2020-2021 年第一学期

一、填空题 (每小题 3 分，共计 15 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$=____12____。

解：

由题得，按最后一行展开

原式 $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-6) = 12$。 ◇

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -a & -1 & a-1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 a=____1 或 3____。

解：

由题得:

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -a & -1 & a-1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{3}r_1]{r_2 + \frac{a}{3}r_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & \dfrac{a}{3} - 1 & \dfrac{a}{3} - 1 \\ 0 & \dfrac{5}{3} & a + \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$$

要使秩为 2：第二行为 0 或第二第三行的非零元素成比例。

第二行为 0 即：

$$\begin{cases} \dfrac{a}{3} - 1 = 0 \\ \dfrac{a}{3} - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

第二第三行的非零元素成比例即：

$$\frac{\frac{a}{3} - 1}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{a}{3} - 1}{a + \dfrac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad a = 1 \tag{1}$$

综上所述：$a = 1$ 或 3。 ◇

3. 已知 A, B, C, D, H 为 n 阶实矩阵，I 是同阶单位矩阵，且 $ABCDH = I$，则 C^{-1}=____$DHAB$____。

解：

等式两边同左乘 (AB) 的逆和右乘 (DH) 的逆：$C = (AB)^{-1}(DH)^{-1}$，该等式两边同时求逆：$C^{-1} = ((AB)^{-1}(DH)^{-1})^{-1} = ((DH)^{-1})^{-1} \cdot ((AB)^{-1})^{-1} = DHAB$

注：可逆矩阵的性质：$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ◇

4. 已知 A 是 3 阶方阵，I 是同阶单位矩阵，且 $|A-I| = 0, |A+I| = 0, |I-2A| = 0$，则 $|2A^2+2A-I|$=____-1.5____。

解：

特征多项式的定义：$|\lambda I - A| = 0$，也即 $|A - \lambda I| = 0$. 所以由题得：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, |I-2A| = |-2(A-\frac{1}{2}I)| = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0.5$，所以 $2A^2 + 2A - I$ 的特征值为：$2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 3, -1, 0.5$，所以 $|2A^2 + 2A - I| = 3 \times (-1) \times 0.5 = -1.5$ ◇

5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n (n \geq 2)$ 中，每个向量都能被其余向量线性表出是其向量组相关的____充分不必要____条件。

解：

从左往右：（每个向量都能被其余向量线性表出 $\Rightarrow$ 向量组相关）

向量组相关的定义是只要该向量组中有一个向量能被其余向量线性表出即可，所以满足充分性。

从右往左：（向量组相关 $\Rightarrow$ 每个向量都能被其余向量线性表出）

例如：$\alpha_1 = (1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0)^T$，该向量组相关，但 α_1 不能由 α_2 表出，不满足必要性。 ◇

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$, 求 $M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$, 其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式。

解：

由代数余子式的定义：

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21} \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23} \qquad A_{24}=(-1)^{2+4}M_{24}=M_{24}$$

所以：

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}=-A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

◇

2. 已知向量 $\alpha=(1,-1,2)^T, \beta=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)^T$, 记 $A=\alpha\beta^T$，求 A^{2021}。

解：

$$k=\beta^T\alpha=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=-2$$

$$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=\alpha k\beta^T=k\alpha\beta^T=kA=k^{2-1}A$$
$$A^3=A\cdot A^2=A\cdot kA=kA^2=kkA=k^2A=k^{3-1}A$$
$$\cdots\cdots$$
$$A^n=k^{n-1}A$$

$$A^{2021}=k^{2021-1}A=(-2)^{2020}\alpha\beta^T=2^{2020}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

◇

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 满足 $AXB=BXB+I$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵，求 X。

解：

由题得：

$$AXB=BXB+I \quad \Rightarrow \quad AXB-BXB=I \quad \Rightarrow (A-B)XB=I \quad \Rightarrow \quad X=(A-B)^{-1}B^{-1}$$

分别求两个逆 (过程略):

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A-B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A-B)^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -\frac{13}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

◇

三、解答题（每小题 13 分，共计 39 分）

1. 求向量组 $\alpha_1=(1,1,2,0)^T,\alpha_2=(-2,-1,-2,2)^T,\alpha_3=(3,4,4,-4)^T,\alpha_1=(-1,-1,0,3)^T$ 的秩以及一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量。

解：

由题得：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&1&0\\0&2&-2&2\\0&2&-4&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&-4&2\\0&0&-6&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{3}{2}r_3}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&-4&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{4})}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-3r_3}\begin{bmatrix}1&-2&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为3，极大线性无关组为：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$(依题意，任写出其中一个即可)

用 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 表示 α_4: 由最简阶梯型矩阵可以看出：$\alpha_4=\dfrac{3}{2}\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2-\dfrac{1}{2}\alpha_3$。 ◇

2. 判断线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+2x_4=1\\x_1+2x_2+4x_3+5x_4=2\\2x_1+4x_2+ax_3+x_4=1\\-x_1-2x_2-3x_3+7x_4=8\end{cases}$ 何时无解？何时有解？并在有无穷多组解时求出其通解。

解：

由题可列增广矩阵并进行高斯消元：

$$(A|b)=\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\1&2&4&5&2\\2&4&a&1&1\\-1&-2&-3&7&8\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4+r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&a-6&-3&1\\0&0&0&9&9\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4\div9]{r_3-(a-6)r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&15-3a&5-a\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-(15-3a)r_4}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&0&2a-10\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&2a-10\end{bmatrix}$$

由阶梯型矩阵可以看出：当 $r(A)\neq r(A|b)$，即 $2a-10\neq0\quad\Rightarrow\quad a\neq5$ 时，该线性方程组无解，当 $r(A)=r(A|b)$，即 $2a-10=0\quad\Rightarrow\quad a=5$ 时，该线性方程组有解，且有无穷多组解。

把 $a=5$ 代入上式继续化简：

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-3r_3}\begin{bmatrix}1&2&3&0&-1\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&0&5\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：$x_1=5-2x_2,x_3=-2,x_4=1$。

所以该方程组的一个特解为：$(5,0,-2,1)^T$，其导出组的基础解系为：$(-2,1,0,0)^T$，所以原方程组的通解为：$(5,0,-2,1)^T+k(-2,1,0,0)^T,(k\in R)$。 ◇

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-2&-2\\-2&1&-b\\-2&-b&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 相似，求 a,b 的值以及 A 的全部的特征向量。

解：

$$|A| = a\begin{vmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -b \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -b \end{vmatrix} = a(1-b^2) + 2(-2-2b) - 2(2b+2) = a - ab^2 - 8b - 8$$

相似矩阵具有相同的特征值，所以由特征值的性质有：

$$\begin{cases} -3\times 3\times 3 = a - ab^2 - 8b - 8 \\ -3+3+3 = a+1+1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \end{cases}$$

$a=1, b=-10$ 时，$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 10 \\ -2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-1 & -10 \\ 2 & -10 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[(\lambda-1)^2 - 100] - 4[2(\lambda-1)+20] = 0$$

代入 $\lambda = 3$ 得：左式等于-278 不等于右式，即 $a=1, b=-10$ 不合题意。

$a=1, b=2$ 时，$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -(3-\lambda)[(\lambda-1)(\lambda+1) - 8] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$$

符合题意。

$\lambda = 3$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

分别取 $[x_2, x_3]^T = [1,0]^T, [0,1]^T$ 得基础解系：$\alpha_1 = [-1,1,0]^T, \alpha_2 = [-1,0,1]^T$，所以 $\lambda = 3$ 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 (k_1, k_2$ 不全为 $0)$。

$\lambda = -3$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得基础解系：$\alpha_3 = [1,1,1]^T$，所以 $\lambda = -3$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3 (k_3 \neq 0)$。

综上所述：$a=1, b=2, A$ 的全部特征向量为：$k_1[-1,1,0]^T + k_2[-1,0,1]^T$ (k_1, k_2 不全为 0)，$k_3[1,1,1]^T (k_3 \neq 0)$。 ◇

四、证明题（共计 16 分）

1.（10 分）已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + 5A + 6I = 0$，证明 $A - 2I$ 可逆，并求出其逆矩阵（用 A 的多项式表示）.

证明：

由题得：

$$A^2 + 5A + 6I = A(A-2I) + 2A + 5A + 6I = A(A-2I) + 7(A-2I) + 20I = (A+7I)(A-2I) + 20I = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{A+7I}{20}(A-2I) = I$$

所以 $A-2I$ 可逆，且 $(A-2I)^{-1}=-\dfrac{A+7I}{20}$。 ◇

2.（6 分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+t\alpha_1$ 线性相关的充分必要条件是 $t=1$。

证明：

充分性：

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+t\alpha_1$ 线性相关，则存在一组不全为 0 的数 $k_i(i=1,2,3,4)$，使得

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\alpha_4+t\alpha_1)=0$$
$$\Rightarrow$$
$$(k_1+tk_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1+tk_4=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k3=0 \\ k_3+k_4=0 \\ k_1,k_2,k_3,k_4\text{不全为}0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad k_1=-tk_4=-k_2=k_3=-k_4\neq 0 \quad \Rightarrow \quad t=1$$

必要性：

$t=1$，所以 $(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)=(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_4+t\alpha_1)$，即 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+t\alpha_1$ 线性相关。

证毕。 ◇