

第十次习题课 知识点

1. 在 \mathbb{R}^n 中, 设向量 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, 实数 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i$ 称为向量 α 和 β 的

内积。记作 $\alpha^T\beta$ 或 $\alpha \cdot \beta$ 。

性质:

$$(1) \alpha^T\beta = \beta^T\alpha;$$

$$(2) (k\alpha)^T\beta = k\beta^T\alpha;$$

$$(3) (\alpha + \beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$$

$$(4) \alpha^T\alpha \geq 0, \alpha^T\alpha = 0, \text{ 当且仅当 } \alpha = 0.$$

2. $\forall \alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义其长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

, 向量长度称为向量范数。

性质:

$$(1) \|\alpha\| \geq 0, \|\alpha\| = 0 \text{ 当且仅当 } \alpha = 0. \text{ 非负性}$$

$$(2) \|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|, k \text{ 为实数}.$$

$$(3) \text{ 对任意向量 } \alpha, \beta, \text{ 有 } |\alpha^T\beta| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$$

3. 单位向量。对任意非零向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 则向量 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是一个单位向量。

4. $\alpha\beta \in \mathbb{R}^n$, 若 α 与 β 的内积为零, 则称 α 与 β 正交 (垂直)。

5. 如果 \mathbb{R}^n 中的非零向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 两两正交, $\alpha_i^T\alpha_j = 0 (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, s)$, 则称该向量组为正交向量组。进一步, 如果 $\forall i, \|\alpha_i\| = 1$, 则称为单位 (规范) 正交向量组。

6. \mathbb{R}^n 中的正交向量组线性无关。

7. \mathbb{R}^n 中的线性无关向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可以化为另一正交向量组 β_1, \cdots, β_s , 并且

$$\alpha_1 \leftrightarrow \beta_1$$

$$\alpha_1\alpha_2 \leftrightarrow \beta_1\beta_2$$

...

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_s \leftrightarrow \beta_1, \cdots, \beta_s$$

这一方法称为施密特正交化方法。

$$\beta_n = \alpha_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_n^T\beta_i}{\beta_i^T\beta_i} \beta_i \quad (n = 1, 2, \cdots, s)$$

8. 若 n 阶实矩阵 Q , 满足 $Q^TQ = E$, 则称 Q 为正交矩阵。

性质:

$$(1) \text{ 若 } Q \text{ 为正交矩阵, 则 } |Q| = 1 \text{ 或 } |Q| = -1.$$

$$(2) \text{ 若 } Q \text{ 为正交矩阵, 则 } Q^{-1} = Q.$$

(3) 若 P, Q 为正交矩阵, 则 PQ 是正交矩阵。

(4) Q 是正交矩阵等价于 $QQ^T = E$

9. 设 Q 为 n 阶实矩阵, 则 Q 为正交矩阵的充分必要条件是列 (行) 向量组是规范正交向量组。

10. 实对称矩阵的特征值都是实数。

11. 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量是正交的。