1.1线性空间

- 数域
  - 如果复数的一个非空集合P含有非零的数，且其中任意两数的和、差、积、商（除数不为零）仍属于该集合，P为一个数域
- 线性空间
  - 满足加法和数乘
  - 例如 $P^n, P^{m\times n}, P[t]$
- 线性相关
  - $\alpha x+\beta y+\cdots+\delta v=0$，$\alpha,\beta,\delta$ 不全为0
  - 其中至少有一个向量可以由其与向量线性表示
- 线性空间的基
- 线性空间的维数
  - 有限维线性空间
  - 无限维线性空间 （泛函分析）

1.2基变换和坐标变换

- 过渡矩阵

$$(e_1^{'},e_2^{'},\dots e_n^{'})=(e_1,e_2,\dots e_n)A$$

- 坐标变换公式

$$x=(e_1,e_2,\dots e_n)\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}=(e_1^{'},e_2^{'},\dots e_n^{'})\begin{bmatrix}\xi_1^{'}\\ \xi_2^{'}\\ \vdots\\ \xi_n^{'}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\xi_1^{'}\\ \xi_2^{'}\\ \vdots\\ \xi_n^{'}\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$$

1.3子空间和维数定理

- 子空间定义

- 判定子空间的充要条件
  - 子空间W(非空)关于线性空间V中定义的两个运算(加法和数乘)是封闭的
- 维数公式

$$dim(V_1+V_2)=dimV_1+dimV2-dim(V_1\cap V_2)$$

  - 证明思路
    - 设定$V_1\cap V_2$的一组基，记为$e_1,e_2,...e_t$
    - 扩充上述基至V_1的基和V_2的基，记为 $e_1,e_2,...e_t,\alpha_{t+1},...,\alpha_r$ 和 $e_1,e_2,...e_t,\beta_{t+1},...,\beta_s$
    - 证明 $e_1,e_2,...e_t,\alpha_{t+1},...,\alpha_r,\beta_{t+1},...,\beta_s$是 V_1+V_2 的一组基即可
    - 于是得到 $dim(V_1+V_2)=r+s-t$
- 子空间的直和
  - 分解式唯一
  - $W=V_1+V_2$, 唯一的 $u=x+y\ (x\in V_1,y\in V_2,u\in W)$
  - 充要条件 $V_1\cap V_2=\{\theta\}$, 零向量的分解式唯一

1.4线性空间的同构

- 同构
  - 直观概念：反映具有相同运算规则的不同对象
  - 条件
    - 存在一一对应的映射σ
    - 保持加法和数乘
  - 数域P上的每个n维线性空间V与P^n同构
  - 在同构对应下，线性无关组对应线性无关组
  - 推论：数域P上两个有限维线性空间同构的充要条件是维数相同

1.5线性变换的概念

- 线性变换
  - 保持加法和数乘
    - $T(x+y)=T(x)+T(y)$
    - $T(\lambda x)=\lambda T(x)$
  - 线性变换相等的条件
  - 特殊的变换
    - 零变换 , 单位变换
- 线性变换的性质

1. $T(\theta)=\theta; T(-x)=-T(x)$
2. 线性变换保持向量的线性组合和线性关系式
3. 线性变换把线性相关向量组变成线性相关向量组，但是不一定能把线性无关的变为线性无关的，比如零变换

- 线性变换的运算
  - $T(x)=T_1(x)+T_2(x)/T=T_1+T_2$
  - $T(X)=T_1(T_2(x))/T=T_1T_2$
  - $T(x)=\lambda(T_1(x))/T=\lambda T_1$
- 逆变换的概念
- 像空间
  - $T(V)=\{Tv \mid v\in V\}$
- 核空间
  - $K=\{v\in V \mid Tv=\theta\}$，记为 $Ker(T)$ 或者 $T^{-1}(\theta)$

$$dimT(V)+dimT^{-1}(\theta)=n$$

1.6线性变换的矩阵表示

> 一个线性变换完全被它的一组基上的作用所决定

- 线性变换的矩阵
  - V的一组基为$e_1,e_2,\ldots e_n$
  - T是V的一个线性变换， $Te_i=a_{1i}e_1+a_{2i}e_2+\cdots+a_{ni}e_n$

$$(Te_1,Te_2,\ldots,Te_n)=(e_1,e_2,\ldots,e_n)A$$

- 线性变换在不同基下的关系
  - 两组基的过度矩阵C
    - $(e_1^{'},e_2^{'},\ldots e_n^{'})=(e_1,e_2,\ldots e_n)C$
  - 不同基下的变换矩阵
    - $(Te_1,Te_2,\ldots,Te_n)=(e_1,e_2,\ldots,e_n)A$
    - $(Te_1^{'},Te_2^{'},\ldots Te_n^{'})=(e_1^{'},e_2^{'},\ldots e_n^{'})B$
  - 变换矩阵关系
    - $B=C^{-1}AC$
- 相似矩阵的概念
- 一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的

1.7不变子空间

- 不变子空间的定义
    - 设T是线性空间V的一个线性变换，又W是V的一个子空间，若对任一$x \in W$,都有$Tx \in W$ 即 $T(W) \subseteq W$,则称W是线性变换T的不变子空间
- 直和分解与分块矩阵
    - 若V可分解为k个子空间$V_i(i = 1, 2, \ldots, k)$的直和，则存在V的一个线性变换T，使得每个V_i都是T的不变子空间，从而T在某组基下的矩阵具有分块对角形的形式