13 | 魔数 0x5f3759df

2017-11-14 陈皓

下列代码是在《雷神之锤 III 竞技场》源代码中的一个函数（已经剥离了 C 语言预处理器的指令）。其实，最早在 2002 年（或 2003 年）时，这段平方根倒数速算法的代码就已经出现在 Usenet 与其他论坛上了，并且也在程序员圈子里引起了热烈的讨论。

我先把这段代码贴出来，具体如下：

复制代码

```
float Q_rsqrt( float number )
{
    long i;
    float x2, y;
    const float threehalfs = 1.5F;

    x2 = number * 0.5F;
    y  = number;
    i  = * ( long * ) &y; // evil floating point bit level hacking
    i  = 0x5f3759df - ( i >> 1 );  // what the fuck?
    y  = * ( float * ) &i;
```

```
    return y;
}
```

这段代码初读起来，我是完全不知所云，尤其是那个魔数 0x5f3759df，根本不知道它是什么意思，所以，注释里也是 What the fuck。今天的这篇文章里，我主要就是想带你来了解一下这个函数中的代码究竟是怎样出来的。

其实，这个函数的作用是求平方根倒数，即 $x^{-1/2}$，也就是下面这个算式：

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

当然，它算的是近似值。只不过这个近似值的精度很高，而且计算成本比传统的浮点数运算平方根的算法低太多。在以前那个计算资源还不充分的年代，在一些 3D 游戏场景的计算机图形学中，要求取照明和投影的光照与反射效果，就经常需要计算平方根倒数，而且是大量的计算——对一个曲面上很多的点做平方根倒数的计算。也就是需要用到下面的这个算式，其中的 x,y,z 是 3D 坐标上的一个点的三个坐标值。

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

基本上来说，在一个 3D 游戏中，我们每秒钟都需要做上百万次平方根倒数运算。而在计算硬件还不成熟的时代，这些计算都需要软件来完成，计算速度非常慢。

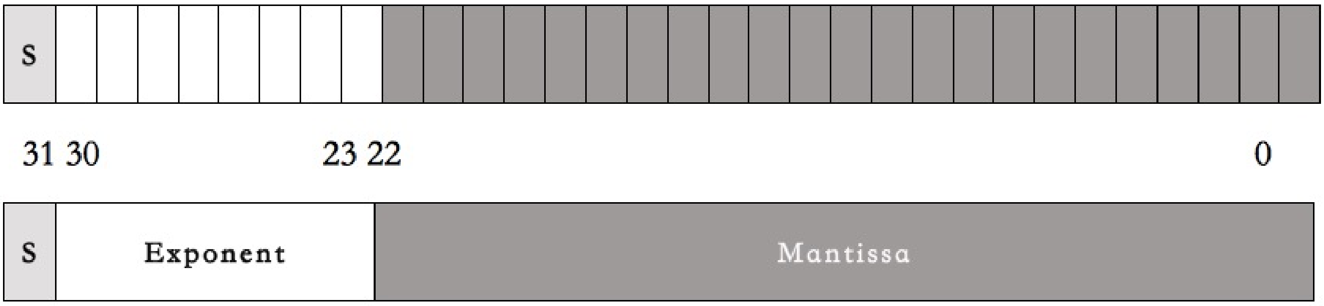
我们要知道，在上世纪 90 年代，多数浮点数操作的速度更是远远滞后于整数操作。所以，这段代码所带来的作用是非常大的。

计算机的浮点数表示

为了讲清楚这段代码，我们需要先了解一下计算机的浮点数表示法。在 C 语言中，计算机的浮点数表示用的是 IEEE 754 标准，这个标准的表现形式其实就是把一个 32bits 分成三段。

第三段占 23bits，表示尾数。代称为 M（Mantissa）。

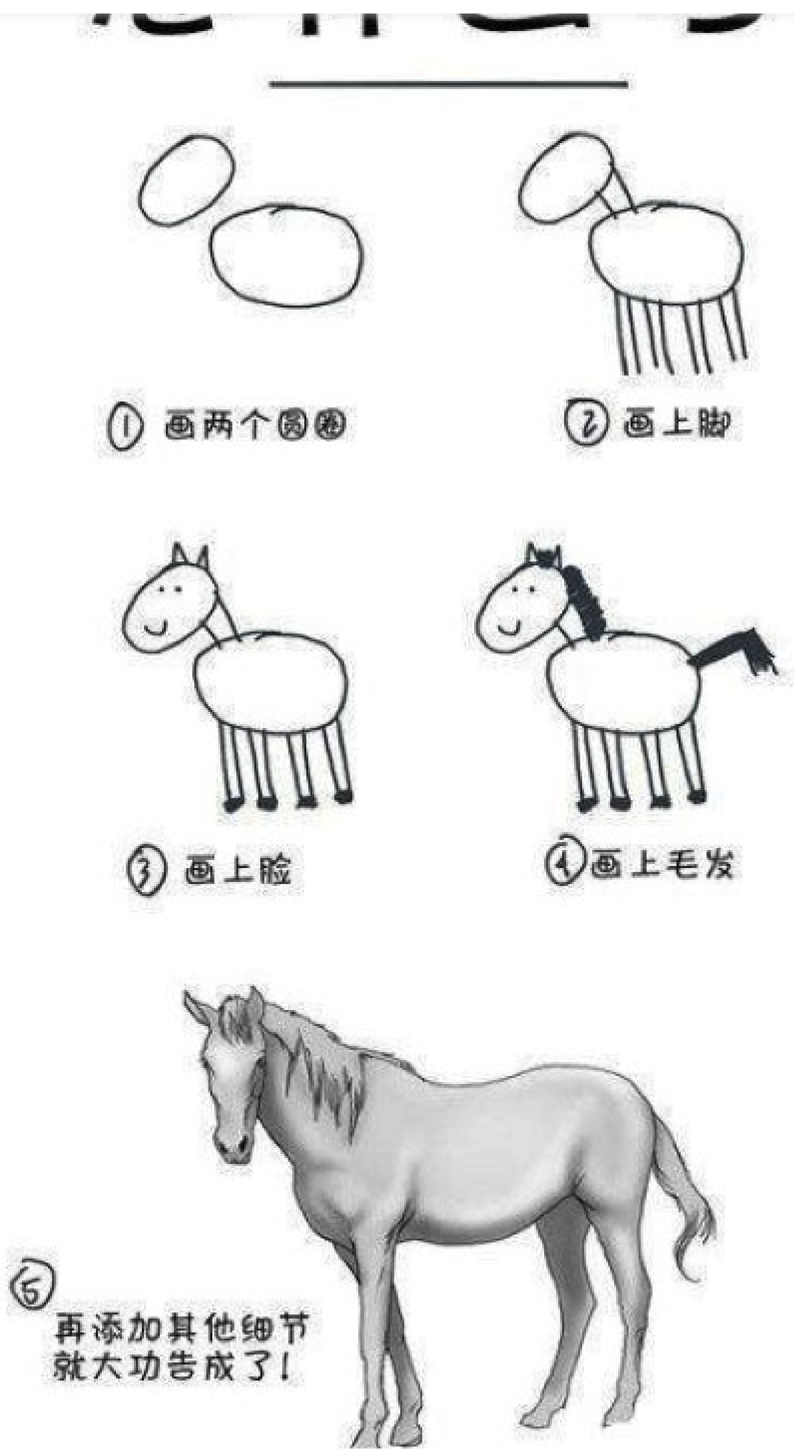
如下图所示：



然后呢，一个小数的计算方式是下面这个算式：

$$(-1)^S * (1 + \frac{M}{2^{23}}) * 2^{(E-127)}$$

但是，这个算式基本上来说，完全就是让人一头雾水，摸不着门路。对于浮点数的解释基本上就是下面这张漫画里表现的样子。



下面，让我来试着解释一下浮点数的那三段表示什么意思。

第一段符号位。对于这一段，我相信应该没有人不能理解。

第二段指数位。什么叫指数？也就是说，对于任何数 x，其都可以找到一个 n，使得 2^n<=x<=2^{n+1}。比如：对于 3 来说，因为 2 < 3 < 4，所以 n=1。而浮点数的这个指数为了要表示 0.00x 的小数，所以需要有负数，这 8 个 bits 本来可以表示 0-255。为了表示负的，取值要放在 [-127,128] 这个区间中。这就是为什么我们在上面的公式中看到

第三段尾数位。也就是小数位，但是这里叫偏移量可能好一些。这里的取值是从 [0 - 2^{23}] 中。你可以认为，我们把一条线分成 2^{23} 个线段，也就是 8388608 个线段。也就是说，把 2^n 到 2^{n+1} 分成了 8388608 个线段。而存储的 M 值，就是从 2^n 到 x 要经过多少个段。这要计算一下，2^n 到 x 的长度占 2^n 到 2^{n+1} 长度的比例是多少。

我估计你对第三段还是有点不懂，那么我们来举一个例子。比如说，对 3.14 这个小数。

是正数。所以，S = 0

2^1 < 3.14 <2^2。所以，n=1， n+127 = 128。所以，E=128。

(3.14 - 2) / (4 - 2) = 0.57， 而 $0.57 * 2^{23} = 4781506.56$，四舍五入，得到 M = 4781507。因为有四舍五入，所以，产生了浮点数据的精度问题。

把 S、E、M 转成二进制，得到 3.14 的二进制表示。

0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1

我们再用 IEEE 754 的那个算式来算一下：

$$(-1)^0 * (1 + \frac{4781507}{2^{23}}) * 2^{(128-127)}$$

$$1 * (1 + 0.5700000524520874) * 2$$

$$= 3.1400001049041748046875$$

你看，浮点数的精度问题出现了。

我们再来看一个示例，小数 0.015。

是正数。所以，S = 0。

$0.92 * 2^{23} = 7717519.36$，四舍五入，得到 M = 7717519。

于是，我们得到 0.015 的二进制编码：

0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1

其中：

120 的二进制是 01111000

7717519 的二进制是 11101011100001010001111

返回过来算一下：

$$(-1)^0 * (1 + \frac{7717519}{2^{23}}) * 2^{(120-127)}$$

$$(1 + 0.919999957084656) * 0.0078125$$

$$= 0.014999999664724$$

你看，浮点数的精度问题又出现了。

我们来用 C 语言验证一下：

复制代码

```
int main() {
    float x = 3.14;
    float y = 0.015;
    return 0;
}
```

复制代码

```
(lldb) frame variable
(float) x = 3.1400001
(float) y = 0.0149999997

(lldb) frame variable -f b
(float) x = 0b01000000010010001111010111000011
(float) y = 0b00111100011101011100001010001111
```

从结果上，完全验证了我们的方法。

好了，不知道你看懂了没有？我相信你应该看懂了。

简化浮点数公式

因为那个浮点数表示的公式有点复杂，我们简化一下：

$$(-1)^S * (1 + \frac{M}{2^{23}}) * 2^{(E-127)}$$

我们令，$m = (\frac{M}{2^{23}})$，$e = (E - 127)$。因为符号位在 $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 的两端都是 0（正数），也就可以去掉，所以浮点数的算式简化为：

$$(1 + m) * 2^e$$

上面这个算式是从一个 32bits 二进制计算出一个浮点数。这个 32bits 的整型算式是：

$$M + E * 2^{23}$$

比如，0.015 的 32bits 的二进制是：00111100011101011100001010001111，也就是整型的：

$$7717519 + 120 * 2^{23}$$

$$= 1014350479$$

$$= 0X3C75C28F$$

平方根倒数公式推导

下面，你会看到好多数学公式，但是请你不要怕，因为这些数学公式只需要高中数学就能看懂的。

我们来看一下，平方根数据公式：

$$y = \frac{1}{\sqrt[2]{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

等式两边取以 2 为基数的对数，就有了：

$$\log_2(y) = -\frac{1}{2}\log_2(x)$$

因为我们实际上在算浮点数，所以将公式中的 x 和 y 分别用浮点数的那个浮点数的简化算式 $(1+m)*2^e$ 替换掉。代入 $\log()$ 公式中，我们也就有了下面的公式：

$$\log_2(1+m_y)+e_y$$

$$= -\frac{1}{2}(\log_2(1+m_x)+e_x)$$

因为有对数，这公式看着就很麻烦，似乎不能再简化了。但是，我们知道，所谓的 m_x 或是 m_y，其实是个在 0 和 1 区间内的小数。在这种情况下，$\log_2(1.x)$ 接近一条直线。

那么我们就可以使用一个直线方程来代替，也就是：

$$\log_2(1+m) \approx m+\sigma$$

于是，我们的公式就简化成了：

$$m_y+\sigma+e_y \approx -\frac{1}{2}(m_x+\sigma+e_x)$$

因为 $m=(\frac{M}{2^{23}})$，$e=(E-127)$，代入公式，得到：

$$\frac{M_y}{2^{23}}+\sigma+E_y-127$$

$$\approx -\frac{1}{2}(\frac{M_x}{2^{23}}+\sigma+E_x-127)$$

$$\frac{M_y}{2^{23}} + E_y \approx -\frac{1}{2}(\frac{M_x}{2^{23}} + E_x) - \frac{3}{2}(\sigma - 127)$$

再把整个表达式乘以 2^{23}，得到：

$$M_y + E_y 2^{23}$$

$$\approx -\frac{1}{2}(M_x + E_x 2^{23}) - \frac{3}{2}(\sigma - 127)2^{23}$$

可以看到一个常数：$-\frac{3}{2}(\sigma - 127)2^{23}$，把负号放进括号里，变成 $\frac{3}{2}(127 - \sigma)2^{23}$，并可以用一个常量代数 R 来取代，于是得到公式：

$$M_y + E_y 2^{23} \approx R - \frac{1}{2}(M_x + E_x 2^{23})$$

还记得我们前面那个“浮点数 32bits 二进制整型算式” $M + E * 2^{23}$ 吗？假设，浮点数 x 的 32bits 的整型公式是：$I_x = M_x + E_x 2^{23}$，那么上面的公式就可以写成：

$$I_y \approx R - \frac{1}{2} I_x$$

代码分析

让我们回到文章的主题，那个平方根函数的代码。

首先是：

复制代码

```
i  = * ( long * ) &y; // evil floating point bit level hacking
```

1078523331。即 y = 3.14，i = 1078523331。

然后是：


```
i  = 0x5f3759df - ( i >> 1 );  // what the fuck?
```

这就是：


```
i  = 0x5f3759df - ( i / 2 );
```

也就是我们上面推导出来的那个公式：

$$I_y \approx R - \frac{1}{2} I_x$$

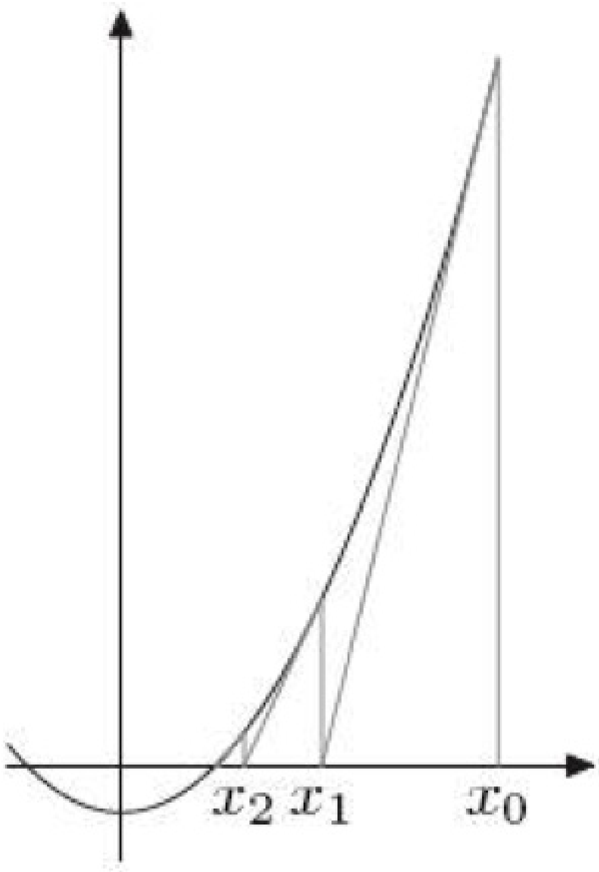
代码里的 R = 0x5f3759df。

我们又知道，R = $\frac{3}{2}(127 - \sigma)2^{23}$，把代码中的那个魔数代入，就可以计算出来：σ= 0.0450465 。这个数是个神奇的数字，这个数是怎么算出来的，现在还没人知道。不过，我们先往下看后面的代码：


```
    x2 = number * 0.5F;
    y  = * ( float * ) &i;
    y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );  // 1st iteration
    // 2nd iteration, this can be removed
    // y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );
```

$$I_{y'} = I_y(1.5 - 0.5xI_y^2)$$

这个其实是“牛顿求根法”，这是一个为了找到一个 f(x)= 0 的根而用一种不断逼近的计算方式。请看下图：



首先，初始值为 X0，然后找到 X0 所对应的 Y0（把 X0 代入公式得到 Y0 = f(X0)），然后在（X0,Y0）这个点上做一个切线，得到与 X 轴交汇的 X1。再用 X1 做一次上述的迭代，得到 X2，就这样一直迭代下去，一直找到，y = 0 时，x 的值。

牛顿法的通用公式是：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

于是，对于 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 来说，对固定的 x（常数），我们求 y 使得 $\frac{1}{y^2} - x = 0$，$f(y) = \frac{1}{y^2} - x$，$f'(y) = \frac{-2}{y^3}$ 。注意：$f'(y)$ 是 $f(y)$ 关于 y 的导数。

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\frac{1}{y_n^2} - x}{\frac{-2}{y_n^3}}$$

$$= \frac{y_n(3 - xy_n^2)}{2} = y_n(1.5 - 0.5xy_n^2)$$

正好就是我们上面的代码。

整个代码是，之前生成的整数操作产生首次近似值后，将首次近似值作为参数送入函数最后两句进行精化处理。代码中的两次迭代正是为了进一步提高结果的精度。但由于《雷神之锤III》的图形计算中并不需要太高的精度，所以代码中只进行了一次迭代，二次迭代的代码则被注释了。

相关历史

根据 Wikipedia 上的描述，《雷神之锤 III》的代码直到 QuakeCon 2005 才正式放出，但早在 2002 年（或 2003 年）时，平方根倒数速算法的代码就已经出现在 Usenet 和其他论坛上了。最初人们猜测是《雷神之锤》的创始人 John Carmack 写下了这段代码，但他在回复询问他的邮件时否定了这个观点，并猜测可能是先前曾帮 id Software 优化《雷神之锤》的资深汇编程序员 Terje Mathisen 写下了这段代码。

而 Mathisen 的邮件里表示，在 1990 年代初，他只曾做过类似的实现，确切来说这段代码亦非他所作。现在所知的最早实现是由 Gary Tarolli 在 SGI Indigo 中实现的，但他亦坦承他仅对常数 R 的取值做了一定的改进，实际上他也不是作者。

在向以发明 MATLAB 而闻名的 Cleve Moler 查证后，Rys Sommefeldt 则认为原始的算法是 Ardent Computer 公司的 Greg Walsh 所发明的，但他也没有任何确定性的证据能证明这一点。

不仅该算法的原作者不明，人们也仍无法确定当初选择这个“魔术数字”的方法。Chris Lomont 曾做了个研究：他推算出了一个函数以讨论此速算法的误差，并找出了使误差最

因此，Lomont 将目标改为查找在进行 1-2 次牛顿迭代后能得到最大精度的 R 值，在暴力搜索后得出最优 R 值为 0x5f375a86，以此值代入算法并进行牛顿迭代，所得的结果都比代入原始值（0x5f3759df）更精确。于是他说，“如果可能我想询问原作者，此速算法是以数学推导还是以反复试错的方式求出来的？”

Lomont 亦指出，64 位的 IEEE754 浮点数（即双精度类型）所对应的魔术数字是 0x5fe6ec85e7de30da。但后来的研究表明，代入 0x5fe6eb50c7aa19f9 的结果精确度更高（McEniry 得出的结果则是 0x5fe6eb50c7b537aa，精度介于两者之间）。

后来 Charles McEniry 使用了一种类似 Lomont 但更复杂的方法来优化 R 值。他最开始使用穷举搜索，所得结果与 Lomont 相同。而后他尝试用带权二分法寻找最优值，所得结果恰是代码中所使用的魔术数字 0x5f3759df。因此，McEniry 认为，这一常数最初或许便是以“在可容忍误差范围内使用二分法”的方式求得。

这可能是编程世界里最经典的魔数的故事，希望你能够从这篇文章中收获一些数学的基础知识。数学真是需要努力学习好的一门功课，尤其在人工智能火热的今天。

上一篇 12 | 程序中的错误处理：异步编程以及我的最佳实践

下一篇 14 | 推荐阅读：机器学习101

精选留言 (30)

写留言

casey
2017-11-15
29

曾经在知乎的一个100行内有哪些给力代码回答中引用了这段程序，但是远没有今天看完这篇文章理解更深刻，谢谢皓哥

展开

w2
2018-03-28
8

耗子为啥这么牛逼

展开

作者回复: 不牛不牛

coderliang
2017-11-16
8

非常好。当初读 CSAPP 那本书时，读到第二章浮点数部分着实花了好久没没完全get到书中的逻辑......

有咸鱼的梦...
2018-05-14
4

没有理解为什么浮点数3.14那里，小数部分需要进行这个处理(3.14-2)/(4-2)=0.57，希望皓叔能讲解一下

作者回复: 文中已讲了，你再仔细看看☺

Greybann...
2017-11-17 3

那个常数感觉和欧拉常数的计算原理类似

展开

imuyang 2
2018-05-08

脑子太笨了，愣是看了两遍才弄清楚

展开

作者回复: 那很不错了

newming 2
2017-11-27

非常好的文章，烧脑哈哈

展开

Chn.K 1
2019-03-14

自己能推导一遍那才叫真看懂了，好长时间没这么推导公式了，瞬间回到大学时代。

可达鸭 1
2018-11-12

what the fuck!
哈哈，莫名想笑!
算法牛逼，耗哥解读，也很细致入微

展开

飘过雪域的... 1
2018-08-29

看了《深入理解计算机原理》里面对浮点数二进制表示的描述，感觉不是很理解，看这里

壹雁🌟 1
2018-08-12

几年前看过魔数，觉得很神奇，不明觉厉。今天看后半部分推导出魔数的逻辑，还看得不是很明白，还得看多几遍

展开

傲娇的小宝
2019-05-13

看完发现自己没咋看懂，数学太烂的孩子伤不起，底子太差，需要补补，人生啊，欠的债都是要一笔笔还的啊。

展开

刘儒勇
2019-05-09

对一个很难的问题找到更简单的近似解，太厉害了

展开

汪玉斌
2019-04-28

(−1)S∗(1+M223)∗2(E−127)

终于了解了浮点数的表示 :), 谢谢皓哥!

展开

fpjoy
2019-04-12

log2(1+m) 约等于 m + δ 这样简化的精度是多少呢，会不会有较大误差啊

莫佳骏
2019-03-29

分析的牛逼，非常透彻

DSloth
2018-12-29

数学真的是必需品

展开

扬扬
2018-12-23

这篇文章看了两个小时才明白😁😁数学知识都快还给老师了。

---

jz
2018-12-13

3.14表示的那个 中间1的二进制应该是00000001吧

展开

蜗牛
2018-11-02

数学是硬伤

展开