$$\begin{array}{r} 253 \\ -\ 176 \\ \hline 77 \end{array}$$

如何才能通过一连串逻辑门来实现这个反逻辑呢？

然而，我们并不打算这样做。相反，我们打算用一个小技巧来让减法不涉及借位。这会使波洛尼厄斯[1]（既不是欠债人也不是出借人）满意，我们其他人也一样。此外，由于减法与计算机中以二进制编码的存储有关，详细地了解减法也是很重要的。

为了便于表达，将进行减法的两个数分别用被减数（minuend）和减数（subtrahend）表示。从被减数中减去减数，得到的结果叫做差（difference）。

$$\begin{array}{r} \text{被减数} \\ -\quad \text{减数} \\ \hline \text{差} \end{array}$$

为了避免借位，首先要从 999 中减去减数，而不是从原来的被减数中减去减数。

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\ 176 \\ \hline 823 \end{array}$$

由于操作数是三位数，所以这里使用 999。如果操作数是 4 位，则用 9999。从一串 9 中减去一个数叫做对 9 求补数。176 对 9 的补数是 823。反之亦然：823 对 9 的补数是 176。这样的好处就是无论减数是多少，计算对 9 的补数都不需要借位。

计算出减数对 9 的补数后，将补数与原来的被减数相加：

---

1 波洛尼厄斯是莎士比亚著名戏剧《哈姆莱特》中的一位世故的御前大臣，他在第一幕第三场向他即将离家外出的儿子说了一大段告诫的话，其中有一句："不要向人告贷，也不要借钱给人。因为向人告贷的结果，容易养成因循懒惰的习惯；而把债款放了出去，往往不但丢了本钱，而且还失去了朋友。"后来，美国经济学家范里安在其所著的《微观经济学：现代观点》一书中使用了"波洛尼厄斯"一词，该词就成为了经济学中的一个概念。经济学在研究消费者进行跨时期的消费行为时，把这种既不向别人借钱、也不借钱给别人的状态叫作"波洛尼厄斯点"。因此，这里的"波洛尼厄斯"也就表示既不向别人借钱、也不借钱给别人的人。——译者注

$$\begin{array}{r} 253 \\ +\ 823 \\ \hline 1076 \end{array}$$

最后再将结果加 1，并减去 1000。

$$\begin{array}{r} 1076 \\ +\ 1 \\ -\ 1000 \\ \hline 77 \end{array}$$

到此，我们就得到了结果。答案与先前的相同，而且没有用到借位。

为什么这种方法行得通呢？原题目是这样的：

$$253 - 176$$

在这个式子中加上一个数再减去这个数，结果是相同的。因此先加上 1000，再减去 1000：

$$253 - 176 + 1000 - 1000$$

这个式子与下式等价：

$$253 - 176 + 999 + 1 - 1000$$

然后用以下方式将数字重新组合：

$$253 + (999 - 176) + 1 - 1000$$

这个式子与刚才描述过的用 9 的补数进行的计算是相同的。我们用两个减法和两个加法来替代一个减法，而在这个过程中避免了烦琐的借位。

如果减数大于被减数会怎么样呢？例如以下问题：

$$\begin{array}{r} 176 \\ -\ 253 \\ \hline ??? \end{array}$$

通常遇到这个问题时你可能会说："这里减数大于被减数，因此要将减数和被减数交换来执行减法，然后给结果取个相反数。"你可能在脑子里将这两个数交换，而写出这样

的答案：

$$\begin{array}{r} 176 \\ -\ 253 \\ \hline 77 \end{array}$$

如果希望求解这个问题而不使用借位的话，就要采用与之前稍微不同的方法。首先要像前面一样，用 999 减去减数 253，计算出对 9 的补数：

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\ 253 \\ \hline 746 \end{array}$$

把该数对 9 的补数与被减数相加：

$$\begin{array}{r} 176 \\ +\ 746 \\ \hline 922 \end{array}$$

在前面的例子中，下一步应该加 1，并减去 1000 来得到最终结果。但是在这里，这种方法并不适用。因为你会遇到 923 减去 1000 的情况，这又导致了借位。

由于我们之前已经加了 999，这里再减去 999：

$$\begin{array}{r} 922 \\ -\ 999 \\ \hline ??? \end{array}$$

到这里，我们会意识到这个问题的结果是负数，因此需要将减数与被减数交换，用 999 减去 922。这里没有用到借位，结果与我们期望的相同：

$$\begin{array}{r} 922 \\ -\ 999 \\ \hline -\ 77 \end{array}$$

同样的技巧可以用于二进制数中，而且实际上这要比十进制数简单。让我们一起来看看该如何操作。

原来的减法题目是：

$$\begin{array}{r} 253 \\ -\ 176 \\ \hline ??? \end{array}$$

将这些数字转化为二进制数，问题变为：

$$\begin{array}{r} 11111101 \\ -\ 10110000 \\ \hline ???????? \end{array}$$

第一步，用 11111111（即 255）减去减数：

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ -\ 10110000 \\ \hline 01001111 \end{array}$$

当计算十进制数减法的时候，减数是从一串 9 中减去的，结果称为 9 的补数。在二进制数减法中，减数是从一串 1 中减去的，结果称为 1 的补数。但是请注意，我们在求对 1 的补数时并不需要用到减法。在求对 1 的补数时，只需将原来的二进制数中的 1 变为 0，将 0 变为 1 即可。因此对 1 求补数有时也会称为相反数（negation）或反码（inverse）。这里你可能会想起第 11 章中的反向器，它的作用就是将 0 变为 1，将 1 变为 0。

第二步，将减数对 1 的补数与被减数相加：

$$\begin{array}{r} 11111101 \\ +\ 01001111 \\ \hline 101001100 \end{array}$$

第三步，将上式所得结果加 1：

$$\begin{array}{r} 101001100 \\ +\qquad\quad 1 \\ \hline 101001101 \end{array}$$

第四步，减去 100000000（即 256）：

$$\begin{array}{r} 101001101 \\ -\ 100000000 \\ \hline 1001101 \end{array}$$

结果就等于十进制数的 77。

我们把这两个数颠倒位置后再做一遍。在十进制中，减法题目对应于：

$$\begin{array}{r} 176 \\ -\ 253 \\ \hline ??? \end{array}$$

而用二进制表示为：

$$\begin{array}{r} 10110000 \\ -\ 11111101 \\ \hline ???????? \end{array}$$

第一步．用 11111111 减去减数，得到对 1 的补数：

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ -\ 11111101 \\ \hline 00000010 \end{array}$$

第二步，将减数对 1 的补数与被减数相加：

$$\begin{array}{r} 10110000 \\ +\ 00000010 \\ \hline 10110010 \end{array}$$

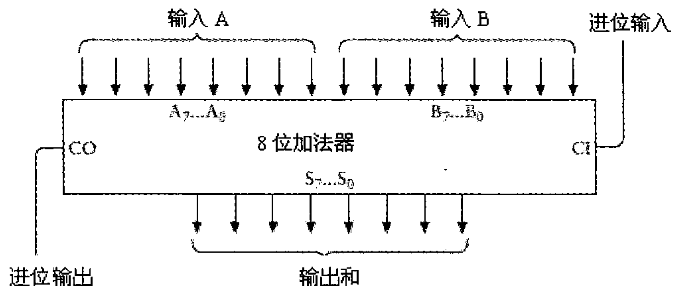
现在我们要用某种方法在结果中减去 11111111。当减数小于被减数的时候，我们将结果加 1 再减 100000000 来完成计算。但是你无法在不借位的情况下做到这一点。所以，我们先用 11111111 减去所得结果：

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ -\ 10110010 \\ \hline 01001101 \end{array}$$

这里又一次用到了将各位取反来求得结果的方法，但是这个结果是 77，而真正的答案应该是–77。

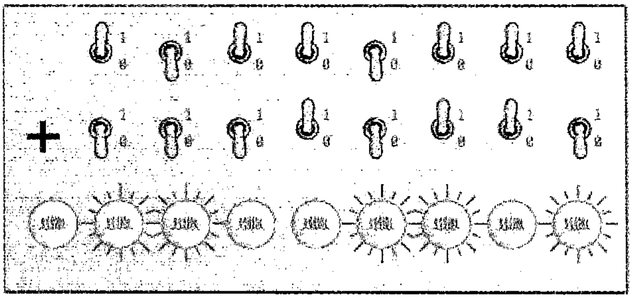
到这里，我们已经有了足够的条件来改造上一章所搭建的加法器，并让它像实现加法一样来实现减法运算。为了不让问题太复杂，这个新的加/减法器只执行在减数小于被减数的减法操作，即结果为正数的操作。

该加法器的核心是由逻辑门集成的 8 位全加器。



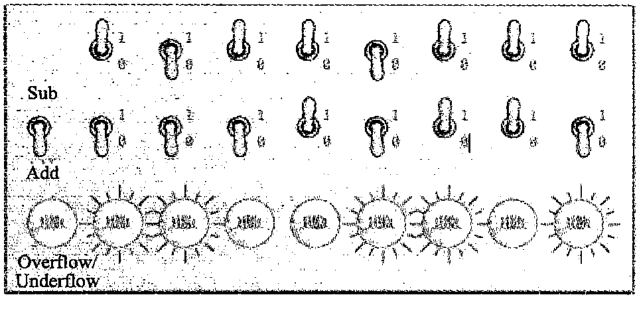
你可能还记得，输入 $A_0 \sim A_7$ 及 $B_0 \sim B_7$ 与两排分别表示两个要相加的 8 位二进制数的开关相连。进位输入接地。$S_0 \sim S_7$ 与表示结果的 8 个灯泡相连。由于这个加法有可能得到 9 位数值，进位输出端也连接了一个灯泡。

控制面板示意如下图所示。



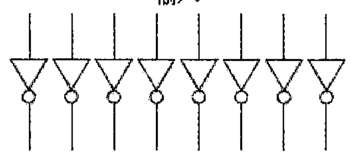
在上图中，开关所表示的是 183（即 10110111）与 22（即 00010110）相加，结果如灯泡所示为 205（即 11001101）。

8 位加/减法器所用的新面板较从前做了些许的改动。它增设了一个开关，用以选择做加法还是做减法。

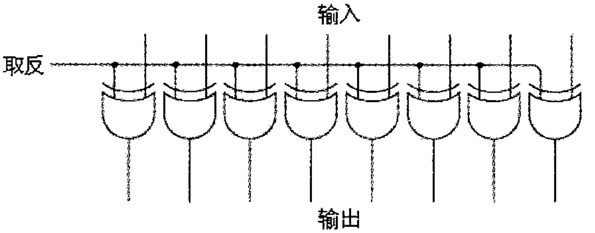


如上图所示，这个开关向下断开时表示选择加法运算，反之向上接通则表示选择减法运算。此外，右侧的 8 个灯泡用于表示计算结果。这里，第 9 个灯泡表示“上溢/下溢”。这个灯泡表明了正在计算的数字是一个不能用 8 个灯泡来表示的数字。如果在加法中得到了大于 255（上溢，overflow）或在减法中得到了负数（下溢，underflow）这个灯泡就会发光。当减数大于被减数的时候，就会得到一个负数。

加法器中新增的主要部分就是一个用来求 8 位二进制数对 1 补数的电路。之前提到，二进制数对 1 求补数相当于对其每位取反，因此我们计算 8 位二进制数补数的时候可以简单地应用 8 个反向器。



问题是，该电路只会对输入求反，而我们要的是一台既能做加法又能做减法的机器，因此就要求该电路当且仅当进行减法运算时才实现反转。电路可以改造为如下图所示。

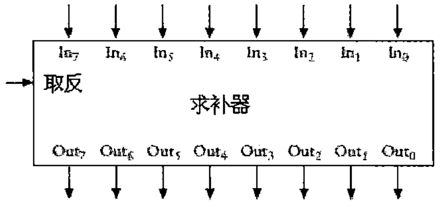


标记为“取反”的信号将被输入到每一个异或门中。回想一下异或门的工作方式，如下表所示。

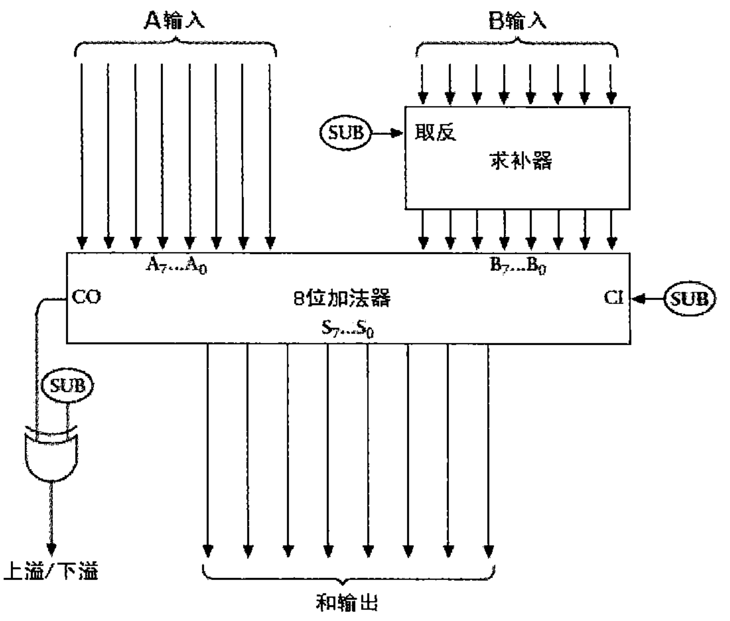
XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

因此，如果“取反”信号是 0，则 8 个异或门输出与输入相同。例如，如果输入是 01100001，那么输出也为 01100001。如果“取反”信号为 1，则输出信号反置。例如，如果输入为 01100001，输出则为 10011110。

将 8 个异或门合并起来画成一个器件，称为求补器（One's Complement），如下所示。



将一个求补器，一个 8 位二进制加法器和一个异或门做如下连接。



注意，这里三个信号都标识为“SUB”，这就是加/减法转换开关。当该信号为 0 的时候，其进行的是加法运算，为 1 时进行的则是减法运算。在减法中，输入 B（第二排开关）在送入加法器之前，需先通过求补电路进行取反。此外，在做减法时，我们通过设定 CI（进位输入）为 1 来使得结果加 1。而在加法中，求补电路将不起作用，且输入 CI 为 0。

加法器的 SUB 信号和 CO（进位输出）输出作为异或门的输入来控制表示上溢/下溢的灯泡。如果 SUB 信号为 0（表示进行加法运算），则当加法器 CO 输出为 1 时灯亮，意思是加法计算结果大于 255。

当进行减法运算的时候，如果减数（输入 B）小于被减数（输入 A），这时加法器的

CO 输出为 1。这表示减法的最后一步要减去 100000000。也就是说减数要大于被减数，结果为负。上面所示器件现在还不能表示负数。因此，上溢/下溢指示灯仅在加法器的 CO 输出为 0 时才会亮起。

你应该会庆幸自己问了这个问题："减法该如何实现呢？"

本章一直在谈论负数，但是并没有提到负数在二进制中是如何表示的。你可能设想二进制会同十进制一样应用传统的负数符号。例如，–77 在二进制中为–1001101。这样做当然可以，但是应用二进制数的目的恰恰就在于只希望用 0 和 1 来表示所有的东西，当然也包括负号。

当然，你可以简单地用一个二进制位来表示负号，当这一位为 1 的时候就表示负数，为 0 则表示正数，尽管这样也是可行的，但还远远不够。还有另一种方法可以解决负数的表示问题，而且它还可以很轻松地让负数和正数相加。这种方法的缺点是必须提前算一下可能遇到的所有数字的位数。

让我们来想一想。通常用来表示正数和负数的方法，其好处就在于能表示所有的正数、负数。我们将 0 想象为这个无限延伸的序列的中点。这个序列中正数沿着一个方向延伸，而负数则按照另一个方向延伸：

…–1000000，–999999…–3，–2，–1，0，1，2，3…999999，1000000…

但是，如果我们并不需要无限大或无限小的数，而且在开始的时候我们就可以预知所使用的数字的范围，那情况就有所不同了。

以支票账户为例，这里人们通常会遇到负数。假设我的账户余额不超过 500 美元，并且银行给了我们 500 美元的无息预支额度，意思就是账户余额数值应该是一个在 499 美元到–500 美元之间的数。假设我们不会一次取出 500 美元，我们也不会支出多于 500 美元的金额，这里我们用到的只是美元，不涉及美分。

这些假设表明账户能处理的额度是介于–500 到 499 之间，总共 1000 个数。这个约束说明只用三位十进制数，且不用负号就可以表示所有需要的数字。我们并不需要用到从 500 到 999 之间的正数，因为我们所需要的数的最大值为 499。因此从 500 到 999 的三位数可以用来表示负数。具体情况如下：

用 500 表示–500

用 501 表示–499

用 502 表示–498

……

用 998 表示–2

用 999 表示–1

用 000 表示 0

用 001 表示 1

用 002 表示 2

……

用 497 表示 497

用 498 表示 498

用 499 表示 499

也就是说，以 5，6，7，8 或 9 开头的三位数实际上表示的都是负数，而不是把数字写成这样：

–500，–499，–498 … –4，–3，–2，–1，0，1，2，3，4 … 497，498，499

用这种表示法，我们可以将它们写成：

500，501，502 … 996，997，998，999，000，001，002，003，004 … 497，498，499

注意，这就形成了一个循环排序。最小的负数（500）看起来像是最大正数（499）的延续。而数字 999（实际上是–1）是比 0 小 1 的第一个负数。如果我们在 999 上加 1，通常会得到 1000。由于我们处理的是三位数，这个结果实际上就是 000。

这种标记方法称为 10 的补数（ten's complement）。为了将三位负数转化为 10 的补数，我们用 999 减去它再加 1。也就是说，对 10 求补数就是对 9 的补数再加 1。例如想要得到–255 对 10 的补数，用 999 减去 255 得到 744，然后再加 1，得到 745。

你可能听说过："减一个数就等于加一个负数。"你可能会回答："实际上还是减去了这个数。"然而，利用 10 的补数，我们将不会再用到减法。所有的步骤都用加法来进行。

假设你有一个余额为 143 美元的支票账户。你开了一张 78 美元的支票，也就意味着要将一个值为负的 78 美元加到 143 美元上。–78 对 10 的补数为 999–078+1，即 922。因此新余额为 143 美元+922 美元，相当于 65 美元（忽略溢出）。如果我们又开了一张 150 美元的支票，需要在余额上加上–150，–150 对 10 求补数为 850。因此先前的余额加上 850 等于 915，就是新的账户余额。而这个余额实际上是–85 美元。

这样的机制在二进制中被称为 2 的补数。以 8 位二进制数为例。范围为 00000000～11111111，对应十进制中的 0～255。但是如果你还想表示负数的话，则以 1 开头的每个 8 位数都表示一个负数，如下表所示。

二进制数	十进制数
10000000	–128
10000001	–127
10000010	–126
10000011	–125
…	…
11111101	–3
11111110	–2
11111111	–1
00000000	0
00000001	1
10000010	2
…	…
01111100	124
01111101	125
01111110	126
01111111	127

现在所表示的数的范围是–128～+127。最高有效位（最左位）作为符号位（sign bit）。符号位中，1 表示负数，0 表示正数。

为了计算 2 的补数，则首先要计算 1 的补数，然后再加 1。这等价于将每位取反再加 1。例如，十进制数 125 写为二进制为 01111101。为了表示–125 的对 2 的补数，首先将 01111101 的每位取反，得到 10000010，再加 1，得到 10000011。可以根据前面的表格核实一下结果。用同样的步骤，每位取反再加 1，可以将数值还原。

这个系统为我们提供了一种不用负号就能表示正、负数的方法。同样也让我们自由地将正数和负数用加法法则相加。例如，将与–127 和 124 等价的两个二进制数相加。利用上面的表格，可以简单地写为：

```
  10000001
+ 01111100
----------
  11111101
```

结果等于十进制的–3。

要注意的是，这里涉及了上溢和下溢情况，即结果大于 127 或小于–128。例如，将 125 与它自身相加：

```
  01111101
+ 01111101
----------
  11111010
```

由于最高位为 1，结果代表一个负数，相当于十进制的数–6。将–125 与它本身相加也会出现同样的情况：

```
  10000011
+ 10000011
----------
 100000110
```

在一开始，我们规定所处理的数值为 8 位，因此最左位被忽略。右边 8 位相当于十进制的+6。

一般来说，如果两个操作数的符号相同，而结果的符号与操作数的符号不相同，这样的加法就是无效的。

现在，二进制数可以有两种不同的使用方法。二进制数可以是有符号的，也可以是无符号的。无符号的 8 位二进制数所表示的范围是 0～255。有符号的 8 位二进制表示的范围是–128～127。无论是有符号的还是无符号的，数字本身是无法显示的。例如，如果有一个人问："有一个 8 位二进制数，值为 10110110。它相当于十进制的多少？"你必须先问："它是有符号数还是无符号数？它可能为–74 或者 182。"

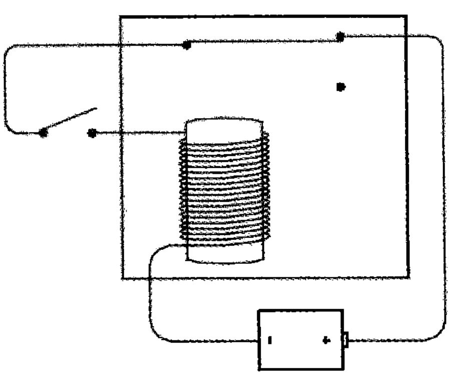
这就是二进制数的麻烦之处，它们只是一些 0 和 1，本身并没有任何含义。

14

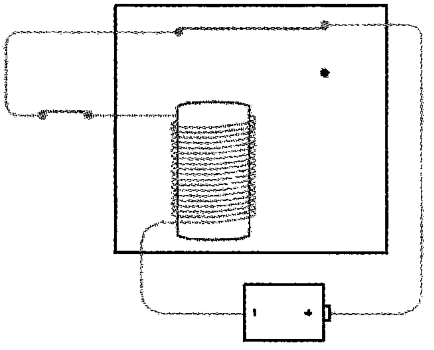
反馈与触发器

电可以让物体运动，这个道理人人都懂。只要稍微扫视一下我们的房间就会发现：很多电器中都装了电动机，比如钟表、电扇、食品加工器，以及 CD 播放器等。电同样可以使扩音器中的磁芯振动，正因为如此我们的音响设备、电视机才能够产生声音，播放语音和音乐。有一类设备或许能很清晰地阐释电能驱使物体运动的最简单也最具代表性的方式，然而由于这类设备正在被能够实现同样功能的电子器件逐步取代，它们正在迅速地消失。在我看来，最令人赞叹的例子应该算是电子蜂鸣器和电铃了。

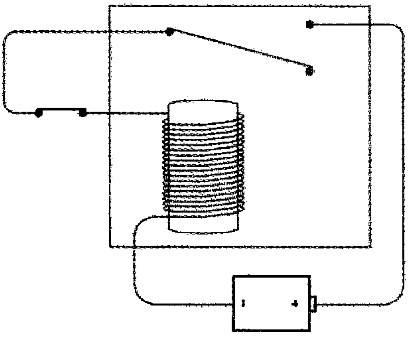
将继电器、电池、开关按如下形式连接。



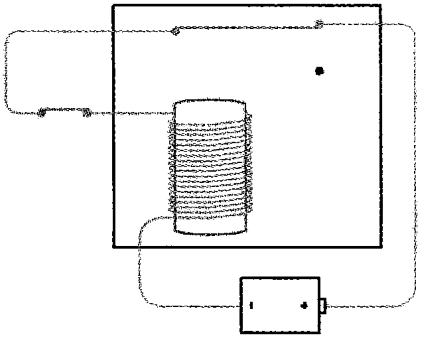
如果你认为这个系统看起来有点古怪，说明你还没有发挥出想象力。或许以前我们没见过采用这种连接方式的继电器，因为我们通常所见过的继电器，其输入和输出是分开的，而这里却构成了一个回路。当开关闭合后，电路就连通了。



连通的电路使得电磁铁把金属簧片拉了下来。

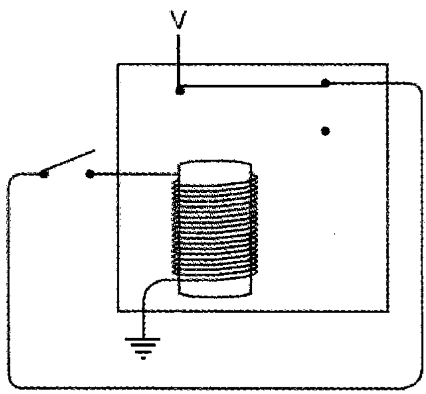


当金属簧片的位置变化时，电路不再连通，电磁铁不再具有磁性，金属簧片又弹回原位。

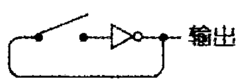


如此一来，电路又一次连通了。从整个过程来看：开关一旦闭合，金属簧片就会上下跳动——电路也会随之连通或断开——声音也就会随之发出。如果金属簧片发出了一种刺耳的声音，这套系统就成为了一个蜂鸣器。如果金属簧片前端是一把小锤子，旁边只要放上一个锣，就构成了一个电铃。

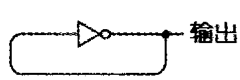
有两种方法可以使继电器连接成为一个蜂鸣器，下面再给出一种方法的描述，在示意图中包含了一个标准电压符号和一个接地符号。



看到这幅图你或许立刻想起了第 11 章介绍过的反向器，因此电路可以简化为如下图所示。



正如你所记得的那样，当反向器的输入是 0 的时候，它的输出就为 1；而当其输入为 1 时，输出就为 0。电路中的开关一旦闭合，反向器中的继电器就会在连通与断开这两种状态之间反复交替。你也可以将电路中的开关省去，这样就可以使反向器连续地工作，如下所示。



这幅图似乎在表达着一种矛盾的逻辑，反向器的输出与其输入是相反的，但是在这里，输出同时又是输入！然而，我们要牢牢记住，反向器在本质上就是一个继电器，而继电器将状态取反以得到另一个状态是需要一点点时间的。所以，即使输入和输出是相同的，输出也会很快地改变，成为输入的相反状态（当然，输出随即也会很快改变输入，