2.1欧式空间

- 内积空间
  - 实数域R上的线性空间V中任意两个向量x,y都有一个实数，记为(x,y)，与之对应
  - 满足：交换,数乘,分配,非负
- $C-S$不等式
  - 设V是内积空间，x,y 是V中任意两个向量，则有

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

    等号当且仅当x,y线性相关时成立

  - 证明思路
    - 构造$(x-ty,x-ty)$，其中t为任意实数
    - 于是有$(x-ty,x-ty)\ge 0 \rightarrow (x,x)-2t(x,y)+t^2(y,y))\ge 0$
    - 由$\Delta \le 0$ 可得 $4(x,y)^2-4(x,x)(y,y)\le 0$
    - 等号时取$y=tx$得证
  - 基于向量的模的概念（$|x|=\sqrt{(x,x)}$），$C-S$不等式可变形为 【L2范数】

$$|(x,y)|\le|x||y|$$

2.2正交基及子空间的正交关系

- 正交基与标准正交基的概念
  - [标准正交基]$e_1,e_2,...,e_n$ 为n维欧氏空间的一组非零向量，满足

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases}\quad (i=1,2,...,n)$$

- 任一n维欧氏空间都存在正交基，自然也存在标准正交基
- 在n维欧氏空间中，从一组标准正交基到另一组标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵，满足

  $A^TA=E$
- 正交补空间的概念及其唯一性

2.3内积空间的同构

- 内积空间同构的要求

1. 作为线性空间他们是同构的（保持加法和数乘）
2. 保持内积不变 即满足：$(\sigma(x), \sigma(y)) = (x, y)$

- 所有n维内积空间都同构

2.4正交变换

- 正交变换定义
  - 设T是内积空间V的线性变换，若T能保持V中向量内积不变，即对任何$x, y \in V$，都有$(Tx, Ty) = (x, y)$,则线性变换T称为V的正交变换
- 正交变换等价命题
  - T是正交变换
  - T保持向量长度不变，$|Tx| = |x|$
  - 一组标准正交基经T作用后还是标准正交基
  - T在V的任意一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵

- T是内积空间V的一个线性变换，T是正交变换的充要条件是保持任意两个向量的距离不变

$$|Tx - Ty| = |x - y|$$

2.5复内积空间

- 复数域上讨论内积空间
- 酉空间中的内积

$$(x, y) = xy^H$$

  其中x, y均为行量，y^H表示y的共轭转置

- 酉空间内积内积性质
  - $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$
- 正交变换推广到酉空间便有了酉变换[$(Tx, Ty) = (x, y)$]以及酉矩阵[$A^H A = AA^H = E$]
- 很多性质和实数域内积空间是一样的，就是简单的推广

2.6正规矩阵

- 正规矩阵的概念
  - 设$A \in C^{n \times n}$,且$A^H A = AA^H$,则称A为正规矩阵
- 正规矩阵的例子
  - 对角形矩阵、实对称矩阵、实反对称矩阵、厄米特矩阵、反厄米特矩阵、正交矩阵等

- 判定正规矩阵充要条件
    - 存在酉矩阵Q使A酉相似于对角形矩阵，即

$$Q^H AQ = Q^{-1} AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- 正规矩阵相关推论

  设A是n阶正规矩阵，其特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

  1. A是厄米特矩阵等充要条件是A的特征值全为实数
  2. A是反厄米特矩阵等充要条件是A的特征值为0或纯虚数
  3. A是酉矩阵的充要条件是A的每个特征值λ_i的模$|\lambda_i| = 1$
      - 证明思路

$$Q^H AQ \cdot Q^H A^H Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\lambda_1} & & & \\ & \bar{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$E = \begin{bmatrix} \lambda_1 \bar{\lambda_1} & & & \\ & \lambda_2 \bar{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \bar{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

- 厄米特矩阵的任意两个不同特征值对应的特征向量是正交的
    - 证明思路

$$\begin{gathered} A^H = A \\ Ax = \lambda x, Ay = \mu y \\ \downarrow \\ y^H A^H = \mu y^H \ \rightarrow \ y^H A^H x = \mu y^H x \ \rightarrow \ y^H \lambda x = \mu y^H x \\ \downarrow \\ (\lambda - \mu) y^H x = 0 \ \rightarrow \ (x, y) = 0 \end{gathered}$$

2.7厄米特二次型

- 二次型

$$f(x) = x^H Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{x_i}x_j$$

- 厄米特二次型经过满秩变换 $x = Cy$ 仍为厄米特二次型
- 每个厄米特二次型$f(x) = x^H Ax$,都可用某个酉变换 $x = Qy$ 使其化为标准型

  $$f = \lambda_1\bar{y_1}y_1 + \lambda_2\bar{y_2}y_2 + \cdots + \lambda_n\bar{y_n}y_n$$

  其中$\lambda_i(i = 1, 2, , \ldots, n)$是$A$的特征值
- 正（负）定，半正（负）定
  - 厄米特二次型$f(x) = x^H Ax$ 正定的充要条件是A的特征值全为正数
  - 厄米特二次型$f(x) = x^H Ax$ 正定的充要条件是A的各阶顺序主子式大于零