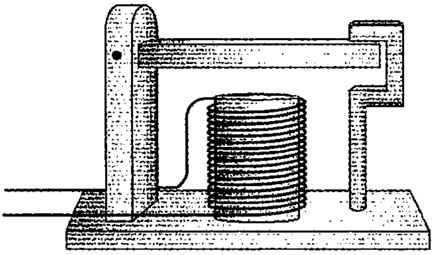
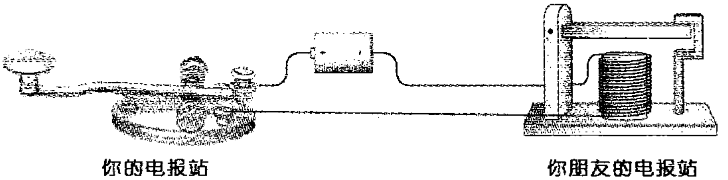


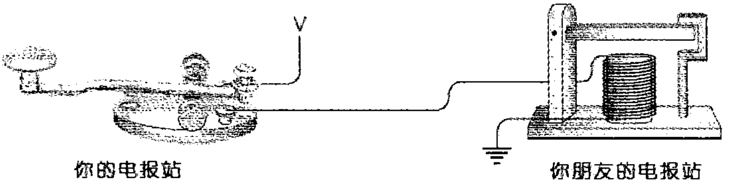
当电报机的电键被按下时，发声器中的电磁铁拉动上面的活动横杠下降，它会发出“滴”的声音。当松开电键的时候，横杠弹回到原来的位置，发出“嗒”的声音。一次快速的“滴-嗒”声代表点；一次慢速的“滴——嗒”声则代表划。

电键、发声器、电池，还有一些导线连接到一起，电报机的电路示意图与前面章节中的手电筒电路图很相似。



正如我们以前所发现的那样，不必非得用两根导线来连接两个电报站。如果地球能为我们提供电路的另一半的话，一根导线就足够了。

就像我们在上一章所做的那样，我们可以把接地的电池用大写“V”表示。因此完整的单向系统如下图所示。



双向通信仅仅需要再增加一个电键和发报人。这与我们前一章中的做法是类似的。

电报机的发明标志着现代通信的开始。人们第一次能够在视线或者听力之外的距离范围进行实时交流了，而且信息传递的速度比骏马疾驰还要快。而更加耐人寻味的是，这个发明使用了二进制码。但是在后来的电子和无线通信（包括电话、无线电、电视）所使用的通信模式中，二进制码被废弃了，直到后来它又被应用在了电脑、光盘、数字

影碟、数字卫星电视广播和高清电视上。

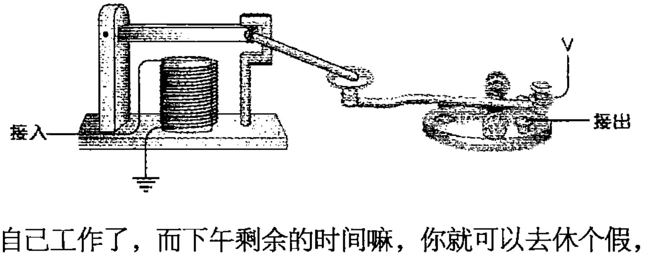
莫尔斯的电报机在某种程度上要胜过其他的设计，因为它对线路没有苛刻的要求。当你连好电键和发声器之间的线路后，它们一般都可以正常工作。而其他的电报系统对线路的要求就没这么简单了。但是正如我上一章提到的那样，这种电报机最大的问题就是长导线所带来的电阻。尽管一些电报线路使用高达 300 伏的电压，而使有效距离能够超过 300 英里，但是线路还是不能无限延长。

显然，设置一个中继系统是解决该问题的一个方案。每隔 200 英里左右，为一个工作人员装配好发声器和电键，他就可以接收信息，然后再把它转发出去。

现在，想象你已经被电报公司聘用，成为中继系统的一部分。他们把你扔在纽约和加利福尼亚之间的一个无名之地，让你在一个只有一桌一椅的小屋里工作。一条导线从东面的窗户伸进来，连接到发声器上。而你的电报机电键连到电池上，最后线路从西窗伸出去。你的职责就是接收从纽约发来的信息，然后转发它们，最终使它们到达加利福尼亚。

开始时，你喜欢接收完一条完整的信息后再把它转发。首先，根据发声器发出的滴答声，将字母记下来；当信息接收完毕时，再开始用你的电键来发送。最后，你终于掌握了诀窍，在听到滴答声的同时就可以发送信息，不需要再把信息记录下来了。这节约了不少时间。

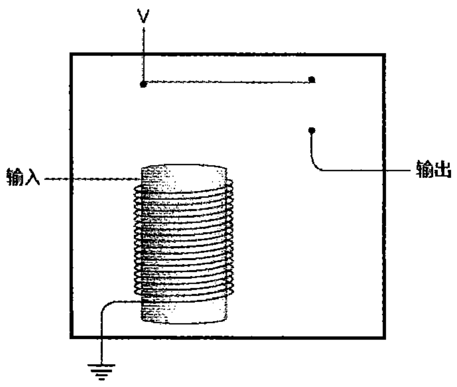
有一天，当你正在转发信息时，瞄了瞄发声器上那根上蹿下跳的横杠，又看了看在电键上上下翻飞的手指。然后你就这样来来回回地瞅来瞅去，恍然发现发声器上下跳跃的节奏与电键是一致的。因此你就去外面找了根小木棍，然后用木棍和一些细绳把发声器和电键连接到了一起，如下图所示。



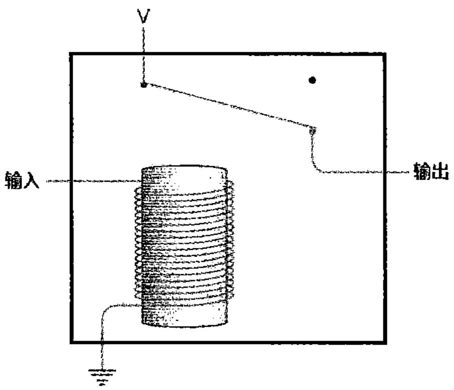
现在，设备可以自己工作了，而下午剩余的时间嘛，你就可以去休个假，钓个鱼。

这真是个有趣的想法，但是事实上，萨缪尔·莫尔斯在早些时候就已经领会了这个设备的概念。刚刚我们发明的这个设备称做“继电器”。继电器与发声器很像，传进来的电流驱动电磁铁拉动金属杠，金属杠同时又作为一个开关的组成部分，而这个开关连接着电池和输出线路。通过这种方法，输入的比较弱的电流就被“放大”成了较强的输出电流。

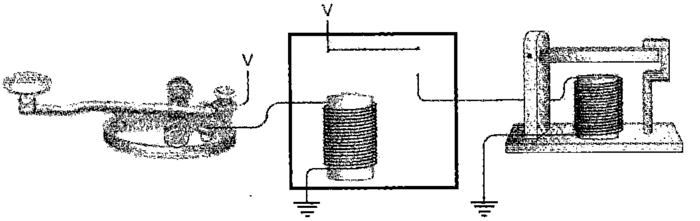
继电器的示意图如下。



当输入的电流触发了电磁铁，电磁铁把一个弹性金属条吸附下来，就像闭合了开关一样，使电流可以从接口输出。



因此，把一个电报机电键、一个继电器，还有一个发声器连接好，差不多就是下图的这个样子。



继电器是一个意义非凡的设备。当然，它是一个开关，但是这个开关的闭合和断开并不是由人来操纵的，而是由电流控制的。你可以通过它来完成一些不可思议的事情。实际上，使用它，你甚至可以装配好一台近乎完整的计算机来！

不错，继电器是一项如此出色的发明，以至于电报博物馆也为它留有一席之地。让我们悄悄拿起一台，藏在外套里，飞快地从警卫身边溜过去。这台继电器用起来将非常方便。不过我们在使用它之前，还要学会如何计数。

7

我们的十个数字

人们很容易理解，语言只不过是一种编码。我们之中的许多人在学校里至少都学过一门外语。所以我们知道，英文中的“cat”（猫）在其他语言中可以写做 gato、chat、Katze、KOIIIK 或 *kátta*。

然而，数字似乎并不是那么容易随文化的不同而改变。不论我们说什么语言，或对数字使用什么样的发音，在这个星球上几乎所有人都用以下方式来书写数字：

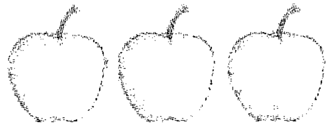
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

这难道不就是数学被称做“通用语言”的理由么?

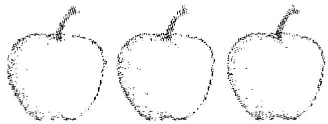
数字当然是我们平常所能接触到的一种最抽象的编码。当我们看到数字：

3

不需要立刻将它与任何事物联系起来。我们可能会联想到 3 个苹果或者 3 个别的什么东西。但是当我们从上下文中得知该数字表示的是某个小孩的生日、电视频道、曲棍球赛的得分或蛋糕食谱中面粉的杯数时，也能够像认为它代表 3 个苹果时一样自然。因为数字最开始产生时就很抽象，所以对于我们来说，理解这样一个问题会有一点困难。这个问题就是如下数量的苹果：



并不一定要用符号“3”来表示。本章及下一章中的很大一部分内容将专门用来说明如下这些苹果：



同样可以用“11”来表示。

首先让我们遗忘数字 10 原有的那些特性。大多数文明都是建立在以 10 为基数的数字系统上的（有的时候是以 5 为基数），这种情况并不奇怪。最开始，人们用自己的手指来计数。如果我们人类有 8 个或 12 个手指，那么我们的计数方式就会和现在有所不同。英语中 Digit（数字）这个词同时也有手指、脚趾的意思，并且还有数字的意思，这并不是巧合。而 five（五）和 fist（拳头）这两个单词的拥有相同的词根也是同样的道理。

在这个意义上，以 10 为基数或使用十进制数字系统完全是随意的。而且，英文中还对基于十的数字赋予了几乎神奇的意义，并且给了它们特有的名字：十个一年是一个十年（decade）；十个十年是一个世纪（century）；十个世纪就是一个千年（millennium）。一千个一千就是一个百万（million）；一千个百万就是一个十亿（billion）。以下都是 10 的各次幂。

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$（千）

$10^4 = 10,000$

$10^5 = 100,000$

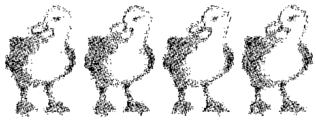
$10^6 = 1,000,000$（百万）

$10^7 = 10,000,000$

$10^8 = 100,000,000$

$10^9 = 1,000,000,000$（十亿）

大多数历史学家认为数字最初起源于对事物的计数，例如：人数、财产或商业交易的计数等。举个例子，如果有一个人有四只鸭子，用图画表示为：



后来，专门负责画鸭子的这个人会想："为什么我非得要画四只鸭子？为什么我不画一只鸭子再用划线或其他事物来表示有四只鸭子呢？"

然后直到有一天，出现了一个人，他拥有 27 只鸭子，这种划线的方法就显得很可笑了。

有人说："必须想一种更好的方法。"于是一个数字系统就诞生了。

所有早期的数字系统中，只有罗马数字沿用到了今天。我们可以在表盘上、纪念碑和雕像的日期上、一些书的页码中，或者在条款的概述中看到罗马数字，而令人最烦恼的就是电影的版权声明（必须足够快地破译位于演职人员表末尾的"MCMLIII"才能知道这部影片是哪一年发行的）。

27 只鸭子用罗马数字表示为：

这个概念很容易理解：X 表示 10 个划线，V 表示 5 个划线。

沿用到今天的罗马数字符号有：

I V X L C D M

这里，字母 I 表示 1，可以看做是一个划线或者一根伸出的手指。字母 V 像一只手，表示 5。两个 V 是一个 X，代表数字 10。L 是 50。C 来自单词 centum，表示 100。D 是 500。最后一个，M 来自于拉丁文 mille，意为 1000。

尽管我们可能不会认同，但在很长一段时间内，罗马数字被人们看做是易于加减的，这也是为什么罗马数字在欧洲作记账之用一直沿用到今天。实际上，两个罗马数字相加的时候只不过是利用几个规则将两个数合并，这个规则是：五个 I 是一个 V，两个 V 是一个 X，五个 X 是一个 L，以此类推。

但是用罗马数字进行乘法和除法却很复杂。很多其他早期数字系统（像古希腊数字系统）和罗马数字系统相似，它们在用于复杂运算方面同样也存在一定的不足。尽管古希腊人发明的非凡的几何学至今仍然是高中生的一门课程，但古希腊人并不是以代数而著称的。

如今我们所用的数字系统通常被称为阿拉伯数字，也可以称为印度-阿拉伯数字系统。它起源于印度，被阿拉伯数学家带入欧洲。其中最著名的就是波斯数学家穆罕默德·伊本穆萨·奥瑞兹穆（根据这个人的名字衍生出英文单词“algorithm”，算法），他在公元 825 年左右写了一本关于代数学的书，其中就用到了印度的计数系统。其拉丁文译本可追溯到公元 1120 年，它对加速整个欧洲从罗马数字到阿拉伯数字系统的转变有着重要影响。

阿拉伯数字系统不同于先前的数字系统，体现在以下三点。

- 阿拉伯数字系统是和位置相关的。也就是说，一个数字的位置不同，其代表数量也不同。对于一个数而言，其数字的位置和数字的大小一样，都是很重要的（但实际上，数字的位置更重要）。100 和 1,000,000 这两个数中都只有一个 1，而我们知道，1,000,000 要远远大于 100。
- 实际上在早期的数字系统中也有一点是阿拉伯数字系统所没有的，那就是用来表示数字 10 的专门的符号。而在我们现在使用的数字系统中是没有代表 10 的专门符号的。
- 另一方面，实际上阿拉伯数字也有一点是几乎所有早期数字系统所没有的，而这恰恰是一个比代表数字 10 的符号还重要得多的符号，那就是 0。

是的，就是 0。小小的一个零无疑是数字和数学史上最重要的发明之一。它支持位置

计数法，因此可以将 25、205 和 250 区分开来。0 也简化了与位置无关的数字系统中的一些非常复杂的运算，尤其是乘法和除法。

阿拉伯数字的整体结构可以以我们读数字的方式来展现。以 4825 为例，我们读做“四千八百二十五”，意思就是：

四千
八百
二十
五

或者，我们也可以将此结构以如下写法写出：

$$4825 = 4000 + 800 + 20 + 5$$

或者，对其进一步分解，可以将数字写做：

$$\begin{aligned} 4825 = {} & 4 \times 1000 + \\ & 8 \times 100 + \\ & 2 \times 10 + \\ & 5 \times 1 \end{aligned}$$

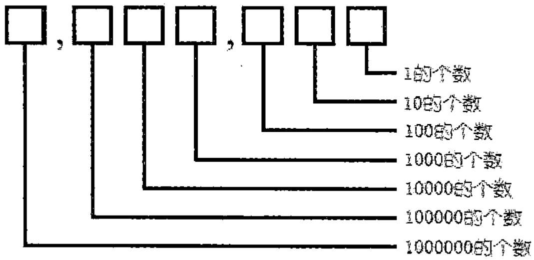
或者，以 10 的整数次幂的形式来表示：

$$\begin{aligned} 4825 = {} & 4 \times 10^3 + \\ & 8 \times 10^2 + \\ & 2 \times 10^1 + \\ & 5 \times 10^0 \end{aligned}$$

记住任何数的 0 次幂都等于 1。

一个多位数中的每一位都有其各自特定的意义，如下图所示。这 7 个方格能代表 0～9,999,999 中的任何一个数字。

每个位置代表 10 的一个整数次幂。我们不需要一个专门的符号来表示数字“10”，因为我们可以将 1 放在不同的位置，并用 0 作为占位符。



另一个好处就是，以同样的方式将数字置于小数点右边可以表示分数。数字 42,705.684 就是：

$$4 \times 10,000 +$$
$$2 \times 1000 +$$
$$7 \times 100 +$$
$$0 \times 10 +$$
$$5 \times 1 +$$
$$6 \div 10 +$$
$$8 \div 100 +$$
$$4 \div 1000$$

这个数也可以写为不含除法的形式，如下：

$$4 \times 10,000 +$$
$$2 \times 1000 +$$
$$7 \times 100 +$$
$$0 \times 10 +$$
$$5 \times 1 +$$
$$6 \times 0.1 +$$
$$8 \times 0.01 +$$
$$4 \times 0.001$$

或用 10 的幂的形式来表示：

$$4 \times 10^4 +$$
$$2 \times 10^3 +$$
$$7 \times 10^2 +$$
$$0 \times 10^1 +$$
$$5 \times 10^0 +$$

$$6 \times 10^{-1} +$$
$$8 \times 10^{-2} +$$
$$4 \times 10^{-3}$$

注意，10 的幂指数是如何减小到 0 再变为负数的。

我们知道，3 加 4 等于 7。类似地，30 加 40 等于 70，300 加 400 等于 700，3000 加 4000 等于 7000。这就是阿拉伯数字的“闪光”之处。任何长度的十进制数相加时，只要根据一种方法将问题分成几步即可，而每个步骤最多只是将两个一位数字相加而已。这就是为什么以前有人会强迫你记住加法表的原因。

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

从最上边的一行和最左边的一列分别找出要相加的两个数字，这一行与这一列的交叉点就是所要得到的和。例如，4 加 6 等于 10。

同样，当你想将两个十进制数相乘的时候，方法可能稍微复杂些，但是你仍然只需要将问题分解成几步，做加法和一位数的乘法即可。在你的小学时代你一定也被要求必须记住下面的乘法表。

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45

续表

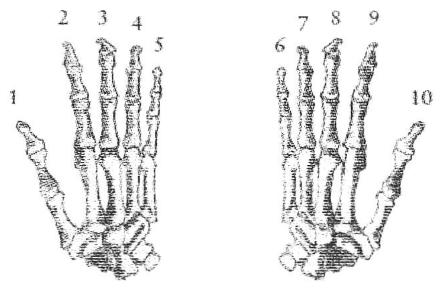
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

位置计数系统的好处并不在于它有多么好用，而在于对非十进制的系统而言，它仍然是易于实现计数的。我们现有的计数系统并不适用于每种情况。以 10 为基数的数字系统最大的问题是它对于卡通人物没有任何意义。大多数卡通人物每只手（或爪子）只有 4 根手指，因此它们需要一个以 8 为基数的计数系统。而有意思的是，许多我们在十进制数中所了解到的知识同样适合卡通朋友们所钟爱的八进制计数系统。

8

十的替代品

对于我们人类而言，10 是一个非常重要的数字。10 是我们大多数人拥有的手指或脚趾的数目，当然我们也希望所有人的手指和脚趾都是 10 个。因为手指非常便于计数，于是我们人类已经适应了这个以 10 为基数的数字系统。



就如前面章节中所提到的，我们现在所用的数字系统是基于 10 的数字系统的，或称为十进制。我们已经非常习惯这个数字系统了，因此起初也很难再构想出其他的数字系统。的确，当我们看到数字 10 的时候，我们不自觉地就会想到这个数字代表了下面这么多只鸭子：

但是，数字 10 之所以指的是这么多只鸭子，其唯一理由就在于这些鸭子的数目与我们的手指数目相同。如果人类的手指不是 10 根，我们数数的方式就会有所不同，那么 10 就会是另外一个含义。同样，数字 10 可以代表这么多只鸭子：

10 = 

或者是这么多只的鸭子：

10 = 

甚至可以是这么多只的鸭子：

10 = 

当我们认识到，10 可以表示两只鸭子，我们就可以解释开关、导线、灯泡和继电器（进一步推广到计算机）是如何表示数字的了。

如果人类像卡通人物那样每只手有 4 根手指会怎样呢？我们可能就不会想到建立一个以 10 为基数的数字系统。相反我们会自然而然地、不可避免地想到建立一个以 8 为基数的数字系统。我们就不会称这个系统为十进制数字系统，而称之为八进制数字系统。

如果我们的数字系统是以 8 为基础而建立的，我们就不需要如下这个符号：

9

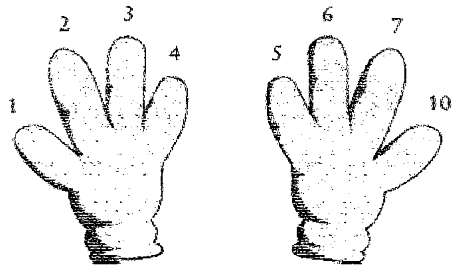
将这个符号给卡通人物看的话，你会得到这样的反应：“这是什么？它代表什么？”如果继续仔细考虑一下，你会发现我们连这样的一个符号也不会需要：

8

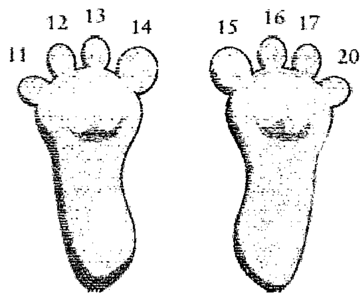
在十进制中，10 没有特定的符号，因此在八进制中，同样也没有表示 8 的特定符号。

十进制中我们的计数方式是：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，然后是 10。在八进制中数字系统中计数方式是：0、1、2、3、4、5、6、7，而后是什么呢？我们已经将符

号用完了。在这里唯一有意义的只有 10，而在这里的正确答案恰恰就是 10。在八进制中，7 之后的下一个数字是 10。但是这个“10”代表的并不是人类手指的数量。在八进制中，“10”代表的是卡通人物手指的数量。



如果继续用脚趾数下去的话，就是这样：



使用非十进制的数字系统时，你可以将“10”读作“一零”，这样可以避免一些混淆。类似地，“13”读作“一三”，“20”读作“二零”。要想真正避免混淆，可以将“20”读作“基于 8 的数二零”或“八进制二零”。

尽管已经用完了所有的手指和脚趾，但我们仍能够用八进制继续数下去。这与十进制基本相同，但是我们跳过了数字 8 和 9。当然，相同数字所代表的数量是不同的：

0，1，2，3，4，5，6，7，10，11，12，13，14，15，16，17，20，21，22，23，24，25，26，27，30，31，32，33，34，35，36，37，40，41，42，43，44，45，46，47，50，51，52，53，54，55，56，57，60，61，62，63，64，65，66，67，70，71，72，73，74，75，76，77，100……

这里最后一个数字我们读做“一零零”。这是卡通人物手指的数量自身相乘所得的结果。