

## 第九次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

### 期末试题

1. 期末 2014-2015 一 4.

已知 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $-1, 3, 2$ ,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则矩阵  $A^3 + 2A^*$  主对角线元素之和为\_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -1 \times 3 \times 2 = -6$ . 所以  $A^*$  的特征值为:  $\frac{|A|}{\lambda_i}$ . 由特征值的性质:

$A^3 + 2A^*$  的特征值为  $\lambda_i^3 + 2\frac{|A|}{\lambda_i}$ . 所以  $A^3 + 2A^*$  主对角线元素之和为

$$\text{trace}(A^3 + 2A^*) = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i^3 + 2\frac{|A|}{\lambda_i} \right) = 36$$

◇

2. 期末 2014-2015 一 6.

设  $(1, 1, 1)^T$  是矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & b \end{bmatrix}$  的一个特征向量, 则  $a - b =$ \_\_\_\_\_。

解:

由特征向量的定义有

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ a+2 \\ b+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a - b = 2$$

◇

3. 期末 2014-2015 八.

设 3 阶方阵  $A$  的特征值  $-1, 1$  对应的特征向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ , 向量  $\alpha_3$  满足  $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ .

(1) 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关;

(2) 设  $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ , 求  $P^{-1}AP$ .

解:

由题得:  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ .

(1) 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (1)$$

要证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 只需证明  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , (1) 式两边同左乘  $A$ :

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = -k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (2)$$

(1) 式减 (2) 式:  $-2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$ , 因为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是分属于不同的特征值的特征向量, 所以  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  线性无关。即

$$\begin{cases} -2k_1 = 0 \\ -k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_3 = 0, \text{ 代入到 (1) 式: } k_2\alpha_2 = 0, \text{ 又因为特征向量不为 } 0, \text{ 所以 } k_2 = 0.$$

综上所述:  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。

(2) 由题得:

$$AP = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = [-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P\Lambda$$

所以  $\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

◇

4. 期末 2015-2016 一 4.

已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix}$ , 若  $\alpha = (1, -2, 3)^T$  是其特征向量, 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_。

解:

设  $\alpha$  对应的特征值为  $\lambda$ 。由特征向量的定义:

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$$

◇

5. 期末 2016-2017 三 1.

令  $\alpha = (1, 1, 0)^T$ , 实对称矩阵  $A = \alpha\alpha^T$ .(1) 把矩阵  $A$  相似对角化;(2) 求  $|6I - A^{2017}|$ .

解:

由题得:  $A = \alpha\alpha^T = (1, 1, 0)^T(1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。所以

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - 1)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

 $\lambda_1 = 2$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元, 步骤略}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以看出,  $\lambda_1 = 2$  时: 代数重数等于几何重数。 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元, 步骤略}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以看出,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  时: 代数重数等于几何重数。

所以  $A$  可以相似对角化: 即存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ , 其中  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) 由特征值的性质:  $6I - A^{2017}$  的特征值为:  $6 - \lambda_i^{2017}$ , 所以

$$|6I - A^{2017}| = \prod_{i=1}^3 (6 - \lambda_i^{2017}) = 36 \times (6 - 2^{2017})$$

◇

6.期末 2017-2018 一 5.

若 3 阶矩阵  $A$  相似于  $B$ , 矩阵  $A$  的特征值是 1,2,3 那么行列式  $|2B + I| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(其中  $I$  是 3 阶单位矩阵)

解:

$A$  相似于  $B$ , 所以  $A$  与  $B$  的特征值相等。所以  $2B + I$  的特征值为  $2\lambda_i + 1$ , 所以  $|2B + I| = \prod_{i=1}^3 (2\lambda_i + 1) = 105$  ◇

7.期末 2017-2018 三 1.

设 1 为矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$  的特征值, 其中  $x > 1$ .

(1) 求  $x$  及  $A$  的其他特征值。(2) 判断  $A$  能否对角化, 若能对角化, 写出相应的对角矩阵  $\Lambda$ 。

解:

设  $\alpha_1$  为特征值 1 对应的特征向量, 所以  $\alpha_1 \neq 0$  由题得:  $A\alpha_1 = \alpha_1$ , 即  $(A - E)\alpha_1 = 0$ , 即  $(A - E)x = 0$  有非零解。所以由存在唯一性定理:  $|A - E| = 0$ , 所以

$$|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)(x-2) = 0$$

由题得:  $x > 1$ , 所以解得  $x = 2$ 。(2) 把  $x = 2$  代入得:

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -(\lambda+1) & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-2)-2] = 0 \end{aligned}$$

解得:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$ 。

因为  $A$  为三阶, 并且有 3 个不同的特征值, 所以可以相似对角化,  $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ 。(不唯一, 只要对角线元素是这三个就可以) ◇

8.期末 2017-2018 四 1.

设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 证明: 若  $A, B$  相似则  $|A| = |B|$ , 举例说明反过来不成立。

证明:

若  $A$  与  $B$  相似, 则依定义有: 存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P^{-1}BP$ , 两边同时求行列式:  $|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}| \cdot |B| \cdot |P| = |B| \cdot |P^{-1}P| = |B| \cdot |E| = |B|$ 。

反过来描述: 如果  $|A| = |B|$ , 则  $A$  和  $B$  相似。

例如:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = 1, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |B| = 1$ , 所以  $|A| = |B|$ , 但是: 假设存在一个可逆矩阵  $P, P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$ , 即  $|A| = |B|$ , 但是  $A, B$  不相似。 ◇

9.期末 2018-2019 一 4.

设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 其特征值为 1, -1, 2,  $A_{ij}$  是元素  $a_{ij}$  的代数余子式,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $A^*$  的主对角线元素之和即  $A_{11} + A_{22} + A_{33} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得:  $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -2$ , 所以  $A^*$  的特征值为  $\frac{|A|}{\lambda_i}$ , 所以  $A^*$  的主对角线元素之和为  $\text{trace}(A^*) = \sum_{i=1}^3 \frac{|A|}{\lambda_i} = -1$ .  $\diamond$

10.期末 2018-2019 四 2.

若同阶矩阵  $A$  与  $B$  相似, 即  $A \sim B$ , 证明  $A^2 \sim B^2$ 。反过来结论是否成立并说明理由。

证明:

若  $A$  与  $B$  相似, 则依定义有: 存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P^{-1}BP$ , 所以:  $A^2 = P^{-1}BP \cdot P^{-1}BP = P^{-1}B^2P$ 。所以  $A^2 \sim B^2$ 。

反过来描述: 如果  $A^2 \sim B^2$ , 则  $A$  和  $B$  相似。

不成立。理由如下:

例如:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 所以  $A^2 = B^2$ , 由相似的性质  $A^2 \sim B^2$  但是: 假设存在一个可逆矩阵  $P$ ,  $P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$ , 即  $A^2 \sim B^2$ , 但是  $A, B$  不相似。  $\diamond$

11.期末 2018-2019 四 3.

设  $\lambda_1, \lambda_2$  是  $A$  的两个互异的特征值,  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}$  是对应于  $\lambda_1$  的线性无关的特征向量,  $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  是对应于  $\lambda_2$  的线性无关的特征向量, 证明: 向量组  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  线性无关。

证明:

由题得:  $A\alpha_{1i} = \lambda_1\alpha_{1i}, (1 \leq i \leq s), A\alpha_{2j} = \lambda_2\alpha_{2j}, (1 \leq j \leq t)$ 。

设

$$k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s} + k_{s+1}\alpha_{21} + \dots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0 \quad (1)$$

要证明向量组  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  线性无关, 只需证明  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = k_{s+1} = \dots = k_{s+t} = 0$  即可。

在 (1) 式左边同乘  $A$ :

$$k_1A\alpha_{11} + \dots + k_sA\alpha_{1s} + k_{s+1}A\alpha_{21} + \dots + k_{s+t}A\alpha_{2t} = \lambda_1(k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s}) + \lambda_2(k_{s+1}\alpha_{21} + \dots + k_{s+t}\alpha_{2t}) = 0 \quad (2)$$

(2) -  $\lambda_2$ (1) 得:  $(\lambda_1 - \lambda_2)(k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s}) = 0$ , 因为  $\lambda_1, \lambda_2$  是  $A$  的两个互异的特征值, 所以  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , 所以  $k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s} = 0$ , 又因为  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}$  是对应于  $\lambda_1$  的线性无关的特征向量, 所以:  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ 。代入到 (1) 式得:

$k_{s+1}\alpha_{21} + \dots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0$ , 因为  $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  是对应于  $\lambda_2$  的线性无关的特征向量, 所以  $k_{s+1} = k_{s+2} = \dots = k_{s+t} = 0$

综上所述:  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = k_{s+1} = k_{s+2} = \dots = k_{s+t} = 0$ , 所以向量组  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  线性无关。  $\diamond$

12.期末 2019-2020 一 1.

设  $A$  是 3 阶方阵,  $E$  是 3 阶单位矩阵, 已知  $A$  的特征值为 1, 1, 2, 则  $\left| \left( \left( \frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得:  $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = 2$ ,  $A^*$  的特征值为  $\frac{|A|}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$ 。

由伴随矩阵的性质:  $\left( \frac{1}{2}A \right)^* = \left( \frac{1}{2} \right)^{3-1} A^* = \frac{A^*}{4}$ , 所以  $\left( \left( \frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E$  的特征值为

$$\left( \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\lambda_i} \right)^{-1} - 2\lambda_i^{-1} + 1 = 2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1$$

所以:

$$\left| \left( \left( \frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E \right| = \prod_{i=1}^3 \left( 2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1 \right) = 4$$

$\diamond$

13.期末 2019-2020 一 5.

已知  $n$  阶方阵  $A$  对应于特征值  $\lambda$  的全部的特征向量为  $c\alpha$ , 其中  $c$  为非零常数, 设  $n$  阶方阵  $P$  可逆, 则  $P^{-1}AP$  对应于特征值  $\lambda$  的全部的特征向量为\_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $A(c\alpha) = \lambda(c\alpha)$  等式两边同时左乘  $P^{-1}$ :

$$P^{-1}AE(c\alpha) = P^{-1}APP^{-1}(c\alpha) = (P^{-1}AP)(P^{-1}c\alpha) = \lambda(P^{-1}c\alpha)$$

所以  $P^{-1}AP$  对应于特征值  $\lambda$  的全部的特征向量为  $P^{-1}c\alpha = cP^{-1}\alpha$

◇

14.期末 2019-2020 三 2.

已知 3 阶方阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & a+2 & 0 \\ a-2 & 3 & 0 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}$  可以相似对角化且  $A$  得到特征方程有一个二重根, 求  $a$  的值。

其中  $a \leq 0$ .

解:

由题得:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -(a+2) & 0 \\ 2-a & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)[(\lambda-1)(\lambda-3) + (2+a)(2-a)] = (\lambda+1)[(\lambda-1)^2 - a^2] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1+a, \lambda_3 = 1-a.$$

依题意: 有二重根且可以相似对角化且  $a \leq 0$ .

讨论:

(1)  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 即  $-1 = 1+a, a = -2 \leq 0$ , 此时  $\lambda_3 = 1-a = 3$ , 代入到  $\lambda E - A$  得:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根  $-1$ :

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于根 3:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可以看出  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 即  $A$  可相似对角化, 即  $a = -2$  符合题意。

(2)  $\lambda_1 = \lambda_3$ , 即  $-1 = 1-a, a = 2 > 0$ , 不符合题意。

(3)  $\lambda_2 = \lambda = 3$ , 即  $1+a = 1-a, a = 0$ 。此时  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。把  $a = 0$  代入到  $[\lambda E - A]$  得:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根 1:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -8 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于重根 1, 其代数重数与几何重数不相等, 所以不能相似对角化。

综上所述:  $a = -2$ .

◇