

第二次习题课 知识点

1. 矩阵的转置。 $(AB)^T = B^T A^T$
2. 向量的内积。
3. 方阵的幂。
4. 矩阵多项式: 设 A 是方阵, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, 则定义 $f(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_nA^n$.
如果 X 与 A 可交换, 则 X 与 $f(A)$ 可交换。
5. 分块矩阵: 分块矩阵的定义。分块矩阵的加减, 数乘。

分块矩阵的乘法: 设 A 、 B 都是分块矩阵, A 的列数和 B 的行数相同, 且 A 的列分法与 B 的行分法相同, 则采用 A 的行分法和 B 的列分法对 AB 进行分块, 看作分块矩阵 $(AB)_{pq} = \sum_{j=1}^t A_{pj}B_{jp}$ 。

分块矩阵乘法常用的结果:

$$(1) \text{ 若 } A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, B_{n \times l} = [\beta_1, \cdots, \beta_l], \text{ 则 } AB = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_l \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & \alpha_2\beta_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m\beta_1 & \alpha_m\beta_2 & \cdots & \alpha_m\beta_l \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{ 若 } A_{m \times n}, B_{n \times l} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_l], \text{ 则有}$$

$$AB = [A\beta_1 \quad A\beta_2 \quad \cdots \quad A\beta_l]$$

(3) 如果 $AB = 0$, 显然 $A\beta_j = 0$, 也就是 B 的列向量是 $Ax = 0$ 的解。

$$(4) \text{ 设 } A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n],$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n$$

分块矩阵的转置: 如果 A 是分块矩阵, 则 A^T 的行采用与 A 的列相同的分法。即

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}$$

6. 线性方程组、矩阵方程、向量方程组的转化。