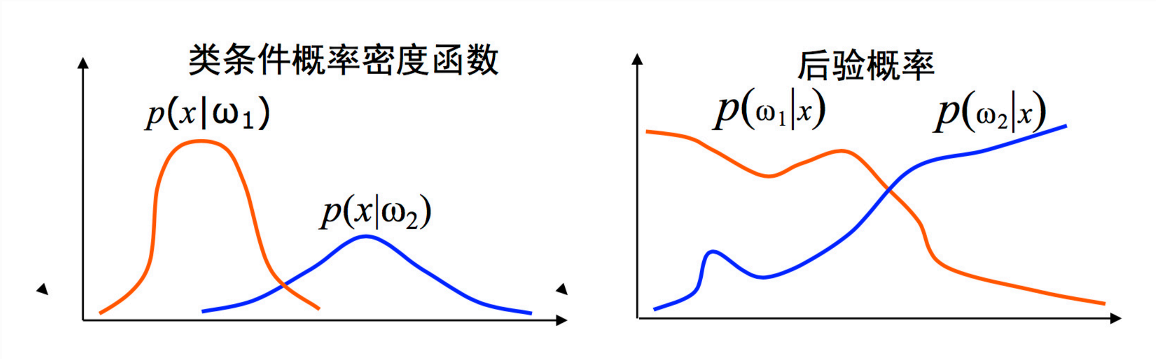
Bayes Introduction

- 最大后验分类（MAP）



  - 估计出条件概率密度函数，就能较好的推算后验概率了

- 贝叶斯决策
  - 最小错误率准则
    - 以后验概率为判决函数
    - This produces the optimal performance: minimum probability of error: $p_e = 1 - p(C_i \mid x)$
    - 满足如上准则的分类器就叫做贝叶斯分类
  - 最小风险准则
    - 简单说就是采取不同的决策有着不同的风险权重，在决策的情况下上乘上相应风险就行
  - 贝叶斯决策的三个前提
    - 类别数确定
    - 各类先验概率$P(C_i)$已知
    - 各类的条件概率密度函数$p(x \mid C_i)$已知
  - 我们需要做的事
    - 基于样本估计$P(C_i)$和$p(x \mid C_i)$
    - 基于样本直接确定判别函数

已知先验分布和观测值的类条件分布，贝叶斯决策理论是最优的

决策：样本空间到决策空间到映射

基于最小错误率的Bayes决策

- 条件错误率$P(e \mid x)$

$$P(e|x) = \begin{cases} P(w_2|x) = 1 - P(w_1|x) & x \in w_1 \\ P(w_1|x) = 1 - P(w_2|x) & x \in w_2 \end{cases}$$

最小错误率决策

- 每个决策的条件错误率

$$P(e|x) = 1 - P(w_i|x) \ \ ,if\ x \in w_i$$

- 决策

$$D(x) = arg\ max_i P(w_i|x)$$

Bayes 公式

$$P(w_i|x) = \frac{P(x|w_i)P(w_i)}{P(x)} = \frac{P(x|w_i)P(w_i)}{\sum_i P(x|w_i)P(w_i)}$$

其中：$P(w_i)$先验概率，$P(x \mid w_i)$条件概率

Note

- 比较大小不需要计算$P(x)$
- 常常做取对数处理

$$ln(P(x|w_i)P(w_i)) = ln(P(x|w_i)) + ln(P(w_i))$$

基于最小风险的Bayes决策

> 决策要考虑决策可能引起的损失（例如医疗误诊）

考虑各种错误造成损失不同时的一种最优决策，就是所谓的最小风险贝叶斯决策。设对于实际状态为w_j的向量x采取决策α_i所带来的损失为

$$\lambda(\alpha_i, w_j), i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, c$$

1. 利用贝叶斯公式计算后验概率

$$P(w_j|x) = \frac{P(x|w_j)P(w_j)}{\sum_{i=1}^{c} P(x|w_i)P(w_i)}, j = 1, \ldots, c$$

2. 利用决策表，计算条件风险

$$R(\alpha_i|x) = \sum_{j=1}^{c} \lambda(\alpha_i|w_j)P(w_j|x), i = 1, \ldots k$$

3. 决策：选择风险最小的决策

$$\alpha = argmin_{i=1,...,k} R(\alpha_i|x)$$

PS：两类问题正态模型的决策面

$$ln(P(x|w_1)P(w_1)) = ln(P(x|w_2)P(w_2))$$