2.1欧式空间

- 内积空间
  - 实数域R上的线性空间V中任意两个向量x,y都有一个实数，记为(x,y)，与之对应
  - 满足：交换,数乘,分配,非负
- $C-S$不等式
  - 设V是内积空间，x,y 是V中任意两个向量，则有

    $$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$$

    等号当且仅当x,y线性相关时成立
  - 证明思路
    - 构造$(x-ty,x-ty)$，其中t为任意实数
    - 于是有$(x-ty,x-ty) \geq 0 \rightarrow (x,x)-2t(x,y)+t^2(y,y)) \geq 0$
    - 由$\Delta \leq 0$ 可得 $4(x,y)^2-4(x,x)(y,y) \leq 0$
    - 等号时取$y=tx$得证
  - 基于向量的模的概念（$|x|=\sqrt{(x,x)}$），$C-S$不等式可变形为 【L2范数】

    $$|(x,y)| \leq |x||y|$$

2.2正交基及子空间的正交关系

- 正交基与标准正交基的概念
  - (标准正交基)$e_1,e_2,\ldots,e_n$ 为n维欧氏空间的一组非零向量，满足

    $$(e_i,e_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

- 任一n维欧氏空间都存在正交基，自然也存在标准正交基
- 在n维欧氏空间中，从一组标准正交基到另一组标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵，满足

  $A^TA=E$
- 正交补空间的概念及其唯一性

2.3内积空间的同构

- 内积空间同构的要求
    1. 作为线性空间他们是同构的（保持加法和数乘）
    2. 保持内积不变 即满足：$(\sigma(x), \sigma(y)) = (x, y)$
- 所有n维内积空间都同构

2.4正交变换

- 正交变换定义
    - 设T是内积空间V的线性变换，若T能保持V中向量内积不变，即对任何$x, y \in V$，都有$(Tx, Ty) = (x, y)$,则线性变换T称为V的正交变换
- 正交变换等价命题
    - T是正交变换
    - T保持向量长度不变，$|Tx| = |x|$
    - 一组标准正交基经T作用后还是标准正交基
    - T在V的任意一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵
- T是内积空间V的一个线性变换，T是正交变换的充要条件是保持任意两个向量的距离不变

$$|Tx - Ty| = |x - y|$$

2.5复内积空间

- 复数域上讨论内积空间
- 酉空间中的内积

$$(x, y) = xy^H$$

其中x, y均为行量，y^H表示y的共轭转置

- 酉空间内积内积性质
    - $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$
- 正交变换推广到酉空间便有了酉变换($(Tx, Ty) = (x, y)$)以及酉矩阵($A^H A = AA^H = E$)
- 很多性质和实数域内积空间是一样的，就是简单的推广

2.6正规矩阵

- 正规矩阵的概念
    - 设$A \in C^{n \times n}$,且$A^H A = AA^H$,则称A为正规矩阵

- 正规矩阵的例子
    - 对角形矩阵、实对称矩阵、实反对称矩阵、厄米特矩阵、反厄米特矩阵、正交矩阵等
- 判定正规矩阵充要条件
    - 存在酉矩阵Q使A酉相似于对角形矩阵，即

$$Q^HAQ=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

- 正规矩阵相关推论

设A是n阶正规矩阵，其特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$

1. A是厄米特矩阵等充要条件是A的特征值全为实数
2. A是反厄米特矩阵等充要条件是A的特征值为0或纯虚数
3. A是酉矩阵的充要条件是A的每个特征值λ_i的模$|\lambda_i\ |=1$
    - 证明思路

$$Q^HAQ\cdot Q^HA^HQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\bar{\lambda_1} & & & \\ & \bar{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda_n}\end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$E=\begin{bmatrix}\lambda_1\bar{\lambda_1} & & & \\ & \lambda_2\bar{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\bar{\lambda_n}\end{bmatrix}$$

- 厄米特矩阵的任意两个不同特征值对应的特征向量是正交的
    - 证明思路

$$\begin{gathered}A^H=A\\ Ax=\lambda x,Ay=\mu y\\ \downarrow\\ y^HA^H=\mu y^H\ \rightarrow\ y^HA^Hx=\mu y^Hx\ \rightarrow\ y^H\lambda x=\mu y^Hx\\ \downarrow\\ (\lambda-\mu)y^Hx=0\ \rightarrow\ (x,y)=0\end{gathered}$$

2.7厄米特二次型

- 二次型

$$f(x)=x^HAx=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\bar{x_i}x_j$$

- 厄米特二次型经过满秩变换 $x=Cy$ 仍为厄米特二次型
- 每个厄米特二次型$f(x)=x^HAx$,都可用某个酉变换 $x=Qy$ 使其化为标准型

$$f=\lambda_1\bar{y_1}y_1+\lambda_2\bar{y_2}y_2+\cdots+\lambda_n\bar{y_n}y_n$$

其中$\lambda_i(i=1,2,,\ldots,n)$是$A$的特征值

- 正（负）定，半正（负）定
  - 厄米特二次型$f(x)=x^HAx$ 正定的充要条件是A的特征值全为正数
  - 厄米特二次型$f(x)=x^HAx$ 正定的充要条件是A的各阶顺序主子式大于零