

第二次习题课答案 群文件《期中 & 期末试题》

期中试题

2016~2017 二.3.

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 若矩阵 X 满足方程 $AX + I = A^2 + X$, 求 X 。

解:

方法一: 视频 25

由题得: $AX + I = A^2 + X$, 所以 $(A - I)X = A^2 - I$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 9 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 - I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 8 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

增广矩阵

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_3 \times (-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

所以

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

方法二: 由题得: $AX + I = A^2 + X$, 所以 $(A - I)X = A^2 - I = (A + I)(A - I) = (A - I)(A + I)$. 等式两边同时左乘 $(A - I)^{-1}$:

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(A - I)(A + I) \Rightarrow X = (A + I)$$

注:

1. 单位矩阵乘任何矩阵都等于该矩阵的本身, 任何矩阵乘单位矩阵都等于该矩阵的本身, 即 $AI = IA = A$. (I 为单位矩阵)
所以有

$$A^2 - I = A^2 - I^2$$

$$(A + I)(A - I) = A^2 - AI + IA - I^2 = A^2 - A + A - I^2 = A^2 - I^2$$

$$(A - I)(A + I) = A^2 + AI - IA - I^2 = A^2 + A - A - I^2 = A^2 - I^2$$

2. 可逆矩阵 (方阵): 若 $AB = BA = I$, 则 A 矩阵可逆, 称 A 是 B 的逆矩阵 (或 B 是 A 的逆矩阵). 通常把 A 的逆矩阵表示为 A^{-1} , 则 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. ◇

2016~2017 一.4.

设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $AX + 2B = BA + 2X$, 求 X^{2017} 。

解:

方法一:

由题得: $(A - 2I)X = B(A - 2I)$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B(A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

增广矩阵

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \times (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_3 \\ r_2 + r_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

解得

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

计算得

$$\begin{aligned} X^2 &= X \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ X^3 &= X^2 \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = X \\ X^3 &= X \cdot X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = X \end{aligned}$$

可以看出: 当 n 为奇数时, $X^n = X$, 所以 $X^{2017} = X$ 。

方法二:

若存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P^{-1}BP$, 则称矩阵 A 与矩阵 B 相似, 记为 $A \sim B$

由题得: $(A - 2I)X = B(A - 2I)$, 等式两边同时乘 $(A - 2I)^{-1}$ 得: $X = (A - 2I)^{-1}B(A - 2I)$, 令 $P = A - 2I$, 则 $X = P^{-1}BP$. 所以

$$X^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}BPP^{-1}BP = P^{-1}BIBP = P^{-1}B^2P$$

同理可以推出: $X^n = P^{-1}B^nP$. (由此我们可以得出一条结论: 若 $A \sim B$, 则 $A^n = P^{-1}B^nP$, 以后做题可直接使用) 对于任意

对角矩阵 $C = \begin{bmatrix} c_{11} & & \\ & c_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & c_{nn} \end{bmatrix}$, 可以计算得: $C^2 = \begin{bmatrix} c_{11}^2 & & \\ & c_{22}^2 & \\ & & \ddots \\ & & & c_{nn}^2 \end{bmatrix}$, 所以 $C^n = \begin{bmatrix} c_{11}^n & & \\ & c_{22}^n & \\ & & \ddots \\ & & & c_{nn}^n \end{bmatrix}$ 所以:

$$B^{2017} = \begin{bmatrix} 1^{2017} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2017} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B$$

由于还没学逆矩阵的求法, 这里先直接给结论, 后边学到了逆矩阵的求法后再来计算这个 P 的逆矩阵

$$P = A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以:

$$\begin{aligned} X^{2017} &= P^{-1} B^{2017} P = P^{-1} B P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

考研例题

1. 设 α, β 是 3 维列向量, β^T 是 β 的转置, 如果 $\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T\beta = \underline{\quad 9 \quad}$ 。

解:

α, β 是 3 维列向量, 所以可以设 $\alpha = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T, \beta = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$ 由题得:

$$\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

所以:

$$\alpha^T\beta = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 1 + 2 + 6 = 9$$

注:

若 α, β 是 3 维列向量, 记: $A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix}$, $l = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, (可以看出, l 是方阵

A 主对角线元素之和) 则

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = \alpha l\beta^T = l\alpha\beta^T = lA$$

所以可以推出 $A^n = l^{n-1}A$, 我们可以将此结论推广到任意 n 维列向量的情况 (即 α, β 是 n 维列向量, 记: $A = \alpha\beta^T, l = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha, A^n = l^{n-1}A$)。◇

2. 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \underline{\quad 0 \quad}$.

解:

由矩阵的乘法:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注: 由题我们可以得出如下结论: 如果一个 n 阶方阵 A 主对角线上以及主对角线的一侧元素全为 0, 那么必有 $A^k = 0$, 其中 $k \geq n$ 。即 A 是下边的几种形状之一:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:

$$\text{由题得: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I + B$$

$$\text{由 3 的结论可知: } B^k = 0, k \geq 3. \text{ 计算得: } B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} A^n &= (I + B)^n = C_n^0 I^n B^0 + C_n^1 I^{n-1} B^1 + C_n^2 I^{n-2} B^2 + C_n^3 I^{n-3} B^3 + \cdots + C_n^0 I^0 B^n \\ &= I^n B^0 + n I^{n-1} B^1 + \frac{n(n-1)}{2} I^{n-2} B^2 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2n & 4n^2 - n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:

经观察, 我们可将矩阵按下列方式进行分块:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A 分块后是对角矩阵, 所以: $A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^n \end{bmatrix}$ (注: 这个结论是在上边期中测试的第二个题里的方法二推导出来的)

对于 A_{11} :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3I + B$$

和上一个题一样了, 此时 $B^k = 0, k \geq 2$

$$\begin{aligned} A_{11}^n &= (3I + B)^n = C_n^0 B^0 (3I)^n + C_n^1 B^1 (3I)^{n-1} + C_n^2 B^2 (3I)^{n-2} + \cdots + C_n^n B^n (3I)^0 \\ &= 3^n I + 3^{n-1} n B \\ &= \begin{bmatrix} 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注: 把一个矩阵按高斯消元法化为阶梯型矩阵后, 非零行行数即为矩阵的行秩, 对于一个方阵 A , 行秩等于列秩, 用符号 $r(A)$ 来表示秩。

对于 n 维方阵 A , 如果 $r(A) = 1$, 则 A 一定可以分解为一个列向量和一个行向量的乘积 (此处只给结论, 不做证明)。然后使用第一题得出的结论来计算 A^n

所以对于 A_{22} , 经过高斯消元法变换 ($r_1 - 3r_2$) 后: $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可以看出 $r(A_{22}) = 1$, 符合红色字部分的描述, 所以

$$l = 3 + 3 = 6$$

$$A_{22}^n = l^{n-1} A = 6^{n-1} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

所以:

$$A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 6^{n-1} & 9 \cdot 6^{n-1} \\ 0 & 0 & 6^{n-1} & 3 \cdot 6^{n-1} \end{bmatrix}$$

◇

5. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 若 X 满足 $AX + 2B = BA + 2X$, 则 $X^4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:

步骤同上边期中测试题第二题的方法二, 所以略。自己算一下。这里给出 $P = A - 2I$ 的逆矩阵 P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后算出的结果是

$$X^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◇