例6.1 B44. 1.

例6.2 B44 2.

例6.3 B44. 3

例6.4

(1). $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$ 只要满足 P51 定理 5.1.1 则合同，但相似，必须特征值相同.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

例6.5

∵ A，B相似 ∴ 特征值完全相同 又∵ A，B为实对称阵.

由定理5.1.1，A B合同

例6.6 B45. 6.

例6.7 B45. 7

例6.8 课本161页

$f=\cancel{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-x_1^2}$

$x_2^2+4x_2x_3+x_3^2+3x_2^2-3x_1^2-2x_1x_2$

$=(2x_2+x_3)^2-\underbrace{3x_2^2}_{(\sqrt{3}x_2)^2}-2x_1x_2$

$2\times\frac{1}{\sqrt{3}}x_2\sqrt{3}x_1$ $+(\sqrt{3}x_1)^2-(\sqrt{3}x_1)^2$

$=(2x_2+x_3)^2-(\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\sqrt{3}x_1)^2+3x_1^2$

∴ f的一个标准型为 $y_1^2-y_2^2+3y_3^2$ 注：标准型不唯一.

例6.9 课本162页

$$\begin{pmatrix}A\\E_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\1&-2&-2\\-3&-2&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2+C_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-1&0&-3\\0&-1&-5\\-3&-5&2\\1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3-3C_1]{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&-5\\0&-5&11\\1&1&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3-5C_2]{r_3-5r_2}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&36\\1&1&-8\\0&1&-5\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(注意163页左侧的标记)

$\cancel{\xrightarrow[C_1-\frac{1}{6}C_3]{r_1-\frac{1}{6}r_3}}=\begin{pmatrix}D\\C\end{pmatrix}$ ∴ $C=\begin{pmatrix}1&1&-8\\0&1&-5\\0&0&1\end{pmatrix}$ 则 $C^TAC=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&36\end{pmatrix}$ 为对角阵

正惯性指数1，负惯性指数2.

例6.10

解：f的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-2&5&-2\\-4&-2&2\end{bmatrix}$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&4\\2&\lambda-5&2\\4&2&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{C_1+C_2+C_3}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda+4&2&4\\\lambda-1&\lambda-5&2\\\lambda+4&2&\lambda-2\end{vmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{vmatrix}\lambda+4 & 2 & 4\\ \lambda-1 & \lambda-5 & 2\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda+4)(\lambda-5)-2(\lambda-1)]=0 \Rightarrow \lambda_1=6,\lambda_2=6,\lambda_3=-3$

$\therefore f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为2，负惯性指数为1

$\lambda=6$ 时：

$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}x_2-x_3 \Rightarrow \begin{matrix}\alpha_1=[1,-2,0]^T\\ \alpha_2=[1,0,-1]^T\end{matrix}$

施密特正交化后单位化：

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt5}[-1,2,0]^T,\ \eta_2=\frac{\sqrt5}{3}[-\frac{4}{5},-\frac{2}{5},1]^T$

$\lambda=-3$ 时

$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}2&-8&2\\-5&2&4\\4&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&-4&1\\-5&2&4\\4&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+5r_1}\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&-18&9\\0&18&-9\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ x_1=x_3\ \ x_2=\frac{1}{2}x_3 \Rightarrow \alpha_3=[2,1,2]^T$ 单位化 $\eta_3=\frac{1}{3}[2,1,2]^T$

令 $P=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$

在正交变换 $x=Py$ 下得到一个标准型为 $6y_1^2+6y_2^2-3y_3^2$

例 6.11

解：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3+x_1^2+x_3^2+2x_1x_3$

$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$

$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&-3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore r(A)=2$

例 6.12

解：由题得：$A=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}$，$P^TAP=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}=\Lambda$

相似矩阵迹相同：$tr(A)=tr(\Lambda)$ 即 $3a=6 \Rightarrow a=2$

例 6.13

解：(1) $A=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$ $\therefore f=x^T\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}x$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\0&\lambda-8&\lambda-1\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}\xrightarrow{c_2+c_3}\begin{vmatrix}\lambda&0&2\\0&2\lambda-9&\lambda-1\\2&\lambda-1&\lambda+3\end{vmatrix}$

$=\lambda[(2\lambda-9)(\lambda+3)-(\lambda-1)^2]-4(2\lambda-9)=\lambda^3-\lambda^2-36\lambda+36=\lambda^2(\lambda-1)-36(\lambda-1)=(\lambda^2-36)(\lambda-1)$

解得: $\lambda_1=6, \lambda_2=-6, \lambda_3=1$

$\lambda=6$时

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&2&-4\\2&-4&9\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}-2&2&-4\\6&-2&2\\2&-4&9\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-1&1\\2&-4&9\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-5\\0&-2&5\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}x_3 \quad x_2=\frac{5}{2}x_3 \Rightarrow \alpha_1=[1,5,2]^T$ 单位化: $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{30}}[1,5,2]^T$

$\lambda=-6$时

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-6&-2&2\\-2&-10&-4\\2&-4&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}-2&-10&-4\\-6&-2&+2\\2&-4&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&5&2\\-3&-1&1\\2&-4&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+3r_1}\begin{bmatrix}1&5&2\\0&14&7\\0&-14&-7\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}x_3 \quad x_2=-\frac{1}{2}x_3 \Rightarrow \alpha_2=[1,-1,2]^T$, 单位化: $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,-1,2]^T$

$\lambda=1$时

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-3&-4\\2&-4&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&-7&0\\0&-8&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x_2=0\\x_1=-2x_3\end{matrix}$$

$\Rightarrow \alpha_3=[-2,0,1]^T$, 单位化 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{5}}[-2,0,1]^T$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&0\\\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

则Q为一个正交阵, 令$x=Qy$, 标准形为 $6y_1^2-6y_2^2+y_3^2$

例6.14

解: (1) 由题得 $|\lambda E-A|=|3E-A|=\begin{vmatrix}3&-1&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&3-y&-1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}3-y&-1\\-1&1\end{vmatrix}=8(3-y-1)=0\Rightarrow y=2$

(2)不能使用(1)的结论

(2). $(AP)^T(AP)=P^TA^TAP=P^TBP$, 式中 $B=A^TA$

$$A^TA=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&\cancel{2}\,y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&\cancel{2}\,y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\overset{y^2+1}{5}&\overset{y+2}{4}\\0&0&\underset{y+2}{4}&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&0\\0&B_{22}\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, B_{22}=\begin{pmatrix}\overset{y^2+1}{5}&4\\\underset{y+2}{4}&5\end{pmatrix}$$

对B_{22}作合同变换:

$$\begin{pmatrix} y^2+1 & y+2 \\ y+2 & 5 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} y+2 & 5 \\ y^2+1 & y+2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_1} \begin{pmatrix} 5 & y+2 \\ y+2 & y^2+1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - \frac{y+2}{5} r_1} \begin{pmatrix} 5 & y+2 \\ 0 & \frac{(2y-1)^2}{5} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - \frac{y+2}{5} c_1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{(2y-1)^2}{5} \\ 0 & 1 \\ 1 & -\frac{y+2}{5} \end{pmatrix}$$

∴令 $P = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ 其中 $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{y+2}{5} \end{pmatrix}$，则 $(AP)^T(AP)$ 为对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(2y-1)^2}{5} \end{pmatrix}$$

例 6.15

解：由题得：$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 相似

由相似的性质：$r(A)=r(\Lambda)$，$|A|=|\Lambda|$，$tra(A)=tra(\Lambda)$，$\lambda_A=\lambda_\Lambda$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -b\\ -1 & -b & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b\\ -b & \lambda-1\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}-a & -b\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-a & \lambda-1\\ -1 & -b\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3-2ab-(\lambda-1)-(a^2+b^2)(\lambda-1) \quad ①$$

$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$ 代入 ① 得：

$$\begin{cases}a^2+b^2-2ab=0\\ 2ab=0\\ a^2+b^2+2ab=0\end{cases} \Rightarrow a=b=0.$$

例 6.16 P54 例 6.5.6

例 6.17

解：否

证明：$(x_1-2x_2+3x_3)^2=x_1^2+(-2x_2+3x_3)^2-2x_1(-2x_2+3x_3)$

$$=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2-12x_2x_3-6x_1x_3$$

$\therefore A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ -3 & -6 & 9\end{bmatrix}$ 显然 A 的各行(列)成比例 即 $|A|=0$，所以 ~~A~~ 不是正定的

例 6.18 P48 . 2

例 6.19 是，理由如下：

$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 6\end{bmatrix}$ $\Delta_1=1>0$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4>0$ $\Delta_3=|A|=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}$

$=-3+24=21>0$

例 6.20

A 为实对称阵，A^2+A+2I_n 也为实对称阵，设 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 为 A 的特征值，则 $\lambda_i^2+\lambda_i+2$ 为 A^2+A+2I_n 的特征值.

对于任意 λ：$\lambda^2+\lambda+2=(\lambda+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\geqslant\frac{7}{4}>0$ 即 A^2+A+2I_n 的特征值大于 0.

由 P169 推论 5.2.2，A^2+A+2I_n 正定

例 6.21 ~ 例 6.25 P49 5~9.

例6.26

解: $A=\begin{bmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{bmatrix}$

由P69 例5.2.7: $a>0$.

$\Delta_1 = a>0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a-1 > 0 \Rightarrow a>\frac{1}{2}$

$\Delta_3 = |A| \xlongequal[r_3-ar_2]{r_1-ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1-2a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-2a & 3-a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1-2a & 0 \\ 1-2a & 3-a \end{vmatrix} = -(1-2a)(3-a)>0 \Rightarrow -\frac{1}{2}<a<3$

综上 $\frac{1}{2}<a<3$

例6.27

$A=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = 1>0 \quad \Delta_2 = 4-\lambda^2 > 0 \Rightarrow -2<\lambda<2$

$\Delta_3 = |A| \xlongequal[r_3+r_1]{r_2-\lambda r_1} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 4-\lambda^2 & 2+\lambda \\ 0 & \lambda+2 & 3 \end{vmatrix} = 3(4-\lambda^2)-(\lambda+2)^2 > 0 \Rightarrow -2<\lambda<1$

综上: $-2<\lambda<1$

例6.28 P255 例6.5.8

例6.29 P255 例6.5.9