

## 第七次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

### 期末试题

1. 期末 2015-2016 一 3.

设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 若  $\sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i$  也是  $Ax = b$  的解, 则  $\sum_{i=1}^3 c_i =$ \_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b, A\alpha_3 = b, A \sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i = A(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3) = b$ .

所以  $A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = 3b$ , 即  $A \left( \frac{1}{3} \alpha_1 + \frac{1}{3} \alpha_2 + \frac{1}{3} \alpha_3 \right) = b = A(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3)$ , 所以  $\sum_{i=1}^3 c_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ . ◇

2. 期末 2015-2016 一 5.

任意 3 维实列向量都可以由向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 3)^T, \alpha_3 = (t, 1, 2)^T$  线性表示, 则  $t$  应满足条件\_\_\_\_\_。

解:

任意 3 维实列向量都可以由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 则  $e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T$  也可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 而  $e_1, e_2, e_3$  可以表示任意三维实列向量, 即向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $e_1, e_2, e_3$  可以相互线性表示, 所以  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(e_1, e_2, e_3) = 3$ . 所以  $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2t - 6 \neq 0$ , 即  $t \neq 3$ . ◇

3. 期末 2015-2016 四 2.

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 向量  $\gamma$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \gamma$  线性无关。

证明:

向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 即存在一组不全为 0 的  $k_i (1 \leq i \leq 3)$ , 使得

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 \quad (1)$$

反证: 假设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \gamma$  线性相关。则存在一组不全为 0 的  $l_i (1 \leq i \leq 3)$  和  $l$ , 使得

$$l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l(\beta + \gamma) = 0 \quad (2)$$

若  $l = 0$ , 则  $l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l(\beta + \gamma) = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 = 0$ , 此时  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 与题中的条件矛盾, 所以  $l \neq 0$ . 所以 (1) 式可变形为

$$\beta + \gamma = -\frac{1}{l}(l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3)$$

代入 (1) 式:

$$\gamma = -\frac{1}{l}(l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3) - k_1 \alpha_1 - k_2 \alpha_2 - k_3 \alpha_3$$

可以看出此时  $\gamma$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 与题目矛盾, 所以假设错误, 即向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \gamma$  线性无关. ◇

4. 期末 2016-2017 四 1.

已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是线性无关的向量组, 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  线性相关, 证明  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示并且表示方法唯一。

证明:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  线性相关, 则存在一组不全为 0 的  $l_i (1 \leq i \leq 3)$  和  $l$ , 使得

$$l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l\beta = 0 \quad (1)$$

若  $l = 0$ , 则  $l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l\beta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 = 0$ , 此时  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 与题中的条件矛盾, 所以  $l \neq 0$ . 所以 (1) 式可变形为

$$\beta = -\frac{1}{l}(l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3)$$

即  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

$\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 不妨设任意两组不全为 0 的数  $m_i, n_i, (1 \leq i \leq 3)$ , 使得

$$\beta = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 \quad (2)$$

$$\beta = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 \quad (3)$$

(2) 式减 (3) 式:  $0 = (m_1 - n_1)\alpha_1 + (m_2 - n_2)\alpha_2 + (m_3 - n_3)\alpha_3$ , 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 所以有  $m_1 - n_1 = 0, m_2 - n_2 = 0, m_3 - n_3 = 0$ , 即  $m_1 = n_1, m_2 = n_2, m_3 = n_3$ , 由于  $m_i$  和  $n_i$  的任意性, 所以可证得表示方法唯一。◇

5. 期末 2017-2018 三 3.

已知  $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$  及  $\beta_4 = (3, 10, b, 4)^T$ .

(1)  $a, b$  为何值时,  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合?

(2)  $a, b$  为何值时,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示? 并写出该表达式。

解:

记  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ , 则

$$[A|\beta] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{r_2 - 4r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 + r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b - 2 \\ 0 & 0 & a - 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b - 2 \end{array} \right]$$

(1) 可以看出  $b \neq 2, a \in R$  时,  $Ax = \beta$  无解, 即  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合。

(2)  $b = 2$  时,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

当  $a \neq 1, r(A) = r(A, \beta) = 3$ , 此时:  $Ax = \beta$  有唯一解, 即  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_3 \times \frac{1}{a-1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - r_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

此时  $Ax = \beta$  的解为  $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$ , 所以  $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ .

$a = 1$  时  $r(A, \beta) = r(A) = 2 < 3$ , 所以  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以解得  $x_1 = -1 - 2x_3, x_2 = x_3 + 2$ , 令  $x_3 = k, k \in R$ , 则  $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = -(1 + 2k)\alpha_1 + (2 + k)\alpha_2 + k\alpha_3$  ◇

6. 期末 2018-2019 一 2.

已知向量组  $\alpha_1 = (1, 3, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 4, k)$  线性无关, 则实数  $k$  满足的条件是\_\_\_\_\_。

解:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 即  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$ , 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k - 1 \end{vmatrix} = k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$$



7.期末 2018-2019 — 6.

设 3 维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 3 阶方阵  $A$  满足  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 。则行列式  $|A| =$ \_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$  所以

$$A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3)$$

即

$$\begin{aligned} |A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)| &= |A| \cdot |\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| = |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3| \\ |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3| &\xrightarrow{c_3 - c_2} |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| = -|\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| \\ |A| &= -1 \end{aligned}$$

