3.1矩阵的相似对角形

- 引入：
  - 若A可对角化

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \rightarrow AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$P=(X_1,X_2,\ldots,X_n)\rightarrow P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=(\lambda_1X_1,\lambda_2X_2,\ldots,\lambda_nX_n)$$
$$\Downarrow$$
$$AX_i=\lambda_iX,(i=1,2,\ldots,n)$$

- 上述推断表明：
  - 当A与对角形矩阵相似时，对角形矩阵对角线上的元素都是A的特征值
  - P的n个列向量是A的n个线性无关的特征向量
- 对角化充要条件
  - A有n个线性无关的特征向量
- 对角化的**充分条件**
  - A有n个不同的特征值
- 特征多项式的概念
- 相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值
- 特征子空间
  - 属于矩阵A的同一个特征值的所有特征向量连同零向量一起，构成一个线性空间，称为A的特征子空间
    特征子空间的维数不超过特征根的重数

3.2矩阵的约当标准形

- 多项式的最大公因式
- 行列式因子
  - 记 $A(\lambda)=\lambda E-A$，$A(\lambda)$中所有非零的k阶子式的首项（最高次项）系数为1的最大公因数$D_k(\lambda)$称为$A(\lambda)$的k级行列式因子，且有$D_{k-1}(\lambda)\mid D_k(\lambda),(k=2,3,\ldots,n)$

  Example:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered}D_1(\lambda)=(\lambda+1,\lambda-1,\lambda-2)=1\\ D_2(\lambda)=((\lambda+1)(\lambda-1),(\lambda+1)(\lambda-2),(\lambda-1)(\lambda-2))=1\\ D_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)\end{gathered}$$

- 不变因式

$$d_1=D_1(\lambda),d_k=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)},k=2,3,\ldots,n$$

- 初级因子
  - 把每个次数大于0的不变因式分解为互不相同的一次因式的方幂的乘积，所有这些一次因式的方幂称为$A(\lambda)$的初级因子
- 约当标准形
  - 设A的全部初级因子为$(\lambda-\lambda_i)^{k_i},i=1,2,\ldots,s$,其中$\lambda_i$可能有相同，对每个初级因子构造约当块

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}_{k_i\times k_i}$$

  - 所有这些约当块构成的矩阵称为A的约当标准形

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix}$$

- 每个n阶复数矩阵A都与一个约当形矩阵J相似

$$P^{-1}AP=J$$

- 显然，复数矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是A的初级因子全为一次式
- PS：一般由矩阵的特征多项式是不能写出矩阵的约当形矩阵的

- 利用约当块的例子
  - 证明：若n阶矩阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$则矩阵$A^m$的特征值为$\lambda_1^m,\lambda_2^m,\ldots,\lambda_n^m$
  - Proof:

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}, J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$J^m=P^{-1}A^mP, J^m=\begin{bmatrix} J_1^m & & & \\ & J_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^m \end{bmatrix}, J_i^m=\begin{bmatrix} \lambda_i^m & & \\ * & \lambda_i^m & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{显然}J^m\text{的特征值就是}J\text{特征值的}m\text{次，相似矩阵有相同的特征值，得证}$$

哈密顿-凯莱定理

设A是数域P上一个$n\times n$矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$是A的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n\mid A\mid E=0$$