

第十次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

考研例题-特征值

1. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ -4 & \lambda-2 & -6 \\ -6 & -3 & \lambda-9 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3-3c_2} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-2 & -3\lambda \\ -6 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_w-3r_3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -22 & \lambda-11 & 0 \\ -6 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-13\lambda) = 0$$

得到矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1 = 13, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

对 $\lambda = 13$: (高斯消元的步骤略, 下来自己写)

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & -3 \\ -4 & 11 & -6 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = [1, 2, 3]^T$, 所以属于特征值 13 的特征向量是 $k_1\alpha_1, (k_1 \neq 0)$

对 $\lambda = 0$: (高斯消元的步骤略, 下来自己写)

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & -6 \\ -6 & -3 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = [-1, 2, 0]^T, \alpha_3 = [-3, 0, 2]^T$, 所以属于特征值 0 的特征向量是 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, (k_2, k_3 \text{ 不全为 } 0)$ 。

◇

设 $A = [a_{ij}]$ 是三阶矩阵, 则 (该式不做推导, 感兴趣的可以自己算一下)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 \sum a_{ii} + S_2\lambda - |A|$$

式中: $S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 。

若 $r(A) = 1$ (再复习一下第二次习题课讲的这个知识点相关的例题), 则 $|A| = 0, S_2 = 0$, 代入到上式有

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum a_{ii}\lambda^2 = \lambda^2 \left(\lambda - \sum a_{ii} \right)$$

做推广, 对于 n 阶矩阵 A , 若 $r(A) = 1$, 则 $|\lambda E - A| = \lambda^{n-1} (\lambda - \sum a_{ii})$

2. 已知 $a \neq 0$, 求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量。

解:

方法一: (直接计算)

由特征多项式:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -a & -a \\ -a & \lambda - 1 & -a & -a \\ -a & -a & \lambda - 1 & -a \\ -a & -a & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = [\lambda - (3a + 1)](\lambda + a - 1)^3$$

得 A 的特征值是 $3a + 1, 1 - a$ 。

当 $\lambda = 3a + 1$ 时, 由 $[(3a + 1)E - A] = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} 3a & -a & -a & -a \\ -a & 3a & -a & -a \\ -a & -a & 3a & -a \\ -a & -a & -a & 3a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得基础解系为 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, 所以 $\lambda = 3a + 1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1, (k_1 \neq 0)$ 。

当 $\lambda = 1 - a$ 时, 由 $[(1 - a)E - A] = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1, 0)^T, \alpha_4 = (-1, 0, 0, 1)^T$, 所以 $\lambda = 1 - a$ 的特征向量为 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$, 式中 k_2, k_3, k_4 是不全为 0 的任意常数。

方法二: (转换法)

由题得:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} = B + (1-a)E$$

由于 $r(B) = 1$, 所以有

$$|\lambda E - B| = \lambda^{4-1} \left(\lambda - \sum_{i=1}^4 a_{ii} \right) = \lambda^3 (\lambda - 4a)$$

所以矩阵 B 的特征值为 $0, 0, 0, 4a$, 所以由特征值的性质, A 的特征值为 $3a + 1, 1 - a, 1 - a, 1 - a$ 。

下边同方法一。

◇

3.抽象矩阵 1

设 A 是三阶矩阵, 且矩阵 A 的各行元素之和均为 5, 则矩阵 A 必有特征向量_____。

解:

由题得:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 必有特征值 5 且必有特征向量 $k[1, 1, 1]^T, (k \neq 0)$ 。

◇

4.抽象矩阵 2

已知 A 是 3 阶矩阵, 如果非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有通解 $5b + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中 η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 求 A 的特征值和特征向量。

解:

非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解为 $Ax = b$ 的特解加上 $Ax = 0$ 的通解。

由解得结构可知 $5b$ 是方程组 $Ax = b$ 的一个解, 即 $A(5b) = b$, 所以 $Ab = \frac{1}{5}b$ 。即 $\frac{1}{5}$ 是 A 的特征值, $k_1b, (k_1 \neq 0)$ 是相应的特征向量。

η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以必有 $A\eta_1 = 0 = 0\eta_1, A\eta_2 = 0 = 0\eta_2$, 所以 η_1, η_2 是 A 关于 $\lambda = 0$ 的线性无关的特征向量, 所以特征值 0 对应的特征向量为 $k_2\eta_1 + k_3\eta_2, (k_2, k_3 \text{ 不全为 } 0)$ 。

综上所述, A 的特征值为 $\frac{1}{5}, 0, 0$, 对应的特征向量分别是 $k_1b, (k_1 \neq 0), k_2\eta_1 + k_3\eta_2, (k_2, k_3 \text{ 不全为 } 0)$ ◇

5. 抽象矩阵 3

设 A 为 3 阶方阵, 且 $|A - 2E| = |A + 2E| = |A - E| = 0$, 则 $|3A^* - 2A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = (-1)^n |A - \lambda E| = 0$, 所以由题得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$, 所以 $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -4$ 。所以 A 可逆, 所以 $A^* = |A|A^{-1} = -4A^{-1}$, 所以

$$|3A^* - 2A^{-1}| = |3 \times (-4A^{-1}) - 2A^{-1}| = |-14A^{-1}| = (-14)^3 |A|^{-1} = 686$$

◇

考研例题—实对称矩阵

6. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 秩 $r(A) = 2$, 若 $A^2 = A$, 则 A 的特征值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

设 λ 是 A 的任意特征值, α 是属于 λ 的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 。所以有:

$$A^2\alpha = AA\alpha = A\lambda\alpha = \lambda A\alpha = \lambda\lambda\alpha = \lambda^2\alpha$$

又因为 $A^2 = A$, 所以有 $A^2\alpha = A\alpha$, 即 $\lambda^2\alpha = \lambda\alpha$, 解得 $\lambda = 0$ 或 1。

因为 A 是实对称矩阵, 所以 $A \sim \Lambda$, 且 Λ 由 A 的特征值所构成, 相似矩阵具有相同的秩, 所以 $r(\Lambda) = r(A) = 2$, 所以可以推出

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 的特征值是 1, 1, 0。 ◇

7. n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

则 $r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由第二题的方法 2 可快速写出 A 的特征值为 $n + a - 1, a - 1, a - 1, \dots, a - 1$ 。因为 A 是实对称矩阵, 所以 $A \sim \Lambda$, 且 Λ 由 A 的特征值所构成, 相似矩阵具有相同的秩, 所以 $r(\Lambda) = r(A)$, 所以

$$\Lambda = \begin{bmatrix} n + a - 1 & & & & \\ & a - 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a - 1 & \\ & & & & a - 1 \end{bmatrix}$$

这里 n 是 A 的阶数, 所以不会等于 0。所以

$$r(A) = \begin{cases} n, & \text{若 } a \neq 1 \text{ 且 } a \neq 1-n, \\ n-1, & \text{若 } a = 1-n, \\ 1, & \text{若 } a = 1. \end{cases}$$

◇

8. 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则

A. $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆

B. $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆

C. $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

D. $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解:

注意: 单位向量指的是向量的模 (长度) 为 1, 要与 $[1, 1, 1]$ 区分开来。

$\alpha\alpha^T\alpha = \alpha(\alpha^T\alpha) = 1\alpha$, 所以 $\alpha\alpha^T$ 有一个特征值 1。

α 为 n 维单位列向量, 所以 $r(\alpha\alpha^T) = 1$, 所以由第一题的结论, $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1, 0, 0, \dots, 0$ 。

E 为 n 阶单位矩阵, 所以 E 也为实对称矩阵 (特征值为 1), 实对称矩阵相加减依然为实对称矩阵, 所以上述选项中每一项均为实对称矩阵。

又由矩阵可逆则行列式一定不为 0 (不可逆则行列式一定为 0, 充要条件), 矩阵的行列式等于特征值的乘积。

A, C 的特征值为 $1-1, 1-0, 1-0, \dots, 1-0$ 即 $0, 1, 1, \dots, 1$, 所以 $|E - \alpha\alpha^T| = 0 \times 1 \cdots 1 = 0$, 即不可逆。

同理可以看出其他选项的行列式均不为 0, 即可逆。

◇

期末试题

9. 期末 2015-2016 三 2.

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$ 。

(1) 求 A 对应于特征值 1 的特征向量;

(2) 求 A ;

(3) 求 A^{2016} 。

解:

(1) 由于 A 是实对称矩阵, 所以对于 A 的不同特征值的特征向量正交, 所以设特征值 1 对应的特征向量是 $\alpha = [x_1, x_2, x_3]$ 。

所以有:

$$\alpha_1^T \alpha = x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$$

分别取 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 得 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

α_2, α_3 即为 A 对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义: $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ 。所以:

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3] \Rightarrow$$

$$A = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

式中: $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(3) 由 (2) 得: $A^2 = E_3$ (E 表示单位矩阵。) 所以 $A^{2016} = (A^2)^{1008} = E_3$ 。

◇

10. 期末 2016-2017 一 4.

设 $\alpha_1 = (a, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, b, -1)^T, \alpha_3 = (1, -2, c)^T$ 是正交向量组, 则 $a + b + c =$ _____。

解:

由题得:

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_2^T = a + b - 1 = 0 \\ \alpha_1 \alpha_3^T = a - 2 + c = 0 \\ \alpha_2 \alpha_3^T = 1 - 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 2$$

◇

11. 期末 2016-2017 — 5.

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 1, 2, 3 对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, -1, -1)^T, \alpha_3$, 则 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3 =$ _____。

解:

设 $\alpha_3 = [x_1, x_2, x_3]^T$, 实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的, 所以:

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_3^T = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \alpha_2 \alpha_3^T = 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = -1$, 有 $\alpha_3 = [0, 1, -1]$

◇