鸽巢原理及其应用

GS1321CF7，胡楠，2013.12.20

**摘要:** 鸽巢原理是组合学中一个非常重要的原理。介绍其实际应用, 并对某些应用进行总结, 同时分析如何根据问题来构造鸽巢。

**关键字：**鸽巢原理,构造

# 引言

鸽巢原理又名抽屉原理或狄利克雷原理, 它由德国数学家狄利克雷( D ivichlet, 1805- 1855)首先发现。鸽巢原理在组合学中占据着非常重要的地位, 它常被用来证明一些关于存在性的数学问题,并且在数论和密码学中也有着广泛的应用。使用鸽巢原理解题的关键是巧妙构造鸽巢或抽屉, 即如何找出合乎问题条件的分类原则。

# 鸽巢原理

鸽巢原理的简单形式: 如果n+ 1 个物体被放进n个盒子, 那么至少有一个盒子包含两个或者更多的物体。证明: 如果这n个盒子中的每一个都至多含有一个物体, 那么物体的总数最多是n。既然我们有n+ 1个物体, 于是某个盒子就必然包含至少两个物体。

鸽巢原理的加强形式: 令Q1, Q2, ……, Qn为正整数, 如果将Q1+ Q2+ , + Qn- n+ 1个物体放入n个盒子内, 那么, 或者第一个盒子至少含有Q 1个物体, 或者第二个盒子至少含有Q2 个物体,,,, 或者第n个盒子至少含有Qn个物体。

证明: 设将Q1+ Q2+ , + Qn- n+ 1个物体分放到n个盒子中, 如果对于每个i= 1, 2, ,, n, 第i个盒子含有少于Q i个物体, 那么所有盒子中的物体总数不超过(Q 1- 1) + (Q2- 1) + …+ ( Qn- 1)= Q1+ Q 2+ …+ Qn- n, 该数比所分发的物体总数少1, 所以我们断定, 对于某一个i= 1, 2, …, n,第i个盒子至少包含Q i个物体。

（１）某次会议由ｎ位代表参加，每位代表认识其中某些人，则至少有两人认识的人数相等。

解 假设有ｎ个代表，去掉自己之外只有ｎ－１个，若每个人认识的人都不等，例如有１，２，…ｎ－１个，可是有ｎ个人，故至少有两个人认识的人数相等

(２)从５对夫妇中任意选出６人，其中至少有两人是夫妻

解 考虑５个盒子，其中一个盒子对应一对夫妇，我们选出６人并把他们中的每一个人放到他们配偶所在的那个盒子中去，那么至少有一个盒子中含有两个人，即至少有两人是夫妻

（３）任意七个整数中，至少有三个数的两两之差是３的倍数

解 这是因为任一整数除以３时余数只有０，１，２三种可能，所以七个整数中至少有三个数除以３所得余数相同，即它们两两之差是３的倍数

在这里要注意：鸽巢原理只简单地断言存在一个盒子，该盒子中有两个或两个以上的物体，但它并没有指出是哪个盒子，要想知道是哪一个盒子，则只能逐个检查每一个盒子，所以，鸽巢原理只能用来证明某种安排的存在性，而对于找出这种安排却毫无帮助。鸽巢原理及推广本质上是一个非一一对应关系的充分性判别问题，这个原理看上去容易理解，且有广泛的应用，但实际应用时，不是所有的问题都象上面的简单应用一样可以一眼就看出来，对于一些比较特殊的非一一对应关系的离散型应用数学问题，若用其它的数学方法去解，往往很复杂或根本解不出来，如果能巧妙地利用鸽巢原理去解，则往往起到事半功倍的效果。

# 应用及其归纳

以下是常见的一些关于鸽巢原理的应用, 我们对这些应用进行了分类并对其中一些应用进行了归纳或总结。

### （1）解决代数问题

**例１ 证明** 有限群中每个元素的阶均有限分析与证明 设Ｇ为ｎ阶有限群，任取ａＧ，则由抽屉原理可知在ａ，ａ，ａ，…ａ，ａ中必有相等的，不妨设ａ＝ａ，１≤ｔ＜ｓ≤ｎ＋１，于是又ａ＝ｅ，从而ａ的阶有限

### （2）解决数论问题:

例２ 从整数１，２，…１００中任取５１个整数，证明在所述的这些整数之间存在两个整数，其中的一个可以被另一个整除

证明 我们知道，任一整数都可以唯一写成２ ×ａ的形式，其中ｋ为非负整数且ａ为奇数，设ａ，ａ，…，ａ表示被选出的５１个整数，对任一整数ａ（ｉ＝１，２…，５１）都可以唯一地写成如下形式：

ａ＝２×ｒ（ｉ＝１，２，…，５１）

其中，ｓ为非负整数，ｒ为奇数

由于１≤ａ≤１００，所以ｒ（ｉ＝１，２，…，５１）只能取１，３，５，…，４９这５０个奇数，而ｒ，ｒ，…，ｒ共有５１项，由鸽巢原理知，存在１≤ｉ＜ｊ≤５０，使ｒ＝ｒ，从而

＝＝２﹣为整数

因此ａ能被ａ整除

例３ 证明在任意给出的２０００个自然数ａ，ａ，…，ａ中，必存在若干个数，它们的和能被２０００整除

证明 令Ｂ＝｛ｂ，ｂ，…ｂ｝，其中ｂ＝ａ﹢ａ﹢…﹢ａ （ｉ＝１，２，…２０００）对任一非负整数ｊ（０≤ｊ≤１９９９），令Ｂ＝｛ｂ｜ｂＢ，且ｂ除以２０００所得余数为ｊ｝，则ＢＢ且

若Ｂ≠，设ｂ是Ｂ中的一个元素，则ｂ＝ａ﹢ａ﹢…﹢ａ能被２０００整除

若Ｂ＝，则由鸽巢原理，一定存在某个正整数ｔ(１≤ｔ≤１９９９)，使得≥２，设ｂｂ(ｋ＜ｌ)是Ｂ的两个元素，则

ｂ﹣ｂ＝ａ﹢ａ﹢…﹢ａ

能被2000整除

### （3）在几何问题中的应用

例４ 证明 如果在一个边长为１的等边三角形内任取５个点，则必有２个点，它们的距离不大于

证明 用三角形两边中点的连线把边长为一的等边三角形分成４个边长为的小等边三角形，每一个小三角形看成一个抽屉，根据抽屉原理，此问题可化为把五个元素（点）放入四个抽屉中，那么至少有一个抽屉（小三角形），包含两个或两个以上元素，而这两点的距离不可能超过小三角形的边长，即不大于

### （4）对Ramsey数的影响

例５ 若集合S由六个人组成，那么S中或者存在至少三个人互相认识，或者存在至少三个人互不认识

证明 在这六个人中，任意固定一个人，并用Ａ表示，而其余５人则分成两类，第一类与A认识的人集合F，第二类与A不认识的人的集合为T。由鸽巢原理，至少有一类含有不少于［］＋１＝３个人。若Ｆ中至少有３个人，他们互不认识，则定理得证。若Ｆ中至少有２个人互相认识，再将Ａ放进去，则得到至少３个人互相认识，定理得证。若Ｆ中最多有２人，则Ｔ中至少有３个人，若Ｔ中至少有３个人互相认识，则定理成立。若T中至少有２个人互不认识，再将Ａ放进去，则得到至少有３个人互不认识，定理成立。

### （5）用鸽巢原理解决同色问题

一个抽屉里有20件衬衫，其中４件是蓝的，７件是灰的，９件是红的，试问应从中随意取多少件能保证有４件是同色的

证明 根据鸽巢原理，ｎ个鸽巢，kn＋1只鸽子，则至少有一个鸽巢有k+1只鸽子，现在又３个鸽巢，即ｎ＝３，ｋ＋１＝４，所以，ｋ＝３

ｋ\*ｎ＋１＝３×３＋１＝１０

即随意抽取件10即可保证有４件是同色的。

# 总结

鸽巢原理的应用极其广泛, 以上仅仅列举了一些较为常见的实例, 在生活中还有很多用到鸽巢原理来解决的问题。在对同一道题构造抽屉时, 也不仅仅只有一种构造方法, 只有更多的接触不同形式的问题和应用才能学活学好鸽巢原理。