

## 第十次习题课 知识点

1. 在  $\mathbb{R}^n$  中, 设向量  $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ , 实数  $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i$  称为向量  $\alpha$  和  $\beta$  的

内积。记作  $\alpha^T\beta$  或  $\alpha \cdot \beta$ 。

性质:

$$(1) \alpha^T\beta = \beta^T\alpha;$$

$$(2) (k\alpha)^T\beta = k\beta^T\alpha;$$

$$(3) (\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$$

$$(4) \alpha^T\alpha \geq 0, \alpha^T\alpha = 0, \text{ 当且仅当 } \alpha = 0.$$

2.  $\forall \alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , 定义其长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

, 向量长度称为向量范数。

性质:

$$(1) \|\alpha\| \geq 0, \|\alpha\| = 0 \text{ 当且仅当 } \alpha = 0. \text{ 非负性}$$

$$(2) \|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|, k \text{ 为实数}.$$

$$(3) \text{ 对任意向量 } \alpha, \beta, \text{ 有 } |\alpha^T\beta| \leq \|\alpha\|\|\beta\| \text{ (Schwarz 不等式)}$$

3. 单位向量。对任意非零向量  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , 则向量  $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$  是一个单位向量。

4.  $\alpha\beta \in \mathbb{R}^n$ , 若  $\alpha$  与  $\beta$  的内积为零, 则称  $\alpha$  与  $\beta$  正交 (垂直)。

5. 如果  $\mathbb{R}^n$  中的非零向量组  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  两两正交,  $\alpha_i^T\alpha_j = 0 (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, s)$ , 则称该向量组为正交向量组。进一步, 如果  $\forall i, \|\alpha_i\| = 1$ , 则称为单位 (规范) 正交向量组。

6.  $\mathbb{R}^n$  中的正交向量组线性无关。

7.  $\mathbb{R}^n$  中的线性无关向量组  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  可以化为另一正交向量组  $\beta_1, \cdots, \beta_s$ , 并且

$$\alpha_1 \leftrightarrow \beta_1$$

$$\alpha_1\alpha_2 \leftrightarrow \beta_1\beta_2$$

...

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_s \leftrightarrow \beta_1, \cdots, \beta_s$$

这一方法称为施密特正交化方法。

$$\beta_n = \alpha_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_n^T\beta_i}{\beta_i^T\beta_i} \beta_i \quad (n = 1, 2, \cdots, s)$$

8. 若  $n$  阶实矩阵  $Q$ , 满足  $Q^TQ = E$ , 则称  $Q$  为正交矩阵。

性质:

$$(1) \text{ 若 } Q \text{ 为正交矩阵, 则 } |Q| = 1 \text{ 或 } |Q| = -1.$$

$$(2) \text{ 若 } Q \text{ 为正交矩阵, 则 } Q^{-1} = Q^T.$$

(3) 若  $P, Q$  为正交矩阵, 则  $PQ$  是正交矩阵。

(4)  $Q$  是正交矩阵等价于  $QQ^T = E$

9. 设  $Q$  为  $n$  阶实矩阵, 则  $Q$  为正交矩阵的充分必要条件是列 (行) 向量组是规范正交向量组。

10. 实对称矩阵的特征值都是实数。

11. 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量是正交的。

12. 设  $A$  为实对称矩阵, 则存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1}AQ$  为对角矩阵。