第六次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期中试题

1.期中 2015-2016 一 2.

设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 x^3 的系数为______。

解：

方法一：求出对应的行列式，然后写出 x^3 的系数。(此方法太过繁琐，容易出错，不推荐使用)

用 $Matlab$ 计算出来的结果为：$f(x)=2x^4-x^3-7x^2+12x-8$.（仅供参考）

方法二：使用定义，课本 106-108 页。

思路：使用行列式的定义来做。仅找出与 x^3 有关的项。这里取列按照自然排列，行由自己指定（也可以取行按照自然排列，列由自己指定）。

第一列中：取第一行，第二列第三列第四列无论怎么取都不可能构成 x^3。

（注意：在行列式的定义式中，每一项中的几个元素必须来自不同的行数和列数，如：对于此题来说，列按自然排列，第一个元素取第一列中的第一行，那么第二个元素只能从剩下三列中的剩下三行来取）

第一列中：取第二行，第二列取第一行，第三列取第三行，第四列取第四行。即 $(-1)^{\tau(2134)}a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}=(-1)^1 1*x*x*x=-x^3$(注意下标，列（黑色）是自然排列，行（红色）是上边分析得来的)

第一列取第三行第四行都不能构成 x^3。

验证：x^2 的系数

列取自然排列，行按下述几个取时构成 x^2:1324　3124　3214　4231　4132 即：

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}+(-1)^{\tau(3124)}a_{31}a_{12}a_{23}a_{44}+\\&(-1)^{\tau(3214)}a_{31}a_{22}a_{13}a_{44}+(-1)^{\tau(4132)}a_{41}a_{12}a_{33}a_{24}+(-1)^{\tau(4231)}a_{41}a_{22}a_{33}a_{14}\\=&(-4+3-3-1-2)x^2=-7x^2\end{aligned}$$

可以看出和方法 1 算的结果一样。　◇

2.期中 2015-2016 一 5.

若 A 为 4 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$, 则 $\left|\left(\dfrac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|=$______。

解：

$$\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|=\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-|A|A^{-1}\right|=|4A^{-1}-\tfrac{1}{2}A^{-1}|=|\tfrac{7}{2}A^{-1}|=(\tfrac{7}{2})^4|A|^{-1}=\tfrac{7^4}{8}$$ ◇

3.期中 2015-2016 一 6. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1}=$______。

解：

$A^*=|A|A^{-1}$，所以 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}(A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A$

$|A|=1\times1\times3=3$ 所以：$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{3}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}$　◇

4.期中 2015-2016 三 1.

设 A 可逆，且 $A^*B=A^{-1}+B$，证明 B 可逆，当 $A=\begin{bmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{bmatrix}$ 时，求 B。

解：

由题得：$A^*B=A^{-1}+B$，即 $(A^*-E)B=A^{-1}$，两边同时左乘 A 得：$A(A^*-E)B=E$，所以 B 可逆，其逆矩阵为 $A(A^*-E)=(|A|E-A)$.

由题得：$|A|=2\times2\times2=8$

$$B=(|A|E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}6&-6&0\\0&6&-6\\0&0&6\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

◇

5.期中 2016-2017 一 5.

若 A 为 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$_______。

解：

$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|3^{-1}A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|A|^{-1}=-\frac{16}{27}$ ◇

6.期中 2016-2017 二 5.

若 $\left(\dfrac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+I$，且 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，求 B。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}\end{bmatrix}$，其中 $A_{11}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$，$A_{22}=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$，所以有：

$$|A_{11}|=|A_{22}|=2\times1=2;\quad |A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}|=4;\quad A_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix};\quad A_{22}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix};\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}&0\\0&A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+I\quad\Rightarrow\quad 4(|A|A^{-1})^{-1}BA^{-1}=2AB+I\quad\Rightarrow\quad\frac{4}{|A|}ABA^{-1}=2AB+I$$

$$ABA^{-1}=2AB+I\quad\Rightarrow\quad AB=2ABA+A\quad\Rightarrow\quad AB(E-2A)=A\quad\Rightarrow\quad B(E-2A)=I\quad\Rightarrow\quad B=(E-2A)^{-1}$$

$$B=(E-2A)^{-1}=\begin{bmatrix}-3&0&0&0\\-2&-1&0&0\\0&0&-3&-2\\0&0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&0&0&0\\\frac{2}{3}&-1&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

◇

7.期中 2016-2017 三 2.

已知 $A=(a_{ij})$ 是三阶的非零矩阵，设 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，且对任意的 i,j 有 $A_{ij}+a_{ij}=0$，求 A 的行列式。

解：

因为 $A_{ij}+a_{ij}=0$，所以可以推出 $A+(A^*)^T=0$。即 $(A^*)^T=-A$. 两边同时取行列式：

左边：$|(A^*)^T|=|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}=|A|^2$

右边：$|-A|=(-1)^3|A|=-|A|$

所以 $|A|^2=-|A|$，解得 $|A|=-1$ 或 $|A|=0$。

又因为 $(A^*)^T=-A$, 所以有 $r((A^*)^T)=r(-A)$，即 $r(A^*)=r(A)$，所以 $r(A)=n=3$。注：此步看不懂的看课本 121 页的例 3.3.23，记住这个例题的结论。

$r(A)=3$，即满秩，满秩即 (可逆 & 行列式不为 0)，所以 $|A|=-1$。 ♢

8.期中 2017-2018 二 2. 判断是否正确并说明理由。

设 A,B 为 n 阶可逆方阵，则 $(AB)^*=B^*A^*$.

解：

正确，理由如下：

因为 A,B 为 n 阶可逆方阵，所以 AB 可逆，所以 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=|A|B^*A^{-1}=B^*A^*$ ♢

9.期中 2018-2019 一 2.

设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2$,A^* 为 A 的伴随矩阵。

(1) 若交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C, 求 $|CA^*|$;

解：

交换交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C，所以 $|C|=-|A|$, 所以 $|CA^*|=|C||A^*|=-|A|||A|A^{-1}|-|A||A|^3|A|^{-1}=-|A|^3=-27$ ♢

10.期中 2018-2019 一 3.

已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}$，试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵。

解：

由伴随矩阵的性质：$A^*=|A|A^{-1}$, 所以 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A=|A^{-1}|A$

由题得：

$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&-1&1\end{vmatrix}=1$$

$$[A^{-1}|E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\2&1&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&-1&1&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&4&-1&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right]$$

所以 $(A^*)^{-1}=|A^{-1}|A=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-1&1&0\\-3&1&1\end{bmatrix}$ ♢

11.期中 2018-2019 二 1.

若 n 阶实矩阵 Q 满足 $QQ^T=I$，则称 Q 为正交矩阵。设 Q 为正交矩阵，则

(1)Q 的行列式为 1 或-1.

(2) 当 $|Q|=1$ 且 n 为奇数时，证明 $|I-Q|=0$，其中 I 是 n 阶单位矩阵；

(3)Q 的逆矩阵 Q^{-1} 和伴随矩阵 Q^* 都是正交矩阵。

证明：

(1) 由题得：$|QQ^T|=|I|=1$, 由行列式的性质：$|QQ^T|=|Q|\cdot|Q^T|,|Q^T|=|Q|$，所以 $|QQ^T|=|Q|^2=1$，解得 $|Q|=1$ 或 $|Q|=-1$.

(2)$|I-Q| = |QQ^T - Q| = |Q|\cdot|Q^T - I| = |Q^T - I| = |(Q^T)^T - I^T| = |Q - I| = |-(I-Q)| = (-1)^n|I-Q|$，因为 n 为奇数，所以 $(-1)^n = -1$，即 $|I-Q| = -|I-Q|$，所以 $|I-Q| = 0$。

(3) 因为 $QQ^T = I$，两边同时左乘 Q^{-1}:$Q^T = Q^{-1}$，两边同时右乘 $(Q^T)^{-1}$:$I = Q^{-1}(Q^T)^{-1} = Q^{-1}(Q^{-1})^T$，所以 Q^{-1} 是正交矩阵。

由伴随矩阵的性质：$Q^* = |Q|Q^{-1}, (Q^T)^* = (Q^*)^T = |Q^T|(Q^T)^{-1} = |Q|(Q^{-1})^T$，所以 $Q^*(Q^*)^T = |Q|Q^{-1}|Q|(Q^{-1})^T = |Q|^2Q^{-1}(Q^{-1})^T$

由 (1) 得 $|Q|^2 = 1$，所以有 $|Q|^2Q^{-1}(Q^{-1})^T = Q^{-1}(Q^{-1})^T = I$，所以 Q^* 是正交矩阵。 ◇

期末试题

12.期末 2014-2015 一 2.

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵且 $AB = 0$，则 $t =$_______。

解：

B 为 3 阶非零矩阵且 $AB = 0$ 即 B 的非零列向量为 $Ax = 0$ 的解，即 $Ax = 0$ 有非零解，即 $|A| = 0$，把 $|A|$ 按第三列展开。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{vmatrix} = -2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & t \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2(2t-15)+4 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{17}{2}$$

◇

13.期末 2014-2015 二.

设多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & -2 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$，分别求该多项式的三次项、常数项。

解：

同第一题。$Matlab$ 算出的结果为：$f(x) = 8x^4 - 14x^3 + 11x^2 - 53x + 14$（作为参考）

取列为自然排列。分析得：行数按 2134 和 4231 排列时，对应的项为 x^3。即

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} + (-1)^{\tau(4231)}a_{41}a_{22}a_{33}a_{14} = (-12-2)x^3 = -14x^3$$

同理，取列为自然排列。分析得行数按：3142、3412 和 3421 排列时为常数项，即

$$(-1)^{\tau(3142)}a_{31}a_{12}a_{43}a_{24} + (-1)^{\tau(3412)}a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} + (-1)^{\tau(3421)}a_{31}a_{42}a_{23}a_{14} = -6+4+16 = 14$$

◇

14.期末 2014-2015 三.

设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$，求 B。

解：

由题得：$|A^*| = 2\times2\times2\times8 = 64$

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \quad\Rightarrow\quad AB = B + 3A \quad\Rightarrow\quad A^*AB = A^*B + 3A^*A$$
$$A^*A = |A|A^{-1}A = |A|I \quad |A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n|A|^{-1} = |A|^{n-1} = |A|^{4-1} = 64 \quad |A| = 4$$

所以 $4B = A^*B + 3\times4 \quad\Rightarrow\quad B = 12(4 - A^*)^{-1}$.

求逆的过程略。

最后的结果为：

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

◇

15.期末 2014-2015 四.

λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 有无穷多组解？并在有无穷多解时，写出方程组的通解。

解：

记 $A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(5\lambda+4)$$

可以看出 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\dfrac{4}{5}$ 时即 $|A| \neq 0$ 时，方程有唯一解。

$\lambda = 1$ 时：

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{中间略}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

所以 $\lambda = 1$ 时有无穷多解，$x_1 = 1, x_2 = x_3 - 1$.

$\lambda = -\dfrac{4}{5}$ 时，$r(A) \neq r(A, B)$，此时无解。 ◇

16.期末 2016-2017 一 2.

设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $r(A^2 - 2A) =$______。

解：

$|A^*| = |A|^{n-1}$ 得：$|A^*| = 2^3 = |A|^3$. 所以 $|A| = 2 \neq 0$。即 A 可逆。

所以 $r(A^2 - 2A) = r(A(A-2)) = r(A-2) = r(|A|(A^*)^{-1} - 2) = r((A^*)^{-1} - E) = 3$.（求逆和秩的过程略） ◇

17.期末 2016-2017 二 2.

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,$B$ 为三阶矩阵，且满足方程 $A^*BA = I + 2A^{-1}B$，求矩阵 B。

解：

由题得：$|A|=1, A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}$. 对题中方程两边同时左乘 A 得：

$$BA = A+2B$$
$$B = A(A-2E)^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -18 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(求逆的过程略。$(A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$) ♢

18.期末 2017-2018 一 3.

设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 记 $A*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1} =$_______。

解：

$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$，由题得：$|A|=8$ ♢

19.期末 2018-2019 一 1.

设 A 为 5 阶方阵满足 $|A|=2, A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $|2A^{-1}A^*A^T| =$_______。

解：

原式 =

$$2^5|A^{-1}|\cdot|A^*|\cdot|A^T| = 2^5\cdot|A|^{-1}\cdot|A|^{5-1}\cdot|A| = 2^9 = 512$$

♢

20.期末 2018-2019 一 3.

设 A 为 m 阶阵，存在非零的 m 维列向量 B，使 $AB=0$ 的充分必要条件是_______。

解：

B 非零，说明 $Ax=0$ 有非零解，由存在唯一性定理：$|A|=0$，或 $r(A)<m$。 ♢