完美幻方的特殊情况—最完美幻方

学号：GS1321465

姓名：杨博谦

现代工程数学\_第一次作业

出于数学上的考虑，用0,1,2，…，n^2-1等整数来建立一个n阶幻方是比较方便的。但是传统的幻方中没有零这个数，而是使用1,2，3…，n^2等整数。这两种规定没有什么实质性的差别。如果你给数学幻方中每一项加上1，就得到一个传统幻方；反之，如果你从传统幻方的每一项减去1，就得到一个数学幻方。这种转换所造成的惟一变化时幻方的幻常熟改变了—幻常数将增加n或减少n。

1阶幻方只有1个，就是孤零零的0这个数。2阶幻方是不存在的（这是唯一一个不存在幻方的阶数），因为幻方的条件要求它的所有4项都必须相等。3阶幻方有8个，但它们全部都可以通过对一个幻常数为12的3阶幻方进行旋转或镜面反射变换而得到：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 8 | 3 |
| 6 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 7 |

幻方的旋转或镜面反射得到的仍然是幻方，因此所有3阶幻方实际上是同一个东西。然而，4阶幻方就有许多不同的形式了；随着阶数的上升，幻方的数目飞快地增加。目前还不知道幻方阶数于幻方个数之间关系的精确公式。

取得进展的途径之一是对幻方规定更多的条件。出于本文的需要，最自然的这种条件是幻方应当是“泛对角”的----也就是说幻方所有的“断开对角线上”的数字之和必须也等于幻常数（所谓断开对角线，就是从幻方的一条边出发绕一圈到达对边的一条线。）泛对角线幻方之一例是厦门这个幻常数为30的幻方：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 11 | 6 | 13 |
| 14 | 5 | 8 | 3 |
| 9 | 2 | 15 | 4 |
| 7 | 12 | 1 | 10 |

在这个幻方中，断开对角线的例子有11+8+4+7和11+14+4+1等，两条对角线上的数字格子加起来均等于30。3阶幻方不是泛对角的，例如8+2+5等于15而不是12.事实上，仅当一个幻方的阶数为二重偶数时----也就是为4的倍数时----它才可能是泛对角的。

最完美幻方所受到的限制还要多。出了必须是泛对角的幻方外，它们还必须具备这样一条性质：由相邻项租车的任意一个2x2子矩阵的所有各项之和相等，即都等于2n^2-2，其中n为幻方的阶数。（也可以证明，任何具有这种2x2子矩阵性质的幻方必定是泛对角的。）上面所示的4阶幻方是最完美的----例如，由0,11,14和5等项组成的一个2x2子矩阵的各项之和等于30。注意，从幻方的一边出发绕一圈到另一边构成的2x2子矩阵也包括在内，例如由3,4,14和9构成的子矩阵。下图所示的12阶幻方是最完美幻方的一个更有气派的例子。（图中小正方形的4个数之和均为286）

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 64 | 92 | 81 | 94 | 48 | 77 | 67 | 63 | 50 | 61 | 83 | 78 |
| 31 | 99 | 14 | 97 | 47 | 114 | 28 | 128 | 45 | 130 | 12 | 113 |
| 24 | 132 | 41 | 134 | 8 | 117 | 27 | 103 | 10 | 101 | 43 | 118 |
| 23 | 107 | 6 | 105 | 39 | 122 | 20 | 136 | 37 | 138 | 4 | 121 |
| 16 | 140 | 33 | 142 | 0 | 125 | 19 | 111 | 2 | 109 | 35 | 126 |
| 75 | 55 | 58 | 53 | 91 | 70 | 72 | 84 | 89 | 86 | 56 | 69 |
| 76 | 80 | 93 | 82 | 60 | 65 | 79 | 51 | 62 | 49 | 95 | 66 |
| 115 | 15 | 98 | 13 | 131 | 30 | 112 | 44 | 129 | 46 | 96 | 29 |
| 116 | 40 | 133 | 42 | 100 | 25 | 119 | 11 | 102 | 9 | 135 | 26 |
| 123 | 7 | 106 | 5 | 139 | 22 | 120 | 36 | 137 | 38 | 104 | 21 |
| 124 | 32 | 141 | 34 | 108 | 17 | 127 | 3 | 110 | 1 | 143 | 18 |
| 71 | 59 | 54 | 57 | 87 | 74 | 68 | 88 | 85 | 90 | 52 | 73 |

Ollerenshaw和Bree的技术防范的关键在于最完美幻方与“可逆正方形”之间的联系。为了弄清这些问题，我们需要阶数若干术语。吧一个整数序列倒转过来并把对应的数非别想家，如果得出的和全部相等，我们就说这个整数序列具有反转相似性。例如，序列1,4,2,7,5,8具有反转相似性，因为把它反转过来后得到8,5,7,2,4,1这个序列，两个序列对应项想家分别为1+8,4+5,2+7,7+2，5+4,8+1,这些和全部等于9。

N阶可逆正方形是由0,1,2，…,n^2-1等整数构成的一个nxn阵列，它具有下列性质：它的每一行于每一列均具有反转相似性，而且在该正方形内的任何一个矩形阵列中，对角的项分别相加后其和相等。例如从0到15的整数按递增顺序构成的4x4阵列为可逆正方形，入下图所示。距离来说，在第三行中，8+11=9+10=19。同样的规律对其它所有各行及所有各列均成立。此外，这个正方形也满足第二个条件，如5+11=7+9和1+15=3+13。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 |

可逆正方形通常不是幻方，但可以证明，每一个二重偶数阶的可逆正方形均可通过一种特殊的方法转变成最完美的幻方，而每一个最完美的幻方均可以通过这种方式做出来。现在我们以上面这个4阶可逆正方形为例来说明这种方法。首先，把每一行的右半部分反转过来：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 7 | 6 |
| 8 | 9 | 11 | 10 |
| 12 | 13 | 15 | 14 |

接着将每一列的下半部分反转：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 7 | 6 |
| 12 | 13 | 15 | 14 |
| 8 | 9 | 11 | 10 |

现在把正方形分成2x2的子矩阵。将每个子矩阵中的4项按下面所示的方式移动：

也就是说，左上角的一项不动，右上角的一项沿对角线方向移动两个方格，左下角的一项向右边移动两个方格，而右下角的一项向下移动两个方格。如果某一项像这样移动后跑到4x4正方形的外面去了，那么就把正方形卷起来使其对边相连而找出该项的移动后位置。（这一特殊方法仅适用于4阶正方形。对于n阶正方形这一特殊情形，有一种用数学公式表示的类似方法。）对于本例，最后结果就是下面这个最完美的幻方：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 14 | 3 | 13 |
| 7 | 9 | 4 | 10 |
| 12 | 2 | 15 | 1 |
| 11 | 5 | 8 | 6 |

这种转换过程建立了最完美幻方和二重偶数阶可逆正方形之间的一个一一对应关系。因此，为了统计某一节的最完美幻方的总数，你可以统计相同阶数的可逆正方形的总数。乍看起来，把问题的性质像这样变一下似乎不能解决多大问题，但结果证明可逆正方形有n个十分巧妙的特点，是我们可以统计这类正方形的数目。

特别是，可逆正方形可以分为若干类。每一类中的所有可逆正方形都可以通过各种变换（例如旋转、镜面反射和其它几种更复杂的变换）互相联系起来。为了构造出属于某一类的所有可逆正方形，只要构造出其中一个并照常规应用这些变换就行了。此外，每一类都有恰好一个“主”正方形。最后，每一类的大小都是相同的。每一类中有实质性差异的正方形的数目为2 ^（n-2）（（n/2）！）^2。

因此，只要统计一下任一阶数的主可逆正方形有多少个，然后把次数目诚意上述式子就行了。这样得到的结果就是上述阶数的有实质性区别的最完美幻方之数目。主可逆正方形的数目本身也可以用一个公式计算，但较复杂。本处只指出对于n=4,8,12和16这几个二重偶数阶来说，不同的最完美幻方的数目分别为48,368640,2.22953x10^10和9.322433x10^14。