王松年　　　　　　第四次作业

例2.23

解：任意矩阵都能通过初等变换化为标准型矩阵。

步骤：对任意矩阵A先进行高斯消元法得到行阶梯型矩阵或行最简……。

然后对行阶梯…(或行最简…)进行初等列变换得到标准型矩阵。

对矩阵施以行变换等价于在矩阵左乘一个同等阶初等矩阵。

………列……………右………………。

由于变换步骤不唯一，所以最终结果不唯一。

由题得：(E 指单位矩阵)

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 3&5&0&0\\ 0&0&0&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&2&0&0\\ 0&0&0&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&3 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ $E_4(14)A$

$\Downarrow$ $\underbrace{E_4(31(-3))\cdot E_4(14)A}_{记为B}$

$\Downarrow$ $\underbrace{E_4(23)\cdot B}_{记为C}$

$$\xrightarrow[r_4\times\frac{1}{3}]{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3]{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3&0\\ 0&0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ $E_4(4(\frac{1}{3}))\cdot E_4(2(\frac{1}{2}))\cdot C$ 或 $\underbrace{E_4(2(\frac{1}{2}))\cdot E_4(4(\frac{1}{3}))\cdot C}_{记为D}$

$\Downarrow$ $E_4(43(-1))E_4(12(-1))\cdot D$ 或 $\underbrace{E_4(12(-1))E_4(43(-1))\cdot D}_{记为F}$

注意这里是列变换

$\Downarrow$ $F\cdot E_4(34)$

这里高斯消元法结束

综上所述：

$$\underbrace{E_4(43(-1))E_4(12(-1))}_{这两个可交换位置}\underbrace{E_4(4(\tfrac{1}{3}))E_4(2(\tfrac{1}{2}))}_{这两个可交换位置}E_4(23)E_4(31(-3))\cdot E_4(14)AE_4(34)$$

例2.24

(1) 不正确。~~性质6: $R(A+B)\le R(A)+R(B)$，题中说的是可能，∴正确~~ ×

A+B仍为2×3矩阵，$R(A)\le \min\{m,n\}=2$，∴不可能为4.

(2) 正确。$r(A)=2$，$r(B)=3$　$r(A)\ne r(B)$ ∴解不存在。

例2.25 课本100页定理3.2.3

相抵首先要满足矩阵大小相同，∴ B_1 不相抵

$r(A)=2$，$r(B_2)=2$，$r(B_3)=2$，$r(B_4)=2$，∴ A与 B_2, B_3, B_4 相抵。

$$A \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 17 \\ 0 & 2 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore r(A)=2.$$

$$B_2 \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore r(B_2)=2.$$

例2.26 对于任意n阶方阵，$I_nA=AI_n=A$.

由题得：$A^2-6A+5I_n=(A-5I_n)(A-I_n)=0$

所以有 $r(A-5I_n)+r(A-I_n)\le n$ (性质8)

又∵ $r((A-5I_n)-(A-I_n)) \le r(A-5I_n)+r(-(A-I_n))$ (性质6)

即 $r(-4I_n) \le r(A-5I_n)+r(-(A-I_n))$

$r(-4I_n)=n \le r(A-5I_n)+r(A-I_n) \le n$

综上所述 $r(A-5I_n)+r(A-I_n)=n$. 证毕.

例2.27 不正确

例 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$r(A)=0$ $r(B)=2$ $r(C)=1$ $r(A)+r(C)=1$

而

$$D=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(D)=2 \ne (r(A)+r(C))$

例2.28 对于方阵，满秩一定可逆，可逆一定满秩

$$B \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad r(B)=3=n, \ \therefore B \text{ 可逆}.$$

性质9：左乘或右乘可逆矩阵秩不变。即 $r(AB)=r(A)=2$.

例 2.29 对任意矩阵施以高斯消元法 得到的行阶梯形矩阵。行阶梯形矩阵的非0行数即为矩阵的秩。

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -10 & 2 & -6 \\ 1 & -7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_3+2r_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \cdots$$

$\therefore r(A)=3$

例 2.30 题目没说a是否为0，应该讨论

解：若 $a=0$，则 $A=0$，$r(A)=0$

若 $a\neq 0$ 则

$$A=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{即 } r(A)=1$$

例 2.31 A为$\tilde{A}$的前n列构成的子矩阵，$\therefore r(\tilde{A}) \le r(A)+1$；

若$r(A)\neq r(\tilde{A})$，则必有$r(\tilde{A})=r(A)+1$

例 2.32 课本 184页 5.

例 2.33 ------ 6.

例 2.34

解：

$$(A:B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-7r_1]{r_2-2r_1,\ r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-2r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore r(A)=r(A:B)=3<4$ 即有无穷多解。

例 2.35 解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore r(A)=2<3$，有无穷多解。

例 2.36

解：由题得：

$$(A \vdots B)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&-1&2\\3&1&-1&2&3\\2&2\lambda&-2&3&\lambda\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&-2&-4&5&-3\\0&2\lambda-2&-4&5&\lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&-1&2\\0&-2&-4&5&-3\\0&2\lambda&0&0&\lambda-1\end{array}\right)=C.$$

可以看出：

$\lambda=0$ 时，$r(A)=2$，$r(A \vdots B)=3$　$r(A)\neq r(A \vdots B)$，即无解

$\lambda\neq 0$ 时，对 C 接着化简：

$$C\xrightarrow{r_3+\lambda r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&-1&2\\0&-2&4&5&-3\\0&0&-4\lambda&5\lambda&-1-2\lambda\end{array}\right)$$　$r(A)=r(B)=3<4$，存在无穷多解

例 2.37

P84 10

例 2.38

解：设矩阵方程有 n 个未知数，n 为任意正整数。

对于齐次方程：即 B 为 0 矩阵.

$r(A)=n$ 时，$AX=B$ 有唯一解，此时解为零解

$r(A)<n$ 时，$AX=B$ 有无穷多解。

对于非齐次方程：

$r(A)\neq r(A,B)$ 时，$AX=B$ 无解；

$r(A)=r(A,B)=n$ 时，有唯一解.

$r(A)=r(A,B)<n$ 时，有无穷多解。