A

北京航空航天大学研究生课程试卷

# 2011-2012 学年第一学期期末试卷

学号__________　　　　姓名___________　　　　成绩__________

考试日期：2011 年 12 月 18 日

## 考试科目：《 现代工程数学（组合数学） 》

注意事项：1、开卷考试，允许查阅教科书、笔记和其它文献资料

2、考试时间为 2 个小时

**题目：**

一、（10 分） 构造两个 5 阶的相互正交拉丁方。

1. 3 阶正交拉丁方(2 个)

| **1** | | | | **2** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | | 2 | 3 | 1 |

2. 4 阶正交拉丁方(3 个)

| **1** | | | | | **2** | | | | | **3** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | | 3 | 4 | 1 | 2 | | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | | 4 | 3 | 2 | 1 | | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | | 2 | 1 | 4 | 3 | | 3 | 4 | 1 | 2 |

3. 5 阶正交拉丁方(4 个)

| **1** | | | | | | **2** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

| **3** | | | | | | **4** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |

二、（10 分） 软件测试中共有 A、B、C、D 四类测试对象，每类测试对象各有 10 个测试用例。如果测试人员每小时可完成 1 个测试用例的测试，请问需要多少时间才能保证至少有一类测试对象完成了 60% 的测试任务？

解：由抽屉原理，需要 4*5+1=21 小时

三、（10 分） 某考生用 37 天准备报考北航软件学院，她的总复习时间不超过 60 小时。尽管工作很忙，但她还是坚持每天至少复习 1 小时。若每天学习时间为整数小时，用鸽巢原理证明，存在连续若干天，在此期间内她恰好学习了 13 个小时。

**证明:**

设$a_k$为前$k$天下的总学习时间，则$\{a_k\}$严格单调增加。

且$a_1 \ge 1, a_{37} \le 60$

所以 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{37} \le 60$

以及 $14 \le a_1 + 13 < a_2 + 13 < \cdots < a_{37} + 13 \le 73$

考查$a_1, a_2, \cdots, a_{37}, a_1 + 13, a_2 + 13, \cdots, a_{37} + 13$这74个数，

均$\in [1,73]$，根据抽屉原理，其中必有某两个数相等。

由严格单调性，知必有某个$i, j (1 \le i, j \le 37)$满足

$a_i = a_j + 13$，即$a_i - a_j = 13$

这说明：在第$j+1$天到第$i$天内学习了13个小时。

四、（10 分） 圆形餐桌上安排 12 位客人进餐。

（1）若男主人和女主人不相邻就座，有多少种可能的围坐方式？

（2）若女主人只是不能坐在男主人的右边，又可能有多少种围坐方式？

（3）在（2）的规则下，还有另一对夫妇希望能相邻就座，这时有多少种围坐方式？

解：(1)男主人先坐，女主人再坐不相邻，共 11 个位置，其他人再坐共 12!个方式，共计 11*12!种.

(2)男主人先坐，女主人不坐男主人的右边，共 12 个位置，其他人再坐共 12!个方式，共计 12*12!种.

(3)夫妇捆绑视为一个人，共有 12*11!*2 种

五、(10 分) 某人的家位于坐标（0，0）处，他的办公室位于坐标（9，11）处，若他每天上班只能沿着格子路经（向右或者向上）行走，可以有多少种不同的上班路径？

解：最短上班路径一共有$\binom{9-0+11-0}{9-0}=\binom{20}{9}$条

六、(10 分) 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ 有多少组非负的整数解？

若要求 $x_1\ge 2, x_2\ge 0, x_3\ge -5, x_4\ge 8$，又有多少组可能的整数解？

解：(1)原方程共有$\binom{30+4-1}{4-1}=\binom{33}{3}=5456$组非负整数解.

(2)设 $y_1=x_1-2$，$y_2=x_2$，$y3=x_3+5$，$y_4=x_4-8$，则 $x_1+x_2+x_3+x_4 = 30$ 等价于 $y_1+y_2+y_3+y_4 = 25$，且 $y_1$，$y_2$，$y_3$，$y_4$ 均为非负整数。

这样的解一共有$\binom{25+4-1}{4-1}=\binom{28}{3}=3276$组.

七、(10 分) 单词 PNEUMONOULTRAMICROSCOPICSILICOVOLCANOCONIOSIS 被称为最长的英文单词，字母打乱后重新排列，可以构成多少种不同的排列？

八、(10 分) 把六个非攻击车放到具有如下禁止位置的 6 行 6 列的棋盘上，总共会有多少种不同的方法？

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| × | × | | | | |
| | × | | | | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | × | × | |
| | | | × | × | |
| | | | | | |

解：设 ri 为将 i 个非攻击车全部放到禁止放车位置的方法数，则

r1=7, r2=1+2+3*4=15, r3=1*4+3*2=10, r4=1*2=2, r5=r6=0

共有 6! - r1*5! + r2*4! - r3*3! + r2*2! - r5*1! + r6*0! = 226 种

九、(10 分) 将长度为 $n$ 的、没有两个 0 或者两个 1 相连的三进制字符串（由 0，1，2 组成的字符串）的个数记为 $a_n$。首先建立 $a_n$ 的递推关系，然后求出 $a_n$ 的通项公式。

解：见 2010 卷第九题

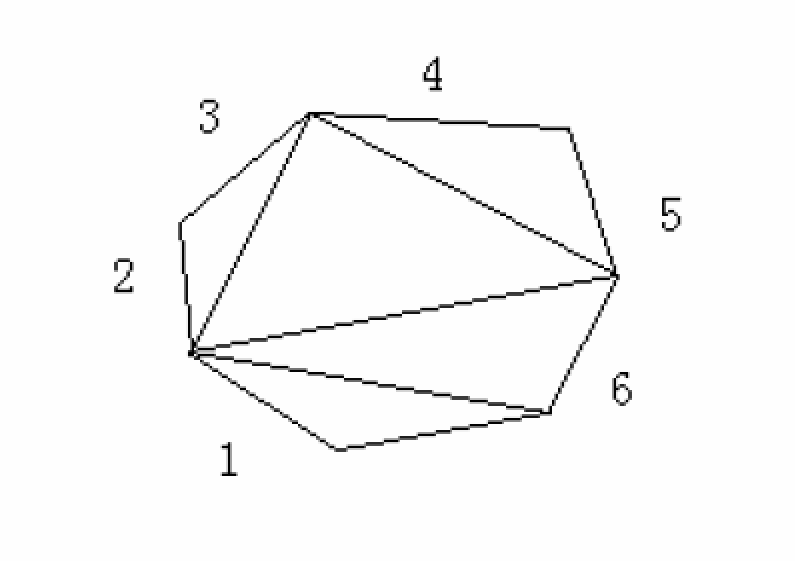
十、(10 分) 已知乘积表达式为 $(a_1\times(((a_2\times a_3)\times(a_4\times a_5))\times a_6))$，写出该乘法格式的凸多边形区域的三角形划分，以及该乘法格式的树状表达形式。

解　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　：

$$(1)(a_1 \times (((a_2 \times a_3) \times (a_4 \times a_5)) \times a_6))$$

$$(2)(((a_1 \times a_2) \times (a_3 \times (a_4 \times a_5)) \times ((a_6 \times a_7) \times a_8)))$$

解：（1）




（2）