期中 2015-2016

1.已知 $A=\begin{bmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{bmatrix}$, 则代数余子式之和 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$______。

2.设 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&x&1&2\\1&x&1&-1\\3&2&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}$，则 x^3 的系数为______。

3.设 a,b,c 满足方程 $\begin{vmatrix}1&a&b&c\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=1$，则 $abc=$______。

4.设 $A=\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}$, 若 $B=2BA-3I$，其中 I 为单位矩阵，则 $|B|=$______。

5.若 A 为 4 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$, 则 $\left|\left(\dfrac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|=$______。

6.设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}$, 则 $(A*)^{-1}=$______。

7.设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-4\\1&2&3&-1\\2&3&-1&-1\end{bmatrix}$, 则 $ABA^{-1}=$______。

8.设 A,B 均为 n 阶方阵，$|A|=2$, 且 AB 可逆，则 $r(B)=$______。

9.计算行列式 $\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$。

10.计算行列式 $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}$。

11.若 $(2I-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 求 A。

12.设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,$A^T(BA^{-1}-I)^TX=B^T$，求 X。

13.

14.设 A 可逆，且 $A^*B=A^{-1}+B$，证明 B 可逆，当 $A=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 时，求 B。

15.设 A 为 n 阶方阵，$AA^T=I$，$|A|<0$，证明:$|A+I|=0$。

期中 2016-2017

16.设 M_{ij} 是 $\begin{vmatrix}0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}$ 的第 i 行第 j 列元素的余子式，则 $M_{11}+M_{22}=$______。

17.计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 4 & 16 & 64\end{vmatrix}=$______。

18.设方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+kx_2-x_3=0\\ kx_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $k=$ ______。

19.设 $f(x)=ax^2+bx+c$,A 为 n 阶方阵，定义 $f(A)=aA^2+bA+cI$，如果 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,$f(x)=x^2-x-1$, 则 $f(A)=$______。

20.若 A 为 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$______。

21.

22.计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$。

23.设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & x+1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$, 求 $f(x)=0$ 的根。

24.

25.

26.若 $\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+I$，且 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 B。

27.设 A 满足 $A^2-2A+4I=0$，证明 $A+I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$.

28.已知 $A=(a_{ij})$ 是三阶的非零矩阵，设 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，且对任意的 i,j 有 $A_{ij}+a_{ij}=0$，求 A 的行列式。

期中 2017-2018

29.计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

30.求方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix}=0$ 的根。

31.设 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 及 β 均为 4 维列向量。4 阶矩阵 $A=[\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4], A=[\beta\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4]$, 若 $|A|=2,|B|=3$，求

(1)$|A+B|$;

(2)$|A^2+AB|$;

32.

33.

34.设 A,B 为同阶对称方阵，则 AB 一定是对称矩阵；

35.设 A,B 为 n 阶可逆方阵，则 $(AB)^*=B^*A^*$.

36.若 $A^2=B^2$，则 $A=B$ 或 $A=-B$。

37.设 2 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若 A 与所有的 2 阶矩阵均可以交换，则 $a=d,b=c=0$。

38.若 $AB=I$ 且 $BC=I$，其中 I 为单位矩阵，则 $A=C$。

39.若 n 阶矩阵 A 满足 $A^3=3A(A-I)$，则 $I-A$ 可逆。

期中 2018-2019

40.计算行列式 $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

41.设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,A^*$ 为 A 的伴随矩阵。

(1) 若交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C, 求 $|CA^*|$;

(2) 若 $|A^{-1}+B|=2$，求 $|A+B^{-1}|$.

42.已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵。

43.设 n 阶行列式 $D_n(n=1,2,\cdots):D_1=1,D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},\ldots\ldots,D_n=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(1) 给出 D_n,D_{n-1},D_{n-2} 的关系；

(2) 利用找到的递推关系及 $D_1=1,D_2=0$, 计算 $D_3,D_4,\cdots,D_8$;

(3) 求 D_{2018}

44.已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},B=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 且矩阵 X 满足

$$AXA+BXB=AXB+BXA+I$$

其中 I 为 3 阶单位阵，求 X。

45.
(2) 当 A 和 B 等价时，求可逆矩阵 P，使得 $PA=B$。

46.若 n 阶实矩阵 Q 满足 $QQ^T=I$，则称 Q 为正交矩阵。设 Q 为正交矩阵，则
(1)Q 的行列式为 1 或-1.
(2) 当 $|Q|=1$ 且 n 为奇数时，证明 $|I-Q|=0$，其中 I 是 n 阶单位矩阵；
(3)Q 的逆矩阵 Q^{-1} 和伴随矩阵 Q^* 都是正交矩阵。

47.设 A 是 n 阶实对称矩阵，如果 $A^2=0$。证明 $A=0$. 并举例说明，如果 A 不是实对称矩阵，上述命题不正确。

期末 2014-2015

48.若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=1$，则 $a=$______。

49.设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵且 $AB=0$, 则 $t=$______。

50.设 3 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的行列式 $|A|=3$, 矩阵 $B=(\alpha_2,2\alpha_3,-\alpha_1)$，则行列式 $|A-B|=$______。

51.已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1,3,2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则矩阵 A^3+2A^* 主对角线元素之和为______。

52.已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_2$ 经正交变换 $x=py$ 可化为标准形：$f=6y^2$, 则 $a=$______。

53.设 $(1,1,1)^T$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & b \end{bmatrix}$ 的一个特征值，则 $a-b=$______。

54.设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & -2 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$，分别求该多项式的三次项、常数项。

55.设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，求 B。

56.λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 有无穷多组解？并在有无穷多解时，写出方程组的通解。

57.设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}4\\-2\\5\\6\end{bmatrix}$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩与一个最大线性无关组；

(2) 将其余向量用极大线性无关组线性表示。

58.设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3 \quad (b>0)$$

的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12。

(1) 求 a,b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出所用正交变换。

59.

(2) 证明：矩阵 $A+2I$ 可逆，并求 $(A+2I)^{-1}$。

60.设 X_0 是线性方程组 $Ax=b$ $(b\neq 0)$ 的一个解，X_1,X_2 是导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系。令 $\xi_0=X_0,\xi_1=X_0+X_1,\xi_2=X_0+X_2$，证明：$\xi_0,\xi_1,\xi_2$ 线性无关。

61.设 3 阶方阵 A 的特征值-1,1 对应的特征向量分别为 α_1,α_2，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 设 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, 求 $P^{-1}AP$。

期末 2015-2016

62.行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 2-a & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}$=______。

63.

64.设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 得到解，若 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_i\alpha_i$ 也是 $Ax=b$ 得到解，则 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_i=$______。

65.已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{bmatrix}$，若 $\alpha=(1,-2,3)^T$ 是其特征向量，则 $a+b=$______。

66.任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-2,3)^T\alpha_3=(t,1,2)^T$ 线性表示，则 t 应满足条件______。

67.若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{bmatrix}$ 正定，则 λ 满足的条件为______。

68.若行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\3&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

69.已知矩阵 X 满足方程 $X\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{bmatrix}$，求矩阵 X。

70.设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0),\alpha_5=(2,1,5,6)$, 求向量组的秩、极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示出。

71.

72.设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 对应于 λ_1 的特征向量 $\alpha_1=(0,1,1)^T$。

(1) 求 A 对应于特征值 1 的特征向量;

(2) 求 A;

(3) 求 A^{2016}。

73.设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A)=2$, 且二次型 $f(x)=x^TA^TAx$.

(1) 求 a;

(2) 写出二次型 $f(x)$ 的矩阵 $B=A^TA$;

(3) 求正交变换 $x=Qy$ 将二次型 $f(x)$ 化为标准型，并写出所用的正交变换。

74.设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^2-3A+2E=0$, 其中 E 为单位矩阵，试证：

(1)$A+2E$ 可逆；

(2)A 为正定矩阵。

75.设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，向量 γ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha$ 线性无关。

期末 2016-2017

76.行列式 $D=\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&1&0\\z&0&0&1\end{vmatrix}=$______。

77.设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}$, 则 $r(A^2-2A)=$______。

78.已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\ax_1-x_2-2x_3=-3\end{cases}$ 与线性方程 $ax_2+x_3=1$ 有公共的解，则 a 的取值范围为______。

79.设 $\alpha_1=(a,1,1)^T,\alpha_2=(1,b,-1)^T,\alpha_3=(1,-2,c)^T$ 是正交向量组，则 $a+b+c=$______。

80.设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3$ 对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,-1,-1)^T,\alpha_3$，则 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3=$______。

81.设 $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&6\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$, 已知二次型 $f(x)=x^TBx$ 是正定的，则 λ 的取值范围为______。

82.若行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\0&4&1&2\\0&2&2&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}-2A_{21}+A_{31}-2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

83.设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$,$B$ 为三阶矩阵，且满足方程 $A^*BA=I+2A^{-1}B$，求矩阵 B。

84.设向量组 $\alpha_1=(3,1,4,3)^T,\alpha_2=(1,1,2,1)^T,\alpha_3=(0,1,1,0)^T,\alpha_4=(2,2,4,2)^T$, 求向量组的所有的极大线性无关组。

85.令 $\alpha=(1,1,0)^T$, 实对称矩阵 $A=\alpha\alpha_T$.

(1) 把矩阵 A 相似对角化；

(2) 求 $|6I-A^{2017}|$.

86.已知实对称矩阵 $A\begin{bmatrix}a&-1&4\\-1&3&b\\4&b&0\end{bmatrix}$ 与 $A\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&5\end{bmatrix}$ 相似。

(1) 求矩阵 A 化；

(2) 求正交线性变换 $x=Qy$，把二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为标准型.

87.在对观测数据拟合的时候经常遇到线性方程组 $Ax=b$ 是矛盾方程的情形，是没有解的。此时我们转而解 $A^TAx=A^Tb$，我们称 $A^TAx=A^Tb$ 是原线性方程组的正规方程组。称正规方程组的解为原方程组的最小二乘解。设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}$.

(1) 证明 $Ax=b$ 无解；

(2) 求 $Ax=b$ 的最小二乘解。

88.已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的向量组，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关，证明 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示并且表示方法唯一。

89.已知 A,B 是同阶实对称矩阵。

(1) 证明如果 $A\sim B$，则 $A\simeq B$, 也就是相似一定合同；

(2) 举例说明反过来不成立。

期末 2017-2018

90.设 A_{ij} 是三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}$ 第 i 行第 j 列元素的代数余子式，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$______。

91.设

92.设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&2&2\end{bmatrix}$, 记 $A*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$______。

93.已知 3 阶方阵 A 的秩为 2，设 $\alpha_1=(2,2,0)^T,\alpha_2=(3,3,1)^T$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则导出 $Ax=0$ 的基础解系为______。

94.若 3 阶矩阵 A 相似于 B，矩阵 A 的特征值是 1,2,3 那么行列式 $|2B+I|=$______。(其中 I 是 3 阶单位矩阵)

95.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 的秩为 2，则 $t=$______。

96.计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$.

97.解矩阵方程 $(2I-B^{-1}A)X^T=B^{-1}$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵，X^T 是 3 阶矩阵 X 的转置矩阵，

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

98.

99.设 1 为矩阵 $A\begin{bmatrix}1&2&3\\x&1&-1\\1&1&x\end{bmatrix}$ 的特征值，其中 $x>1$.

(1) 求 x 及 A 的其他特征值。

(2) 判断 A 能否对角化，若能对角化，写出相应的对角矩阵 A。

100.设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$。

(1) 写出该二次型的矩阵 A;

(2) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ$ 为对角型矩阵；

(3) 给出正交变换，化该二次型为标准型。

101.已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T$ 及 $\beta_4=(3,10,b,4)^T$.

(1)a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合？

(2)a,b 为何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并写出该表达式。

102.设 A,B 均为 n 阶方阵，证明：若 A,B 相似则 $|A|=|B|$，举例说明反过来不成立。

103.设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，证明 $Ax=0$ 与 $(A^TA)x=0$ 是同解方程，进一步得出 $r(A)=r(A^tA)$。

期末 2018-2019

104.设 A 为 5 阶方阵满足 $|A|=2$,A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|2A^{-1}A^*A^T|=$______。

105.已知向量组 $\alpha_1=(1,3,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,4,k)$ 线性无关，则实数 k 满足的条件是______。

106.

107.设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，其特征值为 $1,-1,2$，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 A^* 的主对角线元素之和即 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$______。

108.若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 t 应满足______。

109.设 3 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$。则行列式 $|A|=$______。

110.已知 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&2&2&3\\1&4&3&9\\-1&8&5&27\end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

111.已知 $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$, 且 X 满足 $AX=X+A$，求 X。

112.设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&3\\3&5&1&5\end{bmatrix}$,$A^*$ 是 A 的伴随矩阵,求 $r(A),r(A^*)$ 和 A 的列向量组的极大线性无关组。

113.

114.设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2$。
(1) 写出该二次型的矩阵 A;
(2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵；
(3) 给出正交变换，将该二次型化为标准型；
(4) 写出二次型的秩，正惯性指标和负惯性指标。

115.设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+3A-4I=0$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵。
(1) 证明：$A,A+3I$ 可逆，并求他们的逆；
(2) 当 $A\neq I$ 时，判断 $A+4I$ 是否可逆并说明理由。(4) 写出二次型的秩，正惯性指标和负惯性指标。

116.若同阶矩阵 A 与 B 相似，即 $A\sim B$，证明 $A^2\sim B^2$。反过来结论是否成立并说明理由。

117.设 λ_1,λ_2 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，证明：向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 线性无关。

期末 2019-2020

118.设 A 是 3 阶方阵,E 是 3 阶单位矩阵,已知 A 的特征值为 $1,1,2$, 则 $\left|\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1}-2A^{-1}+E\right|=$______。

119.

120.记 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&3\\1&1&0&0\\2&3&0&0\end{bmatrix}$, 则 A^{-1}______。

121.

122.已知 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $c\alpha$, 其中 c 为非零常数，设 n 阶方阵 P 可逆，则 $P^{-1}AP$ 对应于对应于特征值 λ 的全部的特征向量为______。

123.已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&3\\1&3&x\end{bmatrix}$ 的正惯性指数为 3，则 x 的取值范围为______。

124.设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. 求满足 $AX=XA$ 的全部的矩阵 X。

125.求线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+3x_4=0\\2x_1+4x_2+x_3+3x_4=0\\2x_1+4x_2+4x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系。

126.记 $2n$ 阶方阵 $A_n=\begin{bmatrix}a_n&&&&&&&b_n\\&a_{n-1}&&&&&b_{n-1}&\\&&\ddots&&&\iddots&&\\&&&a_1&b_1&&&\\&&&c_1&d_1&&&\\&&\iddots&&&\ddots&&\\&c_{n-1}&&&&&d_{n-1}&\\c_n&&&&&&&d_n\end{bmatrix}$.

(1) 求 $|A_1|,|A_2|$

(2) 求 $|A_n|$。

127.设向量组 $\alpha_1=(1,-4,-3)^T,\alpha_2=(-3,6,7)^T,\alpha_3=(-4,-2,6)^T,\alpha_4=(3,3\ -4)^T$, 求向量组的秩, 并写出一个极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示出。

128.已知 3 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}-1&a+2&0\\a-2&3&0\\8&-8&-1\end{bmatrix}$ 可以相似对角化且 A 得到特征方程有一个二重根，求 a 的值。其中 $a\le 0$.

129.设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A；

(2) 用正交变换 $x=Qy$ 把该二次型化为标准型。

130.设 A 为 m 阶正定矩阵，B 为 $\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$。

131.设 α,β 是 n 维列向量，证明 $r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le 2$。