大学物理

College Physics

主 讲

华 中 科 技 大 学

刘超飞

● 普朗克的能量子假说

$$\varepsilon = h\nu \qquad h = 6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$$

● 爱因斯坦的光电方程

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 = h\nu - A}$$

● 光子具有**能量、质量、动量**：

$$\boxed{\varepsilon_0 = h\nu} \quad \boxed{m_{光} = \frac{h\nu}{c^2}} \quad \boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

● 康普顿散射

波长偏移：$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \qquad \Delta\lambda = \dfrac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$

卢瑟福核式模型的问题：
- 原子的稳定性问题？
- 原子分立的线状光谱？

Niels Bohr
1885-1962
1922年诺贝尔奖

●玻尔理论

（1）定态假设：原子只能处在一系列不连续的稳定的能量状态（定态）

$E_1, E_2, E_3 \cdots$（称能级）

（2）频率公式：当原子能级跃迁时，才发射或吸收光子，其频率满足：

$$h\nu = \left| E_n - E_m \right|$$

（3）量子化条件：定态时电子角动量 L应等于$\hbar$ 的整数倍。

$$L = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) = -\frac{13.6\ \text{eV}}{n^2}$$

4.氢原子光谱的理论解释

1）里德伯常数的理论值

玻尔频率公式：$\nu = \dfrac{E_n - E_k}{h} = \dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$

波数与频率的关系 $\tilde{\nu} = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\nu}{c}$

$$\Rightarrow \tilde{\nu} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

其中，里德伯常数为：$R = \dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1\cdot 097373\times 10^7\, m^{-1}$

里德伯常数的实验值：

广义巴尔末公式：$\nu = \dfrac{1}{\lambda} = R_H\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$

相符

$$R_H = 1\cdot 096776\times 10^7\, m^{-1}$$

能级 $$E_n = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) = -\frac{13.6\ \text{eV}}{n^2}$$

2）解释分立的谱线

$$\nu = \frac{E_n}{h} - \frac{E_k}{h}$$

能级不连续 ⇒ 频率ν不连续

不同的 ν 对应不同的谱线

之间的跃迁。

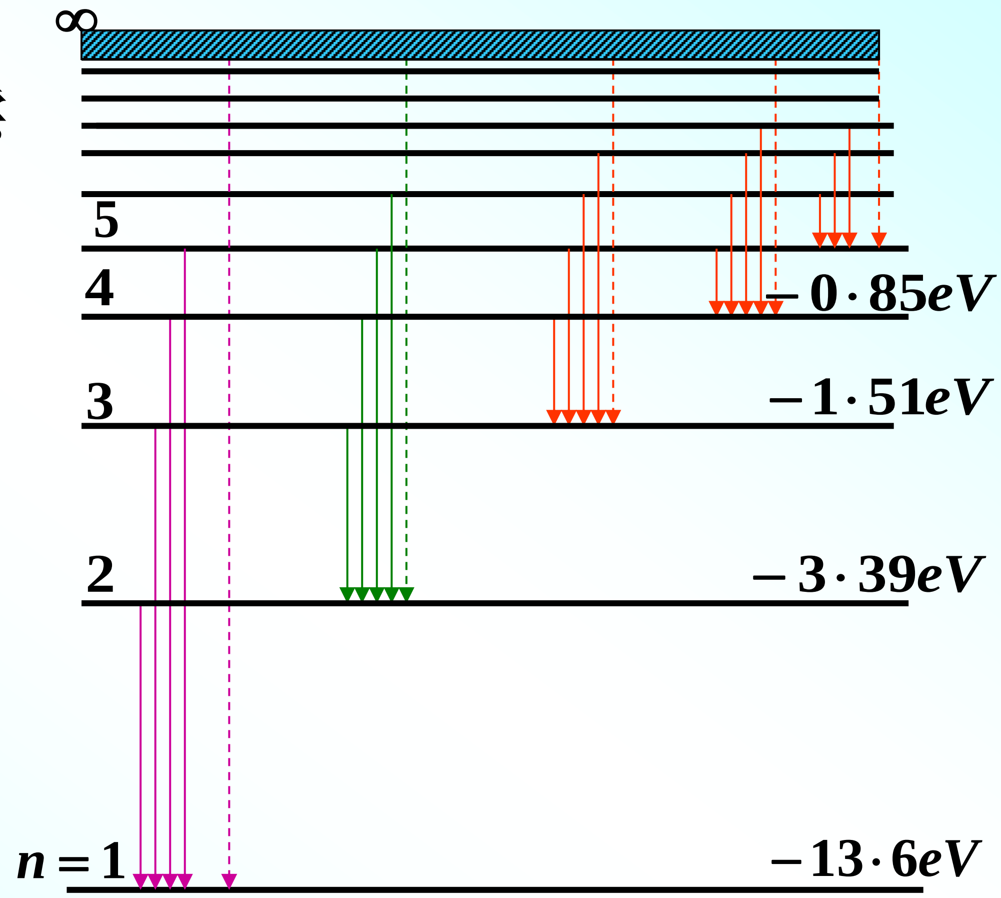
3）解释谱线系

为什么存在谱线系？

为什么有些谱线在短波区？有些在长波区？

显然，

$$\Delta E \uparrow \Rightarrow \nu \uparrow \Rightarrow \lambda \downarrow$$



氢原子能级图

能级 $\boxed{E_n = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) = -\frac{13.6\ \text{eV}}{n^2}}$

光谱线频率：

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h}$$

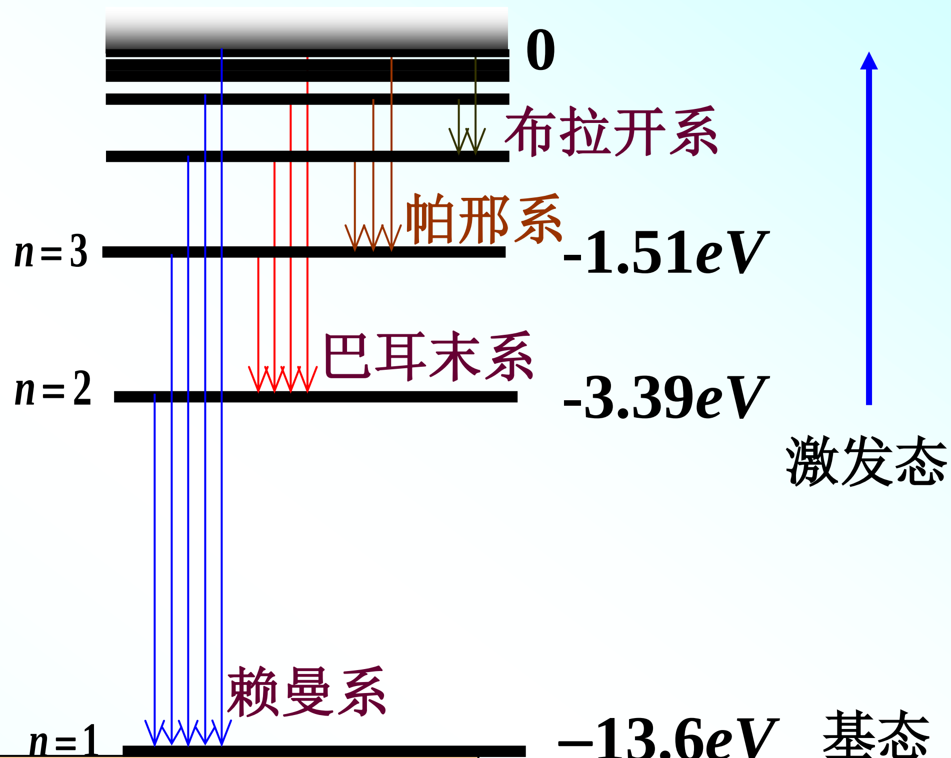
$$= R_H c\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

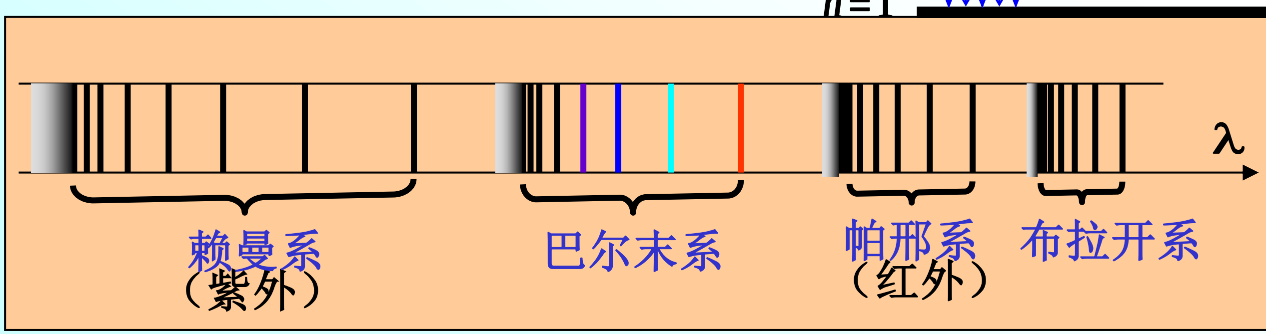
$m=1 \quad n=2,3,4\cdots$ 赖曼系

$m=2 \quad n=3,4,5\cdots$ 巴尔末系

$m=3 \quad n=4,5,6\cdots$ 帕邢系

$\cdots$





氢原子能级图

例：设基态氢原子被单色光激发后，发出的巴尔末系中仅观察到两条谱线，试求这两条谱线的波长及外来光的频率？还可以有哪些谱线？

解：巴尔末系 $n \to 2$

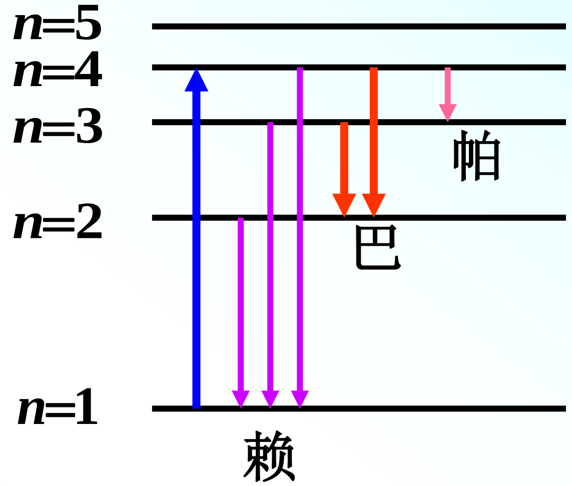
$$\nu_1 = \frac{E_4 - E_2}{h}$$

$$\nu_2 = \frac{E_3 - E_2}{h}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) = -\frac{13.6\ \mathrm{eV}}{n^2}}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = 4868\ \mathrm{\mathring{A}}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = 6571\ \mathrm{\mathring{A}}$$



原子由 $n=1 \to n=4$

$$\Rightarrow \nu_{外} = \frac{E_4 - E_1}{h}$$

例：计算将动能为零的自由电子从无限远处移来和一个氢离子结合成正常状态的氢原子所放出的能量。

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) = -\frac{13.6\ \mathrm{eV}}{n^2}}$$

$$\begin{cases} E_\infty = 0 \\ E_1 = -13\cdot 6\ \mathrm{eV} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 结合能 $= E_\infty - E_1 = 13\cdot 6\ \ \mathrm{eV}$

例：将氢原子中 n=2 的电子搬到无限远处需要的能量

A等于多少？

$$E_2 \to E_\infty \quad \Rightarrow -\frac{13\cdot 6}{4} + A = 0$$

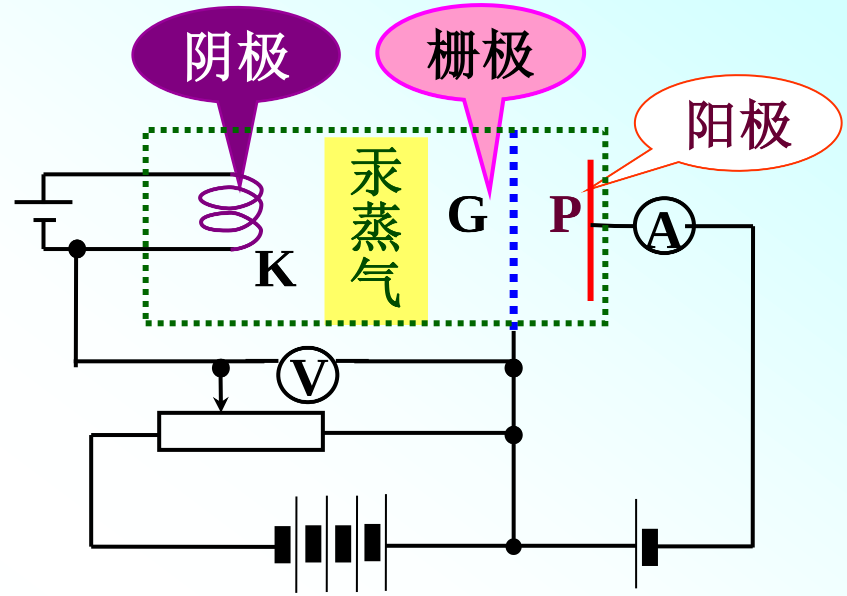
$$\Rightarrow A = \frac{13\cdot 6}{4}\ \ \mathrm{eV}$$

5.夫兰克—赫兹实验 ———直接验证原子系统定态能级的存在

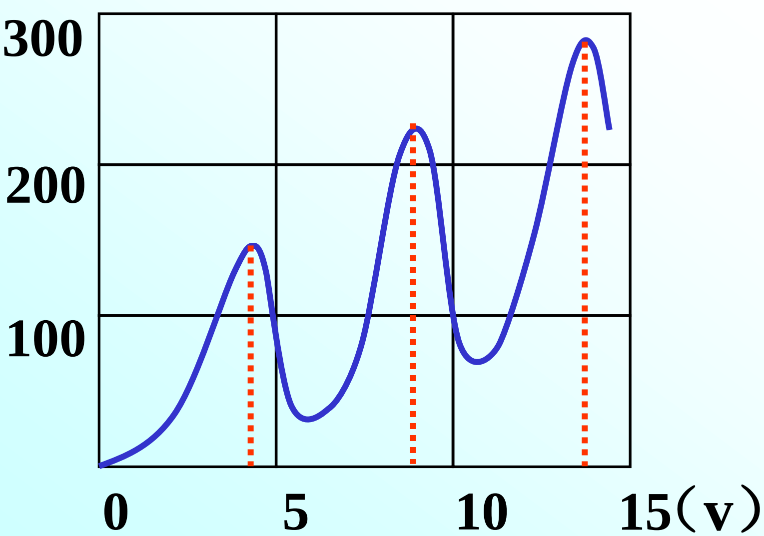
实验装置:

K极 加速电压V G极

G极 反向电压 P极



实验结果:



（1）改变V，V↑，I↑，

到达P极的电子增加。

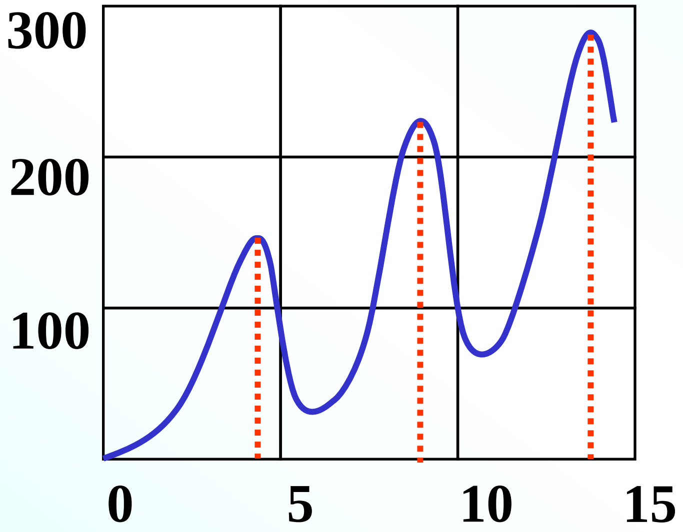
（2）V=4.9v后，I↓，

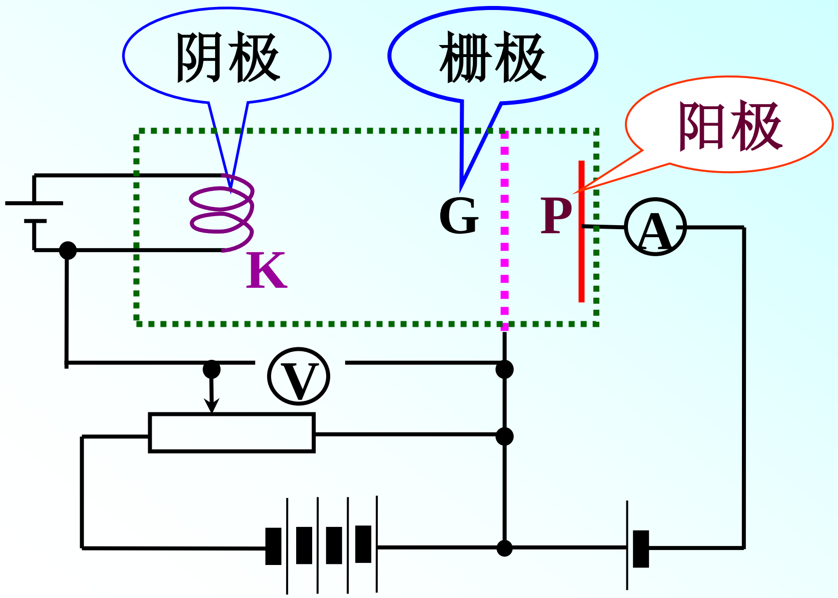
形成一峰值

（3）每隔ΔV=4.9v，

就有一峰值出现。

原因？





ΔV=4.9v 为什么？

只能有一个解释：4.9eV恰好是汞原子两能级间的能量差

实验证实：

汞原子发射的光谱：λ=253.7nm

光子能量公式：$\varepsilon = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$

$$\Rightarrow \varepsilon = 4.89\ \mathrm{eV}$$

$\Rightarrow \Delta E = 4.89\ \mathrm{eV}$ = 汞原子基态能－第一激发态能量

进一步的实验证实：第二激发态电势为6.7v，电离电势为10.4v

五、玻尔理论的成功及局限性

1.成功之处

（1）成功解释氢原子、类氢离子、一价的 *Na*，*K*，*Li* 等原子光谱

（2）定态、频率跃迁的概念

（3）推出广义的巴尔末公式，预言了k=1，4，5的存在，果然在1915——1924年间发现了这些谱线。

（4）对元素周期表能作一些解释

（5）在 $k \Rightarrow \infty$ ，$n \Rightarrow \infty$ 时，玻尔理论回到了经典理论

2.局限性

（1）对稍复杂的原子光谱，定性、定量都不能解释

（2）对氢原子谱线的强度、宽度、偏振等问题遇到难以克服的困难。

如何解决？

第15章　　量子力学基础

经典物理证实了光的波动性	$\nu,\ \lambda \xleftrightarrow{h} \varepsilon,\ P,\ m$	早期量子论证实了光的粒子性

$$\boxed{\varepsilon_0 = h\nu} \qquad \boxed{p = h/\lambda} \qquad \boxed{m = h\nu/c^2}$$

一、物质波的提出

德布罗意从自然界的对称性出发，提出：

既然光(波)具有粒子性，

那么实物粒子也应具有波动性。

L.V. de Broglie

（法国，1892-1986）

1929诺贝尔物理学奖

1924.11.29. 德布洛意把题为“量子理论的研究”的博士论文提交给巴黎大学。

他在论文中指出:

一个能量为E，动量为 P 的实物粒子同时具有波动性。

质量 m
速度 v

粒子具有:

能量 E
动量 P

波长λ
频率 ν

它们之间的关系是:

$$\boxed{E = h\nu}$$

$$\boxed{P = \frac{h}{\lambda}}$$

德布罗意关系

$$\boxed{E = h\nu \quad P = \frac{h}{\lambda}}$$ 德布罗意关系

一般地：

$$v \sim c \qquad \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

$$v << c \qquad \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{m_0 v}$$

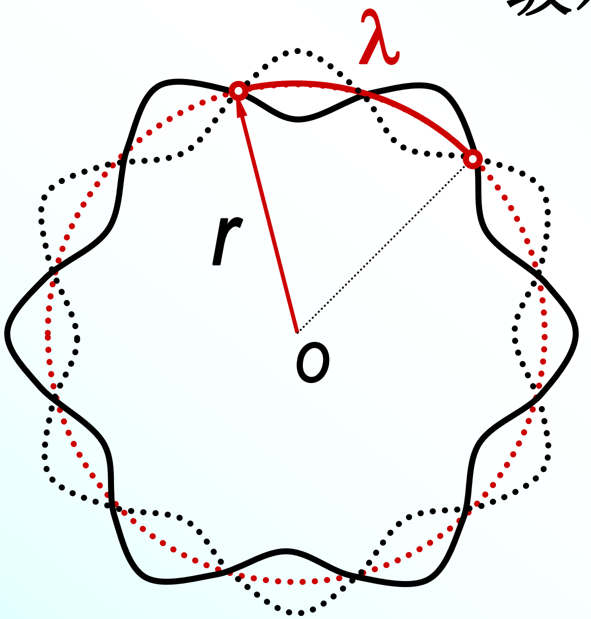
波长与静止质量成反比

静止质量为m_0的实物粒子，当以速度v运动时，必有一单色平面波与之相伴，且此单色平面波的波长为λ。

这种波称为德布罗意波或物质波。

λ称为物质波(德布罗意波)波长。

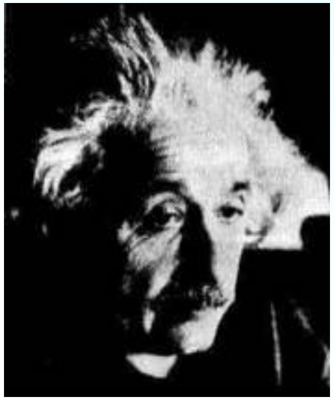
德布罗意用物质波的概念成功地解释了玻尔提出的轨道量子化条件：



$$\boxed{L = mv \cdot r = n\frac{h}{2\pi}}\ ?$$

$$\begin{cases} \text{驻波：} 2\pi r = n\lambda \\ \lambda = \dfrac{h}{mv} \end{cases}$$

$$\Rightarrow mvr = n\frac{h}{2\pi}$$



朗之万把德布洛意的文章寄给爱因斯坦，

爱因斯坦说：

“揭开了自然界巨大帷幕的一角”

“瞧瞧吧，看来疯狂，可真是站得住脚呢”

经爱因斯坦的推荐，物质波理论受到了关注。

实物粒子的波动性是否真的存在呢？

在德布罗意的博士论文答辩会上有人问：

"这种波怎样用实验来证实呢？"

德布罗意答：

"用电子在晶体上的衍射实验可以做到。"

例：电子经电场加速，加速电压V_1=100伏和V_2=10000伏，电子的德布罗意波长λ=?

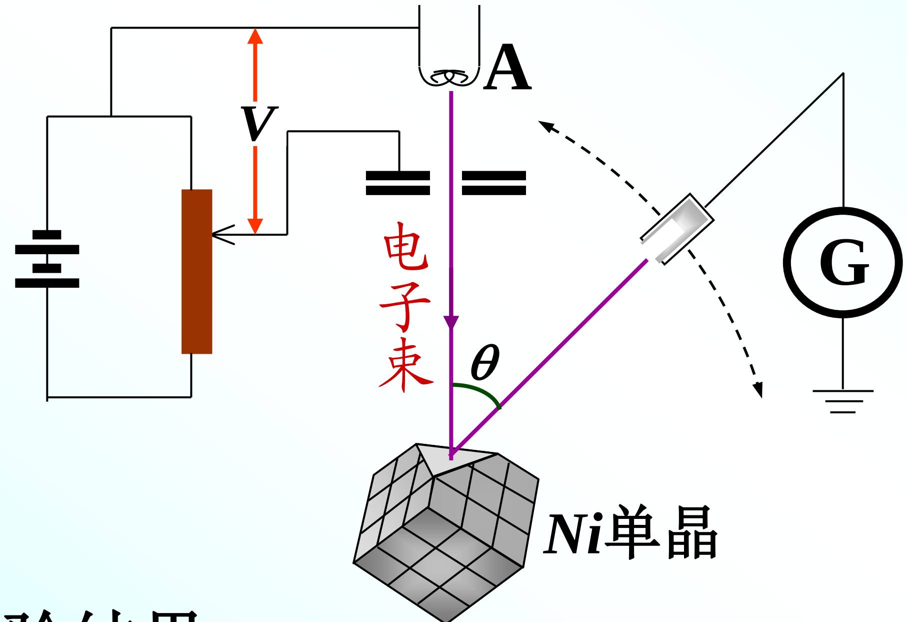
$$\left.\begin{aligned}\lambda=\frac{h}{P}=\frac{h}{m_0 v}\\ \frac{1}{2}m_0 v^2=eV_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lambda_1=\frac{h}{\sqrt{2m_0 eV_1}}=\frac{12.25}{\sqrt{V_1}}\ \mathring{A}=1.23\ \mathring{A}$$

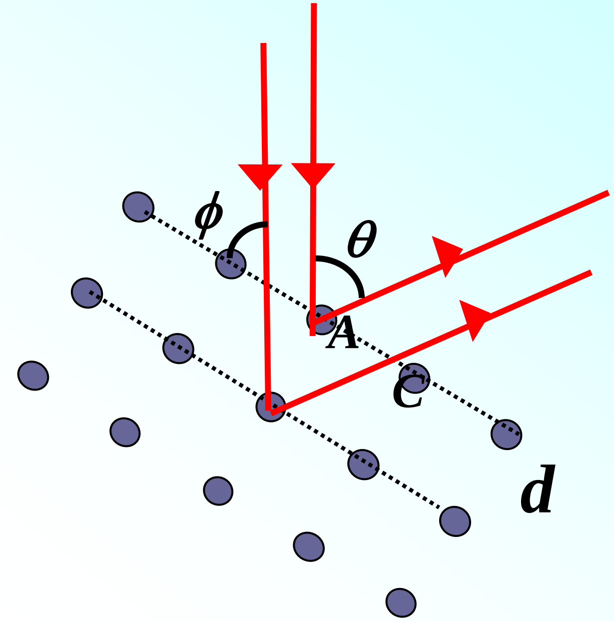
$$\lambda_2=0.123\ \mathring{A}$$

可见，电子的德布罗意波长很短。处于X射线波段。

2.物质波的实验验证

戴维逊—革末电子衍射实验(1927年)





实验结果：

当加速电压V=54V时，在 θ=50^{0}处，射线强度有一极大。

布拉格公式：(取 k =1)

$$k\lambda = 2d\sin\phi = 2d\sin(65^o)$$

Ni的晶格常数：$d = 2.15\text{Å}$

$$\Rightarrow \lambda_{电} = 1.65\ \text{Å}$$

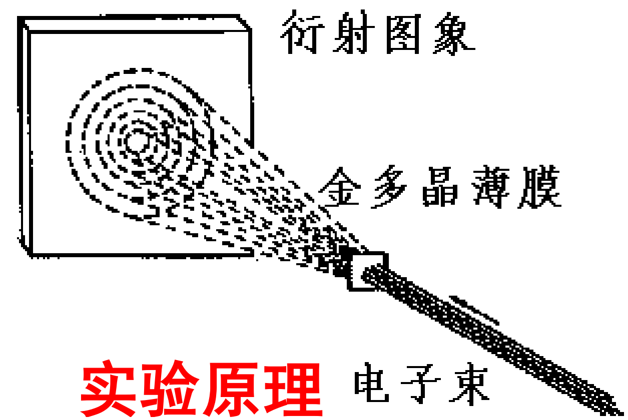
德布罗意关系：

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = 1.67\text{Å}$$

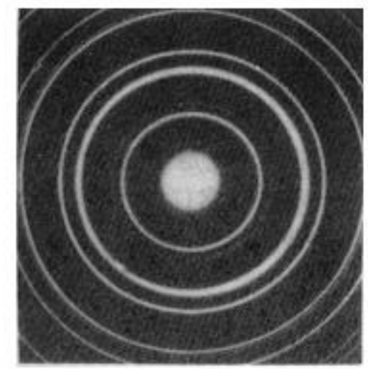
理论值与实验值相符

电子不仅在反射时有衍射现象，

G.P.汤姆逊（1927年）电子通过金属多晶薄膜的衍射实验.

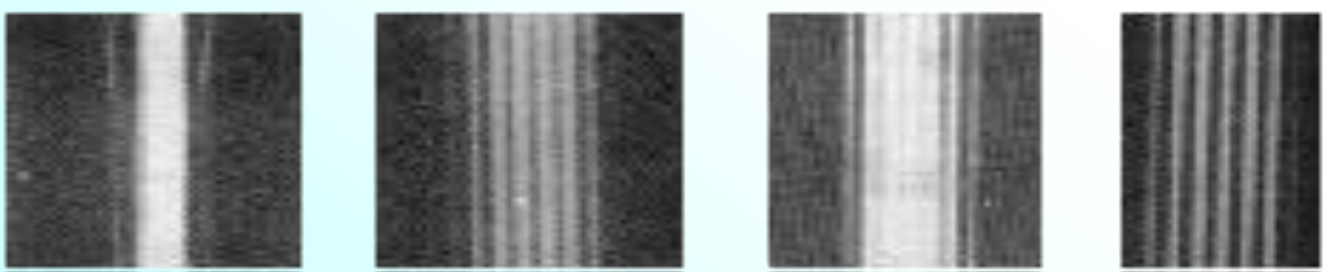


实验原理



衍射图象

戴维逊和汤姆逊因验证电子的波动性分享1937年的诺贝尔物理学奖



单缝　双缝　三缝　四缝

(约恩逊1961)

宏观粒子是否也具有波动性？　是的，有物质都具有波粒二象所性

例：m=0.01kg，v=300m/s的一颗子弹的物质波波长λ=？

$$\lambda=\frac{h}{P}=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.01\times300}=2.21\times10^{-34}\ \mathrm{m}$$

因为h极其微小，宏观物体的波长小得实验难以测量。

宏观物体仅体现出了粒子性

波动性对粒子的影响 ⟶ 海森堡“不确定性原理”

二、不确定性原理 ——1927年海森堡,德国

1932年诺贝尔奖

经典粒子(质点):

质点运动时，其坐标和动量是可以同时被准确测定的。

微观粒子(比如电子)：

其坐标和动量不能同时被准确测定（微观粒子的波粒二象性）

1.位置和动量的不确定关系式

量子力学在理论上已经证明：

在某确定方向上(如x方向)，粒子的位置不确定量Δx与同一时刻的其动量的不确定量ΔP_x之间存在以下关系：

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

注意：这里的 Δx 和 ΔP_x 必须是同一粒子在同一时刻的。

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$ 海森堡不确定关系

含义：一个粒子的动量和位置不可能同时确定。

粒子位置的不确定度越小（即Δx越小），则在同一时刻该粒子在同一方向上的动量的不确定度就越大（即ΔP_x越大）；反之亦然。

这并非是由于仪器的误差或测量技术的问题。不确定关系的物理根源是粒子的波动性。

对三维情况，
海森堡不确定关系可写为：

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$
$$\Delta y \cdot \Delta P_y \geq \frac{\hbar}{2}$$
$$\Delta z \cdot \Delta P_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

不确定关系式一般用于做数量级估算。

2. 能量和时间的不确定关系

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

证明：设一个粒子在一段时间Δt内的动量为P，能量为E

相对论质能关系：$p^2c^2 = E^2 - m_0^2c^4$

$$\Rightarrow 2pc^2\Delta p = \Delta(E^2 - m_0^2c^4) \Rightarrow \Delta p = \frac{E}{c^2 p}\Delta E$$

在Δt 时间内，粒子可能发生的位移为 Δx ，

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{p}{m}\Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x = \frac{E}{mc^2}\Delta E \cdot \Delta t = \Delta E \cdot \Delta t \qquad (E=mc^2)$$

$$\Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

2. 能量和时间的不确定关系

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

若一体系处于某状态的时间不确定度为 Δt，
那么这个状态的能量也有不确定范围ΔE 。

1）原子在某激发状态的时间越长，该态的能级宽度就越小。

$$\Delta t \uparrow \rightarrow \Delta E \downarrow$$

2）ΔE小的能级比较稳定。

对于基态$\Delta t \rightarrow \infty$, $\Delta E \rightarrow 0$

所以基态最稳定，基态的能量是可以准确被测定的。

据此，可解释光谱线的自然宽度。

能量和时间的不确定关系解释谱线的自然宽度

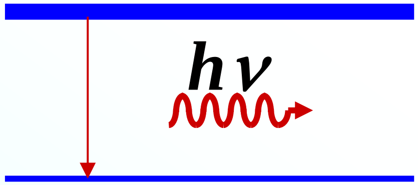
$$\begin{cases} \text{普朗克能量子假说} \quad E = h\nu \Rightarrow \Delta E = h \cdot \Delta\nu \\ \text{不确定关系} \quad \Delta t \cdot \Delta E \sim \dfrac{\hbar}{2} = \dfrac{h}{4\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\nu \approx \frac{1}{4\pi \cdot \Delta t}$$

原子中激发态的平均寿命为 $\Delta t \sim 10^{-8}\,s$

$$\Rightarrow \Delta\nu \sim 10^{7}\,\mathrm{Hz}$$

谱线的自然宽度



例:原子的线度是10^{-10}m，用不确定关系讨论原子中电子的速度的不确定量。

解: 原子中的电子位置可能在原子中的任意地方。所以其位置的不准确量就是整个原子的大小：

$$\Delta x \sim 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

不确定性原理：$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \dfrac{\hbar}{2}$

$$\Delta P_x = m\Delta v_x$$

$$\Rightarrow \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} \sim 7\times 10^{6}\,\mathrm{m/s}$$ 电子速度的不确定度

另：原子中电子速度的量级为多少？

由玻尔氢原子模型有：$E_0 = 13.6\ \mathrm{eV}$

$$E_0 = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$\Rightarrow v \approx 10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

电子速度与其不确定度为同一量级，所以电子在核内没有确定的速度。

例: 设子弹的质量为**0.01**kg，枪口的直径为**0.5**cm，试用测不准关系计算子弹射出枪口的横向速度。

解: 据不确定关系 $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar / 2$

$\Delta P_x = m \Delta v_x$

子弹横向位置的不确定度 Δx 就是枪口的直径。

$$\Rightarrow \Delta v_x \sim \frac{\hbar}{2\Delta x \cdot m} \sim 10^{-30}\ \mathrm{m/s}$$

例: 电子显像管中，电子的加速电压为**9**kv，电子枪口直径为**0.1**mm，求电子射出枪口的横向速度。

解: 分析同上 $\Delta v_x \sim \dfrac{\hbar}{2\Delta x \cdot m_e} = 0.58\ \mathrm{m/s}$

另，电子经**9**kv电压加速的速度为: $v = 5.6\times 10^7\ \mathrm{m/s}$

$$\Rightarrow \Delta v_x << v$$

即：在宏观尺度范围 波动效应难以察觉。

关于普朗克常数h

h=6.63×10^{-34}Js 非常小

令：$h\to 0$ $\boxed{\Delta x\cdot\Delta P_x \geq \hbar/2}$ $\longrightarrow$ $\Delta x\cdot\Delta P_x \geq 0$

那么：在任何情况下都可有Δx=0、ΔP_x=0

波 $\xleftrightarrow{\text{无关}}$ 粒子

$\Downarrow$

波粒二象性就将从自然界中消失

令h大一点：$h=6.63\times 10^{-2}$ Js

子弹射出枪口的横向速度：$\Delta v_x = \dfrac{\hbar}{2\Delta x\cdot m} \sim 100\ m/s$

则波粒二象性就也要统治宏观世界！！

h=6.63×10^{-34}Js 不大不小， “恰到好处”！

三、 波函数

要寻求一种既能反映微观粒子的粒子性又能反映其波动性的新的描述粒子状态的方法。在量子力学中, 与经典的方程 $\vec{F}=m\vec{a}$ 同地位的方程是薛定谔方程(Schrödinger) 。

经典力学（宏观物体）	量子力学（微观物体）
粒子状态 $\vec{r}\rightarrow\vec{p}=m\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	$\psi(\vec{r},t)$ —波函数
运动规律 $\vec{F}=m\vec{a}\rightarrow\vec{r}(t)$	薛定谔方程 $\rightarrow\psi(\vec{r},t)$

即在量子力学中微观粒子的运动状态完全由波函数Ψ给出。

要求波函数Ψ既能描写波动性，又能描写粒子性。

下面以自由粒子为例给出自由粒子的波函数。

1. 自由粒子的波函数

自由粒子：不处在任何外力场中，不受任何外力作用。

$E=$ 恒量 $\quad \because E=h\nu=\dfrac{h}{2\pi}2\pi\nu=\hbar\omega \Rightarrow \nu$或$\omega$恒定

$\Longrightarrow$ 单色波

$\vec{p}=$ 恒量 $\quad \because \vec{p}=\dfrac{h}{\lambda}\vec{i}=\dfrac{h}{2\pi}\dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{i}=\hbar\vec{k} \Rightarrow \begin{cases}\text{波长}\lambda\text{不变}\\ \text{波的传播方向不变}\end{cases}$

$\Longrightarrow$ 平面波

所以自由粒子的波应为单色平面波。

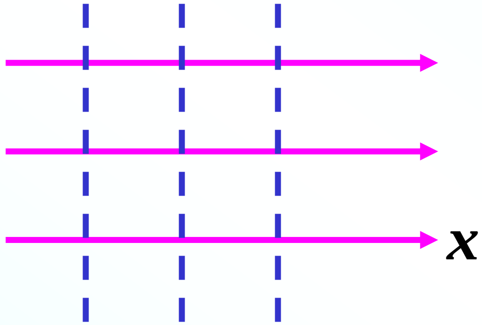
其波函数可以表示为：$\psi(\vec{r},t)=A\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\phi_0)$

● 经典的单色平面波函数为：

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\phi_0)$$

其中角频率为 $\omega=2\pi/T$

角波数为 $k=2\pi/\lambda$



自由粒子的物质波函数可以表示为：

$$\psi(\vec{r},t)=A\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\phi_0)$$

- 为了便于运算，人们习惯于把三角函数转换成复变函数。

欧拉公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$\Rightarrow \cos x=\mathrm{Re}(e^{ix})$$

即：波函数可以用复数的实部表示

所以自由粒子波函数可用复数表示为：$\psi(\vec{r},t)=Ae^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\phi_0)}$

其中初位相可以任意选定，习惯上我们一般把初位相取为零。

$$\begin{cases}\psi(\vec{r},t)=\psi_0 e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} \\ E=h\nu=\hbar\omega \\ \vec{p}=h/\lambda=\hbar\vec{k}\end{cases}$$

波动性 体现在函数的形式上

粒子性 体现在位相中

$$\Rightarrow \boxed{\psi(\vec{r},t)=\psi_0\mathrm{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})\right]}$$

——自由粒子德布罗意波的波函数

三维平面波函数 $\boxed{\psi(\vec{r},t)=\psi_0 \mathrm{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})\right]}$

一维平面波函数 $\boxed{\psi(x,t)=\psi_0 \mathrm{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar}(Et-px)\right]}$

经典机械波是 介质中质点围绕平衡位置(位移)的来回振动。

经典电磁波是 电磁场(电矢量)的交替振动。

物质波是什么?"波函数" 的具体含义是什么?

作业：14 —T6-T7，15 —T1-T6

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写姓名以及学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周二交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。