大学物理

College Physics

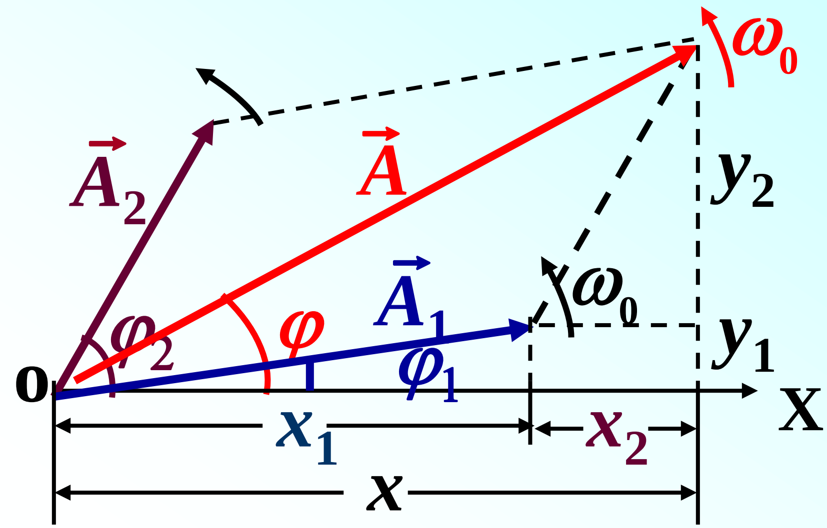
主讲
华 中 科 技 大 学
刘超飞

● 同振动方向、同频率的两个谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \phi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \phi)$$

依然是谐振动



其中 $$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} \\ \mathrm{tg}\phi = \dfrac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \dfrac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \end{cases}$$

两个重要的特例： 同相、反相

● 同振动方向、不同频率的谐振动的合成：

演示：拍-两音叉
ν_1=440 Hz　　ν_2~ 440 Hz

两振动：$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi)$　　$x_2 = A_1\cos(\omega_2 t+\varphi)$

合振动：$x = x_1 + x_2 = 2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$

● 振动方向相互垂直、频率相等的两个谐振动的合成

演示：垂直振动的合成

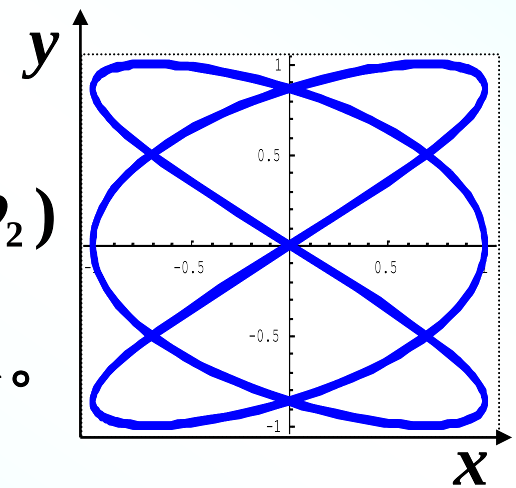
两振动：$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1),\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

轨迹方程：$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)}$

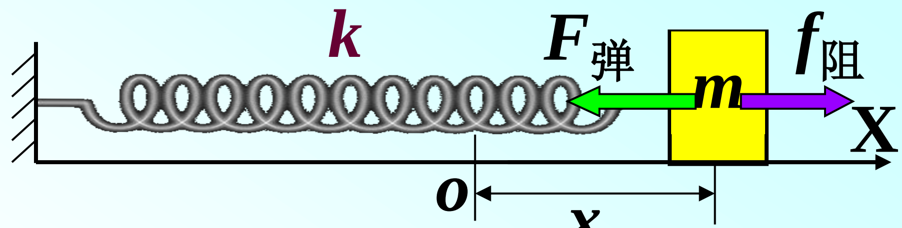
● 李萨如图形（两振动的频率成**整数比**时）

两振动：$x = A_1 cos(\omega_1 t+\varphi_1)$　$y = A_2 cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

由切点数之比 $\frac{N_y}{N_x}=\frac{T_y}{T_x}=\frac{\nu_x}{\nu_y}$ 用来测频率。



●阻尼振动



动力学方程：

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

$\underbrace{2\beta\frac{dx}{dt}}_{\text{阻尼项}}$

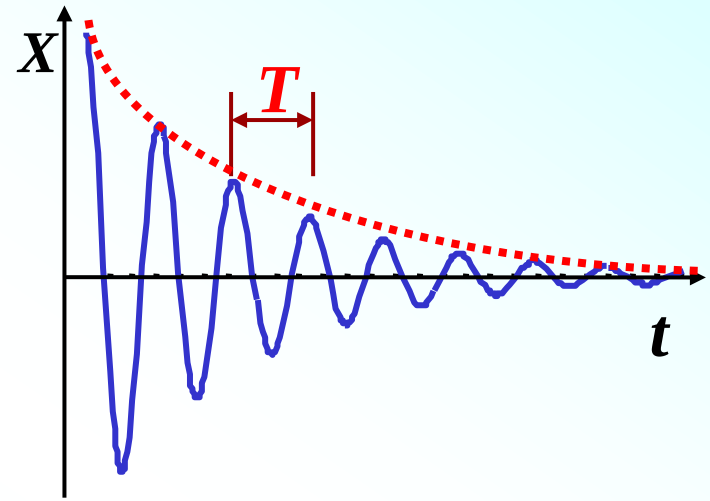
其中：$\omega_0^2=\frac{k}{m}$，$2\beta=\frac{\gamma}{m}$

$\boxed{\beta\text{——阻尼系数}}$

（1）弱阻尼： $\beta<\omega_0$

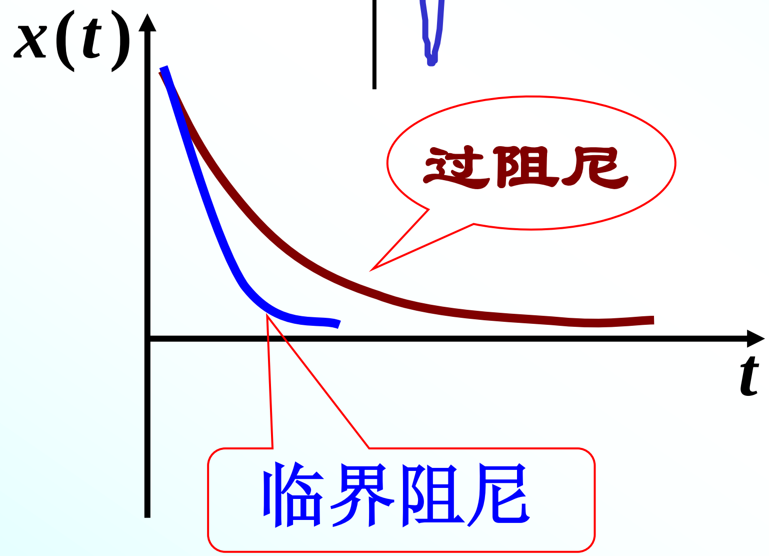
$$x(t)=A_0e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\phi_0)$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

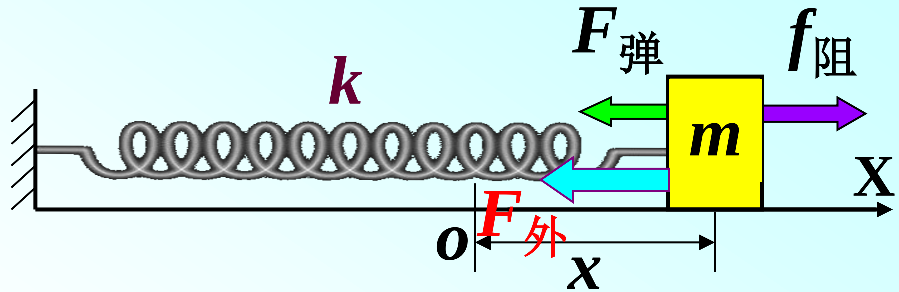


（2）过（临界）阻尼：

$\beta<\omega_0$（ $\beta=\omega_0$ ）



●受迫振动

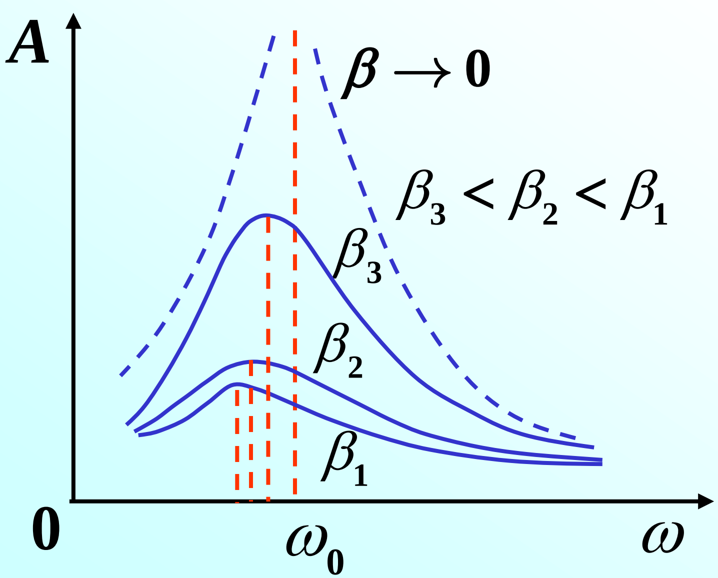


强迫力 $F_{外} = F_0 \cos(\omega_{外} t)$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_{外} t)$$

——动力学方程

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{A_0 e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega_0 t + \phi_0)}_{暂态} + \underbrace{A_p \cos(\omega_{外} t + \alpha)}_{稳态}$$



振幅：$A_p = \dfrac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{外}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{外}^2}}$

位相：$\mathrm{tg}\alpha = -\dfrac{2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2 - \omega_{外}^2}$

$$\Rightarrow \omega_{外r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$ ——共振频率

$$\Rightarrow A_{Max} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$ ——共振振幅A_r

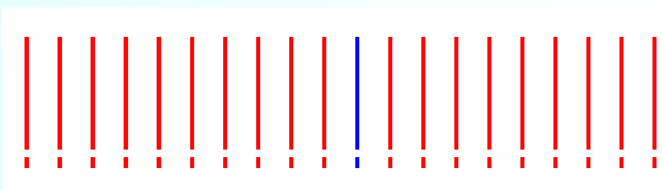
- 波动与振动的区别和联系

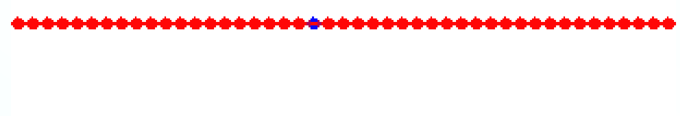
区别
- 振动 研究一个质点的运动。
- 波动 研究大量有相互作用的质点振动的集体表现。

联系
- 振动是波动的根源。
- 波动是振动的传播。

- 机械波：机械振动在弹性媒质中的传播。

机械波产生的条件—— 波源、媒质。





一维简谐波 $\boxed{y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \phi]}$

"-" 沿 x正向
"+" 沿 x负向

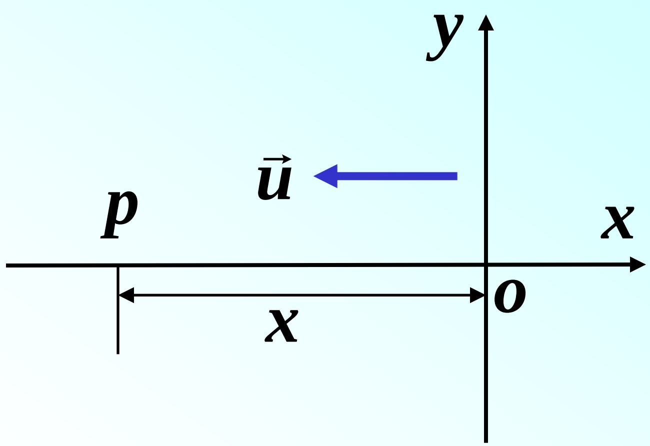
注意：u为波速的大小。

$$\boxed{y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]}$$

平面简谐波的波函数(正向传播)

2.讨论

(1) 若波向x轴负方向传播，y=?



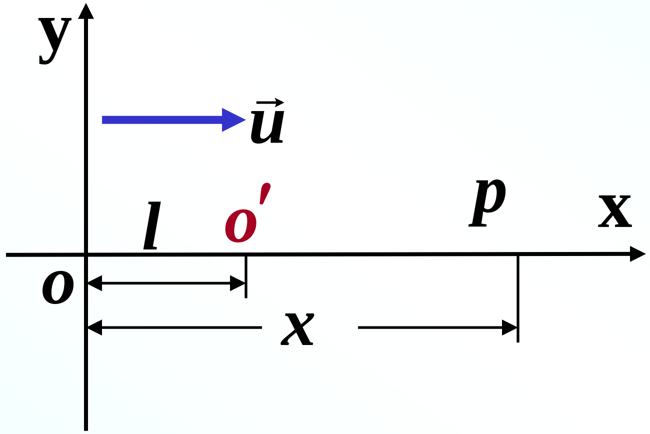
$$\begin{cases} y = A\cos[\omega(t-\Delta t)+\phi] \\ \Delta t = \dfrac{|x|}{u} = -\dfrac{x}{u} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\phi]$$

平面简谐波的波函数(反向传播)

(2)若已知的是o'点(非原点)的振动，则

$$\begin{cases} \Delta t = \dfrac{\Delta x}{u} = \dfrac{x-l}{u} \\ \text{向x轴正向传播} \end{cases}$$



$$\Rightarrow y = A\cos[\omega(t-\frac{x-l}{u})+\phi]$$

若向x轴负向传播呢?

例：已知波函数为 $y = 0.02\cos\pi(20t - 0.5x)\quad \mathrm{m}$

求：波的振幅、波长、波速及质点振动的最大速度

解：波函数一般形式为

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi] = A\cos[\omega t - \frac{\omega}{u}x + \phi]$$

对比题中函数可以得到

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0.02\ \mathrm{m} \\ \omega = 20\pi \\ \dfrac{\omega}{u} = 0.5\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = 10\ \mathrm{Hz} \\ T = \dfrac{1}{\nu} = 0.1\ \mathrm{s} \\ u = \dfrac{\omega}{0.5\pi} = 40\ \ \mathrm{m/s} \\ \lambda = uT = 4\ \ \mathrm{m} \end{array}\right.$$

质点振动速度：$v = \dfrac{\partial y}{\partial t} = -0.02\times 20\pi\sin\pi(20t - 0.5x)$

最大速度：$v_{\max} = 0.02\times 20\pi = 1.26\ \ (\mathrm{m/s})$

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$$

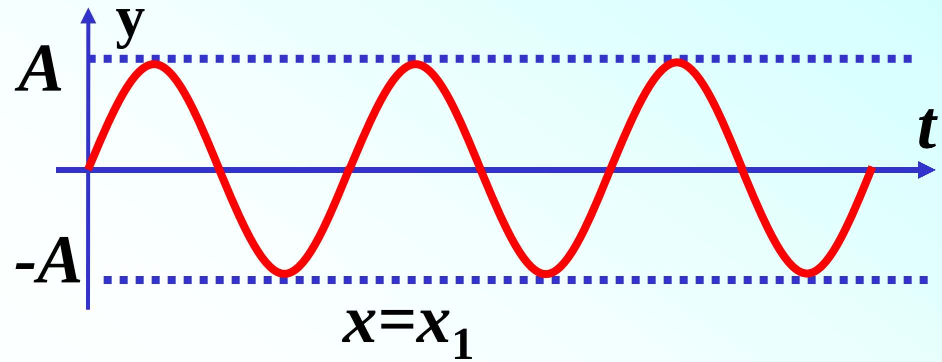
(3)波函数的物理意义

a. 当x =常数，记为x_1

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\phi]$$

$$= A\cos[\omega t+\phi_1]$$

$$= f(t)$$ (仅是时间的函数)



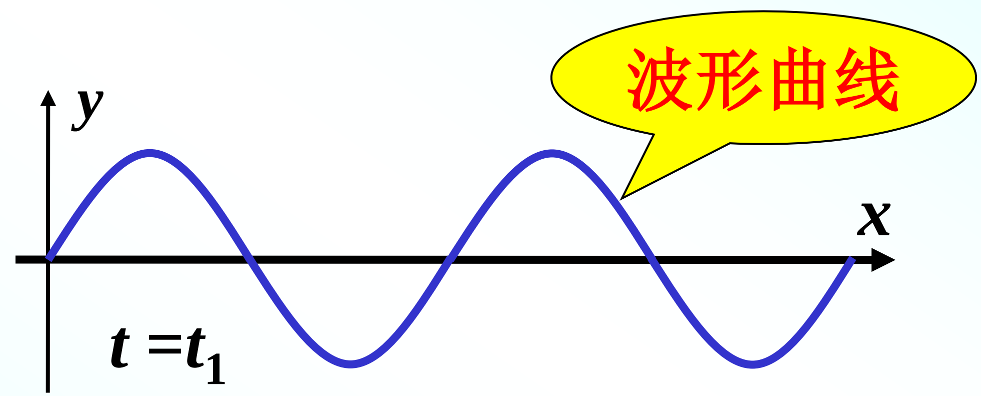
表示 x_1处质点随时间 t 的振动规律 ——一个质点的振动方程

b. 当 t =常数，记为t_1

$$y = A\cos[\omega(t_1-\frac{x}{u})+\phi]$$

$$= A\cos[(\omega t_1+\phi)-\omega\frac{x}{u}]$$

$$= f(x)$$ (仅是坐标的函数)



给出t_1时刻传播方向上所有质点的振动状态

——全部介质某个时刻的波动状态

c. x 和 t都是常数， x_1 和 t_1

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$$

$y = A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})+\phi]$ 表示指定点在指定时刻的位移

d. $x\neq$常数，$t\neq$常数：

描写不同时刻，不同位置质点的振动状态，每一时刻都有一波形曲线。

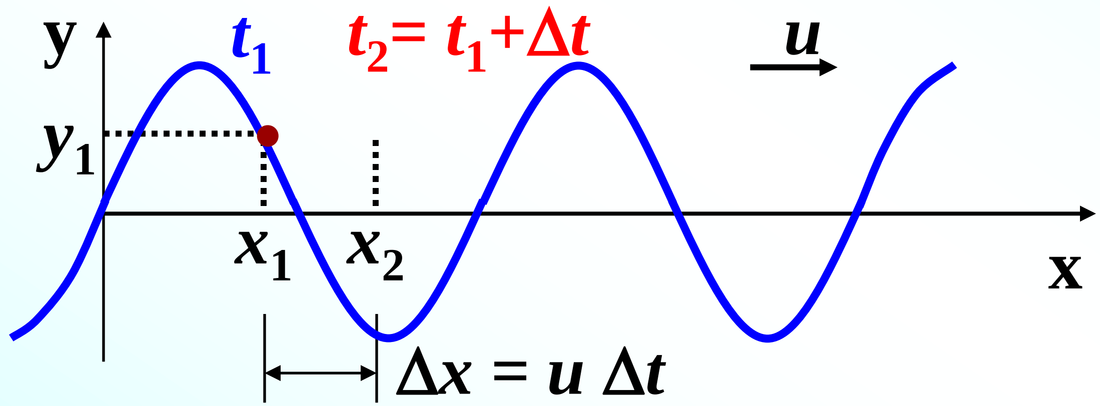
相邻两时刻，波形是如何变化的？

t_1时刻，x_1处质点的位移为：$y_1 = A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})+\phi]$

在 $t_2 = t_1+\Delta t$ 时刻，考察另一特殊质点 $x_2 = x_1+\Delta x = x_1+u\Delta t$

其位移变化为：

$$y_2 = A\cos[\omega(t_2-\frac{x_2}{u})+\phi]$$



$$\begin{cases} t_2 = t_1 + \Delta t \\ x_2 = x_1 + u\Delta t \\ y_2 = A\cos[\omega(t_2 - \dfrac{x_2}{u}) + \phi)] \end{cases}$$

$$\boxed{y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi]}$$

t_2时刻，x_2质点振动的位移

$$\Rightarrow y_2 = A\cos[\omega(t_1 + \Delta t) - \omega\frac{x_1 + \Delta x}{u} + \phi)]$$

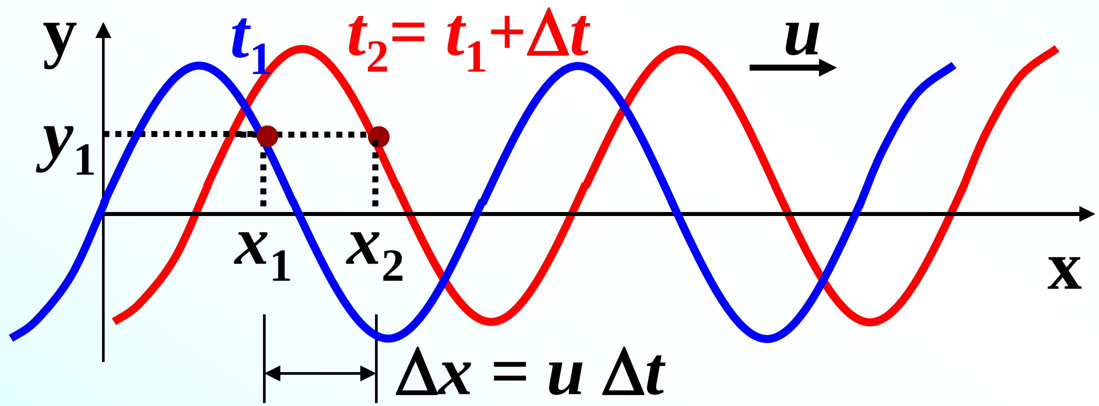
$$= A\cos[\omega t_1 + \omega\Delta t - \frac{\omega x_1}{u} - \frac{\omega\Delta x}{u} + \phi]$$

$$= A\cos[\omega(t_1 - \frac{x_1}{u}) + \phi)]$$

$$= y_1$$

即：t_2时刻，x_2质点振动的位移恰是 t_1时刻x_1质点的位移。

经Δt 时间，整个波形向波的传播方向移动了一段路程 $\Delta x = u\Delta t$ ——行波



波形传播的速度 = 波速u

= 相速

(4)波函数的几种等价表式：

向 x 轴正向传播的波

(A) $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$

(B) $y(x,t)=A\cos[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\phi]$

(C) $y(x,t)=A\cos[\omega t-kx+\phi]$

(D) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\phi]$

(E) $y(x,t)=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut)+\phi]$

(F) $y(x,t)=A\cos[k(x-ut)+\phi]$

(G) $y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T})+\phi]$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$u=\frac{\lambda}{T}$

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$

也可写成复数形式 $y=Ae^{i(\omega t-kx+\phi)}$（取实部）

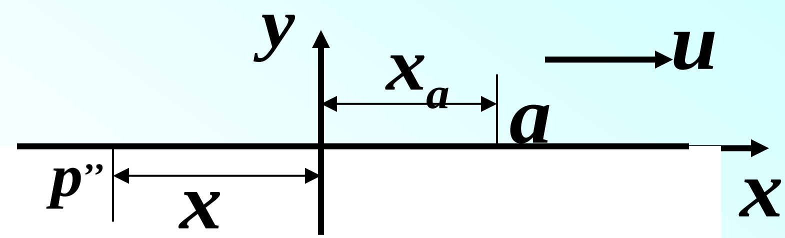
以上讨论也适用于纵波。

可将纵波的密集区看成波峰，疏散区看成波谷。 此说对否？

例： 已知波沿 x 轴正向传播，波速为 u，x_a 处的振动方程为

$$y_a = A\cos(\omega t + \phi)$$

试写出波的表达式。



解1: 从位相差考虑。

a 点的振动经过 Δt 的时间之后传到 P 点

$$\Delta t = \frac{x - x_a}{u}$$

所以，P 点的振动方程为：

$$y = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \phi]$$

$$\Rightarrow y = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \phi]$$

讨论：

若 $p \longrightarrow p'$

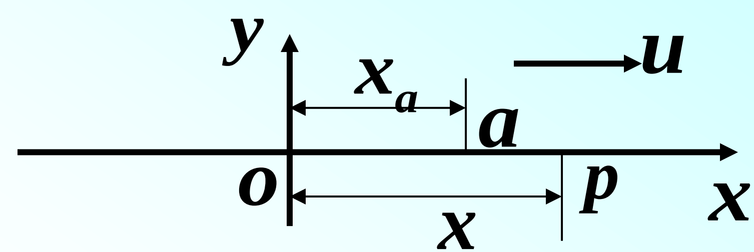
$$\Delta t = \frac{x - x_a}{u} < 0$$

若 $p \longrightarrow p''$

$$\Delta t = \frac{x - x_a}{u} < 0$$

例：已知波沿 x轴正向传播，波速为 u ，x_a 处的振动方程为

$$y_a = A\cos(\omega t+\phi)$$



解2：根据标准形式求解。

波函数标准形式为：$y = A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi]$

将a点的坐标x_a代入上式，可得a点的振动方程:

$$y_a = A\cos[\omega(t-\frac{x_a}{u})+\varphi]$$

由题设有

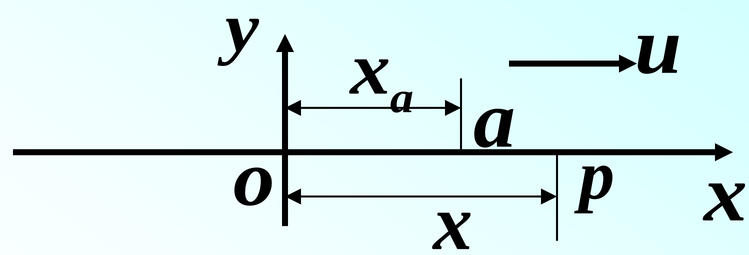
$$y_a = A\cos(\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow \omega(t-\frac{x_a}{u})+\varphi=\omega t+\phi \qquad \Rightarrow \varphi=\phi+\frac{\omega x_a}{u}$$

故：$y = A\cos[\omega(t-\dfrac{x-x_a}{u})+\phi]$

例： 已知波沿 x 轴正向传播，波速为 u ，x_a 处的振动方程为

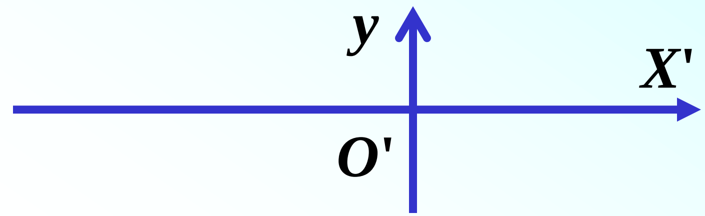
$$y_a = A\cos(\omega t + \phi)$$



解3：坐标变换法。

建新坐标 $O'X'$ 与 OX 重合，

且 O' 点与 a 点重合。

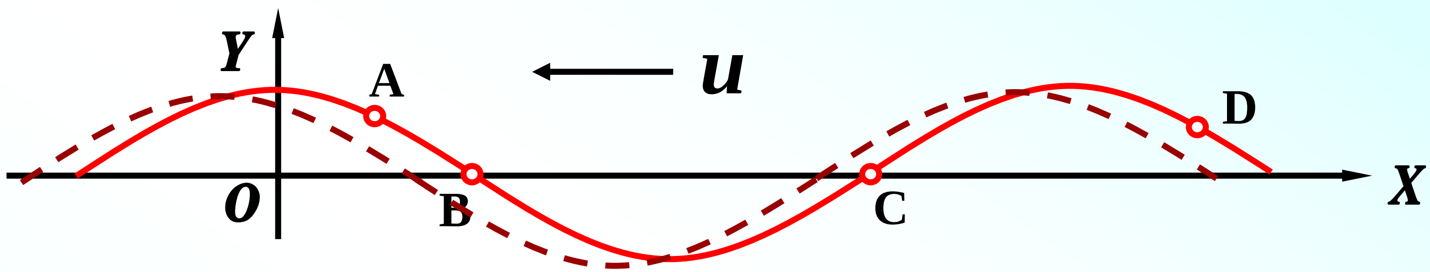


则在新坐标 $O'X'$ 中，波函数为

$$\begin{cases} y = A\cos[\omega(t - \dfrac{x'}{u}) + \phi] \\ \text{而 } x' = x - x_a \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_a}{u}) + \phi]$$

例：以波速 u 沿 X 轴反方向传播的简谐波在 t 时刻的波形曲线如下图所示。则以下说法正确的是[　　]



（1）A点的速度大于零；

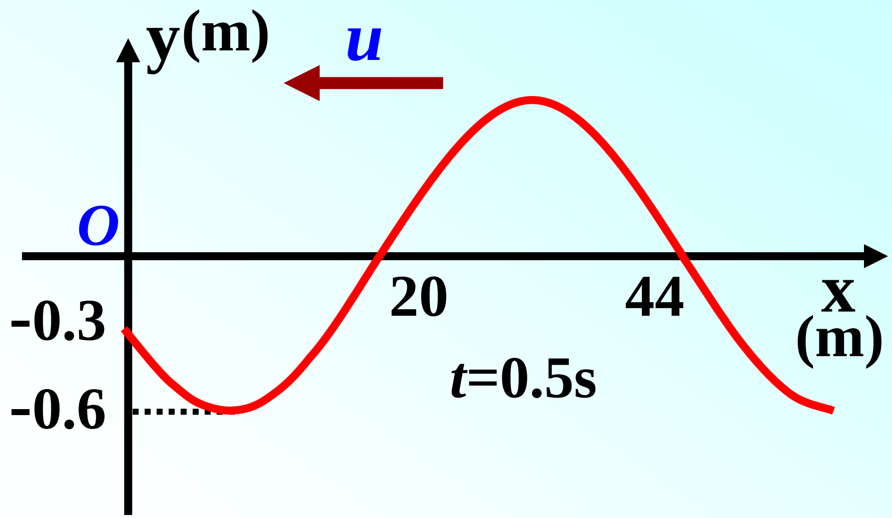
（2）B点静止不动；

（3）C点向下运动；

（4）D点的振动速度小于零。

考察下一个时刻的波形

例：一平面简谐波在t=0.5s时的波形如图所示，该波以12m/s的速度沿x轴负方向传播，求波函数。



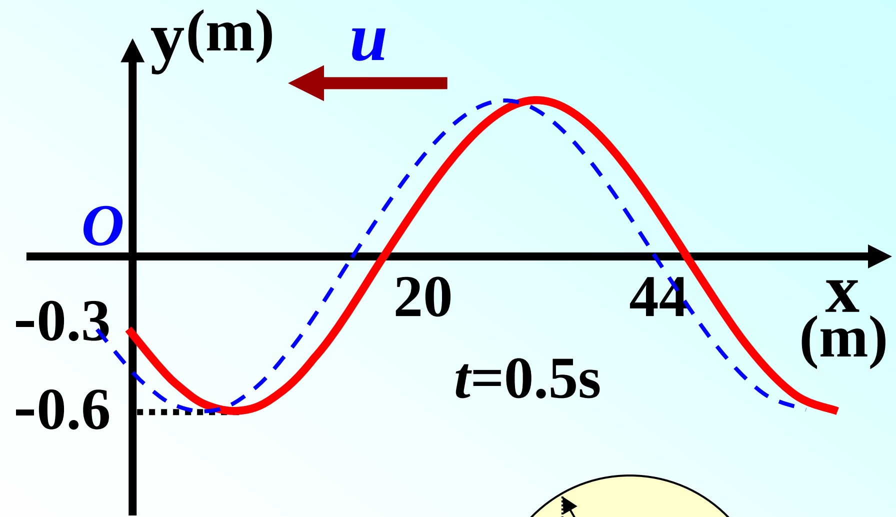
解：先求原点处的振动方程

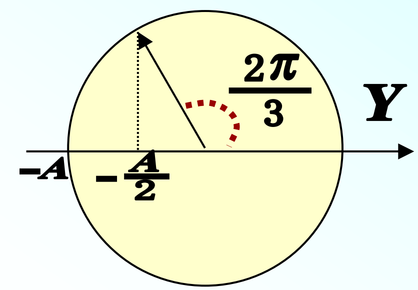
$$\left\{\begin{aligned} & y_o = A\cos[\omega t + \phi] \\ & A = 0.6 \quad \text{m} \\ & \left.\begin{aligned} & \omega = 2\pi / T \\ & T = \frac{\lambda}{u} \Rightarrow T = \frac{48}{12} = 4 \quad \text{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} \quad \text{rad/s} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow y_o = 0.6\cos[\frac{\pi}{2} t + \phi] \ \text{(m)}$$

$\phi = ?$ (A) $\frac{2}{3}\pi$ (B) $\frac{5}{3}\pi$ (C) $\frac{5}{12}\pi$ (D) $\frac{7}{12}\pi$

例：一平面简谐波在t=0.5s时的波形如图所示，该波以12m/s的速度沿x轴负方向传播，求波函数。





解：先求原点处的振动方程

$$y_o = 0.6\cos[\frac{\pi}{2}t + \phi] \quad (\mathrm{m})$$

$$t = 0.5s \text{ 时，} y_o = -0.3m \text{ ，且} v_o < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}0.5 + \phi = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \phi = \frac{5\pi}{12}$$

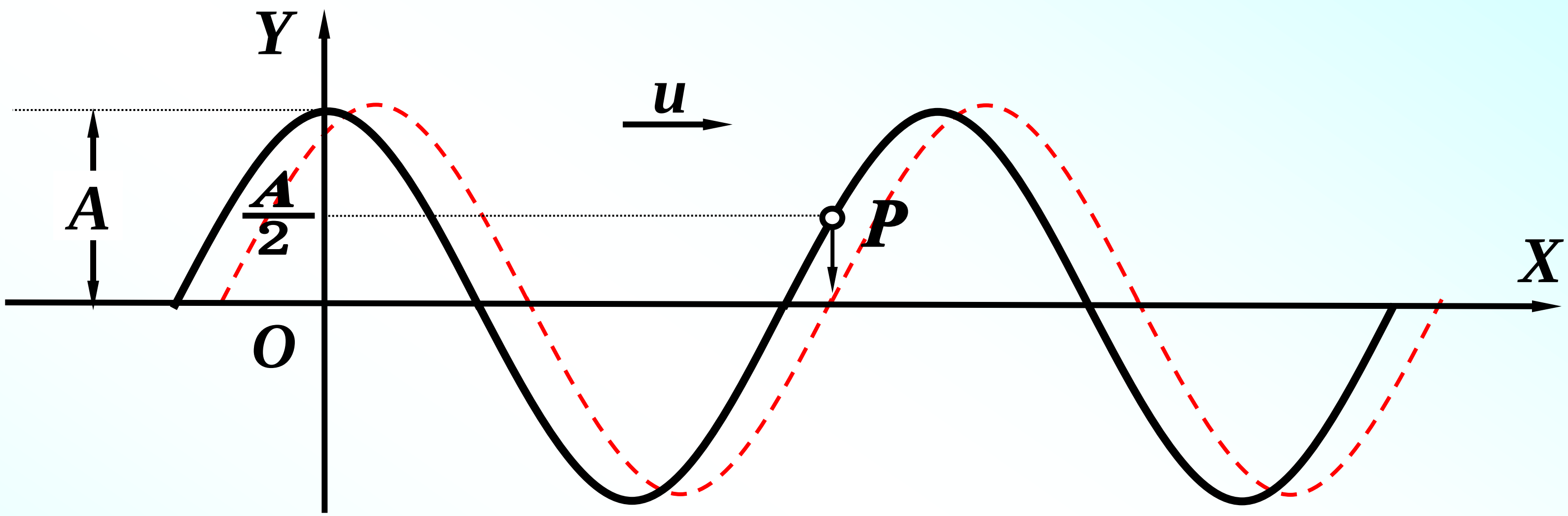
$$\therefore y_o = 0.6\cos[\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{12}] \quad (\mathrm{m})$$

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \phi]$$

波函数为：

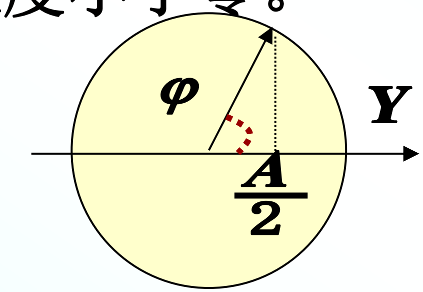
$$\Rightarrow y_o = 0.6\cos[\frac{\pi}{2}(t + \frac{x}{12}) + \frac{5\pi}{12}] \quad (\mathrm{m})$$

例：一简谐波 $t = 0$ 时刻的波形曲线如图所示。



则此时 P 点的运动方向 ________ ， 振动位相 = ________

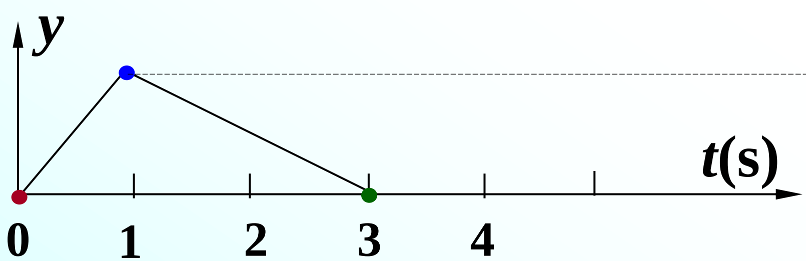
解：波沿正方向传播，沿 X轴正方向稍微平移原波形图，可判断出 P点此时向下运动，即P点处质点速度小于零。

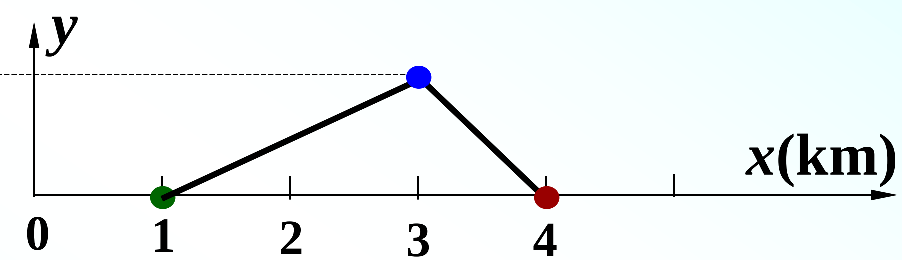


由旋转矢量图可知：$\varphi_P = \frac{\pi}{3}$

例：x轴原点O处质元的振动曲线为如图所示的三角形，该振动沿x轴正向以速度u=1km/s传播，试画出t =4s时的波形图(波形曲线)。

解： 原点相位在t时刻传播的距离为： $x = u(t - t_0)$



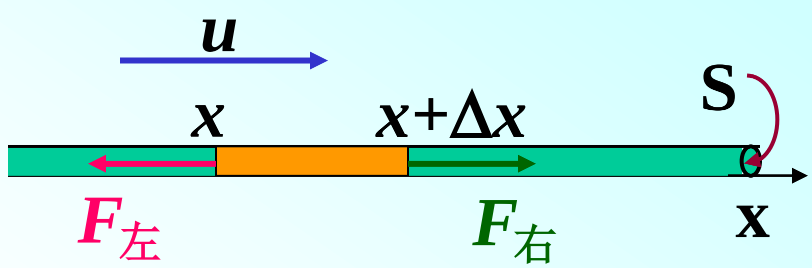


t_0=0时刻的原点相位，在t=4s时，传播到4km处

t_0=1时刻的原点相位，在t=4s时，传播到3km处

t_0=3时刻的原点相位，在t=4s时，传播到1km处

3. 平面波的波动方程



以弹性细棒传播的纵波为例：

设棒的截面积为S

取棒中一小段，其原长为Δx

由于形变，各处质点相对平衡位置的位移为 y

最左端 x处，应变为：$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

最右端 $x+\Delta x$ 处，应变为：$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

应变：形变量与质元原长之比 $\Delta y/\Delta x$

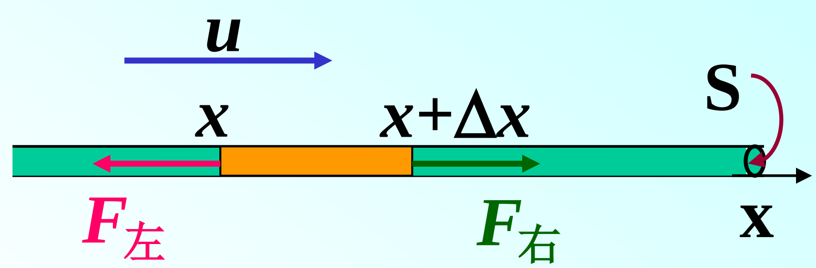
根据胡克定理：在弹性极限内，弹性物体的应力与应变成正比

左端受到左边材料的拉力为：$F_{左}=-SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

右端受到右边材料的拉力为：$F_{右}=SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

所以，长Δx的棒受合外力为：

$$F_{合}=F_{左}+F_{右}=SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$



长Δx的棒受合外力为：

$$F_{合}=F_{左}+F_{右}$$

$$=SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-SY\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}$$

$$=SY\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right]$$

$$=SY\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\cdot\Delta x\right]$$

$$=SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

设棒的质量密度为ρ，则其质量为

$$\Delta m=\rho S\Delta x$$

$$\Rightarrow a=\frac{F_{合}}{\Delta m}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

另，加速度又可以表示为：

$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

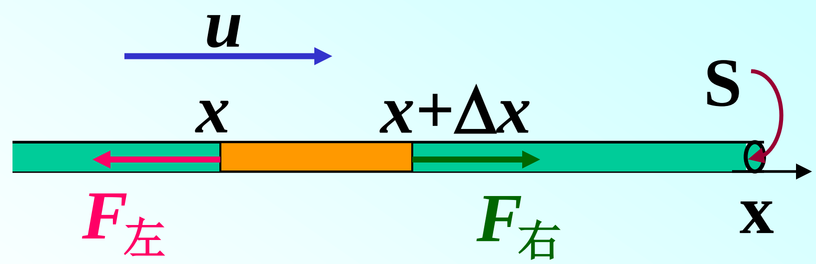
$$\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

令：$u^2=\dfrac{Y}{\rho}$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

平面波的波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$ 其中：$u^2 = \dfrac{Y}{\rho}$



平面波的波动方程

我们也可以从 $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi]$ 出发求得：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -\frac{\omega^2}{u^2} A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2 A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

比较上式，可以得到波速：$u = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$ 与媒质的惯性和弹性有关

波动方程推广得到三维空间中：

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$ ξ 为空间位移

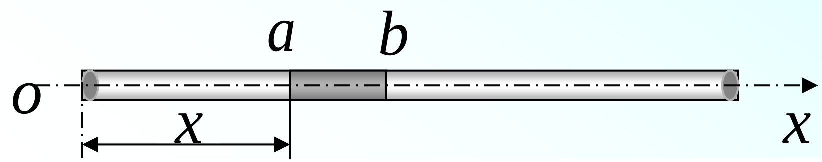
三、波的能量及传播

1. 波的能量

机械波的能量是媒质中各质元振动能量(振动动能、形变势能)的总和。

下面的分析以平面余弦弹性纵波在棒中的传播为例。

设棒中平面简谐波的波动表式为



$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

则质元振动速度为

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\omega(t-\frac{x}{u})$$

可以得到质元动能： $W_K=\frac{1}{2}(\Delta m)v^2=\frac{1}{2}\rho(\Delta V)v^2$

即：$$\boxed{W_K=\frac{1}{2}\rho(\Delta V)A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

$$\boxed{W_K=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

质元由于相对形变而具有的弹性势能为:

$$W_P=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2$$

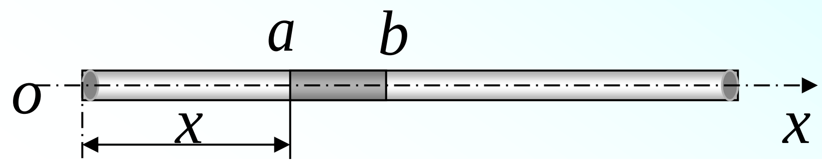
弹性系数定义式为:

$$F=-k(\Delta y)$$

根据胡克定律有:

$$F=-YS\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow k=\frac{YS}{\Delta x}$$



$$\Rightarrow W_P=\frac{1}{2}YS(\Delta x)(\frac{\partial y}{\partial x})^2=\frac{1}{2}Y(\Delta V)(\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

$$\because y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})] \qquad \therefore (\frac{\partial y}{\partial x})^2=A^2\frac{\omega^2}{u^2}\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

$$\Rightarrow \boxed{W_P=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})} \qquad \Rightarrow \boxed{W_P(t)=W_K(t)}$$

$$\boxed{W_P=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}\quad \boxed{W_K=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

在行波的传播过程中，

质元的动能和势能同步变化，始终相等： $\boxed{W_P(t)=W_K(t)}$

质元的总机械能为

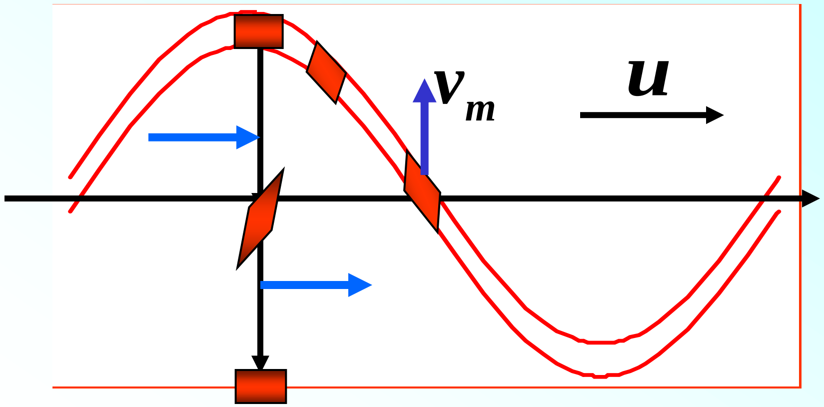
$$\boxed{W=W_K+W_P=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

可见：媒质中质元(体积元) 的机械能是随时间变化的，是不守恒的。

以上结果同样适用于横波。

$$W_P = W_k = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

(横波、纵波均适用)



结论：

（1）每个质元的波动动能与势能数值相同，位相相同。同时变大，同时变小。

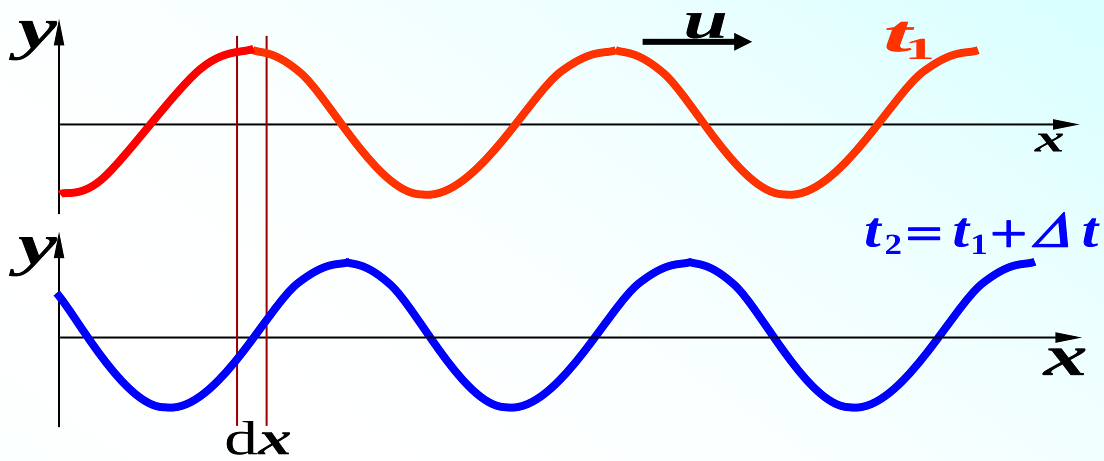
W_k最大则 W_p也最大，如平衡位置.
W_k最小则 W_p也最小，如最大位移处.

与振动能量的特点不同!

（2）ΔV 中 $W = W_K + W_P = \rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

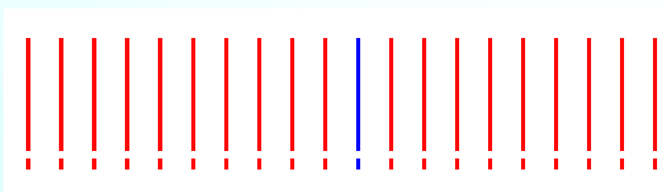
W随 t 、x 而变化，不守恒 。能量在传输！

最大位移 ⟶ 平衡位置，能量增大，从前面输入；
平衡位置 ⟶ 最大位移，能量减小，向后面输出。



注意：**对横波，质元dx在最大位移处形变最小，在平衡位置形变最大。**

可将纵波的密部看成波峰，疏部看成波谷？



纵波的密部和疏部均是形变最大位置，
也是弹性势能和动能最大位置，
对应横波的平衡位置

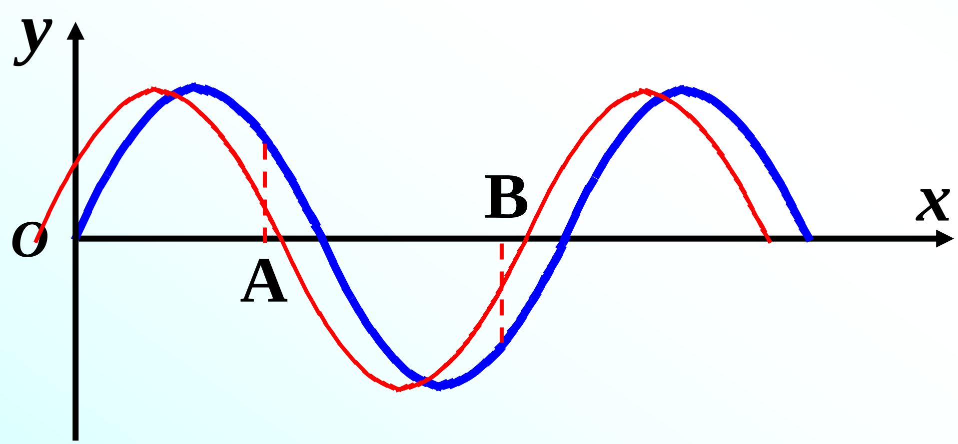
例: 图为一平面简谐机械波在 t 时刻的波形曲线。若此时A点处媒质质元的振动动能在增大，则 [B]

(A) A点处质元的弹性势能在减小

(B) 波沿 x 轴负方向传播

(C) B点处质元的振动动能在减小

(D) 各点的波的能量密度都不随时间变化



分析： **A点处媒质质元的振动动能在增大，**

说明A点处媒质质元正向平衡位置运动，速度为负。

下一时刻的波形曲线向左平移。

$$\boxed{W=W_K+W_P=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

（3）能量密度：单位体积中的能量

$$w=\frac{W}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

平均能量密度：能量密度周期平均值

$$\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \quad \propto A^2,\omega^2$$

2. 能流、能流密度

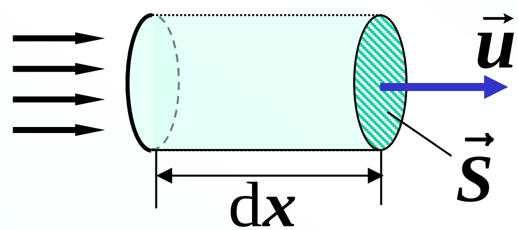
（1）能流P：单位时间通过某面的能量: $P=w\vec{u}\cdot\vec{S}$

$P=\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$

在$\mathrm{d}t$ 的时间内, $\mathrm{d}x$范围内的能量$\mathrm{d}W$均可以通过右端面：

$$\mathrm{d}W=w\mathrm{d}V=w\mathrm{d}\vec{x}\cdot\vec{S}$$

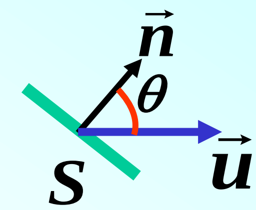
$\mathrm{d}\vec{x}=\vec{u}\mathrm{d}t$



$$\Rightarrow P=w\vec{u}\cdot\vec{S}$$

（1）能流P：单位时间通过某面的能量 $P = w\vec{u}\cdot\vec{S} = wuS\cos\theta$

平均能流 $\bar{P} = \bar{w}\vec{u}\cdot\vec{S} = \bar{w}uS\cos\theta$



（2）能流密度i：单位时间内通过垂直于波传播方向单位面积的能量。

$$i = \frac{P}{S} = wu$$

平均能流密度I（又称波的强度，如光强、声强）

$$\begin{cases} I = \bar{i} = \dfrac{\bar{P}}{S} = \bar{w}u \\ w = \dfrac{W}{\Delta V} = \rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\dfrac{x}{u}) \Rightarrow \bar{w} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T w\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u \quad \propto A^2$$

例：证明在无吸收的理想媒质中球面波的振幅与离开其波源的距离成反比，并求球面简谐波的波函数。

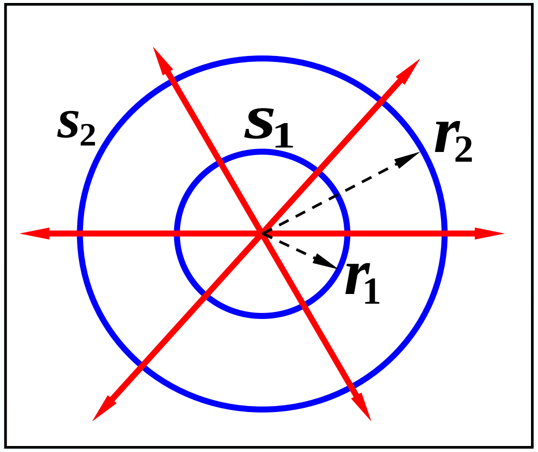
证：介质无吸收，所以通过两个球面的平均能流相等。

$$\begin{cases} \bar{w}_1 u S_1 = \bar{w}_2 u S_2 \\ \bar{w} = \dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{平均能流}: \bar{P} = \bar{w} u S}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u 4\pi r_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad \Rightarrow A \propto \frac{1}{r}$$



所以球面简谐波的波函数：

$$y = \frac{A_0}{r}\cos\omega[(t - \frac{r}{u}) + \phi]$$

作业：11—T13-T18

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写姓名以及学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周二交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。