第二次习题课–答案
群文件《期中 & 期末试题》

期中试题

2016~2017 二.3.

设 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&3&0\\0&2&1\end{bmatrix}$，若矩阵 X 满足方程 $AX+I=A^2+X$，求 X。

解：

方法一：视频 25

由题得：$AX+I=A^2+X$, 所以 $(A-I)X=A^2-I$.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\4&9&-1\\2&8&1\end{bmatrix}\quad A^2-I=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\4&8&-1\\2&8&0\end{bmatrix}\quad A-I=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&2&0\\0&2&0\end{bmatrix}$$

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&0&-1&0&-2&-2\\1&2&0&4&8&-1\\0&2&0&2&8&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&4&8&-1\\0&0&-1&0&-2&-2\\0&2&0&2&8&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&4&8&-1\\0&2&0&2&8&0\\0&0&-1&0&-2&-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&4&8&-1\\0&1&0&1&4&0\\0&0&1&0&2&2\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&1&4&0\\0&0&1&0&2&2\end{array}\right]$$

所以

$$x=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&4&0\\0&2&2\end{bmatrix}$$

方法二：由题得：$AX+I=A^2+X$, 所以 $(A-I)X=A^2-I=(A+I)(A-I)=(A-I)(A+I)$. 等式两边同时左乘 $(A-I)^{-1}$:

$$(A-I)^{-1}(A-I)X=(A-I)^{-1}(A-I)(A+I)\quad\Rightarrow\quad X=(A+I)$$

注：

1. 单位矩阵乘任何矩阵都等于该矩阵的本身，任何矩阵乘单位矩阵都等于该矩阵的本身，即 $AI=IA=A$。(I 为单位矩阵)所以有

$$\begin{aligned}&A^2-I=A^2-I^2\\&(A+I)(A-I)=A^2-AI+IA-I^2=A^2-A+A-I^2=A^2-I^2\\&(A-I)(A+I)=A^2+AI-IA-I^2=A^2+A-A-I^2=A^2-I^2\end{aligned}$$

2. 可逆矩阵（方阵）：若 $AB=BA=I$，则 A 矩阵可逆，称 A 是 B 的逆矩阵（或 B 是 A 的逆矩阵）。通常把 A 的逆矩阵表示为 A^{-1}，则 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。 $\diamondsuit$

2016~2017 一.4.

设 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\0&1&1\\0&0&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$AX+2B=BA+2X$，求 X^{2017}。

解：

方法一：

由题得：$(A-2I)X=B(A-2I)$

$$A-2I=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\quad B(A-2I)=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&2&2\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-2r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&2&4\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&2&6\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right]$$

解得

$$X=\begin{bmatrix}1&2&6\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

计算得

$$X^2=X=\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$X^3=X^2\cdot X=\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&6\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&6\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}=X$$
$$X^3=X\cdot X^2=\begin{bmatrix}1&2&6\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&6\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}=X$$

可以看出: 当 n 为奇数时,$X^n=X$，所以 $X^{2017}=X$。

方法二：

若存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^{-1}BP$，则称矩阵 A 与矩阵 B 相似，记为 $A\sim B$

由题得：$(A-2I)X=B(A-2I)$, 等式两边同时乘 $(A-2I)^{-1}$ 得：$X=(A-2I)^{-1}B(A-2I)$，令 $P=A-2I$，则 $X=P^{-1}BP$. 所以

$$X^2=(P^{-1}BP)^2=P^{-1}BPP^{-1}BP=P^{-1}BIBP=P^{-1}B^2P$$

同理可以推出：$X^n=P^{-1}B^nP$. (由此我们可以得出一条结论：若 $A\sim B$，则 $A^n=P^{-1}B^nP$, 以后做题可直接使用) 对于任意

对角矩阵 $C=\begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn} \end{bmatrix}$，可以计算得:$C^2=\begin{bmatrix} c_{11}^2 & & & \\ & c_{22}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn}^2 \end{bmatrix}$，所以$C^n=\begin{bmatrix} c_{11}^n & & & \\ & c_{22}^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn}^n \end{bmatrix}$ 所以：

$$B^{2017}=\begin{bmatrix} 1^{2017} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2017} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=B$$

由于还没学逆矩阵的求法，这里先直接给结论，后边学到了逆矩阵的求法后再来计算这个 P 的逆矩阵

$$P=A-2I=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以：

$$X^{2017}=P^{-1}B^{2017}P=P^{-1}BP=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

◇

考研例题

1. 设 α,β 是 3 维列向量，β^T 是 β 的转置，如果 $\alpha\beta^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$，则 $\alpha^T\beta=$ __9__。

解：

α,β 是 3 维列向量，所以可以设 $\alpha=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T,\beta=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$ 由题得：

$$\alpha\beta^T=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

所以：

$$\alpha^T\beta=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=1+2+6=9$$

注：

若 α,β 是 3 维列向量，记:$A=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix}$，$l=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$,(可以看出,$l$ 是方阵 A 主对角线元素之和) 则

$A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=\alpha l\beta^T=l\alpha\beta^T=lA$
所以可以推出 $A^n=l^{n-1}A$，我们可以将此结论推广到任意 n 维列向量的情况（即 α,β 是 n 维列向量，记:$A=\alpha\beta^T,l=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha,A^n=l^{n-1}A$）。 ♢

2. 若 $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}$，则 $A^2=$ $\underline{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix}}$,$A^3=$ $\underline{\quad 0\quad}$.

解：

由矩阵的乘法：

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

注：由题我们可以得出如下结论：如果一个 n 阶方阵 A 主对角线上以及主对角线的一侧元素全为 0，那么必有 $A^k=0$，其中 $k\geq n$。即 A 是下边的几种形状之一：

$$\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&0&0&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\a_{21}&0&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&0\end{bmatrix}$$

♢

3. 若 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则 $A^n=$ ________.

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}=I+B$

二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+C_n^2a^2b^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}a^{n-1}b^{n-(n-1)}+C_n^na^nb^{n-n}$

由第 2 题的结论可知：$B^k=0,k\geq 3$。计算得：$B^2=\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 所以

$$\begin{aligned}A^n&=(I+B)^n=C_n^0I^nB^0+C_n^1I^{n-1}B^1+C_n^2I^{n-2}B^2+C_n^3I^{n-3}B^3+\cdots+C_n^0I^0B^n\\&=I^nB^0+nI^{n-1}B^1+\frac{n(n-1)}{2}I^{n-2}B^2=I+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2n&4n^2-n\\0&1&4n\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

◇

4. 设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}$，则 $A^n=$________.

解：

经观察，我们可将矩阵按下列方式进行分块：

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}\end{bmatrix}\quad A_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}\quad A_{22}=\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$$

A 分块后是对角矩阵，所以：$A^n=\begin{bmatrix}A_{11}^n&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}^n\end{bmatrix}$(注：这个结论是在上边期中测试的第二个题里的方法二推导出来的)

对于 A_{11}：

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=3I+B$$

和上一个题一样了，此时 $B^k=0,k\geq 2$

$$\begin{aligned}A_{11}^n&=(3I+B)^n=C_n^0B^0(3I)^n+C_n^1B^1(3I)^{n-1}+C_n^2B^2(3I)^{n-2}+\cdots+C_n^nB^n(3I)^0\\&=3^nI+3^{n-1}nB\\&=\begin{bmatrix}3^n&n3^{n-1}\\0&3^n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

注：把一个矩阵按高斯消元法化为阶梯型矩阵后，非零行行数即为矩阵的行秩，对于一个方阵 A，行秩等于列秩，用符号 $r(A)$ 来表示秩。

对于 n 维方阵 A，如果 $r(A)=1$，则 A 一定可以分解为一个列向量和一个行向量的乘积（此处只给结论，不做证明）。然后使用第一题得出的结论来计算 A^n

所以对于 A_{22}，经过高斯消元法变换 (r_1-3r_2) 后：$\begin{bmatrix}3&9\\0&0\end{bmatrix}$，可以看出 $r(A_{22})=1$，符合红色字部分的描述，所以

$$l=3+3=6$$

$$A_{22}^n=l^{n-1}A=6^{n-1}\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$$

所以：

$$A^n=\begin{bmatrix}A_{11}^n&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}&0&0\\0&3^n&0&0\\0&0&3\cdot 6^{n-1}&9\cdot 6^{n-1}\\0&0&6^{n-1}&3\cdot 6^{n-1}\end{bmatrix}$$

◇

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，若 X 满足 $AX+2B=BA+2X$，则 $X^4=$________.

解：

步骤同上边期中测试题第二题的方法二，所以略。自己算一下。这里给出 $P = A - 2I$ 的逆矩阵 P^{-1}:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后算出的结果是

$$X^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◇