第九次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 45 分钟.**

54. 极大线性无关组(13分钟)

55. 部分与整体相关性的结论(10分钟)

56. 向量组的秩(8分钟)

$56\frac{1}{2}$. 齐次线性方程组的解的结构

57. 非齐次线性方程组的解的结构(14分钟)

微信扫描二维码看视频 $56\frac{1}{2}$.

- **看视频的同时记好笔记.**

- **看线性代数教材 P47-P72 的内容.**

- **课堂上将分组讨论 4.17, 4.20, 4.21, 4.22, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27, 4.31, 4.33, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39, 4.40, 4.41.**

- **组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.**

- **每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.**

例 4.17 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

的秩和一个极大无关组.

例 4.18 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由.

(1) 如果一个向量组有且仅有一个极大无关组, 则该向量组必然线性无关.

(2) 在求向量组的秩时, 如果该向量组含有零向量, 则可以去掉零向量.

(3) 在求向量组的秩时, 如果该向量组含有一个可以由其余的向量线性表出的向量, 则可以去掉这个向量.

(4) 在求向量组的秩时, 如果该向量组含有线性相关的子组, 则可以去掉线性相关的子组.

(5) 如果一个向量组含有 r 个线性无关的向量, 则该向量组的秩至少是 r.

例 4.19 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由.

(6) 如果一个向量组含有 $r+1$ 个线性相关的向量, 则该向量组的秩不超过 r.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的 m 维向量. 如果 $n<m$, 则存在 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

例 4.20 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,b,4)^T$. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是该向量组的一个极大无关组. 求 a,b 的值, 并把 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

例 4.21 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^T$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^T$ 具有相同的秩, 且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 求 a,b 的取值.

例 4.22 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, 2, -4, 1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (4, 2, -6, 2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (6, 3, -9, 3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (1, 1, 1, 1)^T$. 求该向量组的秩和和所有的极大线性无关组.

例 4.23 利用线性方程组的向量形式重新证明引理 2.4.1.

例 4.24 已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数. 则方程组 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ 的通解必是(　　　).

(A)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(B)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(D)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

例 4.25 设四元线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

又已知某线性齐次方程组 (II) 的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T.$$

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解. 若没有, 则说明理由.

例 4.26 已知方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$ 同解. 求 a,b,c 的值.

例 4.27 分别求下述两个齐次线性方程组的一个基础解系.

$$\text{(I)} \quad x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+2x_3-3x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases}.$$

例 4.28 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(1) 两个齐次线性方程组的解集相同 $\Leftrightarrow$ 它们的基础解系等价.

(2) 设一个 5 元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3. 则该方程组可能有 3 个线性无关的解.

(3) 当一个线性方程组有无穷多个解时一定有基础解系.

例 4.29 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(4) 设 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是某个齐次线性方程组的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 也是该线性方程组的一个基础解系.

(5) 向量组 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 一定是某个齐次线性方程组的某个基础解系.

例 4.30 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

例 4.31 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

例 4.32 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(1) 如果一个非齐次方程组的导出组有基础解系, 则该非齐次线性方程组一定有无穷多个解.

(2) 如果一个非齐次线性方程组有无穷多个解, 则它的导出组一定有基础解系.

(3) 一个非齐次线性方程组的任意解都不可能由它的导出组的任意基础解系线性表出.

(4) 设一个 5 元非齐次线性方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩都是 3. 则该方程组一定有 3 个线性无关的解.

(5) 设一个 5 元非齐次线性方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩都是 3. 则它的通解的任意表达式中一定含有 2 个任意常数.

例 4.33 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

例 4.34 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}.$$

例 4.35 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}.$$

例 4.36 已知 a, b 是常数. 解线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 1 \end{cases}.$$

例 4.37 设某个线性方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} -2+3s-2t \\ 1-2s+3t \\ -1+s \\ 2+t \end{pmatrix}, \quad s,t \text{ 是任意数.}$$

(1) 证明: 该方程组不是齐次线性方程组.

(2) 求该方程组的系数矩阵的秩, 并写出它的导出组的一个基础解系.

例 4.38 设某个 5 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 且有无穷多个解. 证明: 存在该方程组的 3 个线性无关的解 γ_1, γ_2, γ_3, 使得该方程组的任意解 γ 都可以由 γ_1, γ_2, γ_3 线性表出.

例 4.39 设齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解. λ 应满足的条件是 ________.

例 4.40 当a的值是多少时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

无解,有唯一解,有无穷多个解.当有无穷多解时,试用一个特解及导出组的基础解系表示其全部解.

例 4.41 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + ax_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 - x_4 = 1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解, 证明系数矩阵的秩为 2, 进一步求 a, b 的值以及该方程组的通解.