# 补充

1.二项式定理 (记住这个结论，后边会用到):

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\left(C_n^i a^i b^{n-i}\right)$$

# 期中试题

2. 16-17 学年 (一.3)

设方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+kx_2-x_3=0\\ kx_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $k=$ __________。

解：

由题得，系数矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&k&-1\\k&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\frac{k}{2}r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&k+\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&1+\frac{k}{2}&1-\frac{k}{2}\end{pmatrix}$$

要使齐次方程组有非零解，则需存在自由变量。对于齐次方程，方程的个数小于未知数个数则有非零解，此时只需让第二个和第三个方程中对应的非零系数成比例即可 (这样便可以消去其中一个方程)，即

$$\frac{k+1/2}{1+k/2}=\frac{-3/2}{1-k/2}\quad\Rightarrow\quad k=4\text{或}k=\text{-}1$$

◇

# 期末试题

3. 14-15 学年 (四)

$\lambda$ 为何值时，方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 有无穷多组解？并在有无穷多解时，写出方程组的通解。

解：

由题得增广矩阵：

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&\lambda&-1&1\\\lambda&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}2&\lambda&-1&1\\0&-1-\frac{\lambda^2}{2}&1+\frac{\lambda}{2}&2-\frac{\lambda}{2}\\0&5-2\lambda&-3&-3\end{array}\right)$$

第二行中：$\lambda^2\geq 0$，所以可以推出 $-1-\frac{\lambda^2}{2}\leq -1$，即 $-1-\frac{\lambda^2}{2}\neq 0$，继续高斯消元：

$$\xrightarrow{r_3+r_2\frac{5-2\lambda}{1+\frac{\lambda^2}{2}}}\left(\begin{array}{ccc:c}2&\lambda&-1&1\\0&-1-\frac{\lambda^2}{2}&1+\frac{\lambda}{2}&2-\frac{\lambda}{2}\\0&0&\frac{-5\lambda^2+\lambda+4}{\lambda^2+2}&\frac{-\lambda^2-13\lambda+14}{\lambda^2+2}\end{array}\right)$$

要使方程组有无穷多解，则需存在自由变量，而 $-1-\frac{\lambda^2}{2}\neq 0$，即 $x_1,x_2$ 都不为自由变量，所以 $x_3$ 为自由变量，所以：

$$\frac{-5\lambda^2+\lambda+4}{\lambda^2+2}=0\quad\text{且}\quad\frac{-\lambda^2-13\lambda+14}{\lambda^2+2}=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=1$$

计算结果代入上述阶梯型矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{2}{3}\right)]{r_1\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

由最简阶梯型矩阵可以得出：$x_1=1,x_2=x_3-1$，令 $x_3=k,k\in R$ 则

$$x=\begin{pmatrix}1\\k-1\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad k\in R$$

◇

4. 15-16 学年 (三.1)

当 $k$ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=k-3\\x_1+kx_2+x_3=-2\\x_1+x_2+kx_3=-2\end{cases}$ 有唯一解，无解和有无穷多解？当方程组有无穷多解时求出所有解。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c}k&1&1&k-3\\1&k&1&-2\\1&1&k&-2\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\k&1&1&k-3\\1&1&k&-2\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-kr_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k^2&1-k&3(k-1)\\0&1-k&k-1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k&k-1&0\\0&1-k^2&1-k&3(k-1)\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-(1+k)r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k&k-1&0\\0&0&(1-k)(k+2)&3(k-1)\end{array}\right]$$

讨论：

(1) 解不存在：即存在矛盾方程（增广矩阵主元列在最右列）。即对于 $r_3$

$$\begin{cases}(1-k)(k+2)=0\\3(k-1)\neq 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k=-2$$

(2) 存在唯一解：主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases}1\neq 0\\1-k\neq 0\\(1-k)(k+2)\neq 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k\neq 1\text{且}k\neq -2$$

$k\neq 1$且$k\neq -2$，继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{(k+2)(1-k)}]{r_2\times\frac{1}{1-k}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1&-1&0\\0&0&1&\frac{3}{(k+2)}\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&0&-2-\frac{3}{k+2}\\0&1&0&\frac{3}{k+2}\\0&0&1&\frac{3}{k+2}\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-kr_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-\frac{5k+1}{k+2}\\0&1&0&\frac{3}{k+2}\\0&0&1&\frac{3}{k+2}\end{array}\right]$$

所以方程组存在唯一解时：$k\neq 1$ 且 $k\neq -2$，解为

$$\text{x}=\begin{bmatrix}-\frac{5k+1}{k+2}\\\frac{3}{k+2}\\\frac{3}{k+2}\end{bmatrix},\quad k\neq 1\text{且}k\neq -2$$

(3) 存在无穷解：至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases}(k-1)(k+2)=0\\3(k-1)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k=1$$

把 $k=1$ 代入阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\quad\Rightarrow\quad x=\begin{bmatrix}-2-c_1-c_2\\c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

所以 $x$ 的解为 $x=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}c_1+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}c_1 \quad c_1,c_2\in R$。 ◇

5. 17-18 学年 (二.3)

求线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4\\ x_1+x_3-x_4=-3\\ 3x_1+x_2+x_3=1\\ 7x_1+7x_3-3x_4=3\end{cases}$ 的通解。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{r_2-\frac{1}{2}r_1\\ r_3-\frac{3}{2}r_1\\ r_4-\frac{7}{2}r_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}2&-1&4&-3&-4\\0&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&-1\\0&\frac{5}{2}&-5&\frac{9}{2}&7\\0&\frac{7}{2}&-7&\frac{15}{2}&17\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{r_3-5r_2\\ r_4-7r_2}}\left[\begin{array}{ccccc:c}2&-1&4&-3&&-4\\0&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&&-1\\0&0&&0&2&12\\0&0&0&4&&24\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4-2r_3}\left[\begin{array}{ccccc:c}2&-1&4&-3&&-4\\0&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&&-1\\0&0&&0&2&12\\0&0&0&0&&0\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{r_1\times\frac{1}{2}\\ r_2\times 2\\ r_3\times\frac{1}{2}}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-\frac{1}{2}&2&-\frac{3}{2}&-2\\0&1&-2&1&-2\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{r_2-r_3\\ r_1+\frac{3}{2}r_3}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-\frac{1}{2}&2&0&7\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+\frac{1}{2}r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$x_1=3-x_3 \quad x_2=2x_3-8 \quad x_3=x_3 \quad x_4=6$$

令 $x_3=C,C\in R$，则

$$x=\begin{bmatrix}3-C\\2C-8\\C\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-8\\0\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}C\ ,\ C\in R$$

◇

6. 18-19 学年 (三.1)

设 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-2\\ x_1+\lambda x_2+x_3=2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=2\end{cases}$，$\lambda$ 为何值时，该方程组无解、唯一解、无穷解？并且在有唯一解时求出解；有无穷多解时，求出全部解并用向量表示。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&\lambda-2\\1&\lambda&1&2\\1&1&\lambda&2\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&\lambda&1&2\\\lambda&1&1&\lambda-2\\1&1&\lambda&2\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{r_2-\lambda r_1\\ r_3-r_1}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&\lambda&1&2\\0&1-\lambda^2&1-\lambda&-\lambda-2\\0&1-\lambda&\lambda-1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&\lambda&1&2\\0&1-\lambda&\lambda-1&0\\0&1-\lambda^2&1-\lambda&-\lambda-2\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-(\lambda+1)r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&\lambda&1&2\\0&1-\lambda&\lambda-1&0\\0&0&(\lambda-1)(-2-\lambda)&-\lambda-2\end{array}\right]$$

讨论：

(1) 解不存在：即存在矛盾方程（增广矩阵主元列在最右列）。即对于 $r_3$

$$\begin{cases}(\lambda-1)(-2-\lambda)=0\\ -\lambda-2\neq 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lambda=1$$

(2) 存在唯一解：主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases}1\neq 0\\ 1-\lambda\neq 0\\ (\lambda-1)(-2-\lambda)\neq 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lambda\neq 1\text{且}\lambda\neq -2$$

$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$，继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{(\lambda-1)(-2-\lambda)}]{r_2\times\frac{1}{1-\lambda}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&\lambda&1&2\\0&1&-1&0\\0&0&1&\frac{1}{\lambda-1}\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&\lambda&0&\frac{2\lambda-3}{\lambda-1}\\0&1&0&\frac{1}{\lambda-1}\\0&0&1&\frac{1}{\lambda-1}\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-\lambda r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{\lambda-3}{\lambda-1}\\0&1&0&\frac{1}{\lambda-1}\\0&0&1&\frac{1}{\lambda-1}\end{array}\right]$$

所以方程组存在唯一解时：$\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$，解为

$$\mathrm{x}=\begin{bmatrix}\frac{\lambda-3}{\lambda-1}\\ \frac{1}{\lambda-1}\\ \frac{1}{\lambda-1}\end{bmatrix}, \quad \lambda\neq 1\text{且}\lambda\neq -2$$

(3) 存在无穷解：至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases}(\lambda-1)(-2-\lambda)=0\\ -2-\lambda=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lambda=-2$$

把 $\lambda=-2$ 代入阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&2\\0&3&-3&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&2\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$x_1=2+x_3 \quad x_2=x_3 \quad x_3=x_3$$

令 $x_3=C, C\in R$，则

$$x=\begin{bmatrix}2+C\\C\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}C\ ,\ C\in R$$

◇

7. 19-20 学年 (一.4)

若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\ x_2+x_3=a_2\\ x_3+x_4=-a_3\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$ 有解，$a_1,a_2,a_3,a_4$ 应满足的条件是 $\underline{a_1+a_2+a_3+a_4=0}$。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\1&0&0&1&a_4\end{array}\right]\xrightarrow{r_4-r_1}\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&-1&0&1&a_1+a_4\end{array}\right]\xrightarrow{r_4+r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&1&1&a_1+a_2+a_4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4\end{array}\right]$$

若方程有解：$a_1+a_2-a_3+a_4=0$ ◇

8. 19-20 学年 (二.2)

求线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+3x_4=0\\2x_1+4x_2+x_3+3x_4=0\\2x_1+4x_2+4x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系。

解：

注：基础解系的定义后边会学，此处主要还是学会熟练使用高斯消元法。

由题得：增广矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2&3\\2&4&1&3\\2&4&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&3&2&3\\0&-2&-3&-3\\0&-2&-4&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&3&2&3\\0&-2&-3&-3\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+2r_3}\begin{bmatrix}1&3&0&5\\0&-2&0&-6\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&3&0&5\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

所以 $x_1=4x_4,x_2=-3x_4,x_3=x_4$，令 $x_4=1$，得基础解系：$\xi=[4,-3,1,1]^T$。 ◇

9. 20-21 学年 (三.2)

判断线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+2x_4=1\\x_1+2x_2+4x_3+5x_4=2\\2x_1+4x_2+ax_3+x_4=1\\-x_1-2x_2-3x_3+7x_4=8\end{cases}$ 何时无解？何时有解？并在有无穷多组解时求出其通解。

解：

由题可列增广矩阵并进行高斯消元：

$$(A|b)=\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\1&2&4&5&2\\2&4&a&1&1\\-1&-2&-3&7&8\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&a-6&-3&1\\0&0&0&9&9\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4\div 9]{r_3-(a-6)r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&15-3a&5-a\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-(15-3a)r_4}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&0&2a-10\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&2a-10\end{bmatrix}$$

由阶梯型矩阵可以看出：

(1) 无解：当 $2a-10\neq 0 \quad\Rightarrow\quad a\neq 5$ 时，存在矛盾方程，则该线性方程组无解

(2) 当 $2a-10=0 \quad\Rightarrow\quad a=5$ 时，该线性方程组有解，此时 $x_2$ 为自由变量，所以有无穷多组解。

把 $a=5$ 代入上式继续化简：

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-3r_3}\begin{bmatrix}1&2&3&0&-1\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&0&5\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：$x_1=5-2x_2, x_3=-2, x_4=1$。

令 $x_2=k, k\in R$，则：

$$x=\begin{pmatrix}5-2k\\k\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad k\in R$$

$\diamondsuit$