立体幻方的构造

时佑民

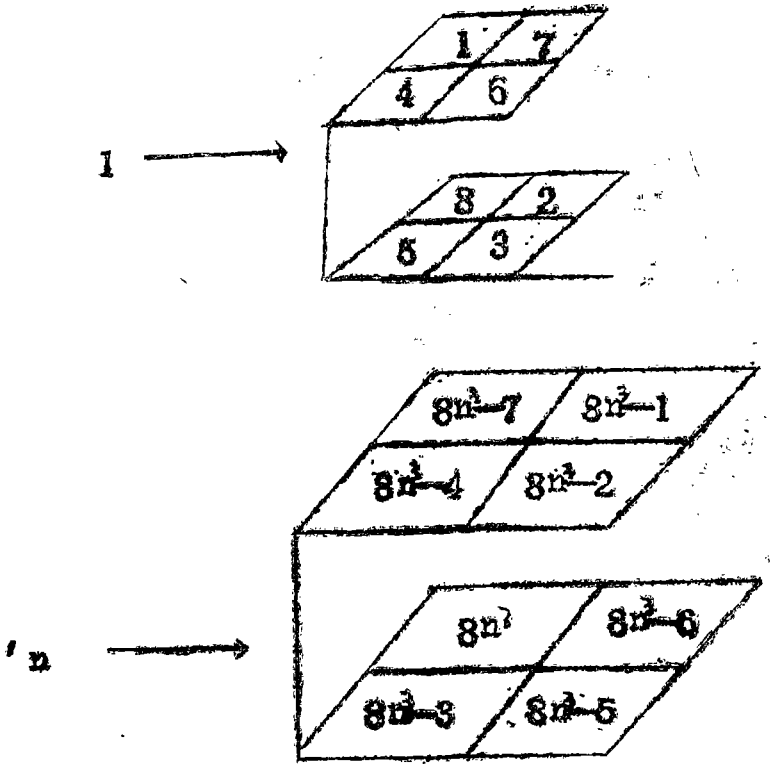
（图书馆）

提　要

本文首先提出奇数阶立体幻方及2^K阶（K＝2，3，……）立体幻方的最简构造方法，并解决了最困难的一种立体幻方（即偶数阶中非2^K阶又不能通过复合方法来构造的幻方，如12阶等可通过复合方法得到）的构造方法。

构造方法简述

（一）奇数阶幻方的造法是，按自然数大小顺序由小到大依次填写，从中间一层开始，每写完2m＋1个换一层。直至填满空格。



2^K阶立体幻方造法是先按自然数填写一个数字方阵，然后把其中一半数字和与它中心对称的数字进行交换即可，详细作法可通过阅读本文下面所举例子了解到。

（二）6阶、10阶等最困难的幻方的造法：

（1）要造一个3维$2n=2m+2'$阶幻方，可先造一个3维n阶幻方，然后把n阶幻方中的每个数替换成相邻的8个自然数如下：

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

（2）画出调整图（即注明数字交换符号的参考图）写出加法分解式：

① $4n=6k_1+2k_2$，　　$k_1, k_2 \in \{0, 1, \cdots\cdots, n\}$

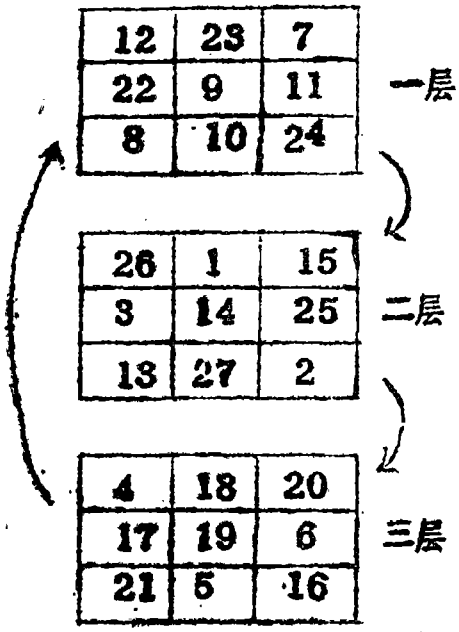
② $n=3k_3-k_4+5k_5-3k_6$

$k_3, k_4, k_5, k_6 \in \{0, 1, \cdots\cdots, n\}$

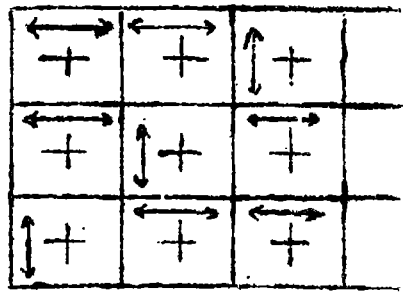
k_i（$i=1, 2, \cdots\cdots, 6$）作为上面方程的非负整数解，它们表示应划在调整图中的数字交换符号的个数。

（三）3维6阶幻方造法：

（1）先作一个3维3阶幻方：（图1）



（图1）



（图2）

（2）据分解式：$2n\times 2=6k_1+2k_2$　（$n=3$）

$k_1=2$，　　$k_2=0$

和：$n=3k_3-k_4+5k_5-3k_6$

$k_3=1$，$k_4=k_5=k_6=0$

画出调整图（图2）

（3）据3维3阶幻方和调整图画出6阶幻方（图3）

（四）3维10阶幻方造法：　（$10=2n=2\times 5$，$n=5$）

（1）写出分解式　$4n=6k_1+2k_2$，可取：$k_1=3$；$k_2=1$，

$n=5k_5$，　$k_5=1$

（2）先作一个3维5阶幻方（图4）：

（3）用类似的方法作出3维10阶幻方调整图（图5）：

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

95	89	183	177	52	55	
92	94	180	182	49	54	
175	169	68	71	87	81	I
172	174	65	70	84	86	
60	63	79	73	191	185	
57	62	76	78	188	190	
90	96	178	184	53	50	
93	91	181	179	56	51	
170	176	69	66	82	88	II
173	171	72	67	85	83	
61	58	74	80	186	192	
64	59	77	75	189	187	
207	201	7	1	116	119	
204	206	4	6	113	118	
23	17	108	111	199	193	III
20	22	105	110	196	198	
100	103	215	209	15	9	
97	102	212	214	12	14	
202	208	2	8	117	114	
205	203	5	3	120	115	
18	24	109	106	194	200	IV
21	19	112	107	197	195	
101	98	210	216	10	16	
104	99	213	211	13	11	
31	25	143	137	156	159	
28	30	140	142	153	158	
135	129	148	151	47	41	V
132	134	145	150	44	46	
164	167	39	33	127	121	
161	166	36	38	124	126	

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

26	32	138	144	157	154
29	27	141	139	160	155
130	136	149	146	42	48
133	131	152	147	45	43
165	162	34	40	122	128
168	163	37	35	125	123

Ⅵ

图3 3维6阶幻方

48	55	82	114	16
54	81	113	20	47
85	112	19	46	53
111	18	50	52	84
17	49	51	83	115

Ⅰ

60	87	119	21	28
86	118	25	27	59
117	24	26	58	90
23	30	57	89	116
29	56	88	120	22

Ⅱ

92	124	1	33	65
123	5	32	64	91
4	31	63	95	122
35	62	94	121	3
61	93	125	2	34

Ⅲ

104	6	38	70	97
10	37	69	96	103
36	68	100	102	9
67	99	101	8	40
98	105	7	39	66

Ⅳ

11	43	75	77	109
42	74	76	108	15
73	80	107	14	41
79	106	13	45	72
110	12	44	71	78

Ⅴ

图4 （3维5阶幻方）

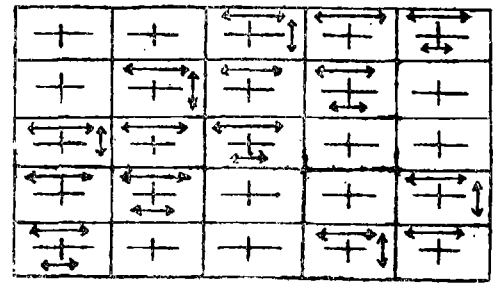


图5 （3维10阶幻方调整图）

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

（4）作出3维10阶幻方（图6）：

377	383	433	439	655	654	911	905	127	121
380	382	436	438	652	649	908	910	126	124
425	431	647	646	903	897	159	153	369	375
428	430	644	641	900	902	158	156	372	374
679	678	895	889	151	145	361	367	417	423
676	673	892	894	150	148	364	366	420	422
887	881	143	137	393	399	409	415	671	670
884	886	142	140	396	398	412	414	668	665
135	129	385	391	401	407	663	662	919	913
134	132	388	390	404	406	660	657	916	918

I

384	378	440	434	650	651	906	912	122	128
381	379	437	435	653	656	909	907	123	125
432	426	642	643	898	904	154	160	376	370
429	427	645	648	901	899	155	157	373	371
674	675	890	896	146	152	368	362	424	418
677	680	893	891	147	149	365	363	421	419
882	888	138	144	400	394	416	410	666	667
885	883	139	141	397	395	413	411	669	672
130	136	392	386	408	402	658	659	914	920
131	133	389	387	405	403	661	664	917	915

II

473	479	689	695	951	950	167	161	223	217
476	478	692	694	948	945	164	166	222	220
681	687	943	942	199	193	215	209	465	471
684	686	940	937	196	198	214	212	468	470
935	934	191	185	207	201	457	463	713	719
932	929	188	190	206	204	460	462	716	718
183	177	239	233	449	455	705	711	927	926
180	182	238	236	452	454	708	710	924	921
231	225	441	447	697	703	959	958	175	169
230	228	444	446	700	702	956	953	172	174

III

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

480 | 474 477 | 475	696 | 690 693 | 691	946 | 947 949 | 952	162 | 168 165 | 163	218 | 224 219 | 221
688 | 682 685 | 683	938 | 939 941 | 944	194 | 200 197 | 195	210 | 216 211 | 213	472 | 466 469 | 467
930 | 931 933 | 936	186 | 192 189 | 187	202 | 208 203 | 205	464 | 458 461 | 459	720 | 714 717 | 715
178 | 184 181 | 179	234 | 240 235 | 237	456 | 450 453 | 451	712 | 706 709 | 707	922 | 923 925 | 928
226 | 232 227 | 229	448 | 442 445 | 443	704 | 698 701 | 699	954 | 955 957 | 960	170 | 176 173 | 171

IV

729 | 735 732 | 734	985 | 991 988 | 990	7 | 6 4 | 1	263 | 257 260 | 262	519 | 513 518 | 516
977 | 983 980 | 982	39 | 38 36 | 33	255 | 249 252 | 254	511 | 505 510 | 508	721 | 727 724 | 726
31 | 30 28 | 25	247 | 241 244 | 246	503 | 497 502 | 500	753 | 759 756 | 758	969 | 975 972 | 974
279 | 273 276 | 278	495 | 489 494 | 492	745 | 751 748 | 750	961 | 967 964 | 966	23 | 22 20 | 17
487 | 481 486 | 484	737 | 743 740 | 742	993 | 999 996 | 998	15 | 14 12 | 9	271 | 265 268 | 270

V

736 | 730 733 | 731	992 | 986 989 | 987	2 | 3 5 | 8	258 | 264 261 | 259	514 | 520 515 | 517
984 | 978 981 | 979	34 | 35 37 | 40	250 | 256 253 | 251	506 | 512 507 | 509	728 | 722 725 | 723
26 | 27 29 | 32	242 | 248 245 | 243	498 | 504 499 | 501	760 | 754 757 | 755	976 | 970 973 | 971
274 | 280 277 | 275	490 | 496 491 | 493	752 | 746 749 | 747	968 | 962 965 | 963	18 | 19 21 | 24
482 | 488 483 | 485	744 | 738 741 | 739	1000 | 994 997 | 995	10 | 11 13 | 16	266 | 272 269 | 267

VI

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

825 | 831 828 | 830	41 | 47 44 | 46	303 | 302 300 | 297	559 | 553 556 | 558	775 | 769 774 | 772	
73 | 79 76 | 78	295 | 294 292 | 289	551 | 545 548 | 550	767 | 761 766 | 764	817 | 823 820 | 822	
287 | 286 284 | 281	543 | 537 540 | 542	799 | 793 798 | 796	809 | 815 812 | 814	65 | 71 68 | 70	VII
535 | 529 532 | 534	791 | 785 790 | 788	801 | 807 804 | 806	57 | 63 60 | 62	319 | 318 316 | 313	
783 | 777 782 | 780	833 | 839 836 | 838	49 | 55 52 | 54	311 | 310 308 | 305	527 | 521 524 | 526	

832 | 826 829 | 827	48 | 42 45 | 43	298 | 299 301 | 304	554 | 560 557 | 555	770 | 776 771 | 773	
80 | 74 77 | 75	290 | 291 293 | 296	546 | 552 549 | 547	762 | 768 763 | 765	824 | 818 821 | 819	
282 | 283 285 | 288	538 | 544 541 | 539	794 | 800 795 | 797	816 | 810 813 | 811	72 | 66 69 | 67	VIII
530 | 536 533 | 531	786 | 792 787 | 789	808 | 802 805 | 803	64 | 58 61 | 59	314 | 315 317 | 320	
778 | 784 779 | 781	840 | 834 837 | 835	56 | 50 53 | 51	306 | 307 309 | 312	522 | 528 525 | 523	

81 | 87 84 | 86	337 | 343 340 | 342	599 | 598 596 | 593	615 | 609 612 | 614	871 | 865 870 | 868	
329 | 335 332 | 334	591 | 590 588 | 585	607 | 601 604 | 606	863 | 857 862 | 860	113 | 119 116 | 118	
583 | 582 580 | 577	639 | 633 636 | 638	855 | 849 854 | 852	105 | 111 108 | 110	321 | 327 324 | 326	IX
631 | 625 628 | 630	847 | 841 846 | 844	97 | 103 100 | 102	353 | 359 356 | 358	575 | 574 572 | 569	
879 | 873 878 | 876	89 | 95 92 | 94	345 | 351 348 | 350	567 | 566 564 | 561	623 | 617 620 | 622	

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

88 | 82 85 | 83	344 | 338 341 | 339	594 | 595 597 | 600	610 | 616 613 | 611	866 | 872 867 | 869
336 | 330 333 | 331	586 | 587 589 | 592	602 | 608 605 | 603	858 | 864 859 | 861	120 | 114 117 | 115
578 | 579 581 | 584	634 | 640 637 | 635	850 | 856 851 | 853	112 | 106 109 | 107	328 | 322 325 | 323
626 | 632 629 | 627	842 | 848 843 | 845	104 | 98 101 | 99	360 | 354 357 | 355	570 | 571 573 | 576
874 | 880 875 | 877	96 | 90 93 | 91	352 | 346 349 | 347	562 | 563 565 | 568	618 | 624 621 | 619

X

（五）3维10阶幻方性质：

1．全体数为自然数截段：

$\{1, 2, \cdots\cdots, 10^3\}$

2．特征数为：5005，即每行、每列、每竖的各数之和及每条对角线上各数之和都等于5005。

3．其中两条大对角线上各数为：

① $377+379+943+944+503+501+57+59+623+619=5005$

② $918+914+710+712+500+498+289+290+86+88=5005$

参考资料

〔1〕李俨，《中算史论丛》，科学出版社。

〔2〕李约瑟，《中国科学技术史》，科学出版社。

〔3〕付熙如，时佑民，《河南师大学报》1980年，第1期。

〔4〕S.R.Fu，"Yang Hney's Theorem of Magic Cubes"〈全国第一届组合数学会议论文集〉pp.70～71，1984年，大连。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net