第九次习题课

知识点

1.设 A 为 n 阶矩阵，λ 是一个数，如果存在非零向量 v，使得 $Av=\lambda v$，则称 λ 为 A 的一个特征值，v 称为与特征值 λ 对应的特征向量。

2.设 A 为 n 阶矩阵，$\lambda E-A$ 为 A 的特征矩阵，称 $|\lambda E-A|$ 为 A 的特征多项式。$|\lambda E-A|$ 称为 A 的特征方程。该方程的跟为特征根。

3.n 阶矩阵 A 是奇异矩阵的充分必要条件是 A 有一个特征值为 0.

4.设 λ_0 是 A 的一个特征值，则

(1)λ^n 是 A^n 的一个特征值。

(2)$\forall k\in\mathbb{R}, k-\lambda_0$ 是 $kE-A$ 的一个特征值。

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 定义 $f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E$,$f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的一个特征值。

(3) 设 A 可逆，则 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是 A^{-1} 的一个特征值。因为 $A^*=|A|A^{-1}$，所以 $\dfrac{|A|}{\lambda_0}$ 是 A^* 的一个特征值。

5.特征值的性质

(1)n 阶矩阵与它的转置矩阵 A^T 有相同的特征值。

(2) 相似矩阵：设 A,B 为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称 A 与 B 相似。

相似矩阵具有相同的秩、行列式、特征多项式和特征值，相似矩阵的逆矩阵、伴随矩阵也相似。

(3) 设 n 阶矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$（其中可能有重根、复根）

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=traceA \qquad \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$$

6.特征向量的性质

(1) n 阶矩阵 A 互不相同的特征值对应的特征向量 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关。

(2)n 阶矩阵 A 对应于相同特征值的特征向量的非零线性组合依然是特征向量。

(3) 对应于不同特征值的线性无关的特征向量组仍然是线性无关的。

7.相似对角化：设 A,B 为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$，则称 A 可以相似对角化。

8.n 阶矩阵 A 与 n 阶对角矩阵 Λ 相似的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 A 与对角阵 Λ 相似。

n 阶矩阵 A 互不相同的特征值对应的对应的特征向量 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关。

9.方程 $(\lambda_iE-A)x=0$ 的基础解系向量的个数称为 λ_i 的几何重数（等于自由变量的个数，等于 $n-r(\lambda_iE-A)$）。λ_i 作为特征方程的特征根的重数称为 λ_i 的代数重数。

10.n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是对于每一个 n_i 重特征根 λ_i，矩阵 λ_iE-A 的秩是 $n-n_i$。即 λ_i 的代数重数等于几何重数。