【重版】朴素贝叶斯与拣鱼的故事

原创 夕小瑶 夕小瑶的卖萌屋 2017-04-11

重版公告

由于小夕之后要讲的好几篇文章要基于这一篇的知识，但是以前写的的这篇文章对朴素贝叶斯的讨论不够深入，又不值得再额外写一篇朴素贝叶斯啦，因此本文重版了以前的文章《朴素贝叶斯》。与旧版相比，新版对基础知识的讲解进行了大幅更新，并加入了一些更深的讨论和结论，并重新进行了排版。

朴素贝叶斯分类器可以说是最经典的基于统计的机器学习模型了。首先，暂且不管贝叶斯是什么意思，朴素这个名字放在分类器中好像有所深意。

一查，发现这个分类器的英文是“Naïve Bayes”。Naïve（读作“哪义务”）即幼稚的、天真的（但是总不能叫“幼稚贝叶斯”阿），Bayes即贝叶斯。那么这里的Naïve/朴素，是什么意思呢？其实就是代表着简化问题复杂度，像一个小孩子一样，不考虑复杂的东西。

Naive

一句话描述Naïve的意思就是“特征独立性假设”。详细的说，这里的独立性假设一般是指“条件独立性假设“，但是在处理序列问题时（比如文本分类、语音识别），还经常用到“位置独立性假设”，分别是什么意思呢？

条件独立性假设 {

如果我们要识别一个人的性别，要用到“身高”和“体重”这两个特征。所以这里的类别y为男/女，特征X=[x1=身高 x2=体重]。

我们知道，“身高”和“体重”明明是有关系的，比如身高1米8的人是不太可能体重低于100斤的，但是在朴素贝叶斯分类器的眼里，身高和体重没有关系。即令 x1=身高为180cm ， x2=体重为50kg ，则：

$$P(x1 = 180cm, x2 = 50kg) = P(x1 = 180cm) * P(x2 = 50kg)$$

意思即一个人身高为180cm且体重为50kg的概率就等于一个人为180cm的概率乘以一个人为50kg的概率。虽然一个人为180cm的概率很大（比如一个男孩子），一个人为50kg的概率也很大（比如一个女孩子），但是人的身高为180cm且体重为50kg的概率很小。但是在贝叶斯的条件独立性假设下，x1与x2相互独立，故是直接将$p(x1)$和$p(x2)$这两个大概率相乘的，故算出来的概率肯定远大于实际值。

总结，朴素贝叶斯模型会假设特征向量的各个维度间相互独立（毫无关系）。即“条件独立性假设”。

}

位置独立性假设{

位置独立性假设一般不会提，但是如果要用朴素贝叶斯模型解决序列化的分类问题时，就必须引入这个假设了。

位置独立性的意思是对于序列中各个位置的特征向量，完全忽略其位置信息。举个栗子，比如在文本挖掘中，“我|

喜欢|狗”中有三个特征向量$X_{t=1}, X_{t=2}, X_{t=3}$，即分别为向量“我”、向量“喜欢”、向量“狗”，如果我们按照先后顺序来考虑这三个特征的话，就能得出你喜欢狗这个事实。但是如果按照“狗”“喜欢”“我”这样的顺序的话，得到的意思就完全变了。显然，这里各个特征向量之间的先后顺序（即位置）对于语义相关的分类任务而言是很重要的。然而，朴素贝叶斯的假设就是位置之间是独立的，即完全抛弃序列的位置信息。因此在朴素贝叶斯看来，“我|喜欢|狗”与“狗|喜欢|我”是同一个分类任务。
}

好，朴素的意思我们懂了，那么核心就是贝叶斯了。

Bayes

显然，在统计理论中，与贝叶斯最相关的就是贝叶斯定理，也叫贝叶斯公式。不用管能不能看懂，先贴出通用形式的公式：

$$P(B|A)=\frac{P(B)\times P(A|B)}{P(A)}$$

我们把公式里的事件A看作样本特征为某值，该值用X表示。把B看作分类目标的类别为某值，该值用y表示。然后就会发现非常非常简单啦，如下：

$$P(y|X)=\frac{P(y)P(X|y)}{P(X)}$$

所以呢，这个公式的意思就是：

公式左边：已知样本特征的值为X的情况下，目标类别为y的概率（即$P(y|X)$，专业说法叫后验概率）就等于

公式右边：什么都不知道的情况下，目标类别为y的概率（即$P(y)$，专业说法叫类别y的先验概率）乘以已知目标类别是y的情况下，特征的值为X的概率（即$P(X|y)$，专业说法叫似然函数）。再除以什么都不知道的情况下，特征的值为X的概率（即$P(X)$，专业说法叫特征X的先验概率，也有的叫证据）。

诶？细心的读者有没有发现什么呢？相信此时肯定已经有人激动了！我们这里看一个栗子，引入更深的讨论。

就是这个栗子。

其实是下面的栗子啦(￣∇￣)。

假如小夕捕获了一批鱼，这批鱼中只有黑鱼和三文鱼。虽然小夕并不认识这两种鱼，但是小夕有设备可以测量出每条鱼肚皮的亮度等级（比如最白为10级，最黑为1级）。然后有一位好心的粉丝送给了小夕一批标好类别的黑鱼和三文鱼。那么小夕借助上面这些已经知道的东西，用朴素贝叶斯分类器来给小夕捕的那些鱼的类别贴标签，从

而分拣出三文鱼和黑鱼，要怎么做呢？

拣鱼

诶？这里不是说鱼肚皮的亮度等级都能测出来嘛？那鱼肚皮的亮度等级不就是一个特征咯，每条鱼测出来的亮度等级不就是特征的值嘛，即X。而黑鱼和三文鱼就是我们要分类的目标，记为类别c0和类别c1。有没有灵光一现？

对！还记得贝叶斯定理的等式左边的$P(y|X)$的意思吗？假如某条鱼测得的亮度等级为2，那么我们只需要计算并比较 $P(y=c0|X=2)$ 与 $P(y=c1|X=2)$ 的大小不就可以啦！肯定是值更大的，也就是概率更大的，就是我们要输出的类别呀！专业说法叫取最大后验概率。

那么怎么计算呢？显然就是用等式右边那三坨（噗，好不文明的说）。为了方便阅读，在这里再贴一遍。

$$P(y|X)=\frac{P(y)P(X|y)}{P(X)}$$

首先，右边这三坨中，除号底下的$P(X)$代表特征取某值的概率，然而我们要预测某一条鱼的类别，显然这条鱼的特征的值我们已经知道了，即定值，因此不管是求 $P(y=c0|X=2)$ 也好，求 $P(y=c1|X=2)$ 也好，$P(X)$ 是相同的值，对于比较这两个概率的大小没有任何帮助。因此干脆不计算了。

然后，这三坨中的 $P(y)$ 代表某类别的先验概率，怎么计算得到呢？还记得粉丝给了小夕一堆鱼吗？那我们直接用这一堆鱼来近似得到 $P(y)$ 不就可以啦！

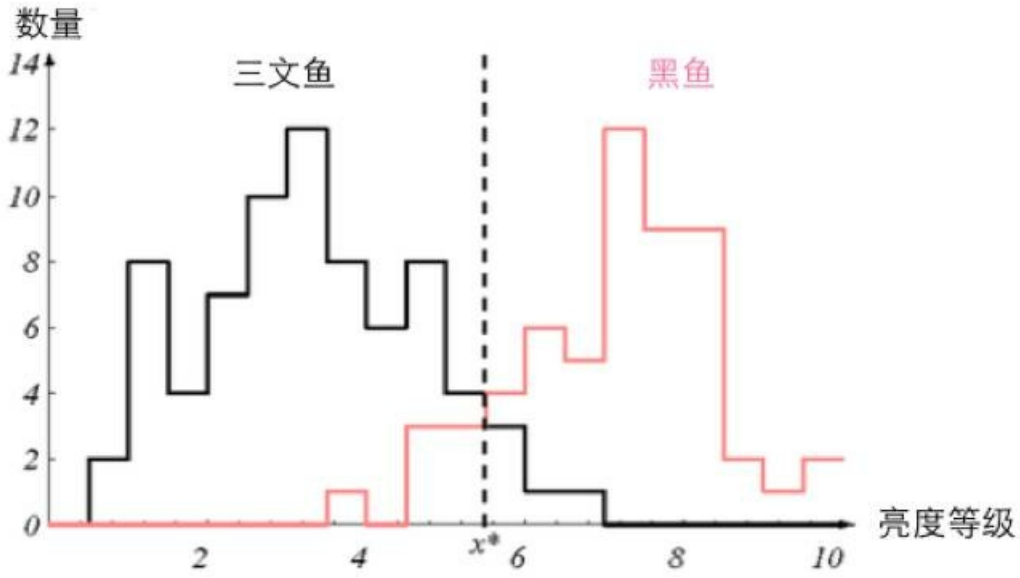
> 按照概率论的大数定律的意思，当样本足够多时，样本的统计比率就可以近似真实概率。回想一下抛10000次均匀硬币时会有接近5000次正面向上，由此得到正面向上的概率为0.5

因此，假如粉丝给了小夕10000条鱼，其中3000条是黑鱼，7000条是三文鱼，那显然 $P(y=c0)=\frac{3000}{10000}=0.3$，同理 $P(y=c1)=0.7$。看，$P(y)$ 解决了吧。

三坨中的最后一坨，$P(X|y)$ 怎么得到呢？也很轻松啊，同样是利用粉丝给的10000条鱼，小夕用设备将这10000条鱼的亮度等级测出来后，只需要从每个类别的鱼群中，统计一下特征X的每个取值下的鱼数量占该类别的鱼总数的比率就好啦。

比如黑鱼有3000条，其中亮度等级为8的鱼一共有1000条，那么 $P(X=8|y=c0)=\frac{1000}{3000}=0.3$。同理可以得到其他 $P(X|y)$ 的值啦。

至此，等式右边全都解决了，因此等式左边也能比较大小了。所以对于下面这种情况的话（粉丝给了小夕100来条鱼用于训练分类器）：



小夕做好的朴素贝叶斯分类器肯定会将亮度等级小于x*的鱼都认为是三文鱼（在此情况下，类别判定为三文鱼的概率总是比黑鱼的概率大），反之都认为是黑鱼。

等等，问题出现了，我们知道，x*的点就是$P(y=c0|X)$与$P(y=c1|X)$相等的点。但是，朴素贝叶斯在计算这两个值的时候，算出来的真的是这两个值吗？

到底是什么

还记不记得，前文中，我们在计算等式左边的时候，忽略了等式后边的$P(X)$这一项！再把公式搬过来：

$$P(y|X)=\frac{P(y)P(X|y)}{P(X)}$$

也就是说，贝叶斯分类器在计算每个类别的“后验概率”的时候，实际上计算出的并不是后验概率$P(y|X)$！由于只计算了$P(y)P(X|y)$，因此得到的结果实际上是$P(y|X)P(X)$！！！

而$P(y|X)P(X)$是什么呢？有概率论基础的同学应该知道，这个就是y与X的联合概率，也就是$P(X,y)$，也就是X与y共同发生的概率。

所以说，朴素贝叶斯分类器的核心虽然是贝叶斯公式，但是其计算某样本的各类别的可能性时，实际上计算出的不是各类别的后验概率，而是各类别y与该样本特征X的联合概率$P(X,y)$！

这一结论有什么用呢？以后就有用啦~而且至关重要哦。

等等，还有个问题，到目前为止，都没有用到文章开头写的条件独立性假设啊？这个假设有什么用呢？

多维特征

当然啦，这个假设本质上的意思就是忽略X各个维度之间的相关性，因此当X有多维特征时，就派上用场啦。

比如小夕又买了个尺子，可以测量鱼身的长度。

这时特征 X=[x1(亮度) x2(身长)] 了。这时唯一的影响就是在计算等式右边的这个 $P(X|y)$ 时，按照独立性假设展开成 $P(x1|y) * P(x2|y)$ 就可以啦。看吧，naïve一些还是可以避免很多麻烦的。
