立体幻方简介和解法

杨文静，ZY1321222，BUAA

平面幻方中最常见的有奇阶幻方和偶阶幻方，此外，在平面幻方中，还有同心叠加幻方，广义幻方，幻方群等。本文介绍幻方中的立体幻方。

立体幻方也有两种，一是六面幻方；另一种是实心幻方。

## 六面幻方

**定义：**一个正方体，其六个面划分为n\*n个空格，将1到6n2这6n2个数填入6个面的空格中，使得每个面的每行、每列和每条对角线的每条上n个数之和等于,这样的图形称为n阶六面幻方。

如果严格按照定义用1到6n2这些数字作图，则不可能有奇数阶的六面幻方，因为当n为奇数时，不可能为正整数。因此只能做偶数阶六面幻方。

### 偶阶六面幻方做法

其做法与广义平面幻方做法相似。只需将1到6n2数字中最小的个数和最大的个数，做广义平面幻方，作为六面幻方的第一面。同理，选剩下的最小的个数和最大的个数做广义平面幻方，作为六面幻方的第二面。依次得到六个面。

例如，做4阶六面幻方，可以得到六个面的数字如下所示：

表 1 六面的数字

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 第一面 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 |
| 第二面 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 |
| 第三面 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 73 | 73 | 73 | 73 | 73 | 73 | 73 | 73 |
| 第四面 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |
| 第五面 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| 第六面 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |

其实，只需要将之分为六组，使每组n2个数的和相同即可。例如：

表 2 六面的数字2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 第一面 | 1 | 12 | 13 | 24 | 25 | 36 | 37 | 48 | 49 | 60 | 61 | 72 | 73 | 84 | 85 | 96 |
| 第二面 | 2 | 11 | 14 | 23 | 26 | 35 | 38 | 47 | 50 | 59 | 62 | 71 | 74 | 83 | 86 | 95 |
| 第三面 | 3 | 10 | 15 | 22 | 27 | 34 | 39 | 46 | 51 | 58 | 63 | 70 | 75 | 82 | 87 | 94 |
| 第四面 | 4 | 9 | 16 | 21 | 28 | 33 | 40 | 45 | 52 | 57 | 64 | 69 | 76 | 81 | 88 | 93 |
| 第五面 | 5 | 8 | 17 | 20 | 29 | 32 | 41 | 44 | 53 | 56 | 65 | 68 | 77 | 80 | 89 | 92 |
| 第六面 | 6 | 7 | 18 | 19 | 30 | 31 | 42 | 43 | 54 | 55 | 66 | 67 | 78 | 79 | 90 | 91 |

根据图2得到的六面立方体如下：

表 2 六面幻方实例

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | 4 | 81 | 40 | 69 |  | | | | | | | |
| 45 | 64 | 9 | 76 |
| 57 | 23 | 93 | 16 |
| 88 | 21 | 52 | 33 |
| 60 | 25 | 96 | 13 | 14 | 35 | 71 | 74 | 43 | 66 | 7 | 78 | 17 | 92 | 29 | 56 |
| 85 | 24 | 49 | 36 | 95 | 50 | 38 | 11 | 6 | 79 | 42 | 67 | 32 | 53 | 20 | 89 |
| 1 | 84 | 37 | 72 | 26 | 23 | 83 | 62 | 90 | 19 | 54 | 31 | 68 | 41 | 60 | 5 |
| 48 | 61 | 12 | 73 | 59 | 86 | 2 | 47 | 55 | 30 | 91 | 10 | 77 | 8 | 65 | 44 |
|  | | | | 75 | 10 | 63 | 46 |  | | | | | | | |
| 70 | 39 | 82 | 3 |
| 34 | 51 | 22 | 87 |
| 15 | 74 | 27 | 56 |

## 立体幻方

**定义：**将一个正方体划分为n\*n\*n个小立方体，将数字1-n3这n3个自然数填入小立方，使得每行以及每条对角线（包括各个平行面和对角面的对角线）的和都等于，这样的图形称为n阶实心幻方，或简称为n阶幻立方。

例如3阶幻方，其幻方常数为.其可以表示为3个平面。如下：

表 2 三阶立体幻方实例

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 第一层 | | |  | 第二层 | | |  | 第三层 | | |
| 12 | 23 | 7 |  | 26 | 1 | 15 |  | 4 | 18 | 20 |
| 22 | 9 | 11 | 3 | 14 | 25 | 17 | 19 | 6 |
| 8 | 10 | 24 | 13 | 27 | 2 | 21 | 5 | 16 |

### 幻立方的做法——直接填数法

幻立方的做法多种多样，有：1. 正交拉丁方法，2. 坐标法；3. 拉丁方与坐标定数发；4. 计算法；5. 直接填数法。本文仅详细介绍直接填数法。

直接填数法将幻立方类似与平面幻方那样处理。用马步法、斜条法等方法直接填入数字。作为例子，我们介绍7阶幻立方的直接填数法。

1. 做好7\*7\*7的平面方格。
2. 将1-343按顺序分为49组，每组7个数。
3. 在第三图的右上角填入1，然后2,3,，…，7按斜条法依次填入下一图内。例如2按斜条法填入第四图数1的右上方，数3填在第五图的右对角线由下向上第二格。数4天填在第六图右对角线向上第三格。数5填在第七图右对角线向上第四格。数6填在第一图右对角线向上第五格。数7填在第二图右对角线向上第六格。这样第一组的7个数就填完了。
4. 第二组数的头一个数填在前一组数最后一数的同一图中向右下横行马步的地方，即向右二格向下一格，也就是图二第3行第1列。其余按第一组数的填法进行。按以上规则填完7组数。
5. 第8组数的首数为50，方法是填在49的前2数所在的平面，位置则填在49的前一数，即48同行同列的位置上。其他每七组数的首数例如99,148,197,246,295都按此填写。

对于一般性的情形，还有待进一步的总结和阐述。

### 其他幻方

* 同心叠加幻方
* 特殊幻方
* 广义幻方
* 幻方群

## 立体幻方

### 六面幻方

一个正方体，其6个面划成N\*N个空格，将1至6N2这6N2个数填入6个面的空格里，使得每个面的每行，没列和每条对角线上N个数的和为 (1/2)N(6N2+1), 这样的图形称为N阶**六面幻方**。

### 实心幻方

把一个正方体划分成N\*N\*N个小立方体，将数1至N3这N3个自然数填入这些小立方，使得每一行以及每条对角线(包括各平面和各个对角面的对角线)各数之和都等于(1/2)N(N3+1),这样的图形叫做N阶实心幻方，简称为N阶幻立方。

## 总结