第六次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期中试题

1.期中 2016-2017 一 4.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$,A 为 n 阶方阵，定义 $f(A)=aA^2+bA+cI$，如果 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $f(x)=x^2-x-1$, 则 $f(A)=$______。

解：

由题得：

$$A=E+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=E+B$$

可以看出：$B^2=0$. 所以 $A^2=(E+B)^2=E+B^2+2EB=E+2B$.

所以 $f(A)=A^2-A-E=E+2B-E-B-E=B-E=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\2&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$ ◇

2.期中 2017-2018 二 1. 判断是否成立并给出理由。

设 A,B 为同阶对称方阵，则 AB 一定是对称矩阵；

解：

不成立。理由：

以 2 阶对称矩阵为例：（式中:a,b,c,x,y,z 为任意实数。）

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}x&y\\y&z\end{bmatrix}\quad AB=\begin{bmatrix}ax+by&ay+bz\\bx+cy&by+cz\end{bmatrix}$$

可以看出，由于 a,b,c,x,y,z 取值的任意性，所以 $ay+bz\neq by+cz$。（可以取 $a=1,b=2,c=3,x=3,y=4,z=5$ 实际验证一下。） ◇

3.期中 2017-2018 二 4. 判断是否成立并给出理由。

设 2 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 若 A 与所有的 2 阶矩阵均可以交换，则 $a=d,b=c=0$。

解：

成立，理由如下：

取任意二阶矩阵（x,y,z,w 为任意实数）:$B=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}$, 则

$$AB=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+bz&ay+bw\\cx+dz&cy+dw\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xa+cy&xb+yd\\az+cw&bz+dw\end{bmatrix}$$

若 A 与 B 可交换，则有 $AB = BA$, 即：

$$ax + bz = xa + cy \tag{1}$$
$$ay + bw = xb + yd \tag{2}$$
$$cx + dz = az + cw \tag{3}$$
$$cy + dw = bz + dw \tag{4}$$

由 (1) 式和 (4) 式得：$bz = cy$，因为 z 和 y 为任意数，所以 $b = c = 0$，代入 (2) 式和 (3) 式：$ay = dy, az = dz$，所以 $a = d$。♢

4.期中 2018-2019 二 2.

设 A 是 n 阶实对称矩阵，如果 $A^2 = 0$，证明 $A = 0$. 并举例说明，如果 A 不是实对称矩阵，上述命题不正确。

解：

证明：依题意设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，所以 A^2 为：只看 A^2 对角线上的元素，A^2 的第 k 行第 k 列的元素为 A 的第 k 行乘第 k 列：$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \cdots + a_{kk}^2 + a_{kk+1}^2 + a_{kk+2}^2 + \cdots + a_{kn}^2 = 0$，因为平方一定大于等于 0，所以该式的每一项都为 0，即 $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{kk}, a_{kk+1}, a_{kk+2}, \cdots, a_{kn}$ 为 0. 即 A 的第 k 行和第 k 列元素为 0.（这一步看不懂的计算一下 A^2 的第一行第一列，第二行第二列的元素验证一下）

因为 A^2 为 0，即其对角线每个元素都为 0，由上边的步骤可以推出 A 的每行每列元素都为 0，即 $A = 0$。

举例：对于二阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,$A^2 = 0$，但 A 不是对称矩阵。 ♢

5.期中 2015-2016 一 2.

设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 x^3 的系数为______。

解：

方法一：求出对应的行列式，然后写出 x^3 的系数。（此方法太过繁琐，容易出错，不推荐使用）

用 $Matlab$ 计算出来的结果为：$f(x) = 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 12x - 8$.（仅供参考）

方法二：使用定义，课本 106-108 页。

思路：使用行列式的定义来做。仅找出与 x^3 有关的项。这里取列按照自然排列，行由自己指定（也可以取行按照自然排列，列由自己指定）。

第一列中：取第一行，第二列第三列第四列无论怎么取都不可能构成 x^3。

（注意：在行列式的定义式中，每一项中的几个元素必须来自不同的行数和列数，如：对于此题来说，列按自然排列，第一个元素取第一列中的第一行，那么第二个元素只能从剩下三列中的剩下三行来取）

第一列中：取第二行，第二列取第一行，第三列取第三行，第四列取第四行。即 $(-1)^{\tau(2134)} a_{21} a_{12} a_{33} a_{44} = (-1)^1 1 * x * x * x = -x^3$(注意下标，列（黑色）是自然排列，行（红色）是上边分析得来的)

第一列取第三行第四行都不能构成 x^3。

验证：x^2 的系数

列取自然排列，行按下述几个取时构成 x^2:1324 3124 3214 4231 4132 即：

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{32} a_{23} a_{44} + (-1)^{\tau(3124)} a_{31} a_{12} a_{23} a_{44} + \\ &(-1)^{\tau(3214)} a_{31} a_{22} a_{13} a_{44} + (-1)^{\tau(4132)} a_{41} a_{12} a_{33} a_{24} + (-1)^{\tau(4231)} a_{41} a_{22} a_{33} a_{14} \\ =&(-4 + 3 - 3 - 1 - 2)x^2 = -7x^2 \end{aligned}$$

可以看出和方法 1 算的结果一样。 ◇

6.期中 2015-2016 一 5.

若 A 为 4 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$, 则 $\left|\left(\dfrac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|=$_______。

解：

$$\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|=\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-|A|A^{-1}\right|=|4A^{-1}-\tfrac{1}{2}A^{-1}|=|\tfrac{7}{2}A^{-1}|=\left(\tfrac{7}{2}\right)^4|A|^{-1}=\tfrac{7^4}{8}$$ ◇

7.期中 2015-2016 一 6. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1}=$_______。

解：

$A^*=|A|A^{-1}$，所以 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}(A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A$

$|A|=1\times1\times3=3$ 所以：$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{3}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}$ ◇

8.期中 2015-2016 三 1.

设 A 可逆，且 $A^*B=A^{-1}+B$，证明 B 可逆，当 $A=\begin{bmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{bmatrix}$ 时，求 B。

解：

由题得：$A^*B=A^{-1}+B$，即 $(A^*-E)B=A^{-1}$，两边同时左乘 A 得：$A(A^*-E)B=E$，所以 B 可逆，其逆矩阵为 $A(A^*-E)=(|A|E-A)$.

由题得：$|A|=2\times2\times2=8$

$$B=(|A|E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}6&-6&0\\0&6&-6\\0&0&6\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

◇

9.期中 2016-2017 一 5.

若 A 为 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$_______。

解：

$$|(3A)^{-1}-2A^*|=|3^{-1}A^{-1}-2|A|A^{-1}|=|-\tfrac{2}{3}A^{-1}|=\left(-\tfrac{2}{3}\right)^3|A|^{-1}=-\tfrac{16}{27}$$ ◇

10.期中 2016-2017 二 5.

若 $\left(\dfrac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+I$，且 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，求 B。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}\end{bmatrix}$, 其中 $A_{11}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$, $A_{22}=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$，所以有：

$$|A_{11}|=|A_{22}|=2\times1=2;\quad |A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}|=4;\quad A_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix};\quad A_{22}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix};\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}&0\\0&A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+I \quad\Rightarrow\quad 4(|A|A^{-1})^{-1}BA^{-1}=2AB+I \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{|A|}ABA^{-1}=2AB+I$$

$$ABA^{-1}=2AB+I \quad\Rightarrow\quad AB=2ABA+A \quad\Rightarrow\quad AB(E-2A)=A \quad\Rightarrow\quad B(E-2A)=I \quad\Rightarrow\quad B=(E-2A)^{-1}$$

$$B=(E-2A)^{-1}=\begin{bmatrix}-3&0&0&0\\-2&-1&0&0\\0&0&-3&-2\\0&0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&0&0&0\\\frac{2}{3}&-1&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

11.期中 2016-2017 三 2.

已知 $A=(a_{ij})$ 是三阶的非零矩阵，设 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，且对任意的 i,j 有 $A_{ij}+a_{ij}=0$，求 A 的行列式。

解：

因为 $A_{ij}+a_{ij}=0$，所以可以推出 $A+(A^*)^T=0$。即 $(A^*)^T=-A$. 两边同时取行列式：

左边：$|(A^*)^T|=|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}=|A|^2$

右边：$|-A|=(-1)^3|A|=-|A|$

所以 $|A|^2=-|A|$，解得 $|A|=-1$ 或 $|A|=0$。

又因为 $(A^*)^T=-A$, 所以有 $r((A^*)^T)=r(-A)$，即 $r(A^*)=r(A)$，所以 $r(A)=n=3$。注：此步看不懂的看课本 121 页的例 3.3.23，记住这个例题的结论。

$r(A)=3$，即满秩，满秩即（可逆 & 行列式不为 0），所以 $|A|=-1$。 $\diamondsuit$

12.期中 2017-2018 二 2. 判断是否正确并说明理由。

设 A,B 为 n 阶可逆方阵，则 $(AB)^*=B^*A^*$.

解：

正确，理由如下：

因为 A,B 为 n 阶可逆方阵，所以 AB 可逆，所以 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=|A|B^*A^{-1}=B^*A^*$ $\diamondsuit$

13.期中 2018-2019 一 2.

设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2$,A^* 为 A 的伴随矩阵。

(1) 若交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C, 求 $|CA^*|$;

解：

交换交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C，所以 $|C|=-|A|$, 所以 $|CA^*|=|C||A^*|=-|A|||A|A^{-1}|-|A||A|^3|A|^{-1}=-|A|^3=-27$ $\diamondsuit$

14.期中 2018-2019 一 3.

已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}$，试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵。

解：

由伴随矩阵的性质：$A^*=|A|A^{-1}$, 所以 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A=|A^{-1}|A$

由题得：

$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&-1&1\end{vmatrix}=1$$

$$[A^{-1}|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\2&1&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&-1&1&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&4&-1&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]$$

所以 $(A^*)^{-1}=|A^{-1}|A=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-1&1&0\\-3&1&1\end{bmatrix}$ ♢

15.期中 2018-2019 二 1.

若 n 阶实矩阵 Q 满足 $QQ^T=I$，则称 Q 为正交矩阵。设 Q 为正交矩阵，则

(1)Q 的行列式为 1 或-1.

(2) 当 $|Q|=1$ 且 n 为奇数时，证明 $|I-Q|=0$，其中 I 是 n 阶单位矩阵；

(3)Q 的逆矩阵 Q^{-1} 和伴随矩阵 Q^* 都是正交矩阵。

证明：

(1) 由题得：$|QQ^T|=|I|=1$，由行列式的性质：$|QQ^T|=|Q|\cdot|Q^T|,|Q^T|=|Q|$，所以 $|QQ^T|=|Q|^2=1$，解得 $|Q|=1$ 或 $|Q|=-1$.

(2)$|I-Q|=|QQ^T-Q|=|Q|\cdot|Q^T-I|=|Q^T-I|=|(Q^T)^T-I^T|=|Q-I|=|-(I-Q)|=(-1)^n|I-Q|$，因为 n 为奇数，所以 $(-1)^n=-1$，即 $|I-Q|=-|I-Q|$，所以 $|I-Q|=0$。

(3) 因为 $QQ^T=I$，两边同时左乘 Q^{-1}:$Q^T=Q^{-1}$，两边同时右乘 $(Q^T)^{-1}$:$I=Q^{-1}(Q^T)^{-1}=Q^{-1}(Q^{-1})^T$，所以 Q^{-1} 是正交矩阵。

由伴随矩阵的性质：$Q^*=|Q|Q^{-1},(Q^T)^*=(Q^*)^T=|Q^T|(Q^T)^{-1}=|Q|(Q^{-1})^T$，所以 $Q^*(Q^*)^T=|Q|Q^{-1}|Q|(Q^{-1})^T=|Q|^2Q^{-1}(Q^{-1})^T$

由 (1) 得 $|Q|^2=1$，所以有 $|Q|^2Q^{-1}(Q^{-1})^T=Q^{-1}(Q^{-1})^T=I$，所以 Q^* 是正交矩阵。 ♢

期末试题

16.期末 2014-2015 一 2.

设 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&5&0\\3&t&4\end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵且 $AB=0$，则 $t=$______。

解：

B 为 3 阶非零矩阵且 $AB=0$ 即 B 的非零列向量为 $Ax=0$ 的解，即 $Ax=0$ 有非零解，即 $|A|=0$，把 $|A|$ 按第三列展开。

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&5&0\\3&t&4\end{vmatrix}=-2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&5\\3&t\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=-2(2t-15)+4=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{17}{2}$$

♢

17.期末 2014-2015 二.

设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&3&1&2\\x&x&-2&1\\2&1&x&4\\x&2&1&4x\end{vmatrix}$，分别求该多项式的三次项、常数项。

解：

同第一题。*Matlab* 算出的结果为：$f(x)=8x^4-14x^3+11x^2-53x+14$（作为参考）
取列为自然排列。分析得：行数按 2134 和 4231 排列时，对应的项为 x^3。即

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(4231)}a_{41}a_{22}a_{33}a_{14}=(-12-2)x^3=-14x^3$$

同理，取列为自然排列。分析得行数按：3142、3412 和 3421 排列时为常数项，即

$$(-1)^{\tau(3142)}a_{31}a_{12}a_{43}a_{24}+(-1)^{\tau(3412)}a_{31}a_{42}a_{13}a_{24}+(-1)^{\tau(3421)}a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}=-6+4+16=14$$

♢

18.期末 2014-2015 三.

设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\1&0&2&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，求 B。

解：

由题得：$|A^*|=2\times2\times2\times8=64$

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I \quad\Rightarrow\quad AB=B+3A \quad\Rightarrow\quad A^*AB=A^*B+3A^*A$$
$$A^*A=|A|A^{-1}A=|A|I \quad |A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}=|A|^{4-1}=64 \quad |A|=4$$

所以 $4B=A^*B+3\times4 \quad\Rightarrow\quad B=12(4-A^*)^{-1}$.

求逆的过程略。

最后的结果为：

$$\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\3&0&6&0\\0&4.5&0&-3\end{bmatrix}$$

♢

19.期末 2014-2015 四.

λ 为何值时，方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\\lambda x_1-x_2+x_3=2\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 有无穷多组解？并在有无穷多解时，写出方程组的通解。

解：

记 $A=\begin{bmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$,

$$|A|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}\overset{c_3+c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}2&\lambda&\lambda-1\\\lambda&-1&0\\4&5&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4)$$

可以看出 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 时即 $|A|\neq0$ 时，方程有唯一解。

$\lambda=1$ 时：

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&3&-3&-3\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+2r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{中间略}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

所以 $\lambda=1$ 时有无穷多解，$x_1=1, x_2=x_3-1$.

$\lambda=-\frac{4}{5}$ 时，$r(A)\neq r(A,B)$，此时无解。 ◇

20.期末 2016-2017 一 2.

设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}$, 则 $r(A^2-2A)=$_______。

解：

$|A^*|=|A|^{n-1}$ 得：$|A^*|=2^3=|A|^3$. 所以 $|A|=2\neq 0$。即 A 可逆。

所以 $r(A^2-2A)=r(A(A-2))=r(A-2)=r(|A|(A^*)^{-1}-2)=r((A^*)^{-1}-E)=3$.（求逆和秩的过程略） ◇

21.期末 2016-2017 二 2.

设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$,$B$ 为三阶矩阵，且满足方程 $A^*BA=I+2A^{-1}B$，求矩阵 B。

解：

由题得：$|A|=1$,$A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}$. 对题中方程两边同时左乘 A 得：

$$BA=A+2B$$

$$B=A(A-2E)^{-1}=A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&3\\0&-1&3\\0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-4&-18\\0&-1&-6\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

(求逆的过程略。$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-2&-9\\0&-1&-3\\0&0&-1\end{bmatrix}$) ◇

22.期末 2017-2018 一 3.

设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&2&2\end{bmatrix}$, 记 $A*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$_______。

解：

$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{A}{|A|}$，由题得：$|A|=8$ ◇

23.期末 2018-2019 一 1.

设 A 为 5 阶方阵满足 $|A|=2$,A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|2A^{-1}A^*A^T|=$_______。

解：

原式 $=$

$$2^5|A^{-1}|\cdot|A^*|\cdot|A^T|=2^5\cdot|A|^{-1}\cdot|A|^{5-1}\cdot|A|=2^9=512$$

◇

24.期末 2018-2019 一 3.

设 A 为 m 阶阵，存在非零的 m 维列向量 B，使 $AB=0$ 的充分必要条件是_______。

解：

B 非零，说明 $Ax=0$ 有非零解，由存在唯一性定理：$|A|=0$，或 $r(A)<m$。 ◇