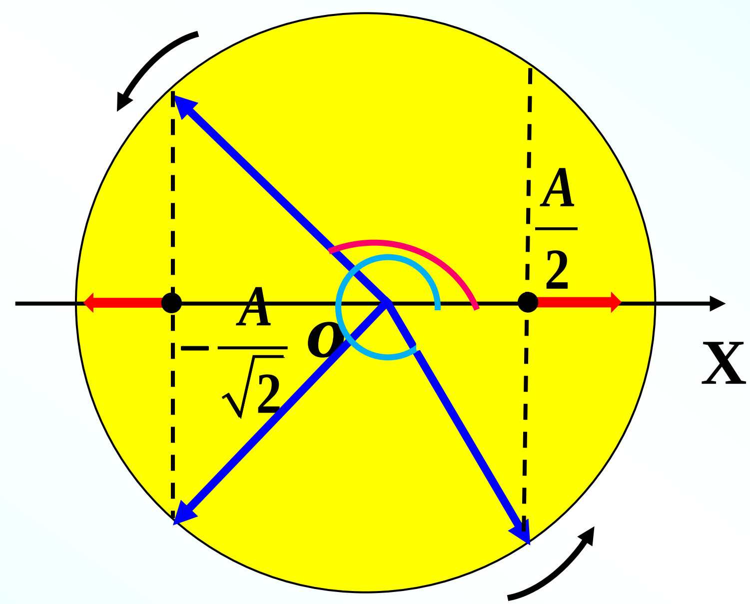
例： 已知状态求位相(特别是初位相)

若t=0, $x_0=-\dfrac{A}{\sqrt{2}}$, $v_0<0$, 求位相?

$\Longrightarrow \phi=\dfrac{3\pi}{4}$

若t=0, $x_0=\dfrac{A}{2}$, $v_0>0$, 求位相?

$\Longrightarrow \phi=\dfrac{5\pi}{3}$ 或 $\phi=-\dfrac{\pi}{3}$



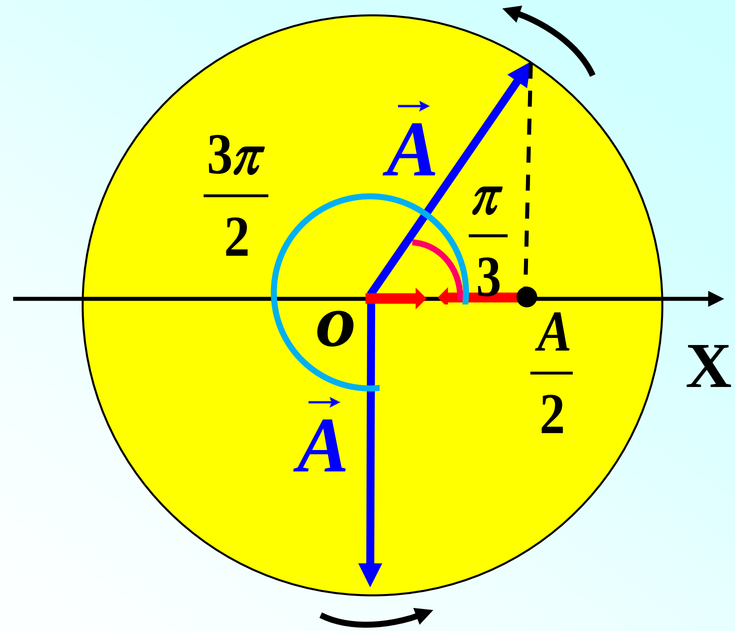
例： 已知位相求状态？

若位相 $\omega t_1 + \phi = \dfrac{\pi}{3}$，问状态？

⇨ $x = \dfrac{A}{2}$，且向x轴负向运动

若位相 $\omega t_2 + \phi = \dfrac{3\pi}{2}$，问状态？

⇨ $x = 0$，且向x轴正向运动



注意四个特殊状态的位相取值！

振子在**最大位移**

$$\begin{cases} x = A & \omega t + \phi = 0, \quad v = 0, \quad a = -\omega^2 A \\ x = -A & \omega t + \phi = \pi, \quad v = 0, \quad a = \omega^2 A \end{cases}$$

振子在**平衡位置**

$$\begin{cases} x = 0 & \omega t + \phi = \dfrac{\pi}{2}, \quad v = -\omega A, \quad a = 0 \\ x = 0 & \omega t + \phi = \dfrac{3\pi}{2}, \quad v = \omega A, \quad a = 0 \end{cases}$$

例： 已知一谐振动，A=10cm，T=2s，当t=0时位移为-5cm且向x轴负向运动。

求 (1) 振动方程，

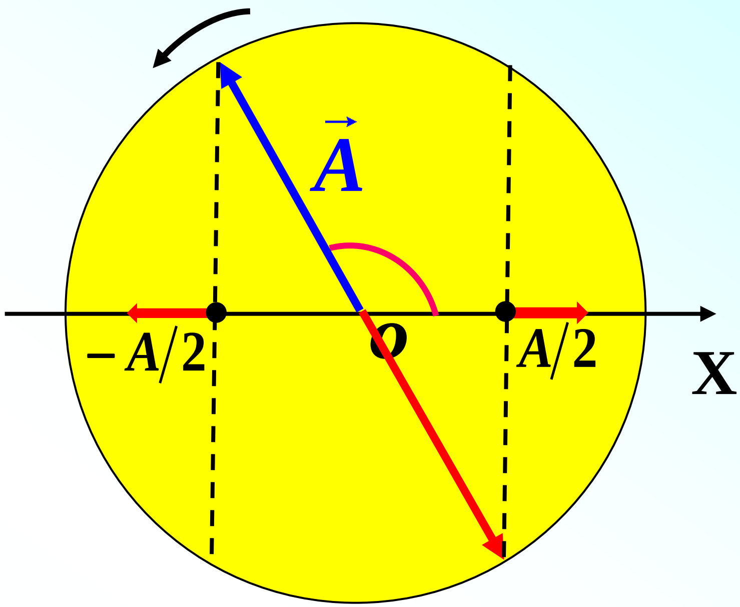
(2) x=5cm且向x轴正向运动时的速度、加速度？

解: (1) $x = A\cos(\omega t + \phi)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \quad rad/s$$

由旋转矢量得 $\phi = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow x = 0.1\cos(\pi t + \frac{2\pi}{3}) \quad m$$



(2) 先求t

$$\omega t_1 + \phi = \frac{5\pi}{3} \quad \Rightarrow t_1 = 1\text{s} \ \text{(半个周期)}$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t_1 + \phi) = -0.1\pi\sin(\pi + 2\pi/3) = 0.27\,m/s$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t_1 + \phi) = -0.1\pi^2\cos(\pi + 2\pi/3) = -0.49\,m/s^2$$

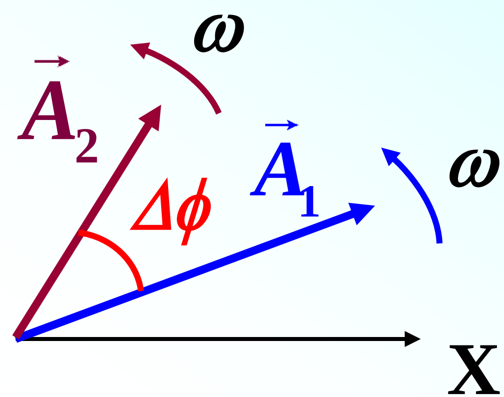
4. 旋转矢量与位相差

利用旋转矢量比较两谐振动的位相差

设两频率相同的谐振动

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2)$$



则它们的位相差为：

$$\Delta\varphi = (\omega t + \phi_2) - (\omega t + \phi_1)$$

$$= \phi_2 - \phi_1$$

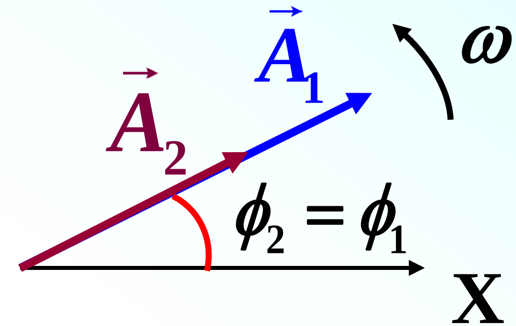
$$= \Delta\phi$$ ——初位相差

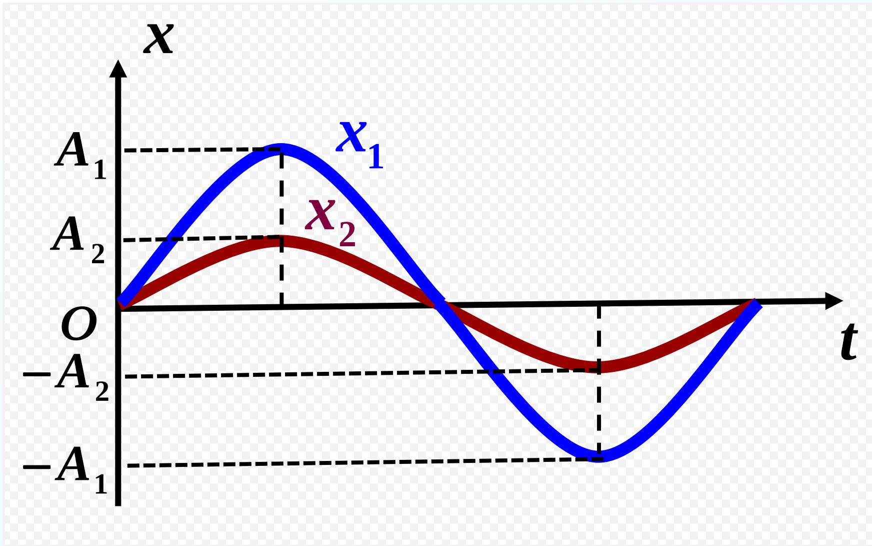
两频率相同的谐振动 $\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_2) \end{cases}$

(1) $\Delta\phi = 2k\pi \quad \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 + 2k\pi$

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_1+2k\pi)$$
$$= A_2\cos(\omega t+\phi_1)$$





两谐振子同时到达同方向各自最大位移处，同时过平衡点向同方向运动，两振动步调一致。

——同相

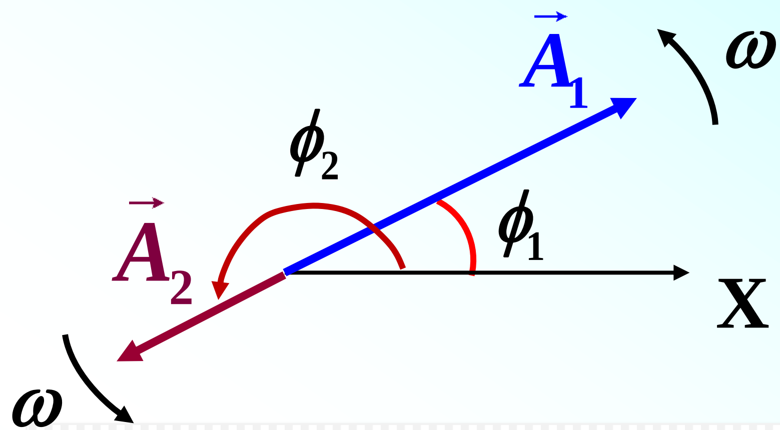
两频率相同的谐振动 $\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_2) \end{cases}$

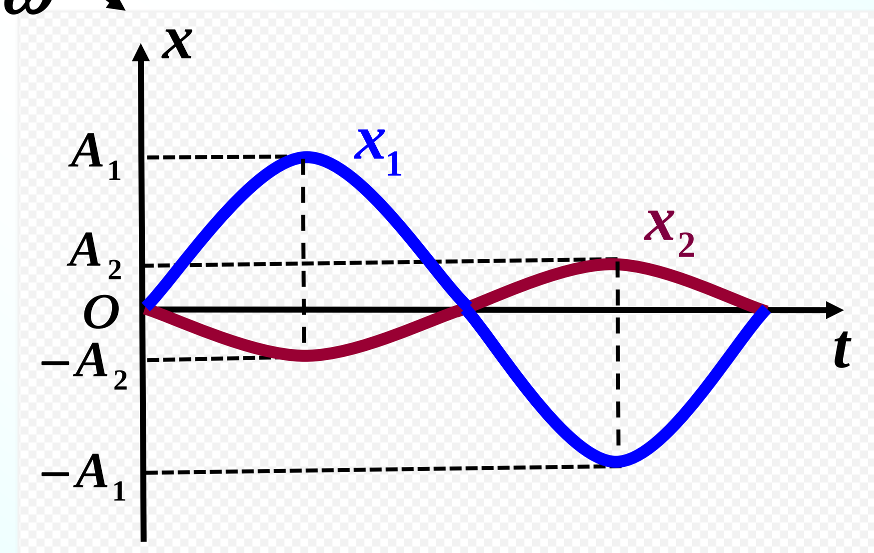
(2) $\Delta\phi = (2k+1)\pi \quad \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 + \pi$

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_1+\pi)$$

$$= -A_2\cos(\omega t+\phi_1)$$



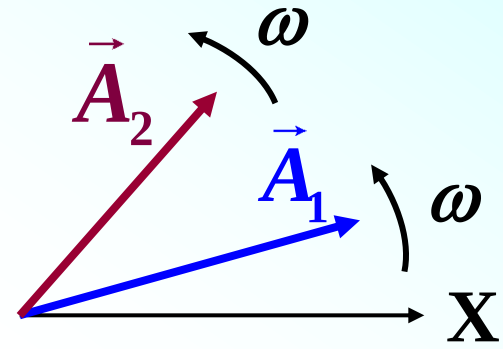


两谐振子同时到达相反方向各自最大位移处，同时过平衡点，但向相反方向运动。

——反相

两频率相同的谐振动 $\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \end{cases}$

(3) $\Delta\phi \neq k\pi$ 则两谐振子不同相

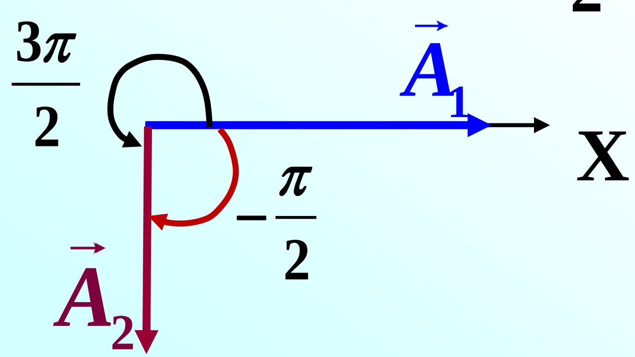


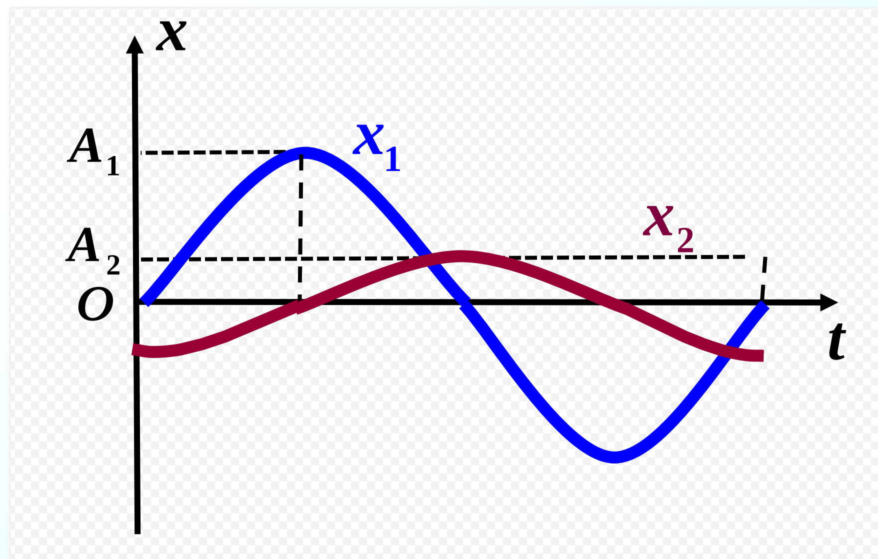
若 $\Delta\phi > 0 \quad \Rightarrow \phi_2 > \phi_1$

称x_2 比x_1 超前$\Delta\phi$ 的位相

一般$\Delta\phi$ 限制在π 以内！

例如 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \dfrac{3\pi}{2}$





这时 x_2的振动比x_1的落后$\pi/2$的位相！

注意：

(*a*) 比较两个振动的步调时，必须将所比的谐振动化成标准形式：

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \phi)}$$

例如 $x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1)$

$x_2 = -A_2\cos(\omega t + \phi_2)$ 初~~位~~相

$= A_2\cos(\omega t + \phi_2 + \pi)$ 初位相

所以，此两振动的位相差为：

$$\Delta\varphi = (\phi_2 + \pi) - \phi_1 \;= \Delta\phi + \pi$$

(*b*) 不同物理量也可比较振动的步调

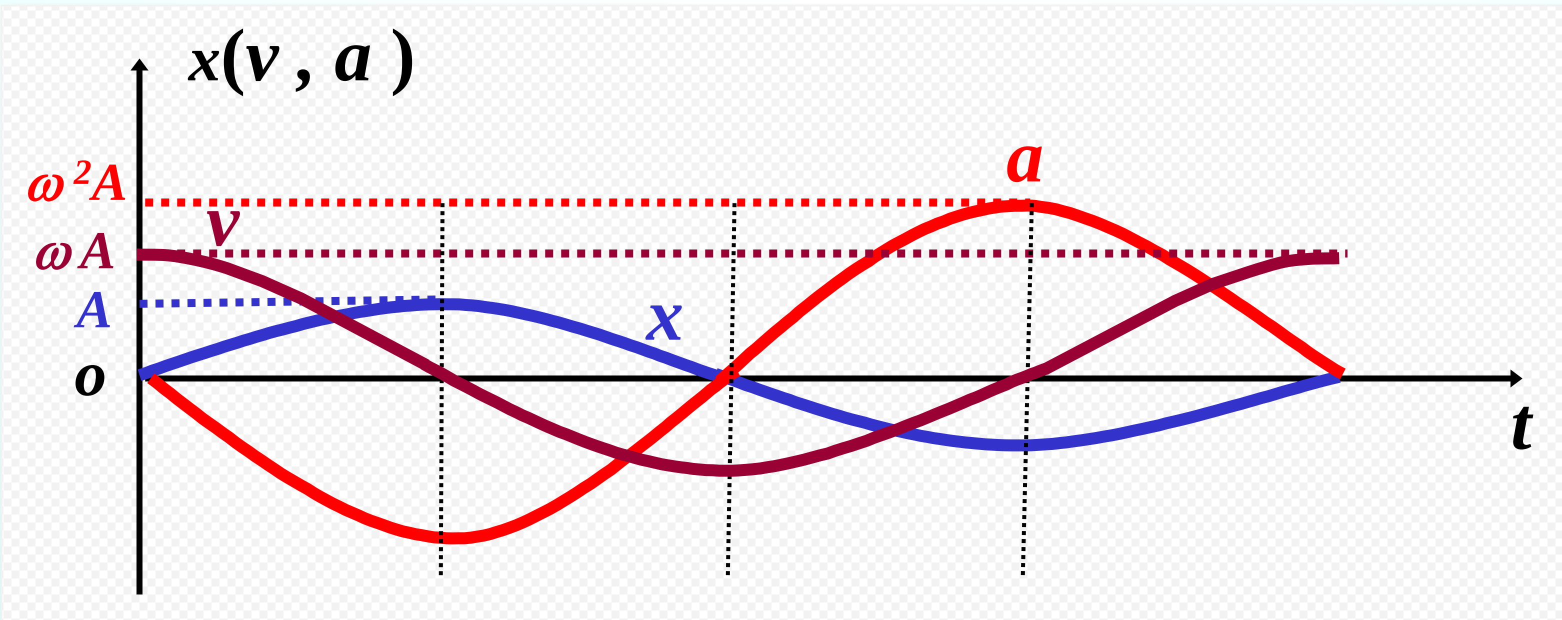
v比x超前0.5π，

a比x超前π—反相

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) = \omega A\cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \phi + \pi)$$



例：已知 x—t曲线，写出振动方程。

解：$x = A\cos(\omega t + \phi)$

A=2cm

$\phi = ? \quad \Rightarrow \phi = \dfrac{2\pi}{3}$

$\omega = ?$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3} \\ \Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \end{cases}$$

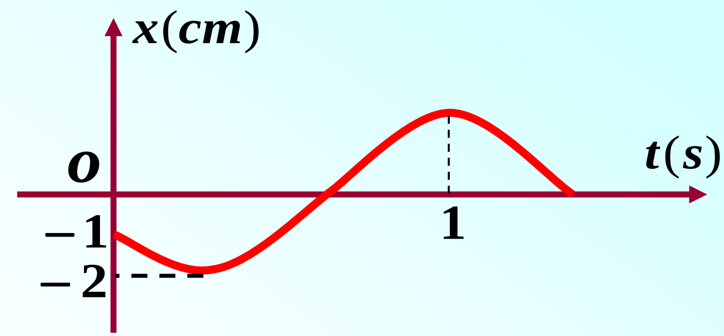
$$\Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{4\pi/3}{1} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{rad/s}$$

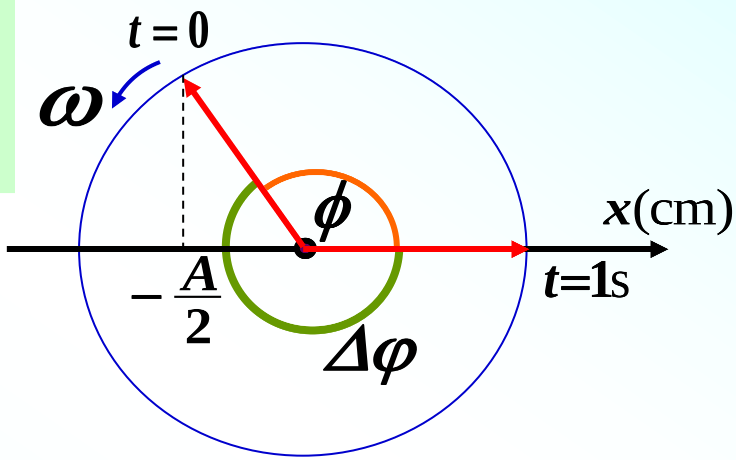
(A) $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$ rad/s

(B) $\omega = \dfrac{4\pi}{3}$ rad/s

(C) $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$ rad/s

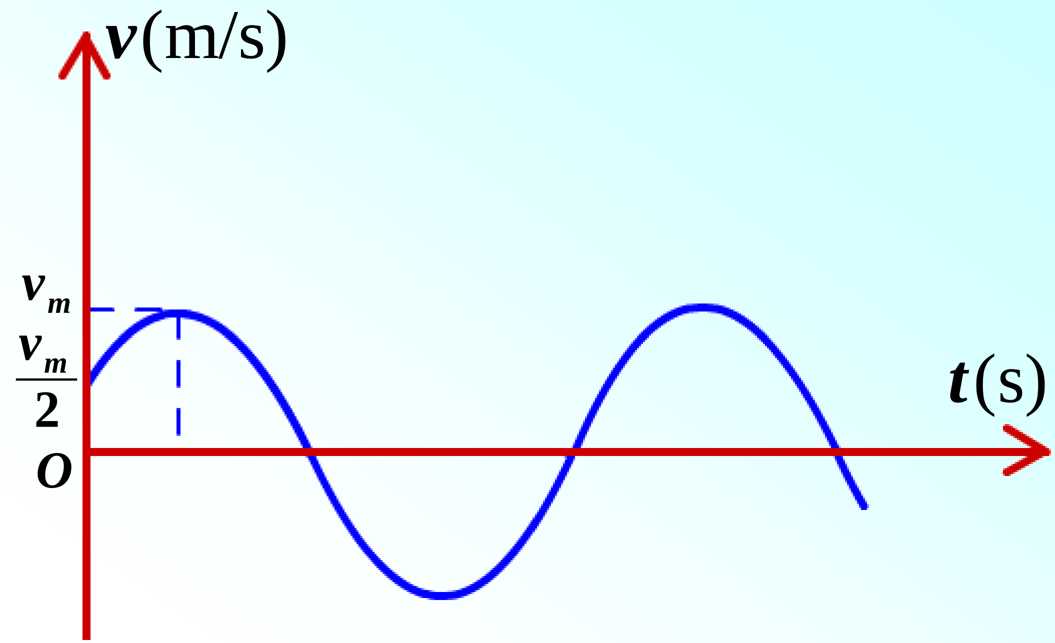
(D) $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$ rad/s





$$\therefore x = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{cm}$$

例:右图为一作谐振动的物体的速度--时间曲线. 若用余弦函数表示简谐振动，则振动的初位相是多少？



解： $x = A\cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

$$= -v_m \sin(\omega t + \phi)$$

$t = 0$时, $v = \dfrac{v_m}{2}$

$$\Rightarrow \frac{v_m}{2} = -v_m \sin\phi$$

$$\Rightarrow \sin\phi = -\frac{1}{2}$$

$\phi = 7\pi/6,\ 11\pi/6$ 哪个正确？

考虑 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v_m\omega\cos(\omega t + \phi)$

图中可看到 $t = 0$时, $a > 0$

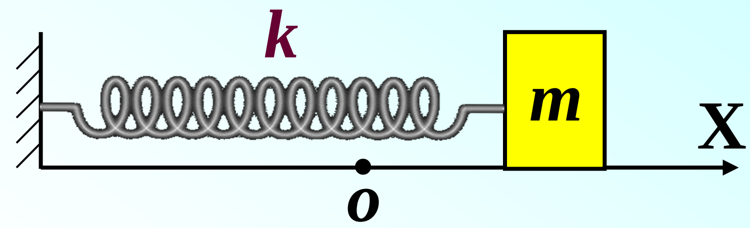
$$\Rightarrow -v_m\omega\ \cos\phi > 0$$

$$\Rightarrow \cos\phi < 0$$

$$\Rightarrow \phi = 7\pi/6$$

三、谐振动系统的能量

1. 谐振动系统的动能和势能



(1) 水平弹簧振子的能量

$$E_{总} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

任意时刻有：$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$

$\boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$

$\Rightarrow$
动能：$E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$

势能：$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$

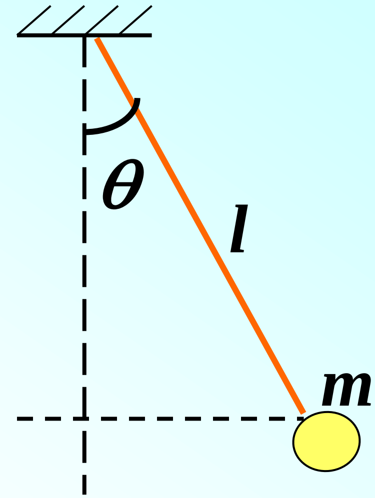
都随时间变化

$$\Rightarrow E_{总} = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

常量

(2) 单摆系统的能量

$$E_{总}=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+mgh$$



（$\sin\theta\approx\theta$）

$$\left\{\begin{array}{l} 任意时刻 \left\{\begin{array}{l} \theta=\Theta\cos(\omega t+\varphi) \\ v=l\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-l\cdot\omega\Theta\sin(\omega t+\varphi) \\ h=l(1-\cos\theta) \end{array}\right. \\ \boxed{\omega=\sqrt{g/l}} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} 动能: E_k=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2=\dfrac{1}{2}mgl\cdot\Theta^2\sin^2(\omega t+\phi) \leftarrow 都随时间变化 \\ 势能: E_p=mgh=mgl(1-\cos\theta) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} E_p=mgl(1-\cos\theta) \\ 1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\approx\dfrac{\theta^2}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow E_p=\frac{1}{2}mgl\cdot\Theta^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow E_{总}=E_k+E_p=\frac{1}{2}mgl\Theta^2$$ 常量

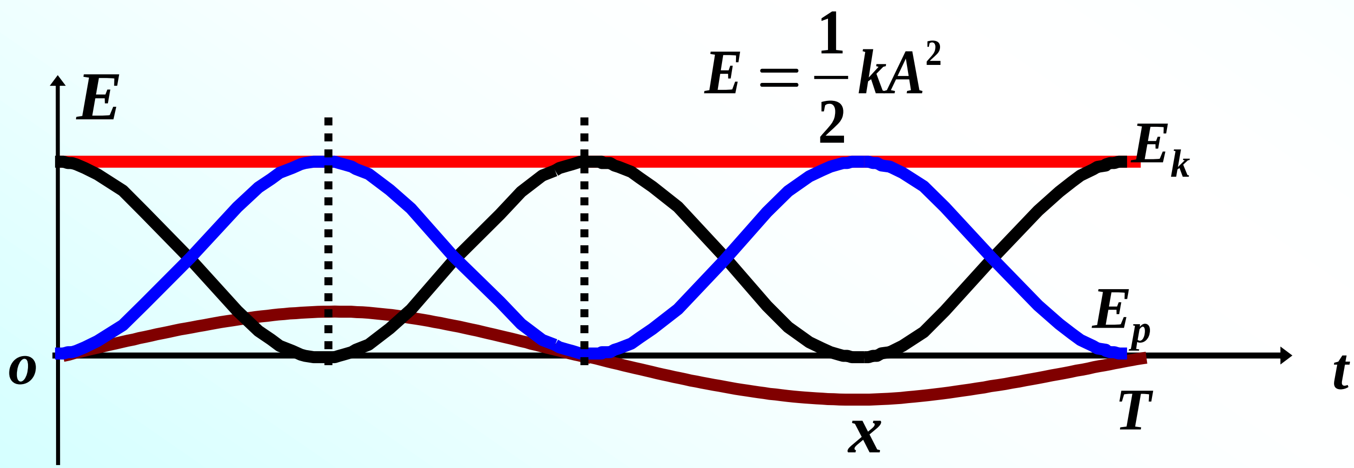
2. 谐振动系统能量的特点

1）E_K、E_p各自随时间作周期性变化

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)} \qquad \boxed{E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)}$$

E_k、E_p总是此涨彼消

2）$E_{总}$=常量 $\propto A^2$



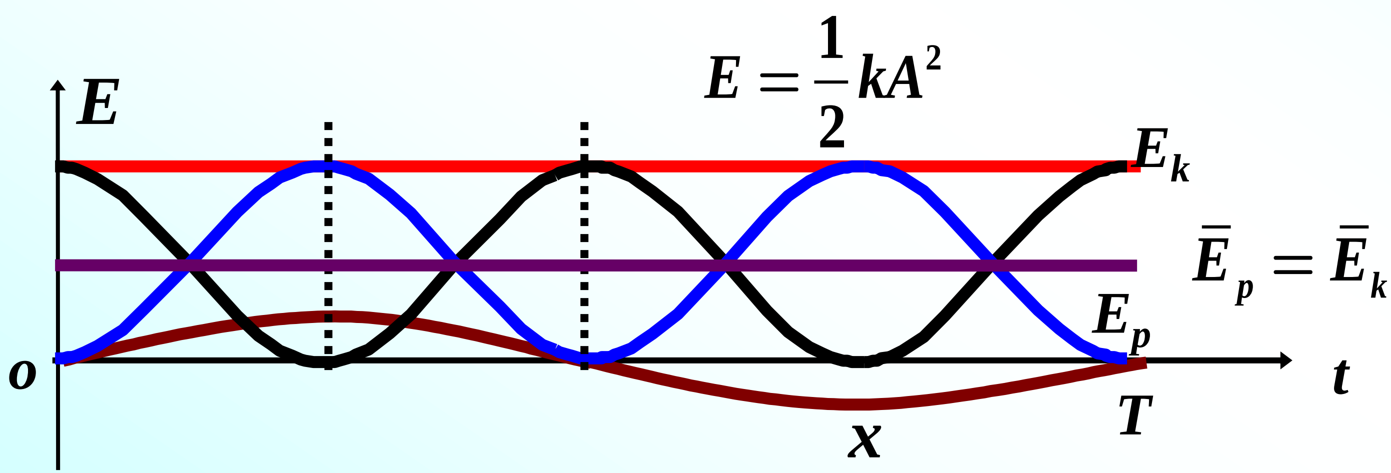
可见：谐振动的过程是动能与势能相互转换的过程。

2. 谐振动系统能量的特点

3）动能与势能的时间平均值： $\bar{E}_p = \bar{E}_k = \dfrac{1}{2}E_{总}$

$$\overline{E_k} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\phi_0)\mathrm{d}t = \frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0}\sin^2 x\cdot\mathrm{d}x = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\phi_0)\mathrm{d}t = \frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0}\cos^2 x\cdot\mathrm{d}x = \frac{1}{4}kA^2$$



气体动理论中
振动势能与振动动能相等

$$\boxed{\begin{gathered} E = \frac{i}{2}\nu RT \\ i = t + r + 2s \end{gathered}}$$

重要结论：

- 弹簧振子的动能和势能的平均值相等，均为总机械能的一半。
- 谐振动的**总能量**与**振幅的平方**成正比：$\boxed{E_{总} \propto A^2}$
- 振幅不仅给出谐振动运动的范围，而且还反映了振动系统总能量的大小及振动的强度。

以上结论适用于任何谐振动。

作业：11 —T1-T6

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写姓名以及学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周二交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。