第九次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

考研例题–特征值

1.求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-3\\-4&\lambda-2&-6\\-6&-3&\lambda-9\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-3c_2}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-4&\lambda-2&-3\lambda\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_w-3r_3}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-22&\lambda-11&0\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-13\lambda)=0$$

得到矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=13,\lambda_2=\lambda_3=0$

对 $\lambda=13$：(高斯消元的步骤略，下来自己写)

$$\begin{bmatrix}11&-1&-3\\-4&11&-6\\-6&-3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&-5\\0&3&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1=[1,2,3]^T$，所以属于特征值 13 的特征向量是 $k_1\alpha_1,(k_1\neq0)$

对 $\lambda=0$：(高斯消元的步骤略，下来自己写)

$$\begin{bmatrix}-2&-1&-3\\-4&-2&-6\\-6&-3&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2=[-1,2,0]^T$,$\alpha_3=[-3,0,2]^T$，所以属于特征值 0 的特征向量是 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,(k_2,k_3$不全为 0)。 ◇

设 $A=[a_{ij}]$ 是三阶矩阵，则 (该式不做推导，感兴趣的可以自己算一下)

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{bmatrix}=\lambda^3-\lambda^2\sum a_{ii}+S_2\lambda-|A|$$

式中：$S_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$。

若 $r(A)=1$(再复习一下第二次习题课讲的这个知识点相关的例题)，则 $|A|=0,S_2=0$, 代入到上式有

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-\sum a_{ii}\lambda^2=\lambda^2\left(\lambda-\sum a_{ii}\right)$$

做推广，对于 n 阶矩阵 A，若 $r(A)=1$, 则 $|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum a_{ii}\right)$

2.已知 $a\neq0$，求矩阵

$$\begin{bmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量。

解：

方法一：（直接计算）

由特征多项式：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -a & -a\\ -a & \lambda-1 & -a & -a\\ -a & -a & \lambda-1 & -a\\ -a & -a & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\left[\lambda-(3a+1)\right](\lambda+a-1)^3$$

得 A 的特征值是 $3a+1, 1-a$。

当 $\lambda=3a+1$ 时，由 $[(3a+1)E-A]=0$，即

$$\begin{bmatrix}3a & -a & -a & -a\\ -a & 3a & -a & -a\\ -a & -a & 3a & -a\\ -a & -a & -a & 3a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可得基础解系为 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，所以 $\lambda=3a+1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1,(k_1\neq 0)$。

当 $\lambda=1-a$ 时，由 $[(1-a)E-A]=0$，即

$$\begin{bmatrix}-a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2=(-1,1,0,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1,0)^T\alpha_4=(-1,0,0,1)^T$，所以 $\lambda=1-a$ 的特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，式中 k_2,k_3,k_4 是不全为 0 的任意常数。

方法二：（转换法）

由题得：

$$A=\begin{bmatrix}a & a & a & a\\ a & a & a & a\\ a & a & a & a\\ a & a & a & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-a\end{bmatrix}=B+(1-a)E$$

由于 $r(B)=1$，所以有

$$|\lambda E-B|=\lambda^{4-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{4}a_{ii}\right)=\lambda^3(\lambda-4a)$$

所以矩阵 B 的特征值为 $0,0,0,4a$，所以由特征值的性质，A 的特征值为 $3a+1,1-a,1-a,1-a$。

下边同方法一。 ♢

3.抽象矩阵 1

设 A 是三阶矩阵，且矩阵 A 的各行元素之和均为 5，则矩阵 A 必有特征向量________.

解：

由题得：

$$\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=5\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=5\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}\Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 必有特征值 5 且必有特征向量 $k[1,1,1]^T,(k\neq 0)$。 ♢

4.抽象矩阵 2

已知 A 是 3 阶矩阵，如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有通解 $5b+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中 η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，求 A 的特征值和特征向量。

解：

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 $Ax=b$ 的特解加上 $Ax=0$ 的通解。

由解得结构可知 $5b$ 是方程组 $Ax=b$ 的一个解，即 $A(5b)=b$，所以 $Ab=\frac{1}{5}b$。即 $\frac{1}{5}$ 是 A 的特征值，$k_1b,(k_1\neq 0)$ 是相应的特征向量。

η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，所以必有 $A\eta_1=0=0\eta_1, A\eta_2=0=0\eta_2$，所以 η_1,η_2 是 A 关于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量，所以特征值 0 对应的特征向量为 $k_2\eta_1+k_3\eta_2,(k_2,k_3$不全为$0)$。

综上所述，A 的特征值为 $\frac{1}{5},0,0$，对应的特征向量分别是 $k_1b,(k_1\neq 0)$，$k_2\eta_1+k_3\eta_2,(k_2,k_3$不全为$0)$ ♢

5.抽象矩阵 3

设 A 为 3 阶方阵，且 $|A-2E|=|A+2E|=|A-E|=0$，则 $|3A^*-2A^{-1}|=$________.

解：

A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(-1)^n|A-\lambda E|=0$，所以由题得 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，所以 $|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-4$。所以 A 可逆，所以 $A^*=|A|A^{-1}=-4A^{-1}$，所以

$$|3A^*-2A^{-1}|=|3\times(-4A^{-1})-2A^{-1}|=|-14A^{-1}|=(-14)^3|A|^{-1}=686$$

♢

期末试题

6.期末 2014-2015 一 4.

已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1,3,2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则矩阵 A^3+2A^* 主对角线元素之和为______。

解：

由题得：$|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-1\times3\times2=-6$。所以 A^* 的特征值为：$\frac{|A|}{\lambda_i}$。由特征值的性质：

A^3+2A^* 的特征值为 $\lambda_i^3+2\frac{|A|}{\lambda_i}$. 所以 A^3+2A^* 主对角线元素之和为

$$trace(A^3+2A^*)=\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i^3+2\frac{|A|}{\lambda_i}\right)=36$$

♢

7.期末 2014-2015 一 6.

设 $(1,1,1)^T$ 是矩阵 $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&a&2\\2&2&b\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a-b=$______。

解：

由特征向量的定义有

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}6\\a+2\\b+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=6\\a=4\\b=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a-b=2$$

♢

8.期末 2014-2015 八.

设 3 阶方阵 A 的特征值-1,1 对应的特征向量分别为 α_1,α_2，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 设 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，求 $P^{-1}AP$。

解：

由题得：$A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$。

(1) 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \tag{1}$$

要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，只需证明 $k_1=k_2=k_3=0$,(1) 式两边同左乘 A:

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \tag{2}$$

(1) 式减 (2) 式：$-2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$，因为 α_1 和 α_2 是分属于不同的特征值的特征向量，所以 α_1 和 α_2 线性无关。即 $\begin{cases}-2k_1=0\\-k_3=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_3=0$，代入到 (1) 式：$k_2\alpha_2=0$，又因为特征向量不为 0，所以 $k_2=0$。

综上所述：$k_1=k_2=k_3=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

(2) 由题得：

$$AP=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=P\Lambda$$

所以 $\Lambda=P^-1AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$。 ◇

9.期末 2015-2016 一 4.

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&-1\\a&-2&2\\3&b&-1\end{bmatrix}$，若 $\alpha=(1,-2,3)^T$ 是其特征向量，则 $a+b=$______。

解：

设 α 对应的特征值为 λ。由特征向量的定义：

$$A\alpha=\lambda\alpha \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}-4\\a+10\\-2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\-2\lambda\\3\lambda\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=-4\\a=-2\\b=6\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a+b=4$$

◇

10.期末 2016-2017 三 1.

令 $\alpha=(1,1,0)^T$, 实对称矩阵 $A=\alpha\alpha^T$.

(1) 把矩阵 A 相似对角化；

(2) 求 $|6I-A^{2017}|$.

解：

由题得：$A=\alpha\alpha_T=(1,1,0)^T(1,1,0)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。所以

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-1)^2-1]=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=0$$

$\lambda_1=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{高斯消元，步骤略}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

可以看出，$\lambda_1=2$ 时：代数重数等于几何重数。

$\lambda_2=\lambda_3=0$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{高斯消元，步骤略}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

可以看出，$\lambda_2=\lambda_2=0$ 时：代数重数等于几何重数。

所以 A 可以相似对角化：即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{bmatrix}$，其中 $P=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

(2) 由特征值的性质：$6I-A^{2017}$ 的特征值为：$6-\lambda_i^{2017}$，所以

$$|6I-A^{2017}|=\prod_{i=1}^{3}(6-\lambda_i^{2017})=36\times(6-2^{2017})$$

◇

11.期末 2017-2018 一 5.

若 3 阶矩阵 A 相似于 B，矩阵 A 的特征值是 1,2,3 那么行列式 $|2B+I|=$______。(其中 I 是 3 阶单位矩阵)

解：

A 相似于 B, 所以 A 与 B 的特征值相等。所以 $2B+I$ 的特征值为 $2\lambda_i+1$，所以 $|2B+I|=\prod\limits_{i=1}^{3}(2\lambda_i+1)=105$ ◇

12.期末 2017-2018 三 1.

设 1 为矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\x&1&-1\\1&1&x\end{bmatrix}$ 的特征值，其中 $x>1$.

(1) 求 x 及 A 的其他特征值。

(2) 判断 A 能否对角化，若能对角化，写出相应的对角矩阵 Λ。

解：

设 α_1 为特征值 1 对应的特征向量，所以 $\alpha_1\neq 0$ 由题得：$A\alpha_1=\alpha_1$，即 $(A-E)\alpha_1=0$，即 $(A-E)x=0$ 有非零解。所以由存在唯一性定理：$|A-E|=0$，所以

$$|A-E|=\begin{vmatrix}0&2&3\\x&0&-1\\1&1&x-1\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}2&3\\1&x-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&3\\0&-1\end{vmatrix}=(2x-1)(x-2)=0$$

由题得：$x>1$，所以解得 $x=2$。

(2) 把 $x=2$ 代入得：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-3\\-(\lambda+1)&\lambda-1&1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-2&-3\\-1&\lambda-1&1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{=\!=\!=}(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-2&-3\\0&\lambda-3&-2\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-2)-2]=0$$

解得：$\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-1$。

因为 A 为三阶，并且有 3 个不同的特征值，所以可以相似对角化，$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&4&\\&&-1\end{bmatrix}$。（不唯一，只要对角线元素是这三个就可以）

◇

13.期末 2017-2018 四 1.

设 A, B 均为 n 阶方阵，证明：若 A, B 相似则 $|A| = |B|$，举例说明反过来不成立。

证明：

若 A 与 B 相似，则依定义有: 存在一个可逆矩阵 P，使得 $A = P^{-1}BP$，两边同时求行列式：$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}| \cdot |B| \cdot |P| = |B| \cdot |P^{-1}P| = |B| \cdot |E| = |B|$。

反过来描述：如果 $|A| = |B|$，则 A 和 B 相似。

例如：$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = 1, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |B| = 1$，所以 $|A| = |B|$, 但是：假设存在一个可逆矩阵 P,$P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$，即 $|A| = |B|$，但是 A, B 不相似。 ♢

14.期末 2018-2019 一 4.

设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，其特征值为 $1, -1, 2$，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 A^* 的主对角线元素之和即 $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$_______。

解：

由题得：$|A| = \prod\limits_{i=1}^{3} \lambda_i = -2$，所以 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_i}$，所以 A^* 的主对角线元素之和为 $trace(A^*) = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{|A|}{\lambda_i} = -1$。 ♢

15.期末 2018-2019 四 2.

若同阶矩阵 A 与 B 相似，即 $A \sim B$，证明 $A^2 \sim B^2$。反过来结论是否成立并说明理由。

证明：

若 A 与 B 相似，则依定义有: 存在一个可逆矩阵 P，使得 $A = P^{-1}BP$，所以：$A^2 = P^{-1}BP \cdot P^{-1}BP = P^{-1}B^2P$。所以 $A^2 \sim B^2$。

反过来描述：如果 $A^2 \sim B^2$，则 A 和 B 相似。

不成立。理由如下：

例如：$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以 $A^2 = B^2$, 由相似的性质 $A^2 \sim B^2$ 但是：假设存在一个可逆矩阵 P,$P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$，即 $A^2 \sim B^2$，但是 A, B 不相似。 ♢

16.期末 2018-2019 四 3.

设 λ_1, λ_2 是 A 的两个互异的特征值，$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量，$\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，证明：向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 线性无关。

证明：

由题得：$A\alpha_{1i} = \lambda_1\alpha_{1i}, (1 \leq i \leq s), A\alpha_{2j} = \lambda_1\alpha_{1j}, (1 \leq j \leq t)$。

设

$$k_1\alpha_{11} + \cdots + k_s\alpha_{1s} + k_{s+1}\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0 \tag{1}$$

要证明向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 线性无关，只需证明 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = k_{s+1} = \cdots = k_{s+t} = 0$ 即可。

在 (1) 式左边同乘 A:

$$k_1A\alpha_{11} + \cdots + k_sA\alpha_{1s} + k_{s+1}A\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}A\alpha_{2t} = \lambda_1(k_1\alpha_{11} + \cdots + k_s\alpha_{1s}) + \lambda_2(k_{s+1}\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}\alpha_{2t}) = 0 \tag{2}$$

$(2) - \lambda_2(1)$ 得：$(\lambda_1 - \lambda_2)(k_1\alpha_{11} + \cdots + k_s\alpha_{1s}) = 0$，因为 λ_1, λ_2 是 A 的两个互异的特征值，所以 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$，所以 $k_1\alpha_{11} + \cdots + k_s\alpha_{1s} = 0$，又因为 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量, 所以：$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$。代入到 (1) 式得：

$k_{s+1}\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0$，因为 $\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，所以 $k_{s+1} = k_{s+2} = \cdots = k_{s+t} = 0$

综上所述：$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = k_{s+1} = k_{s+2} = \cdots = k_{s+t} = 0$, 所以向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 线性无关。 ♢

17.期末 2019-2020 一 1.

设 A 是 3 阶方阵,E 是 3 阶单位矩阵,已知 A 的特征值为 $1, 1, 2$, 则 $\left| \left(\left(\dfrac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E \right| =$_______。

解：

由题得：$|A| = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 2, A^*$ 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda} = \dfrac{2}{\lambda}$.

由伴随矩阵的性质：$\left(\dfrac{1}{2}A\right)^* = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-1} A^* = \dfrac{A^*}{4}$, 所以 $\left(\left(\dfrac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1} - 2A^{-1} + E$ 的特征值为

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\lambda_i}\right)^{-1} - 2\lambda_i^{-1} + 1 = 2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1$$

所以：

$$\left|\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1} - 2A^{-1} + E\right| = \prod_{i=1}^{3}\left(2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1\right) = 4$$

◇

18.期末 2019-2020 一 5.

已知 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $c\alpha$, 其中 c 为非零常数，设 n 阶方阵 P 可逆，则 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为______。

解：

由题得：$A(c\alpha) = \lambda(c\alpha)$ 等式两边同时左乘 P^{-1}:

$$P^{-1}AE(c\alpha) = P^{-1}APP^{-1}(c\alpha) = (P^{-1}AP)(P^{-1}c\alpha) = \lambda(P^{-1}c\alpha)$$

所以 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $P^{-1}c\alpha = cP^{-1}\alpha$ ◇

19.期末 2019-2020 三 2.

已知 3 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & a+2 & 0 \\ a-2 & 3 & 0 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}$ 可以相似对角化且 A 得到特征方程有一个二重根，求 a 的值。其中 $a \le 0$.

解：

由题得:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -(a+2) & 0 \\ 2-a & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)[(\lambda+1)(\lambda-3) + (2+a)(2-a)] = (\lambda+1)[(\lambda-1)^2 - a^2] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1+a, \lambda_3 = 1-a.$$

依题意：有二重根且可以相似对角化且 $a \le 0$.

讨论：

(1)$\lambda_1 = \lambda_2$，即 $-1 = 1+a, a = -2 \le 0$, 此时 $\lambda_3 = 1-a = 3$, 代入到 $\lambda E - A$ 得：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根 -1:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于根 3:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可以看出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 A 可相似对角化，即 $a=-2$ 符合题意。

(2)$\lambda_1=\lambda_3$, 即 $-1=1-a, a=2>0$，不符合题意。

(3)$\lambda_2=\lambda=3$, 即 $1+a=1-a, a=0$。此时 $\lambda_2=\lambda_3=1$. 把 $a=0$ 代入到 $[\lambda E-A]$ 得:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ -8 & 8 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

对于重根 1:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ -8 & 8 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

对于重根 1，其代数重数与几何重数不相等，所以不能相似对角化。

综上所述：$a=-2$. $\diamondsuit$