第一次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1.2014~2015(双语)1.

Determine if the following systems are consistent.

$$(a).\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_2=1 \\ x_2-2x_3=3 \end{cases} \qquad (b).\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2-2x_3=1 \\ x_2+2x_3=6 \end{cases}$$

解：

(a) 增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

所以解得：$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。

(b) 增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\times(\frac{1}{4})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

所以解得：$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -\frac{19}{4} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$。 ♢

2.2015~2016 三.1.

当 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=k-3 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+kx_3=-2 \end{cases}$ 有唯一解，无解和有无穷多解？当方程组有无穷多解时求出所有解。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - kr_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 3(k-1) \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 3(k-1) \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - (1+k)r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(k+2) & 3(k-1) \end{array}\right]$$

讨论：

(1) 解不存在：即存在矛盾方程（增广矩阵主元列在最右列)。即对于 r_3

$$\begin{cases} (1-k)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = -2$$

(2) 存在唯一解：主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-k \neq 0 \\ (1-k)(k+2) \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k \neq 1 且 k \neq -2$$

$k \neq 1$且$k \neq -2$，继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{(k+2)(1-k)}]{r_2 \times \frac{1}{1-k}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{(k+2)} \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & -2-\frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 - kr_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5k+1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array}\right]$$

所以方程组存在唯一解时：$k \neq 1$ 且 $k \neq -2$，解为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5k+1}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \end{bmatrix}, \quad k \neq 1 且 k \neq -2$$

(3) 存在无穷解：至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (k-1)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

把 $k = 1$ 代入阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} -2-c_1-c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

所以 x 的解为 $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_1 \quad c_1, c_2 \in R$。 ◇

3.2017~2018 二.3.

求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$ 的通解。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-\frac{7}{2}r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 & \frac{15}{2} & 17 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-7r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{4}]{\substack{r_1\times\frac{1}{2}\\ r_2\times 2}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1+\frac{3}{2}r_3]{r_2-r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+\frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$x_1 = 3 - x_3 \quad x_2 = x_3 - 8 \quad x_3 = x_3 \quad x_4 = 6$$

令 $x_3 = C, C \in R$，则

$$x = \begin{bmatrix} 3-C \\ C-8 \\ C \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} C \text{ , } C \in R$$

◇

4.2018~2019　三.1.

设 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$ ，λ 为何值时，该方程组无解、唯一解、无穷解？并且在有唯一解时求出解；有无穷多解时，求出全部解并用向量表示。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-\lambda r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \Leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-(\lambda+1)r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(-2-\lambda) & -\lambda-2 \end{array}\right]$$

讨论：

(1) 解不存在：即存在矛盾方程（增广矩阵主元列在最右列）。即对于 r_3

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda) = 0 \\ -\lambda-2 \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

(2) 存在唯一解：主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-\lambda \neq 0 \\ (\lambda-1)(-2-\lambda) \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq 1 且 \lambda \neq -2$$

$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$，继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{(\lambda-1)(-2-\lambda)}]{r_2\times\frac{1}{1-\lambda}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 0 & \frac{2\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-\lambda r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right]$$

所以方程组存在唯一解时：$\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$，解为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 1\text{且}\lambda \neq -2$$

(3) 存在无穷解：至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda) = 0 \\ -2-\lambda = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$

把 $\lambda = -2$ 代入阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2\times\frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+2r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$x_1 = 2 + x_3 \quad x_2 = x_3 \quad x_3 = x_3$$

令 $x_3 = C, C \in R$，则

$$x = \begin{bmatrix} 2+C \\ C \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} C\ ,\ C \in R$$

◇

5.2019~2020　一.4.

若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$ 有解，a_1, a_2, a_3, a_4 应满足的条件是 $\underline{\ a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0\ }$。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4-r_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1+a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4+r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1+a_2+a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2-a_3+a_4 \end{array}\right]$$

若方程有解：$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0$　◇

6. 期末 2019-2020 二 1.

设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. 求满足 $AX=XA$ 的全部的矩阵 X。

解：

设 $X=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$,

$$AX=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{bmatrix}$$
$$XA=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{bmatrix}$$

$AX=XA$，即

$$\begin{bmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}d=0 & a=e & b=f\\ g=0 & h=d=0 & i=e=a\\ 0=0 & g=0 & h=0\end{cases}$$

所以 $x=\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{bmatrix}$, 其中 a,b,c 是任意常数。 ◇

期中试题

2017~2018　二.3. 判断命题是否成立并给出理由

若 $A^2=B^2$，则 $A=B$ 或 $A=-B$。

解：

判断是否成立：否。

理由：

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad B^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

可以看出 $A^2=B^2$，但是 $A\neq B$,$A\neq -B$ ◇