

## 第八次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

### 期末试题

1. 期末 2014-2015 五.

$$\text{设 } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(1) 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩与一个最大线性无关组;

(2) 将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-\frac{1}{2}r_2 \\ r_4-r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1)  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ , 极大线性无关组为:  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_2, \alpha_4), (\alpha_3, \alpha_4)$ . (任写一个即可.)

(2) 取  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , 由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}$$

◇

2. 期末 2014-2015 七 2.

设  $X_0$  是线性方程组  $Ax = b$  ( $b \neq 0$ ) 的一个解,  $X_1, X_2$  是导出组  $Ax = 0$  的一个基础解系. 令  $\xi_0 = X_0, \xi_1 = X_0 + X_1, \xi_2 = X_0 + X_2$ , 证明:  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  线性无关.

证明:

设

$$k_0\xi_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0 \quad (1)$$

要证明  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  线性无关, 根据定义, 只需证明  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ .

由题得:  $AX_0 = b, AX_1 = AX_2 = 0$ , 因为  $X_1, X_2$  为  $AX = 0$  的基础解系, 所以  $X_1, X_2$  线性无关.

把题中条件代入 (1) 式:

$$k_1X_0 + k_2X_0 + k_2X_1 + k_3X_0 + k_3X_2 = (k_1 + k_2 + k_3)X_0 + k_2X_1 + k_3X_2 = 0 \quad (2)$$

(2) 式两边同时左乘矩阵  $A$ :

$$(k_1 + k_2 + k_3)AX_0 + k_2AX_1 + k_3AX_2 = (k_1 + k_2 + k_3)b = 0$$

因为  $b \neq 0$ , 所以  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ . 代入 (2) 式得:  $k_2X_1 + k_3X_2 = 0$ , 因为  $X_1, X_2$  线性无关, 所以  $k_2 = k_3 = 0$ . 所以  $k_1 = 0 - k_2 - k_3 = 0$ .

所以  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  线性无关.

◇

## 3. 期末 2015-2016 二 3.

设向量组  $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$ , 求向量组的秩、极大线性无关组, 并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-\frac{1}{3}r_2 \\ r_4-\frac{2}{3}r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{3} \\ r_4 \times (-\frac{1}{4})}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

所以该向量组的秩为 3, 极大线性无关组为  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5), (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$ . 由  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$  表示  $\alpha_3, \alpha_5$ : 由最简阶梯型矩阵可以看出

$$\begin{cases} \alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

◇

## 4. 期末 2016-2017 一 3.

已知线性方程组  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$  与线性方程  $ax_2 + x_3 = 1$  有公共的解, 则  $a$  的取值范围

为\_\_\_\_\_。

解:

注意同解与公共解的区别:

对于方程组 (1) 和方程组 (2), 如果  $\alpha$  既是方程组 (1) 的解, 也是方程组 (2) 的解, 则称  $\alpha$  是方程组 (1) 和方程组 (2) 的公共解。

对于方程组 (1) 和方程组 (2), 如果  $\alpha$  是方程组 (1) 的解, 则  $\alpha$  一定是方程组 (2) 的解, 反之如果  $\alpha$  是方程组 (2) 的解, 则  $\alpha$  一定是方程组 (1) 的解, 则称, 方程组 (1) 和方程组 (2) 同解。

关于公共解, 通常有如下解法: (假设方程组 (1) 有两组不同的基础解系  $\xi_1, \xi_2$ , 方程组 (2) 有两组不同的基础解系  $\eta_1, \eta_2$ )

方法 1: 分别求出方程组 (1) 和 (2) 的通解: 即 (1) 得到通解为:  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ , (2) 的通解为  $l_1\eta_1 + l_2\eta_2$ . 令两个方程组的通解相等, 找出对应的  $k$  和  $l$  的关系。

方法 2: 求出其中一个通解, 代入到另外一个方程组中, 找出相应的系数所满足的关系式进一步求出公共解。

方法 3: 联立两个方程组得到一个新的方程组 (3), 求出 (3) 的解即为公共解。

显然, 此题用方法 3 更合适: 联立两个方程组, 得到增广矩阵:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & -1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

讨论:  $a = 0$  时: 显然  $r(A) = r(A|B)$ , 即线性方程组有解, 即这两个线性方程组有公共解。

$a \neq 0$  时, 对增广矩阵进一步进行高斯消元:

$$\xrightarrow{r_2 - ar_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1-2a & -2-a & -3-2a \\ 0 & a & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & -1-2a & -2-a & -3-2a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + \frac{1+2a}{a}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2-1}{a} & -\frac{2a^2+a-1}{a} \end{bmatrix}$$

当  $-\frac{a^2-1}{a} = 0$  且  $-\frac{2a^2+a-1}{a} \neq 0$  时, 无解, 此时没有公共解, 解得  $a = 1$ . 所以  $a = 1$  时无公共解, 所以  $a \neq 1$ .  $\diamond$

5. 期末 2016-2017 二 3.

设向量组  $\alpha_1 = (3, 1, 4, 3)^T, \alpha_2 = (1, 1, 2, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1, 0)^T, \alpha_4 = (2, 2, 4, 2)^T$ , 求向量组的所有的极大线性无关组。

解:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 2, 极大线性无关组为  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_3, \alpha_4)$ .  $\diamond$

6. 期末 2017-2018 一 4.

已知 3 阶方阵  $A$  的秩为 2, 设  $\alpha_1 = (2, 2, 0)^T, \alpha_2 = (3, 3, 1)^T$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 则导出  $Ax = 0$  的基础解系为\_\_\_\_\_。

解:

因为  $\alpha_1, \alpha_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 所以  $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b$ , 且  $\alpha_1, \alpha_2$  不相等, 所以  $\alpha_1 - \alpha_2$  是  $AX = 0$  的基础解系。  $\diamond$

7. 期末 2018-2019 二 3.

设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 求  $r(A), r(A^*)$  和  $A$  的列向量组的极大线性无关组。

解:

$$A \xrightarrow{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - \frac{1}{2}r_2 \\ r_4 - \frac{1}{2}r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n; \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

上式中:  $n$  为  $A$  的阶数。

记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

(1)  $a = 3$  且  $b = 1$  时:  $r(A) = 2 < 4 - 1 = 3, r(A^*) = 0$ . 极大线性无关组:  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_3, \alpha_4)$ .

(2)  $a = 3$  且  $b \neq 1$  时:  $r(A) = 3 = 4 - 1, r(A^*) = 1$ . 极大线性无关组:  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ .

(3)  $a \neq 3$  且  $b = 1$  时:  $r(A) = 3 = 4 - 1, r(A^*) = 1$ . 极大线性无关组:  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ .

(4)  $a \neq 3$  且  $b \neq 1$  时:  $r(A) = 4, r(A^*) = 4$ . 极大线性无关组:  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ .  $\diamond$

8. 期末 2019-2020 二 2.

求线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$
 的一个基础解系。

解:

由题得: 增广矩阵

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_1 + 2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 \times (-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以  $x_1 = 4x_4, x_2 = -3x_4, x_3 = x_4$ , 令  $x_4 = 1$ , 得基础解系:  $\xi = [4, -3, 1, 1]^T$ .  $\diamond$

9. 期末 2019-2020 三 1.

设向量组  $\alpha_1 = (1, -4, -3)^T, \alpha_2 = (-3, 6, 7)^T, \alpha_3 = (-4, -2, 6)^T, \alpha_4 = (3, 3, -4)^T$ , 求向量组的秩, 并写出一个极大线性无关组, 并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解:

由题得:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + 3r_1]{r_2 + 4r_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{1}{3}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 \times (-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -4.5 \\ 0 & 1 & 3 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ , 极大线性无关组有两个向量:  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_2, \alpha_4), (\alpha_3, \alpha_4)$ . (任写一个即可)

以  $(\alpha_1, \alpha_2)$  为例:  $\alpha_3 = 5\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_4 = -4.5\alpha_1 - 2.5\alpha_2$ .  $\diamond$