

写在前面:

1. 答案里说的课本指的是由四川大学数学学院编写的《线性代数》(中国人民大学出版社)。
2. 仅供内部参考使用, 请勿将此文档上传到百度文库以及其同类网站上。
3. 由个人整理, 如果发现错误或有更好的解题方法请发送邮件至 1315030237@qq.com.

习题课上总结的一些题

一. 求矩阵的 m 次方。(这里之所以写 m 是为了与矩阵的阶数 n 区别开来, 以防混淆)

1. 数学归纳法。即依次求出 A, A^2, A^3, \dots 。一般不用, 但也有特殊情况(例如 17-18 年半期测试的一大题的第四小题, 当然这个题有两种解法, 任选其一; 15-16 年的期末试题三大题的第二小题的最后一问)。

2. 对角矩阵的 m 次方。(显然不会单独出题)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^m = \begin{bmatrix} a_{11}^m & & & \\ & a_{22}^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^m \end{bmatrix}.$$

3. 如果一个 n 阶方阵 A 主对角线上以及主对角线的一侧元素全为 0, 那么必有 $A^k = 0$, 其中 $k \geq n$ 。即 A 是下边的几种形状之一:(一定要注意是针对主对角线, 副对角线该结论不成立, 第二次习题课讲这里时讲错了, 后边已更正)

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{例如: 若 } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \underline{\quad 0 \quad}.$$

解:

由矩阵的乘法:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇

4. 一般来说, 上边的 2,3 不会单独出题, 因为太过简单, 都是组合起来出题。

二项式定理: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i \cdot b^{n-i}$, 式中: C_n^i 为组合数, $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ 。

$$\text{例如: 若 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^m = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解:

$$\text{由题得: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I + B$$

$$\text{由 3 的结论可知: } B^k = 0, k \geq 3. \text{ 计算得: } B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} A^m &= (I + B)^m = C_m^0 I^m B^0 + C_m^1 I^{m-1} B^1 + C_m^2 I^{m-2} B^2 + C_m^3 I^{m-3} B^3 + \cdots + C_m^0 I^0 B^m \\ &= I^m B^0 + m I^{m-1} B^1 + \frac{m(m-1)}{2} I^{m-2} B^2 = I + mB + \frac{m(m-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{m(m-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2m & 4m^2 - m \\ 0 & 1 & 4m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

5. 如果一个 n 阶方阵 A 的秩 $r(A) = 1$, 那么 A 一定可以写成一个列向量与一个行向量的乘积, 即 (我们以 3 阶的方阵为例, 最后把结果推广到 n 阶):

设 3 阶方阵 A 的秩 $r(A) = 1$, 设 $\alpha = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T, \beta = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$, 则

$$A = \alpha \beta^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{bmatrix} \text{ (至于这里的 } x \text{ 和 } y \text{ 的具体值, 我们并不关心。)}$$

$l = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. 可以看出 l 是矩阵 A 的对角线元素之和 (又称 A 的迹)。

$$A^2 = (\alpha \beta^T)^2 = \alpha (\beta^T \alpha) \beta^T = l \alpha \beta^T = l A, A^3 = A A^2 = A l A = l A^2 = l l A = l^2 A \cdots, \Rightarrow A^m = l^{m-1} A.$$

例如: (对 2,3,4,5 综合运用)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^m = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解:

经观察, 我们可将矩阵按下列方式进行分块:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ 分块后是对角矩阵, 所以: } A^m = \begin{bmatrix} A_{11}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^m \end{bmatrix} \text{ (注: 2 的结论)}$$

对于 A_{11} :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3I + B$$

和 4 一样了, 此时 $B^k = 0, k \geq 2$

$$\begin{aligned} A_{11}^m &= (3I + B)^m = C_m^0 B^0 (3I)^m + C_m^1 B^1 (3I)^{m-1} + C_m^2 B^2 (3I)^{m-2} + \cdots + C_m^m B^m (3I)^0 \\ &= 3^m I + 3^{m-1} m B \\ &= \begin{bmatrix} 3^m & m 3^{m-1} \\ 0 & 3^m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对于 A_{22} , 经过高斯消元法变换 $(r_1 - 3r_2)$ 后: $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可以看出 $r(A_{22}) = 1$, 符合本条的描述, 所以

$$l = 3 + 3 = 6$$

$$A_{22}^m = l^{m-1} A = 6^{m-1} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

所以:

$$A^m = \begin{bmatrix} A_{11}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^m & m \cdot 3^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 6^{m-1} & 9 \cdot 6^{m-1} \\ 0 & 0 & 6^{m-1} & 3 \cdot 6^{m-1} \end{bmatrix}$$

◇

6. 用相似矩阵的性质来做, 即若 $A \sim B$, 则 $A^m \sim B^m$ (例如 17-18 年半期测试的一大题的第四小题)。

但通常有一些矩阵隐含了此属性, 也可以用此方法来做, 要注意辨别。(例如: 课本的 140 页第 9 题, 答案在 224 页)

二、特殊矩阵的特征值求法

1. 对角阵, 上下三角阵的行列式均为对角线的元素。(由这些特殊行列式的算法很容易看出来)

2. 设 $A = [a_{ij}]$ 是三阶矩阵, 则 (下式不做推导, 感兴趣的可以自己算一下)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 - \sum a_{ii} \lambda^2 + S_2 \lambda - |A|$$

$$\text{式中: } S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若 $r(A) = 1$ (再复习一下一的第五点), 则 $|A| = 0, S_2 = 0$, 代入到上式有

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum a_{ii} \lambda^2 = \lambda^2 \left(\lambda - \sum a_{ii} \right)$$

做推广, 对于 n 阶矩阵 A , 若 $r(A) = 1$, 则 $|\lambda E - A| = \lambda^{n-1} (\lambda - \sum a_{ii})$

例如:

已知 $a \neq 0$, 求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量。

解:

方法一: (直接计算)

由特征多项式:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -a & -a \\ -a & \lambda - 1 & -a & -a \\ -a & -a & \lambda - 1 & -a \\ -a & -a & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = [\lambda - (3a + 1)](\lambda + a - 1)^3$$

得 A 的特征值是 $3a + 1, 1 - a$ 。

当 $\lambda = 3a + 1$ 时, 由 $[(3a + 1)E - A] = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} 3a & -a & -a & -a \\ -a & 3a & -a & -a \\ -a & -a & 3a & -a \\ -a & -a & -a & 3a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得基础解系为 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, 所以 $\lambda = 3a + 1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1, (k_1 \neq 0)$ 。

当 $\lambda = 1 - a$ 时, 由 $[(1 - a)E - A] = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1, 0)^T, \alpha_4 = (-1, 0, 0, 1)^T$, 所以 $\lambda = 1 - a$ 的特征向量为 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$, 式中 k_2, k_3, k_4 是不全为 0 的任意常数。

方法二: (转换法) 注: 请注意观察下述这种方法适用的特点: 其中一个矩阵必须特征值全相等才能用前边的矩阵快速求解
由题得:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a \end{bmatrix} = B + (1 - a)E$$

由于 $r(B) = 1$, 所以有

$$|\lambda E - B| = \lambda^{4-1} \left(\lambda - \sum_{i=1}^4 a_{ii} \right) = \lambda^3 (\lambda - 4a)$$

所以矩阵 B 的特征值为 $0, 0, 0, 4a$, 所以由特征值的性质, A 的特征值为 $3a + 1, 1 - a, 1 - a, 1 - a$ 。

下边同方法一。

◇

n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

则 $r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由上题可快速写出 A 的特征值为 $n+a-1, a-1, a-1, \dots, a-1$. 因为 A 是实对称矩阵, 所以 $A \sim \Lambda$, 且 Λ 由 A 的特征值所构成, 相似矩阵具有相同的秩, 所以 $r(\Lambda) = r(A)$, 所以

$$\Lambda = \begin{bmatrix} n+a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{bmatrix}$$

这里 n 是 A 的阶数, 所以不会等于 0。所以

$$r(A) = \begin{cases} n, & \text{若 } a \neq 1 \text{ 且 } a \neq 1-n, \\ n-1, & \text{若 } a = 1-n, \\ 1, & \text{若 } a = 1. \end{cases}$$

◇

设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则

A. $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆

B. $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆

C. $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

D. $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解:

注意: 单位向量指的是向量的模(长度)为 1, 要与 $[1, 1, 1]$ 区分开来。

$\alpha\alpha^T\alpha = \alpha(\alpha^T\alpha) = 1\alpha$, 所以 $\alpha\alpha^T$ 有一个特征值 1.

α 为 n 维单位列向量, 所以 $r(\alpha\alpha^T) = 1$, 所以由第一题的结论, $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1, 0, 0, \dots, 0$.

E 为 n 阶单位矩阵, 所以 E 也为实对称矩阵(特征值为 1), 实对称矩阵相加减依然为实对称矩阵, 所以上述选项中每一项均为实对称矩阵。

又由矩阵可逆则行列式一定不为 0 (不可逆则行列式一定为 0, 充要条件), 矩阵的行列式等于特征值的乘积。

$A.c$ 的特征值为 $1-1, 1-0, 1-0, \dots, 1-0$ 即 $0, 1, 1, \dots, 1$, 所以 $|E - \alpha\alpha^T| = 0 \times 1 \cdots 1 = 0$, 即不可逆。

同理可以看出其他选项的行列式均不为 0, 即可逆。

◇

2. 抽象矩阵特征值和特征向量的求法

设 A 是三阶矩阵, 且矩阵 A 的各行元素之和均为 5, 则矩阵 A 必有特征向量_____。

解:

由题得:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 必有特征值 5 且必有特征向量 $k[1, 1, 1]^T, (k \neq 0)$ 。

◇

已知 A 是 3 阶矩阵, 如果非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有通解 $5b + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中 η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 求 A 的特征值和特征向量。

解:

非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解为 $Ax = b$ 的特解加上 $Ax = 0$ 的通解。

由解得结构可知 $5b$ 是方程组 $Ax = b$ 的一个解, 即 $A(5b) = b$, 所以 $Ab = \frac{1}{5}b$ 。即 $\frac{1}{5}$ 是 A 的特征值, $k_1b, (k_1 \neq 0)$ 是相应的特征向量。

η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以必有 $A\eta_1 = 0 = 0\eta_1, A\eta_2 = 0 = 0\eta_2$, 所以 η_1, η_2 是 A 关于 $\lambda = 0$ 的线性无关的特征向量, 所以特征值 0 对应的特征向量为 $k_2\eta_1 + k_3\eta_2, (k_2, k_3 \text{ 不全为 } 0)$ 。

综上所述, A 的特征值为 $\frac{1}{5}, 0, 0$, 对应的特征向量分别是 $k_1b, (k_1 \neq 0), k_2\eta_1 + k_3\eta_2, (k_2, k_3 \text{ 不全为 } 0)$

◇

2014-2015 年第一学期

一、填空题

1. 若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21} = 1$, 则 $a =$ _____。

解:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \times (3 \times 1 - 2 \times 1) = 1, \text{ 解得 } a = 2. \quad \diamond$$

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{bmatrix}$, B 为 3 阶非零矩阵且 $AB = 0$, 则 $t =$ _____。

解:

B 为 3 阶非零矩阵且 $AB = 0$ 即 B 的非零列向量为 $Ax = 0$ 的解, 即 $Ax = 0$ 有非零解, 即 $|A| = 0$, 把 $|A|$ 按第三列展开。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{vmatrix} = -2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & t \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2(2t - 15) + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{17}{2}$$

◇

3. 设 3 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的行列式 $|A| = 3$, 矩阵 $B = (\alpha_2, 2\alpha_3, -\alpha_1)$, 则行列式 $|A - B| =$ _____。

解:

对 A 的第三列乘 2 得: $|\alpha_1 \alpha_2 2\alpha_3| = 2|A|$, 对该表达式第一列乘负一: $|- \alpha_1 \alpha_2 2\alpha_3| = -2|A|$, 交换一二两列, $|\alpha_2 \alpha_1 2\alpha_3| = 2|A|$, 交换二三两列, $|\alpha_2 2\alpha_3 \alpha_1| = -2|A|$, 所以 $|B| = -2|A|$ 。

$$\begin{aligned} |A - B| &= |\alpha_1 - \alpha_2 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| = |\alpha_1 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| + |-\alpha_2 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= |\alpha_1 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| + |\alpha_1 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_1| \\ &= |A| + 0 + 0 - |B| = 3|A| = 9 \end{aligned}$$

◇

4. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 3, 2$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则矩阵 $A^3 + 2A^*$ 主对角线元素之和为_____。

解:

由题得: $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -1 \times 3 \times 2 = -6$ 。所以 A^* 的特征值为: $\frac{|A|}{\lambda_i}$ 。由特征值的性质:

$A^3 + 2A^*$ 的特征值为 $\lambda_i^3 + 2\frac{|A|}{\lambda_i}$ 。所以 $A^3 + 2A^*$ 主对角线元素之和为

$$\text{trace}(A^3 + 2A^*) = \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i^3 + 2\frac{|A|}{\lambda_i} \right) = 36$$

◇

5. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = py$ 可化为标准形: $f = 6y^2$, 则 $a =$ _____。

解:

任意二次型 $x^T Ax$ 经过正交变换化为标准型时, 标准型中平方项的系数即为二次型矩阵 A 的特征值, 即 $6, 0, 0$ 是 A 的特征值, 而 A 的对角线元素是 a, a, a , 由特征值性质 $\text{trace}(A) = a + a + a = \sum_{i=1}^3 \lambda = 6$, 所以 $a = 2$ 。 ◇

6. 设 $(1, 1, 1)^T$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & b \end{bmatrix}$ 的一个特征向量, 则 $a - b =$ _____。

解:

由特征向量的定义有

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ a+2 \\ b+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a - b = 2$$

◇

二. 设多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & -2 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$, 分别求该多项式的三次项、常数项。

解:

Matlab 算出的结果为: $f(x) = 8x^4 - 14x^3 + 11x^2 - 53x + 14$ (作为参考)

两种方法:

方法一: 逆序数定义行列式法:取列为自然排列。分析得: 行数按 2134 和 4231 排列时, 对应的项为 x^3 。即

$$(-1)^{\tau(2134)} a_{21} a_{12} a_{33} a_{44} + (-1)^{\tau(4231)} a_{41} a_{22} a_{33} a_{14} = (-12 - 2)x^3 = -14x^3$$

同理, 取列为自然排列。分析得行数按: 3142、3412 和 3421 排列时为常数项, 即

$$(-1)^{\tau(3142)} a_{31} a_{12} a_{43} a_{24} + (-1)^{\tau(3412)} a_{31} a_{42} a_{13} a_{24} + (-1)^{\tau(3421)} a_{31} a_{42} a_{23} a_{14} = -6 + 4 + 16 = 14$$

方法二: 拉普拉斯展开式定义行列式

按第一列展开 (当然也可以按任意一行或一列展开):

$$\text{原式} = 2x \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 1 & x & 4 \\ 2 & 1 & 4x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & x & 4 \\ 2 & 1 & 4x \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & -2 & 1 \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix}$$

分别从上述四项中找三次项、常数项。

第一项: 按第一行展开

$$2x \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 1 & x & 4 \\ 2 & 1 & 4x \end{vmatrix} = 2x[x(4x^2 - 4) + 2(4x - 8) + (1 - 2x)]$$

显然没有三次项也没有常数项, 就没必要接着算了。

第二项: 按第一行展开

$$-x \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & x & 4 \\ 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$$

可以看出只有第一行第一列展开对应的那项中含有三次项, 而第一行第二列、第一行第三列的既不构成三次项也不构成常数项, 所以没必要计算。

$$\text{原式} = -x \cdot 3 \begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = -3x \cdot x \cdot 4x = -12x^3$$

第三项: 该行列式中总共只有两个 x , 所以一定不可能构成三次项。按第一行展开:

$$2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4x \end{vmatrix} = 2[3(__ - 1) - (__ - 2) + 2(__ + 4)] = 2(-3 + 2 + 8) = 14$$

(上式中画下划线的部分是含有 x 项的, 不构成常数项, 没必要计算)

第四项: 有个系数 x , 所以不可能构成常数项, 按第一行展开, 只有第一行第三列的位置处构成三次项

$$-x \cdot 2 \begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -2x^3$$

所以综上所述, 三次项为 $-12x^3 - 2x^3 = -14x^3$, 常数项为 14

◇

三. 设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, 求 B .

解:

由题得: $|A^*| = 2 \times 2 \times 2 \times 8 = 64$

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \Rightarrow AB = B + 3A \Rightarrow A^*AB = A^*B + 3A^*A$$

$$A^*A = |A|A^{-1}A = |A|I \quad |A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n|A|^{-1} = |A|^{n-1} = |A|^{4-1} = 64 \quad |A| = 4$$

所以 $4B = A^*B + 3 \times 4 \Rightarrow B = 12(4 - A^*)^{-1}$.

求逆的过程略。

最后的结果为:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

◇

四. λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 有无穷多组解? 并在有无穷多解时, 写出方程组的通解。

解:

记 $A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_2} \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(5\lambda+4)$$

可以看出 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时即 $|A| \neq 0$ 时, 方程有唯一解。

$\lambda = 1$ 时:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{中间略}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以 $\lambda = 1$ 时有无穷多解, $x_1 = 1, x_2 = x_3 - 1$.

所以通解为 $x = [1, -1, 0]^T + k[0, 1, 1]^T, (k \in R)$

$\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, $r(A) \neq r(A, B)$, 此时无解。

◇

五. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩与一个最大线性无关组;

(2) 将其余向量用极大线性无关组线性表示。

解:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-\frac{1}{2}r_2 \\ r_4-r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$, 极大线性无关组为: $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_2, \alpha_4), (\alpha_3, \alpha_4)$. (任写一个即可。)

(2) 取 (α_1, α_2) , 由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}$$

◇

六. 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0)$$

的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12。

(1) 求 a, b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型, 并写出所用正交变换。

解:

由题得: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}, |A| = 2(-2a - b^2)$

(1) 由特征值的性质有:

$$\begin{cases} \text{trace}(A) = a + 2 - 2 = 1 \\ \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -12 = |A| = 2(-2a - b^2) \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

分别取 $[x_2, x_3]^T = [1, 0]^T$ 和 $[0, 1]^T$ 得: $\alpha_1 = [0, 1, 0]^T, \alpha_2 = [2, 0, 1]^T$, 可以看出 α_1 与 α_2 正交。

$\lambda_3 = -3$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = -2$ 得: $\alpha_3 = [1, 0, -2]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = [0, 1, 0]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型:

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$$

◇

七. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $A^2 - A - 2I = 0$ 。

(1) 证明: $r(A - 2I) + r(A + I) = n$ 。

(2) 证明: 矩阵 $A + 2I$ 可逆, 并求 $(A + 2I)^{-1}$ 。

证明:

(1) 由题得: $A^2 - A - 2I = (A - 2I)(A + I) = 0$ 。

所以由矩阵秩的性质有: $r(A + 2I) + r(A + I) \leq n$ 。

$r((A - 2I) - (A + I)) = r(-3I) \leq r(A - 2I) + r(-(A + I)) = r(A - 2I) + r((A + I))$, 即 $n \leq r(A - 2I) + r((A + I))$

所以 $r(A - 2I) + r(A + I) = n$ 。

(2) 由题得: $A^2 - A - 2I = 0$, 所以

$$A^2 + 2A - 2A - A - 2I = 0$$

$$A(A + 2I) - 3A - 6I + 6I - 2I = 0$$

$$A(A + 2I) - 3(A + 2I) = (A - 3I)(A + 2I) = -4I$$

$$-\frac{1}{4}(A - 3I)(A + 2I) = I$$

所以 $A + 2I$ 可逆, $(A + 2I)^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 3I)$

◇

2. 设 X_0 是线性方程组 $Ax = b$ ($b \neq 0$) 的一个解, X_1, X_2 是导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系。令 $\xi_0 = X_0, \xi_1 = X_0 + X_1, \xi_2 = X_0 + X_2$, 证明: ξ_0, ξ_1, ξ_2 线性无关。

证明:

设

$$k_0\xi_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0 \quad (1)$$

要证明 ξ_0, ξ_1, ξ_2 线性无关, 根据定义, 只需证明 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。

由题得: $AX_0 = b, AX_1 = AX_2 = 0$, 因为 X_1, X_2 为 $AX = 0$ 的基础解系, 所以 X_1, X_2 线性无关。

把题中条件代入 (1) 式:

$$k_1X_0 + k_2X_0 + k_2X_1 + k_3X_0 + k_3X_2 = (k_1 + k_2 + k_3)X_0 + k_2X_1 + k_3X_2 = 0 \quad (2)$$

(2) 式两边同时左乘矩阵 A :

$$(k_1 + k_2 + k_3)AX_0 + k_2AX_1 + k_3AX_2 = (k_1 + k_2 + k_3)b = 0$$

因为 $b \neq 0$, 所以 $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ 。代入 (2) 式得: $k_2X_1 + k_3X_2 = 0$, 因为 X_1, X_2 线性无关, 所以 $k_2 = k_3 = 0$ 。所以 $k_1 = 0 - k_2 - k_3 = 0$ 。

所以 ξ_0, ξ_1, ξ_2 线性无关。 ◇

八. 设 3 阶方阵 A 的特征值 -1, 1 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 设 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 求 $P^{-1}AP$.

解:

由题得: $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$.

(1) 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (1)$$

要证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 只需证明 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, (1) 式两边同左乘 A :

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = -k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (2)$$

(1) 式减 (2) 式: $-2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$, 因为 α_1 和 α_2 是分属于不同的特征值的特征向量, 所以 α_1 和 α_2 线性无关。即 $\begin{cases} -2k_1 = 0 \\ -k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$k_1 = k_3 = 0$, 代入到 (1) 式: $k_2\alpha_2 = 0$, 又因为特征向量不为 0, 所以 $k_2 = 0$.

综上所述: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

(2) 由题得:

$$AP = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = [-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P\Lambda$$

$$\text{所以 } \Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇

2015-2016 年第一学期

一、填空题

1. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解:

把第二行加到第一行上:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ -2 & 3-a & a \\ 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = A$$

把 A 的第二行加到第一行上:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & a \\ -3 & 4-a \end{vmatrix} = 24$$

◇

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $A^2 - 2A$ 的秩 $r(A^2 - 2A)$ 。

解:

由题得: $A^2 - 2A = A(A - 2E)$, 可以看出 A 是满秩方阵, 即 A 可逆。满秩方阵一定可逆, 所以 $r(A^2 - 2A) = r(A(A - 2E)) = r(A - 2E)$ 。

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(A - 2E) = 3$, 所以 $r(A^2 - 2A) = 3$

◇

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 若 $\sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i$ 也是 $Ax = b$ 的解, 则 $\sum_{i=1}^3 c_i = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得: $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b, A\alpha_3 = b, A \sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i = A(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3) = b$ 。

所以 $A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = 3b$, 即 $A \left(\frac{1}{3} \alpha_1 + \frac{1}{3} \alpha_2 + \frac{1}{3} \alpha_3 \right) = b = A(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3)$, 所以 $\sum_{i=1}^3 c_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ 。 ◇

4. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix}$, 若 $\alpha = (1, -2, 3)^T$ 是其特征向量, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

设 α 对应的特征值为 λ 。由特征向量的定义:

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$$

◇

5. 任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 3)^T, \alpha_3 = (t, 1, 2)^T$ 线性表示, 则 t 应满足条件_____。

解:

任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T$ 也可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而 e_1, e_2, e_3 可以表示任意三维实列向量, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 e_1, e_2, e_3 可以相互线性表示, 所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, e_1, e_2, e_3) = r(e_1, e_2, e_3) = 3$. 所以 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2t - 6 \neq 0$, 即 $t \neq 3$.

◇

6. 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$ 正定, 则 λ 满足的条件为_____。

解:

由题得: A 为对称矩阵, 如果 A 正定, 则 $|A| > 0$, 所以 $|A| = \lambda - 5 > 0 \Rightarrow \lambda > 5$.

◇

二、计算题

1. 若行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} + 2A_{21} + A_{31} + 2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解:

由题得:

$$A_{11} + 2A_{21} + A_{31} + 2A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

把第一行的负二倍加到第二行, 把第一行的负一倍分别加到第三、四行。

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

把第一行的负一倍加到第三行:

$$4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-1) \times ((-1) \times (-1) - (-2) \times 1) = -12$$

◇

2.

已知矩阵 X 满足方程 $X \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 求矩阵 X 。

解:

由题得:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} r_2-2r_3 \\ r_1+2r_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -6 \\ 14 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

◇

3. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$, 求向量组的秩、极大线性无关组, 并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-\frac{1}{3}r_2 \\ r_4-\frac{2}{3}r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{3} \\ r_4 \times (-\frac{1}{4})}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以该向量组的秩为 3, 极大线性无关组为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$ 。

由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ 表示 α_3, α_5 : 由最简阶梯型矩阵可以看出

$$\begin{cases} \alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

◇

三、解答题

$$1. \text{ 当 } k \text{ 为何值时, 线性方程组 } \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k - 3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases} \quad \text{有唯一解, 无解和有无穷多解? 当方程组有无穷}$$

多解时求出所有解。

解:

(系数矩阵是方阵, 也可以用行列式来做这个题。具体看 14-15 年期末试题的第四题, 推荐这种方法)

增广矩阵

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2 - kr_1 \\ r_3 - r_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 3(k-1) \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 3(k-1) \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - (1+k)r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(k+2) & 3(k-1) \end{array} \right] \end{aligned}$$

讨论:

(1) 解不存在: 即存在矛盾方程 (增广矩阵主元列在最右列)。即对于 r_3

$$\begin{cases} (1-k)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k = -2$$

(2) 存在唯一解: 主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-k \neq 0 \\ (1-k)(k+2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k \neq 1 \text{ 且 } k \neq -2$$

$k \neq 1$ 且 $k \neq -2$, 继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{(k+2)(1-k)}]{r_2 \times \frac{1}{1-k}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array} \right] \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & -2 - \frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 - kr_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5k+1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array} \right]$$

所以方程组存在唯一解时: $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$, 解为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5k+1}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \end{bmatrix}, \quad k \neq 1 \text{ 且 } k \neq -2$$

(3) 存在无穷解: 至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (k-1)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

把 $k = 1$ 代入阶梯矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2 - c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } x \text{ 的解为 } x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_2 \quad c_1, c_2 \in R.$$

◇

2. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$ 。

(1) 求 A 对应于特征值 1 的特征向量;

(2) 求 A ;

(3) 求 A^{2016} 。

解:

(1) 由于 A 是实对称矩阵, 所以对于 A 的不同特征值的特征向量正交, 所以设特征值 1 对应的特征向量是 $\alpha = [x_1, x_2, x_3]$ 。所以有:

$$\alpha_1^T \alpha = x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$$

$$\text{分别取 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 得 } \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

α_2, α_3 即为 A 对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义: $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ 。所以:

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3] \Rightarrow$$

$$A = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{式中: } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

(3) 由 (2) 得: $A^2 = E_3$ (E 表示单位矩阵。) 所以 $A^{2016} = (A^2)^{1008} = E_3$ 。

◇

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置, 已知 $r(A) = 2$, 且二次型 $f(x) = x^T A^T A x$.

(1) 求 a ;

(2) 写出二次型 $f(x)$ 的矩阵 $B = A^T A$;

(3) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 $f(x)$ 化为标准型, 并写出所用的正交变换。

解:

(1) 由题得:

$$A \xrightarrow[r_4 - ar_2]{r_3 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -1-a \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$, 所以 $1+a=0$ 且 $-1-a=0$ 解得: $a=-1$ 。

(2)

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(3)

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$\lambda_1 = 0$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得: $\alpha_1 = [1, 1, -1]^T$.

$\lambda_2 = 2$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = 1$ 得: $\alpha_2 = [1, -1, 0]^T$.

$\lambda_3 = 6$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 2$ 得: $\alpha_3 = [1, 1, 2]^T$. 因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型:

$$f = 2y_2^2 + 6y_3^2$$

◇

四、证明题

1. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 其中 E 为单位矩阵, 试证:

(1) $A + 2E$ 可逆;

(2) A 为正定矩阵。

证明:

(1) 由题得: $A^2 - 3A + 2E = 0$, 所以:

$$A^2 + 2A - 2A - 3A + 2E = 0$$

$$A(A + 2E) - 5A - 10E + 10E + 2E = 0$$

$$A(A + 2E) - 5(A + 2E) = (A - 5E)(A + 2E) = -12E$$

$$-\frac{1}{12}(A - 5E)(A + 2E) = E$$

所以 $A + 2E$ 可逆, $(A + 2E)^{-1} = -\frac{1}{12}(A - 5E)$ 。

(2) 对于 n 阶实对称矩阵, 如果 A 为正定矩阵, 则 A 的全部特征值大于 0. 设 A 的特征值为 λ 。由题得:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 2 > 0$$

所以 A 为正定矩阵。

◇

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 向量 γ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha$ 线性无关。

证明:

向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即存在一组不全为 0 的 $k_i (1 \leq i \leq 3)$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \quad (1)$$

反证: 假设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha$ 线性相关。则存在一组不全为 0 的 $l_i (1 \leq i \leq 3)$ 和 l , 使得

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l(\beta + \gamma) = 0 \quad (2)$$

若 $l = 0$, 则 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l(\beta + \gamma) = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 = 0$, 此时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 与题中的条件矛盾, 所以 $l \neq 0$ 。所以 (1) 式可变形为

$$\beta + \gamma = -\frac{1}{l}(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3)$$

代入 (1) 式:

$$\gamma = -\frac{1}{l}(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3) - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3$$

可以看出此时 γ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与题目矛盾, 所以假设错误, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha$ 线性无关。

◇

2016-2017 年第一学期

一、填空题

1. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

(注意爪型行列式的做法) 对行列式做如下变换: 第一行减去 z 倍的第四行, 第一行减去 y 倍的第三行, 第一行减去 x 倍的第二行, 得到如下行列式:

$$\begin{vmatrix} 1-x^2-y^2-z^2 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-x^2-y^2-z^2$$

◇

2. 设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $r(A^2 - 2A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

$|A^*| = |A|^{n-1}$ 得: $|A^*| = 2^3 = |A|^3$. 所以 $|A| = 2 \neq 0$. 即 A 可逆。

所以 $r(A^2 - 2A) = r(A(A - 2E)) = r(A - 2E) = r(|A|(A^*)^{-1} - 2E) = r((A^*)^{-1} - E) = 3$. (求逆和秩的过程略)

◇

3. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ 与线性方程 $ax_2 + x_3 = 1$ 有公共的解, 则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

注意同解与公共解的区别:

对于方程组 (1) 和方程组 (2), 如果 α 既是方程组 (1) 的解, 也是方程组 (2) 的解, 则称 α 是方程组 (1) 和方程组 (2) 的公共解。

对于方程组 (1) 和方程组 (2), 如果 α 是方程组 (1) 的解, 则 α 一定是方程组 (2) 的解, 反之如果 α 是方程组 (2) 的解, 则 α 一定是方程组 (1) 的解, 则称, 方程组 (1) 和方程组 (2) 同解。

关于公共解, 通常有如下解法: (假设方程组 (1) 有两组不同的基础解系 ξ_1, ξ_2 , 方程组 (2) 有两组不同的基础解系 η_1, η_2)

方法 1: 分别求出方程组 (1) 和 (2) 的通解: 即 (1) 得到通解为: $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, (2) 的通解为 $l_1\eta_1 + l_2\eta_2$. 令两个方程组的通解相等, 找出对应的 k 和 l 的关系。

方法 2: 求出其中一个通解, 代入到另外一个方程组中, 找出相应的系数所满足的关系式进一步求出公共解。

方法 3: 联立两个方程组得到一个新的方程组 (3), 求出 (3) 的解即为公共解。

显然, 此题用方法 3 更合适: 联立两个方程组, 得到增广矩阵:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & -1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

讨论: $a = 0$ 时: 显然 $r(A) = r(A|B)$, 即线性方程组有解, 即这两个线性方程组有公共解。

$a \neq 0$ 时, 对增广矩阵进一步进行高斯消元:

$$\xrightarrow{r_2 - ar_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1-2a & -2-a & -3-2a \\ 0 & a & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & -1-2a & -2-a & -3-2a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + \frac{1+2a}{a}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2-1}{a} & -\frac{2a^2+a-1}{a} \end{bmatrix}$$

当 $-\frac{a^2-1}{a}=0$ 且 $-\frac{2a^2+a-1}{a}\neq 0$ 时, 无解, 此时没有公共解, 解得 $a=1$. 所以 $a=1$ 时无公共解, 所以 $a\neq 1$. \diamond

4. 设 $\alpha_1=(a, 1, 1)^T, \alpha_2=(1, b, -1)^T, \alpha_3=(1, -2, c)^T$ 是正交向量组, 则 $a+b+c=$ _____。

解:

由题得:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2^T = a+b-1=0 \\ \alpha_1\alpha_3^T = a-2+c=0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 1-2b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=2$$

\diamond

5. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 1, 2, 3 对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1, 1, 1)^T, \alpha_2=(2, -1, -1)^T, \alpha_3$, 则 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3=$ _____。

解:

设 $\alpha_3=[x_1, x_2, x_3]^T$, 实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的, 所以:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_3^T = x_1+x_2+x_3=0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 2x_1-x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$$

令 $x_3=-1$, 有 $\alpha_3=[0, 1, -1]$ \diamond

6. 设 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 已知二次型 $f(x) = x^T B x$ 是正定的, 则 λ 的取值范围为_____。

解:

由题得:

$$f(x) = x^T B x = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1 \quad 2x_1+2x_2 \quad 4x_1+6x_2+\lambda x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

所以其对应的二次型矩阵为: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$, A 为对称矩阵, 如果 A 正定, 则 $|A| > 0$, 所以 $|A| = \lambda - 5 > 0 \Rightarrow \lambda > 5$. \diamond

二、计算题

1. 若行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} - 2A_{21} + A_{31} - 2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解:

$$\begin{aligned} A_{11} - 2A_{21} + A_{31} - 2A_{41} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_2+2r_1, r_3-r_1} 4 \begin{vmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1-7r_2} 4 \begin{vmatrix} 0 & 17 & 21 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times 1 \times (-1)^{1+2} (17 \times 8 - 7 \times 21) = 44 \end{aligned}$$

\diamond

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, B 为三阶矩阵, 且满足方程 $A^* B A = I + 2A^{-1} B$, 求矩阵 B 。

解:

由题得: $|A| = 1, A^* = |A|A^{-1} = A^{-1}$. 对题中方程两边同时左乘 A 得:

$$BA = A + 2B$$

$$B = A(A - 2E)^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -18 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\text{求逆的过程略。}) (A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

◇

3. 设向量组 $\alpha_1 = (3, 1, 4, 3)^T, \alpha_2 = (1, 1, 2, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1, 0)^T, \alpha_4 = (2, 2, 4, 2)^T$, 求向量组的所有的极大线性无关组。

解:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 2, 极大线性无关组为 $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_3, \alpha_4)$.

◇

三、解答题

1. 令 $\alpha = (1, 1, 0)^T$, 实对称矩阵 $A = \alpha\alpha^T$.

(1) 把矩阵 A 相似对角化:

(2) 求 $|6I - A^{2017}|$.

解:

$$\text{由题得: } A = \alpha\alpha^T = (1, 1, 0)^T(1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ 所以}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - 1)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\lambda_1 = 2$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元, 步骤略}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以看出, $\lambda_1 = 2$ 时: 代数重数等于几何重数。

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元, 步骤略}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以看出, $\lambda_2 = \lambda_2 = 0$ 时: 代数重数等于几何重数。

所以 A 可以相似对角化: 即存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, 其中 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) 由特征值的性质: $6I - A^{2017}$ 的特征值为: $6 - \lambda_i^{2017}$, 所以

$$|6I - A^{2017}| = \prod_{i=1}^3 (6 - \lambda_i^{2017}) = 36 \times (6 - 2^{2017})$$

◇

2. 已知实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 4 \\ -1 & 3 & b \\ 4 & b & 0 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$ 相似。

(1) 求矩阵 A ;

(2) 求正交线性变换 $x = Qy$, 把二次型 $f(x) = x^T Ax$ 化为标准型。

解:

对于对角矩阵, 其特征值为对角线上的元素。因为 A 与 B 相似, 所以 A 与 B 有相同的特征值。

(1) 由特征值的性质

$$\begin{cases} \text{trace}(A) = a + 3 + 0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 2 - 4 + 5 = 3 \\ |A| = (-1) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & b \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & b \end{vmatrix} = -8b - 48 = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = 2 \times (-4) \times 5 = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

(2)

$\lambda_1 = 2$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_1 = [1, 2, 1]^T$ 。

$\lambda_2 = -4$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = -1$ 得 $\alpha_2 = [1, 0, -1]^T$ 。

$\lambda_3 = 5$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_3 = [1, -1, 1]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型:

$$f = 2y_1^2 - 4y_2^2 + 5y_3^2$$

◇

3. 在对观测数据拟合的时候经常遇到线性方程组 $Ax = b$ 是矛盾方程的情形, 是没有解的。此时我们转而解 $A^T Ax = A^T b$, 我们称 $A^T Ax = A^T b$ 是原线性方程组的正规方程组。称正规方程组的解为原方程组的最小二乘解。设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(1) 证明 $Ax = b$ 无解;

(2) 求 $Ax = b$ 的最小二乘解。

解:

(1) 由题得:

$$[A|B] \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出 $r(A) = 3 \neq r(A|B) = 4$, 所以 $Ax = b$ 无解。

(2)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

高斯消元步骤略 (考试必须写上)。最后解得: $x_1 = 8, x_2 = -6, x_3 = 0$

◇

四、证明题

1. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的向量组, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性相关, 证明 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示并且表示方法唯一。

证明:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性相关, 则存在一组不全为 0 的 $l_i (1 \leq i \leq 3)$ 和 l , 使得

$$l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l \beta = 0 \quad (1)$$

若 $l = 0$, 则 $l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l \beta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 = 0$, 此时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 与题中的条件矛盾, 所以 $l \neq 0$ 。所以

(1) 式可变形为

$$\beta = -\frac{1}{l}(l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3)$$

即 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 不妨设任意两组不全为 0 的数 $m_i, n_i, (1 \leq i \leq 3)$, 使得

$$\beta = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 \quad (2)$$

$$\beta = n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + n_3 \alpha_3 \quad (3)$$

(2) 式减 (3) 式: $0 = (m_1 - n_1) \alpha_1 + (m_2 - n_2) \alpha_2 + (m_3 - n_3) \alpha_3$, 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以有 $m_1 - n_1 = 0, m_2 - n_2 = 0, m_3 - n_3 = 0$, 即 $m_1 = n_1, m_2 = n_2, m_3 = n_3$, 由于 m_i 和 n_i 的任意性, 所以可证得表示方法唯一。 ◇

2. 已知 A, B 是同阶实对称矩阵。

(1) 证明如果 $A \sim B$, 则 $A \simeq B$, 也就是相似一定合同;

(2) 举例说明反过来不成立。

证明:

(1) 因为 $A \sim B$, 所以 A, B 具有相同的特征值, 记为 $\lambda_i, (1 \leq i \leq n)$ 。对于实对称矩阵 A 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ_1$ 为对角矩阵。即存在正交矩阵 Q_1 , 使得 $Q_1^{-1}AQ_1 = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, 对于正交矩阵 Q_1 , 有 $Q_1^{-1} = Q_1^T$, 即 $Q_1^T AQ_1 = \Lambda$, 所以 A 合同于 Λ , 同理 B 合同于 Λ , 所以 A 合同于 B 。

(2) 反过来描述: A, B 是同阶实对称矩阵, $A \simeq B$, 则 $A \sim B$ 。

由惯性定理 (157 页) 知: 如果: $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}$, A, B 为对角阵, 且 $A \simeq B$, 但 A 和 B 的特征值不同, 即 A 与 B 不相似。◇

2017-2018 年第一学期

一、填空题

1. 设 A_{ij} 是三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ 第 i 行第 j 列元素的代数余子式, 则 $A_{31} + A_{32} + A_{33} =$ _____。

解:

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

◇

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $r(A + AB) =$ _____。

解:

由题得: $|A| = 0$ (第一行减第二行然后按第一行展开)

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = A + AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 16 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ 10 & 19 & 27 \end{bmatrix}$$

$$C \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \\ 10 & 19 & 27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 5r_1}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(A + AB) = 2$

◇

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 记 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} =$ _____。

解:

$$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}, \text{ 由题得: } |A| = 8$$

◇

4. 已知 3 阶方阵 A 的秩为 2, 设 $\alpha_1 = (2, 2, 0)^T, \alpha_2 = (3, 3, 1)^T$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 则导出 $Ax = 0$ 的基础解系为_____。

解:

因为 α_1, α_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 所以 $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b$, 且 α_1, α_2 不相等, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2$ 是 $AX = 0$ 的基础解系。(实际上 $k(\alpha_1 - \alpha_2)$ 都是导出组的基础解系。)

◇

5. 若 3 阶矩阵 A 相似于 B , 矩阵 A 的特征值是 1, 2, 3 那么行列式 $|2B + I| =$ _____。(其中 I 是 3 阶单位矩阵)

解:

$$A \text{ 相似于 } B, \text{ 所以 } A \text{ 与 } B \text{ 的特征值相等。所以 } 2B + I \text{ 的特征值为 } 2\lambda_i + 1, \text{ 所以 } |2B + I| = \prod_{i=1}^3 (2\lambda_i + 1) = 105$$

◇

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____。

解:

二次型对应的矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}$$

A 的秩为 2, 即 $|A| = 0$, 解得: $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

◇

二、计算题

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{aligned} D & \xrightarrow{\substack{c_1+3c_3 \\ c_2+c_3 \\ c_4+c_3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1-2c_3 \\ c_2-2c_3}} -2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \end{vmatrix} \\ & = -2 \times 1 \times (-1)^{1+3} \times [3 \times (-8) - (-1) \times 4] = 40 \end{aligned}$$

◇

2. 解矩阵方程 $(2I - B^{-1}A)X^T = B^{-1}$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵, X^T 是 3 阶矩阵 X 的转置矩阵, $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解:

由题得: $(2I - B^{-1}A)X^T = B^{-1}$, 所以:

$$\begin{aligned} X^T &= (2I - B^{-1}A)^{-1}B^{-1} = [B(2I - B^{-1}A)]^{-1} \\ &= (2B - A)^{-1} \end{aligned}$$

$$C = 2B - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 所以 } X = C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

◇

3. 求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$ 的通解。

解:

增广矩阵

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4 - \frac{7}{2}r_1]{r_2 - \frac{1}{2}r_1, r_3 - \frac{3}{2}r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 & \frac{9}{2} & 7 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 & \frac{15}{2} & 17 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4 - 7r_2]{r_3 - 5r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{r_4 - 2r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \times \frac{1}{2}, r_2 \times 2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[r_1 + \frac{3}{2}r_3]{r_2 - r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{r_1 + \frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$x_1 = 3 - x_3 \quad x_2 = 2x_3 - 8 \quad x_3 = x_3 \quad x_4 = 6$$

令 $x_3 = C, C \in R$, 则

$$x = \begin{bmatrix} 3 - C \\ 2C - 8 \\ C \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} C, C \in R$$

◇

三、解答题

1. 设 1 为矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ 的特征值, 其中 $x > 1$.

(1) 求 x 及 A 的其他特征值。(2) 判断 A 能否对角化, 若能对角化, 写出相应的对角矩阵 Λ 。

解:

(1) 设 α_1 为特征值 1 对应的特征向量, 所以 $\alpha_1 \neq 0$ 由题得: $A\alpha_1 = \alpha_1$, 即 $(A - E)\alpha_1 = 0$, 即 $(A - E)x = 0$ 有非零解。所以由存在唯一性定理: $|A - E| = 0$, 所以

$$|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)(x-2) = 0$$

由题得: $x > 1$, 所以解得 $x = 2$ 。(2) 把 $x = 2$ 代入得:

$$\begin{aligned}
|\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_2} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -(\lambda+1) & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-2) - 2] = 0
\end{aligned}$$

解得: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$ 。

因为 A 为三阶, 并且有 3 个不同的特征值, 所以可以相似对角化, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ 。(不唯一, 只要对角线元素是这三个

就可以)

◇

2. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$ 。

- (1) 写出该二次型的矩阵 A ;
- (2) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q$ 为对角型矩阵;
- (3) 给出正交变换, 化该二次型为标准型。

解:

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)[(\lambda - 2)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

$\lambda = 3$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 \in R \end{cases}$$

分别取 $[x_2, x_3]^T = [1, 0]^T$ 和 $[0, 1]^T$ 得 $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T, \alpha_2 = [0, 0, 1]^T$ 。

$\lambda = 1$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = -1$ 得 $\alpha_2 = [1, -1, 0]^T$ 。

因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = [0, 0, 1]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型:

$$f = 3y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$$

◇

3. 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$ 及 $\beta_4 = (3, 10, b, 4)^T$ 。

- (1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合?
- (2) a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并写出该表达式。

解:

记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则

$$[A|\beta] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array} \right]$$

(1) 可以看出 $b \neq 2, a \in R$ 时, $Ax = \beta$ 无解, 即 β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

(2) $b = 2$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

当 $a \neq 1, r(A) = r(A, \beta) = 3$, 此时: $Ax = \beta$ 有唯一解, 即 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_3 \times \frac{1}{a-1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2-r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1+2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

此时 $Ax = \beta$ 的解为 $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$, 所以 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ 。

$a = 1$ 时 $r(A, \beta) = r(A) = 2 < 3$, 所以 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_1+2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以解得 $x_1 = -1 - 2x_3, x_2 = x_3 + 2$, 令 $x_3 = k, k \in R$, 则 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = -(1+2k)\alpha_1 + (2+k)\alpha_2 + k\alpha_3$ ◇

四、证明题

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 证明: 若 A, B 相似则 $|A| = |B|$, 举例说明反过来不成立。

证明:

若 A 与 B 相似, 则依定义有: 存在一个可逆矩阵 P , 使得 $A = P^{-1}BP$, 两边同时求行列式: $|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}| \cdot |B| \cdot |P| = |B| \cdot |P^{-1}P| = |B| \cdot |E| = |B|$ 。

反过来描述: 如果 $|A| = |B|$, 则 A 和 B 相似。

例如: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = 1, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |B| = 1$, 所以 $|A| = |B|$, 但是: 假设存在一个可逆矩阵 $P, P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$,

即 $|A| = |B|$, 但是 A, B 不相似。 ◇

2. 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 证明 $Ax = 0$ 与 $(A^T A)x = 0$ 是同解方程, 进一步得出 $r(A) = r(A^T A)$ 。

解:

(1) 若 x_0 为 $Ax = 0$ 的解, 则 $Ax_0 = 0$, 对等式两边同时左乘 A^T : $A^T Ax_0 = 0$, 即 x_0 为 $A^T Ax = 0$ 的解。

若 x_1 为 $A^T Ax = 0$ 的解: 则 $A^T Ax_1 = 0$, 等式两边同时左乘 x_1^T : $x_1^T A^T Ax_1 = (Ax_1)^T (Ax_1) = 0$, 所以 $Ax_1 = 0$, 所以 x_1 为 $Ax = 0$ 的解。(注: 这里就认为 x 是一个列向量, 所以 Ax 也是列向量, 用向量内积的性质。)

综上所述: $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 同解。

(2) $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 同解, 则它们解的空间维数相同。又因为解的空间维数 = 未知量的个数 - 系数矩阵的秩。两个方程的未知数个数相同, 所以系数矩阵相同, 即 $r(A) = r(A^T A)$ ◇

2018-2019 年第一学期

一、填空题

1. 设 A 为 5 阶方阵满足 $|A| = 2$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|2A^{-1}A^*A^T| =$ _____。

解:

原式 =

$$2^5 |A^{-1}| \cdot |A^*| \cdot |A^T| = 2^5 \cdot |A|^{-1} \cdot |A|^{5-1} \cdot |A| = 2^9 = 512$$

◇

2. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 4, k)$ 线性无关, 则实数 k 满足的条件是_____。

解:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 即 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$$

◇

3. 设 A 为 m 阶阵, 存在非零的 m 维列向量 B , 使 $AB = 0$ 的充分必要条件是_____。

解:

B 非零, 说明 $Ax = 0$ 有非零解, 由存在唯一性定理: $|A| = 0$, 或 $r(A) < m$ 。

◇

4. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 其特征值为 $1, -1, 2$, A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 A^* 的主对角线元素之和即 $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$ _____。

解:

由题得: $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -2$, 所以 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_i}$, 所以 A^* 的主对角线元素之和为 $\text{trace}(A^*) = \sum_{i=1}^3 \frac{|A|}{\lambda_i} = -1$ 。

◇

5. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则 t 应满足_____。

解:

二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, 二次型正定, 即 A 正定, 即 A 的所有顺序主子是大于 0. 即

$$D_1 = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0 \Rightarrow -2 < t < 2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4t - 4t^2 > 0 \Rightarrow -2 < t < 1$$

综上所述: $-2 < t < 1$.

◇

6. 设 3 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 。则行列式 $|A| =$ _____。

解:

由题得: $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 所以

$$A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3)$$

即

$$\begin{aligned}
 |A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)| &= |A| \cdot |\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| = |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3| \\
 &= |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3| \xrightarrow{c_3 - c_2} |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| = -|\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| \\
 &|A| = -1
 \end{aligned}$$

◇

二、计算题

1. 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 5 & 27 \end{vmatrix}$, 求 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解:

-48.

$$A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 27 \end{vmatrix}$$

可以看出该式为范德蒙行列式, 其中 $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 3$, 所以上式 $= (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = -48$

◇

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 且 X 满足 $AX = X + A$, 求 X 。

解:

由题得: $AX = X + A$, 所以 $(A - E)X = A$, 所以 $X = (A - E)^{-1}A$

$$B = A - E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B|E] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } (A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, X = (A - E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

◇

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 求 $r(A), r(A^*)$ 和 A 的列向量组的极大线性无关组。

解:

$$A \xrightarrow{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - \frac{1}{2}r_2 \\ r_4 - \frac{1}{2}r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n; \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

上式中: n 为 A 的阶数。

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

(1) $a = 1$ 且 $b = 1$ 时: $r(A) = 2 < 4 - 1 = 3, r(A^*) = 0$ 。极大线性无关组: $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_3, \alpha_4)$ 。

(2) $a = 1$ 且 $b \neq 1$ 时: $r(A) = 3 = 4 - 1, r(A^*) = 1$ 。极大线性无关组: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 。

(3) $a \neq 1$ 且 $b = 1$ 时: $r(A) = 3 = 4 - 1, r(A^*) = 1$ 。极大线性无关组: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 。

(4) $a \neq 1$ 且 $b \neq 1$ 时: $r(A) = 4, r(A^*) = 4$ 。极大线性无关组: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 。 ◇

三、解答题

1. 设
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$$
, λ 为何值时, 该方程组无解、唯一解、无穷解? 并且在有唯一解时求出

解: 有无穷多解时, 求出全部解并用向量表示。

解:

(系数矩阵是方阵, 也可以用行列式来做这个题。具体看 14-15 年期末试题的第四题, 推荐这种方法)

增广矩阵

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2 - \lambda r_1 \\ r_3 - r_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - (\lambda+1)r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(-2-\lambda) & -\lambda-2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

讨论:

(1) 解不存在: 即存在矛盾方程 (增广矩阵主元列在最右列)。即对于 r_3

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda) = 0 \\ -\lambda-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$$

(2) 存在唯一解: 主元列三个元素都不为 0。即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-\lambda \neq 0 \\ (\lambda-1)(-2-\lambda) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq -2$$

$\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$, 继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{1-\lambda} \\ r_3 \times \frac{1}{(\lambda-1)(-2-\lambda)}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2 + r_3 \\ r_1 - r_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & \frac{2\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 - \lambda r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right] \end{aligned}$$

所以方程组存在唯一解时: $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$, 解为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq -2$$

(3) 存在无穷解: 至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (\lambda - 1)(-2 - \lambda) = 0 \\ -2 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2$$

把 $\lambda = -2$ 代入阶梯矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$x_1 = 2 + x_3 \quad x_2 = x_3 \quad x_3 = x_3$$

令 $x_3 = C, C \in R$, 则

$$x = \begin{bmatrix} 2+C \\ C \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} C, \quad C \in R$$

◇

2. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$ 。

- (1) 写出该二次型的矩阵 A ;
- (2) 求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵;
- (3) 给出正交变换, 将该二次型化为标准型;
- (4) 写出二次型的秩, 正惯性指标和负惯性指标。

解:

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 36) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$$

$\lambda_1 = 1$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_1 = [-2, 0, 1]^T$ 。

$\lambda_2 = 6$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = \frac{5}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 2$ 得 $\alpha_2 = [1, 5, 2]^T$ 。

$\lambda_3 = -6$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -2 & -10 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 2$ 得 $\alpha_3 = [1, -1, 2]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

所以 P 即为所求的正交矩阵, $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 6 & \\ & & -6 \end{bmatrix}$

(3) 由 (2) 得: f 可经正交变换 $x = Py$ 化为标准型:

$$f = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$$

(4) 计算得 $|A| = -2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, 所以二次型满秩, 即 $r(A) = 3$ 。由 (3) 得, 正惯性指标为 2, 负惯性指标为 1。

◇

四、证明题

1. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 3A - 4I = 0$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵。

(1) 证明: $A, A + 3I$ 可逆, 并求他们的逆;

(2) 当 $A \neq I$ 时, 判断 $A + 4I$ 是否可逆并说明理由。

解:

(1) 由题得: $A^2 + 3A - 4I = 0$, 所以 $A(A + 3I) = 4I$, 所以 $A, A + 3I$ 可逆, A 的逆为 $\frac{1}{4}(A + 3I)$, $A + 3I$ 的逆为 $\frac{1}{4}A$ 。

(2) 不可逆, 理由:

由题得: $A^2 + 3A - 4I = (A + 4I)(A - I) = 0$, 假设 $A + 4I$ 可逆, 则等式两端同时左乘 $(A + 4I)^{-1}$ 得 $A - I = 0$, 即 $A = I$ 与题目中 $A \neq I$ 矛盾, 所以假设不成立。即 $A + 4I$ 不可逆。

◇

2. 若同阶矩阵 A 与 B 相似, 即 $A \sim B$, 证明 $A^2 \sim B^2$ 。反过来结论是否成立并说明理由。

证明:

若 A 与 B 相似, 则依定义有: 存在一个可逆矩阵 P , 使得 $A = P^{-1}BP$, 所以: $A^2 = P^{-1}BP \cdot P^{-1}BP = P^{-1}B^2P$ 。所以 $A^2 \sim B^2$ 。

反过来描述: 如果 $A^2 \sim B^2$, 则 A 和 B 相似。

不成立。理由如下:

例如: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 所以 $A^2 = B^2$, 由相似的性质 $A^2 \sim B^2$ 但是: 假设存在一个可逆

矩阵 $P, P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$, 即 $A^2 \sim B^2$, 但是 A, B 不相似。

◇

3. 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个互异的特征值, $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量, $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量, 证明: 向量组 $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$ 线性无关。

证明:

由题得: $A\alpha_{1i} = \lambda_1\alpha_{1i}, (1 \leq i \leq s), A\alpha_{2j} = \lambda_2\alpha_{2j}, (1 \leq j \leq t)$ 。

设

$$k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s} + k_{s+1}\alpha_{21} + \dots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0 \quad (1)$$

要证明向量组 $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$ 线性无关, 只需证明 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = k_{s+1} = \dots = k_{s+t} = 0$ 即可。

在 (1) 式左边同乘 A :

$$k_1A\alpha_{11} + \dots + k_sA\alpha_{1s} + k_{s+1}A\alpha_{21} + \dots + k_{s+t}A\alpha_{2t} = \lambda_1(k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s}) + \lambda_2(k_{s+1}\alpha_{21} + \dots + k_{s+t}\alpha_{2t}) = 0 \quad (2)$$

(2) - λ_2 (1) 得: $(\lambda_1 - \lambda_2)(k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s}) = 0$, 因为 λ_1, λ_2 是 A 的两个互异的特征值, 所以 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, 所以 $k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s} = 0$, 又因为 $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量, 所以: $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ 。代入到 (1) 式得:

$k_{s+1}\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0$, 因为 $\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量, 所以 $k_{s+1} = k_{s+2} = \cdots = k_{s+t} = 0$

综上所述: $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = k_{s+1} = k_{s+2} = \cdots = k_{s+t} = 0$, 所以向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 线性无关。 \diamond

2019-2020 年第一学期

一、填空题

1. 设 A 是 3 阶方阵, E 是 3 阶单位矩阵, 已知 A 的特征值为 1, 1, 2, 则 $\left| \left(\left(\frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得: $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = 2$, A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$ 。

由伴随矩阵的性质: $\left(\frac{1}{2}A \right)^* = \left(\frac{1}{2} \right)^{3-1} A^* = \frac{A^*}{4}$, 所以 $\left(\left(\frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E$ 的特征值为

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\lambda_i} \right)^{-1} - 2\lambda_i^{-1} + 1 = 2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1$$

所以:

$$\left| \left(\left(\frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E \right| = \prod_{i=1}^3 \left(2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1 \right) = 4$$

◇

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为 2, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

若 $k = 0$, 则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

所以 $r(A) = 3 \neq 2$, 即 $k \neq 0$. 对 A 接着进行化简:

$$A \xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2k-2 & 3k-3 \\ 0 & 2k-2 & 3-3k^2 \end{bmatrix} = B$$

若 $k = 1$, 则

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(A) = 1 \neq 2$, 所以 $k \neq 1$, 继续对 A 进行化简:

$$B \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{k-1}]{r_2 \times \frac{1}{k-1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3-3k \end{bmatrix}$$

如果要使 $r(A) = 2$, 则

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{-3-3k} \Rightarrow k = -2$$

也可以使用 $|A| = 0$ 来做。

◇

3. 记 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得: $A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 设 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c, d 为 2 阶方阵, 则

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}c & A_{12}d \\ A_{21}a & A_{21}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$$

所以: $c = A_{12}^{-1}, d = 0, a = 0, b = A_{21}^{-1}$.

$$\begin{aligned} [A_{12}|E_2] &\xrightarrow{r_2-2r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1+2r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \times (-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \\ [A_{21}|E_2] &\xrightarrow{r_2-2r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^{-1} \\ A_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ◇

4. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$ 有解, a_1, a_2, a_3, a_4 应满足的条件是 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ 。

解:

增广矩阵

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right] \xrightarrow{r_4-r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1+a_4 \end{array} \right] \xrightarrow{r_4+r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1+a_2+a_4 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{r_4-r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

若方程有解: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ ◇

5. 已知 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $c\alpha$, 其中 c 为非零常数, 设 n 阶方阵 P 可逆, 则 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为_____。

解:

由题得: $A(c\alpha) = \lambda(c\alpha)$ 等式两边同时左乘 P^{-1} :

$$P^{-1}AE(c\alpha) = P^{-1}APP^{-1}(c\alpha) = (P^{-1}AP)(P^{-1}c\alpha) = \lambda(P^{-1}c\alpha)$$

所以 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $P^{-1}c\alpha = cP^{-1}\alpha$ ◇

6. 已知实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix}$ 的正惯性指数为 3, 则 x 的取值范围为_____。

解:

A 为实对称矩阵, 且 A 的正惯性指数为 3, 所以 A 正定, 所以 A 的所有顺序主子式大于 0. 所以 $|A| = 2(3x-9) - 3 > 0 \Rightarrow x > 3.5$ ◇

二、计算题

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 求满足 $AX = XA$ 的全部的矩阵 X 。

解:

$$\text{设 } X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix}$$

$AX = XA$, 即

$$\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d=0 & a=e & b=f \\ g=0 & h=d=0 & i=e=a \\ 0=0 & g=0 & h=0 \end{cases}$$

所以 $x = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c 是任意常数。

◇

2. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系。

解:

由题得: 增广矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1+2r_3 \\ r_2-3r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 \times (-\frac{1}{2}) \\ r_3 \times (-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以 $x_1 = 4x_4, x_2 = -3x_4, x_3 = x_4$, 令 $x_4 = 1$, 得基础解系: $\xi = [4, -3, 1, 1]^T$ 。

◇

3. 记 $2n$ 阶方阵 $A_n = \begin{bmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & a_1 & b_1 & \\ & & & c_1 & d_1 & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & d_n \end{bmatrix}$.

(1) 求 $|A_1|, |A_2|$

(2) 求 $|A_n|$ 。

解:

(1)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - c_1 b_1$$

$$\begin{aligned} |A_2| &= \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \\ c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_2 d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} - b_2 c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 d_2 - b_2 c_2) |A_1| \\ &= (a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_1 d_1 - c_1 b_1) \end{aligned}$$

(2) 用数学归纳法:

由 (1) 得:

$$n=1: |A_1| = a_1 d_1 - c_1 b_1 = \prod_{i=0}^1 (a_i d_i - c_i b_i)$$

$$n=2: |A_2| = (a_2 d_2 - c_2 b_2) |A_1| = \prod_{i=0}^2 (a_i d_i - c_i b_i)$$

则 $n=k-1$ 时, 有 $|A_n| = \prod_{i=0}^{k-1} (a_i d_i - c_i b_i)$.

当 $n=k$ 时, 按第一列展开, 得:

$$|A_k| = a_{11} A_{11} + a_{2k1} A_{2k1}$$

$$\begin{aligned} &= a_k \begin{bmatrix} a_{k-1} & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \ddots \\ c_{k-1} & & & d_{k-1} \\ 0 & & & d_k \end{bmatrix} + c_k (-1)^{2k+1} \begin{bmatrix} 0 & & & b_k \\ a_{k-1} & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \ddots \\ c_{k-1} & & & d_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= a_k d_k (-1)^{2k-2+1+2k-2+1} \begin{bmatrix} a_{k-1} & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \ddots \\ c_{k-1} & & & d_{k-1} \end{bmatrix} - c_k d_k (-1)^{1+2k-2+1} \begin{bmatrix} a_{k-1} & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \ddots \\ c_{k-1} & & & d_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= (a_k d_k - c_k d_k) |A_{k-1}| = \prod_{i=1}^k (a_i d_i - c_i b_i) \end{aligned}$$

◇

三、解答题

1. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -4, -3)^T, \alpha_2 = (-3, 6, 7)^T, \alpha_3 = (-4, -2, 6)^T, \alpha_4 = (3, 3, -4)^T$, 求向量组的秩, 并写出一个极大线性无关组, 并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解:

由题得:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+4r_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \times (-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -4.5 \\ 0 & 1 & 3 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$, 极大线性无关组有两个向量: $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_2, \alpha_4), (\alpha_3, \alpha_4)$. (任写一个即可)

以 (α_1, α_2) 为例: $\alpha_3 = 5\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_4 = -4.5\alpha_1 - 2.5\alpha_2$. ◇

2. 已知 3 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & a+2 & 0 \\ a-2 & 3 & 0 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}$ 可以相似对角化且 A 得到特征方程有一个二重根, 求 a 的值。

其中 $a \leq 0$.

解:

由题得:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -(a+2) & 0 \\ 2-a & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)[(\lambda+1)(\lambda-3) + (2+a)(2-a)] = (\lambda+1)[(\lambda-1)^2 - a^2] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1+a, \lambda_3 = 1-a.$$

依题意: 有二重根且可以相似对角化且 $a \leq 0$.

讨论:

(1) $\lambda_1 = \lambda_2$, 即 $-1 = 1+a, a = -2 \leq 0$, 此时 $\lambda_3 = 1-a = 3$, 代入到 $\lambda E - A$ 得:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根 -1 :

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于根 3:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可以看出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 即 A 可相似对角化, 即 $a = -2$ 符合题意。

(2) $\lambda_1 = \lambda_3$, 即 $-1 = 1-a, a = 2 > 0$, 不符合题意。

(3) $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 即 $1+a = 1-a, a = 0$. 此时 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 把 $a = 0$ 代入到 $[\lambda E - A]$ 得:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根 1:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -8 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于重根 1, 其代数重数与几何重数不相等, 所以不能相似对角化。

综上所述: $a = -2$.

◇

3. 设三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A ;

(2) 用正交变换 $x = Qy$ 把该二次型化为标准型。

解:

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = -2[2(\lambda - 4)] + (\lambda - 4)[\lambda(\lambda - 4) - 1] = (\lambda - 4)(\lambda - 5)(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -1$$

$\lambda_1 = 4$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_1 = [0, 2, 1]^T$ 。

$\lambda_2 = 5$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 2$ 得 $\alpha_2 = [1, -1, 2]^T$ 。

$\lambda_3 = -1$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = -2$ 得 $\alpha_3 = [5, 1, -2]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}\right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型:

$$f = 4y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$$

◇

四. 证明题

1. 设 A 为 m 阶正定矩阵, B 为 $m \times n$ 实矩阵, B^T 为 B 的转置矩阵, 试证: $B^T A B$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = n$ 。

证明:

必要性: 如果 $B^T B$ 正定, 则存在任意非零实列向量 $x \neq 0$, 使得 $x^T B^T B x > 0$, 即 $(Bx)^T A (Bx) > 0$, 所以 $Bx \neq 0$ 。所以 $Bx = 0$ 只有零解, 即 $r(B) = n$ 。

充分性: 如果 B 的秩为 $r(B) = n$, 则线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解, 所以存在任意非零实列向量 x , 使得 $Bx \neq 0$ 。又因为 A 为正定矩阵, 由正定矩阵的定义得: $(Bx)^T A Bx > 0$, 即 $x^T B^T A Bx = x^T (B^T A B)x > 0$ 。因为 x 为任意非零实列向量, 所以依正定矩阵的定义, 矩阵 $(B^T A B)$ 正定。◇

2. 设 α, β 是 n 维列向量, 证明 $r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq 2$ 。

证明:

由秩的性质:

$$r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq \min(r(\alpha), r(\alpha^T)) + \min(r(\beta), r(\beta^T)) \leq 1 + 1 = 2$$

◇

2020-2021 年第一学期

一、填空题 (每小题 3 分, 共计 15 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{12}$ 。

解:

由题得, 按最后一行展开

原式 $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-6) = 12$ 。

◇

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -a & -1 & a-1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 的秩为 2, 则 $a = \underline{1 \text{ 或 } 3}$ 。

解:

由题得:

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -a & -1 & a-1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 + \frac{a}{3}r_1 \\ r_3 - \frac{1}{3}r_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{a}{3} - 1 & \frac{a}{3} - 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & a + \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

要使秩为 2: 第二行为 0 或第二第三行的非零元素成比例。

第二行为 0 即:

$$\begin{cases} \frac{a}{3} - 1 = 0 \\ \frac{a}{3} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

第二第三行的非零元素成比例即:

$$\frac{\frac{a}{3} - 1}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{a}{3} - 1}{a + \frac{2}{3}} \Rightarrow a = 1$$

综上所述: $a = 1$ 或 3 。

◇

3. 已知 A, B, C, D, H 为 n 阶实矩阵, I 是同阶单位矩阵, 且 $ABCDH = I$, 则 $C^{-1} = \underline{DHAB}$ 。

解:

等式两边同左乘 (AB) 的逆和右乘 (DH) 的逆: $C = (AB)^{-1}(DH)^{-1}$, 该等式两边同时求逆: $C^{-1} = ((AB)^{-1}(DH)^{-1})^{-1} = ((DH)^{-1})^{-1} \cdot ((AB)^{-1})^{-1} = DHAB$

注: 可逆矩阵的性质: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

◇

4. 已知 A 是 3 阶方阵, I 是同阶单位矩阵, 且 $|A-I| = 0, |A+I| = 0, |I-2A| = 0$, 则 $|2A^2+2A-I| = \underline{-1.5}$ 。

解:

特征多项式的定义: $|\lambda I - A| = 0$, 也即 $|A - \lambda I| = 0$. 所以由题得: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, |I - 2A| = |-2(A - \frac{1}{2}I)| = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0.5$, 所以 $2A^2 + 2A - I$ 的特征值为: $2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 3, -1, 0.5$, 所以 $|2A^2 + 2A - I| = 3 \times (-1) \times 0.5 = -1.5$

◇

5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n (n \geq 2)$ 中, 每个向量都能被其余向量线性表出是其向量组相关的 充分不必要 条件。

解:

从左往右: (每个向量都能被其余向量线性表出 \Rightarrow 向量组相关)

向量组相关的定义是只要该向量组中有一个向量能被其余向量线性表出即可, 所以满足充分性。

从右往左: (向量组相关 \Rightarrow 每个向量都能被其余向量线性表出)例如: $\alpha_1 = (1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0)^T$, 该向量组相关, 但 α_1 不能由 α_2 表出, 不满足必要性。

◇

二、计算题 (每小题 10 分, 共 30 分)

1. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$, 求 $M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24}$, 其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式。

解:

由代数余子式的定义:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} \quad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} \quad A_{24} = (-1)^{2+4} M_{24} = M_{24}$$

所以:

$$M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24} = -A_{21} + A_{22} - A_{23} + A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

◇

2. 已知向量 $\alpha = (1, -1, 2)^T, \beta = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)^T$, 记 $A = \alpha\beta^T$, 求 A^{2021} 。

解:

$$k = \beta^T \alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$A^2 = \alpha\beta^T \alpha\beta^T = \alpha(\beta^T \alpha)\beta^T = \alpha k\beta^T = k\alpha\beta^T = kA = k^{2-1}A$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot kA = kA^2 = kkA = k^2A = k^{3-1}A$$

.....

$$A^n = k^{n-1}A$$

$$A^{2021} = k^{2021-1}A = (-2)^{2020}\alpha\beta^T = 2^{2020} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

◇

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 满足 $AXB = BXB + I$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵, 求 X 。

解:

由题得:

$$AXB = BXB + I \Rightarrow AXB - BXB = I \Rightarrow (A - B)XB = I \Rightarrow X = (A - B)^{-1}B^{-1}$$

分别求两个逆 (过程略):

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - B)^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -\frac{13}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

◇

三、解答题 (每小题 13 分, 共计 39 分)

1. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 0)^T, \alpha_2 = (-2, -1, -2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 4, 4, -4)^T, \alpha_4 = (-1, -1, 0, 3)^T$ 的秩以及一个极大无关组, 并用极大无关组表示其余向量。

解:

由题得:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &\xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-2r_2 \\ r_4-2r_2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{3}{2}r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_3 \times (-\frac{1}{4})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1-3r_3 \\ r_2-r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

所以该向量组的秩为 3, 极大线性无关组为: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ (依题意, 任写出其中一个即可)

用 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 表示 α_4 : 由最简阶梯型矩阵可以看出: $\alpha_4 = \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3$ 。

◇

2. 判断线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 8 \end{cases}$$
 何时无解? 何时有解? 并在有无穷多组解时求出其通解。

解:

由题可列增广矩阵并进行高斯消元:

$$\begin{aligned}
 (A|b) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & a & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4+r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a-6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-(a-6)r_2 \\ r_4 \div 9}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 15-3a & 5-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_3-(15-3a)r_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-10 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

由阶梯型矩阵可以看出: 当 $r(A) \neq r(A|b)$, 即 $2a-10 \neq 0 \Rightarrow a \neq 5$ 时, 该线性方程组无解, 当 $r(A) = r(A|b)$, 即 $2a-10=0 \Rightarrow a=5$ 时, 该线性方程组有解, 且有无穷多组解。

把 $a=5$ 代入上式继续化简:

$$\xrightarrow{\substack{r_2-3r_3 \\ r_1-2r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由最简阶梯型矩阵可以看出: $x_1 = 5 - 2x_2, x_3 = -2, x_4 = 1$ 。

所以该方程组的一个特解为: $(5, 0, -2, 1)^T$, 其导出组的基础解系为: $(-2, 1, 0, 0)^T$, 所以原方程组的通解为:

$(5, 0, -2, 1)^T + k(-2, 1, 0, 0)^T, (k \in R)$ 。

◇

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -b \\ -2 & -b & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 相似, 求 a, b 的值以及 A 的全部的特征向量。

解:

$$|A| = a \begin{vmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -b \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -b \end{vmatrix} = a(1-b^2) + 2(-2-2b) - 2(2b+2) = a - ab^2 - 8b - 8$$

相似矩阵具有相同的特征值, 所以由特征值的性质有:

$$\begin{cases} -3 \times 3 \times 3 = a - ab^2 - 8b - 8 \\ -3 + 3 + 3 = a + 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \end{cases}$$

$$a = 1, b = -10 \text{ 时}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 10 \\ -2 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & -10 \\ 2 & -10 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)[(\lambda - 1)^2 - 100] - 4[2(\lambda - 1) + 20] = 0$$

代入 $\lambda = 3$ 得: 左式等于 -278 不等于右式, 即 $a = 1, b = -10$ 不合题意。

$$a = 1, b = 2 \text{ 时}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = -(3 - \lambda)[(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 8] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$$

符合题意。

 $\lambda = 3$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

分别取 $[x_2, x_3]^T = [1, 0]^T, [0, 1]^T$ 得基础解系: $\alpha_1 = [-1, 1, 0]^T, \alpha_2 = [-1, 0, 1]^T$, 所以 $\lambda = 3$ 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 不全为 0)。 $\lambda = -3$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得基础解系: $\alpha_3 = [1, 1, 1]^T$, 所以 $\lambda = -3$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3$ ($k_3 \neq 0$)。综上所述: $a = 1, b = 2, A$ 的全部特征向量为: $k_1[-1, 1, 0]^T + k_2[-1, 0, 1]^T$ (k_1, k_2 不全为 0), $k_3[1, 1, 1]^T$ ($k_3 \neq 0$)。◇

四、证明题 (共计 16 分)

1. (10 分) 已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + 5A + 6I = 0$, 证明 $A - 2I$ 可逆, 并求出其逆矩阵 (用 A 的多项式表示)。

证明:

由题得:

$$\begin{aligned} A^2 + 5A + 6I &= A(A - 2I) + 2A + 5A + 6I = A(A - 2I) + 7(A - 2I) + 20I = (A + 7I)(A - 2I) + 20I = 0 \\ \Rightarrow -\frac{A + 7I}{20}(A - 2I) &= I \end{aligned}$$

所以 $A - 2I$ 可逆, 且 $(A - 2I)^{-1} = -\frac{A + 7I}{20}$ 。

◇

2. (6 分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + t\alpha_1$ 线性相关的充分必要条件是 $t = 1$ 。

证明:

充分性:

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + t\alpha_1$ 线性相关, 则存在一组不全为 0 的数 $k_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_4) + k_4(\alpha_4 + t\alpha_1) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$(k_1 + tk_4)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 + (k_3 + k_4)\alpha_4 = 0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 + tk_4 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \\ k_1, k_2, k_3, k_4 \text{ 不全为 } 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -tk_4 = -k_2 = k_3 = -k_4 \neq 0 \Rightarrow t = 1$$

必要性:

$t = 1$, 所以 $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_4 + t\alpha_1)$, 即 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + t\alpha_1$ 线性相关。

证毕。

◇