例5.21

解：相似矩阵具有相同特征值，由特征值性质：

$$|B^{-1}-E| = \prod_{i=1}^{4}(\lambda_{B_i}^{-1}-1) = (2-1)\times(3-1)\times(4-1)\times(5-1)=24$$

例5.22

解：$|\lambda E - A|$

$$= \begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_3} \begin{vmatrix}\lambda&2&2\\0&\lambda&\lambda\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3}\begin{vmatrix}\lambda&0&2\\0&0&\lambda\\2&4-\lambda&\lambda-2\end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\lambda^2=0$$

∴非0特征值为4.

例5.23

解：(1) $|\lambda E-A|$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_3}\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-2\\-2&\lambda-1&2\\-2&1-\lambda&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-2\\-4&0&\lambda+3\\-2&1-\lambda&\lambda+1\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot(-1)^{3+2}\cdot[(\lambda+3)(\lambda+1)-8]=0$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-5$.

(2) $E+A^{-1}$的特征值为 $1+\lambda_i^{-1}$ 即 $2, 2, \frac{4}{5}$

(3) $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-5\neq0$ ∴ A可逆 ∴ $A^*=|A|\cdot A^{-1}=-5A^{-1}$

∴ $E+A^*=E-5A^{-1}$ 特征值为 $1-5\lambda_i^{-1}$ 即 $-4, -4, 2$

例5.24

解：设A的特征值为λ，对应特征向量为α，则：$A\alpha=\lambda\alpha$

左乘A^*：$A^*A\alpha=\lambda A^*\alpha$ 即 $|A|\alpha=\lambda A^*\alpha \Rightarrow A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$

加2Eα：$A^*\alpha+2E\alpha=(A^*+2E)\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha+2\alpha=(\frac{|A|}{\lambda}+2)\alpha$.

∴ (A^*+2E)与A的特征向量相同，即(A^*+2E)的特征值$(\frac{|A|}{\lambda}+2)$对应的特征向量为α.

∵ $B=P^{-1}A^*P$

∴ $B+2E=P^{-1}A^*P+2E=P^{-1}A^*P+P^{-1}\cdot2E\cdot P=P^{-1}(A^*+2E)\cdot P$ ∴ $B+2E\sim A^*+2E$

记 $B+2E$ ~~对应~~的特征值为γ，其对应的特征向量为β，($\gamma=\frac{|A|}{\lambda}+2$)

则 $(B+2E)\cdot\beta=\gamma\cdot\beta$

即 $P^{-1}\cdot(A^*+2E)P\cdot\beta=\gamma\beta$ 左乘P：$(A^*+2E)\cdot P\beta=\gamma P\beta$

∴ A^*+2E的特征值γ对应的特征向量为Pβ，即 $\alpha=P\beta$ $\beta=P^{-1}\cdot\alpha$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}\lambda-7&-2&-2\\\lambda-7&\lambda-3&-2\\\lambda-7&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-7)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&\lambda-3&-2\\1&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(\lambda-7)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow\lambda_1=7,\lambda_2=\lambda_3=1\Rightarrow\gamma_1=\frac{|A|}{\lambda_1}+2=3 \quad \gamma_2=\gamma_3=9$$

$$\lambda=7: [\lambda E-A]=\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+\frac12r_1]{r_2+\frac12r_1}\begin{bmatrix}4&-2&-2\\0&3&-3\\0&-3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}4&-2&-2\\0&3&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac13]{r_1\times\frac14}\begin{bmatrix}1&-\frac12&-\frac12\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{r_1+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{matrix}$ 取 $x_3=1$ 得 $\alpha_1=[1,1,1]^T$

$\lambda=1$ 时:

$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=-x_2-x_3$

分别取 $[x_2,x_3]^T=[1,0]^T,[0,1]^T$ 得: $\alpha_2=[-1,1,0]^T$, $\alpha_3=[-1,0,1]^T$

~~$\therefore \beta_1=P^{-1}\alpha_1=$~~

$[P\vdots E]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\therefore P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\therefore \beta_1=P^{-1}\alpha_1=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=[0,1,1]^T$

$\beta_2=P^{-1}\alpha_2=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=[1\ \ -1\ \ 0]^T$

$\beta_3=P^{-1}\alpha_3=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=[-1,-1,1]^T$

$\therefore$ $B+2E$ 的特征值为 $\lambda_1=3$, 对应特征向量为 $k_1[0,1,1]^T,(k_1\neq0)$

$\lambda_2=\lambda_3=9$, ... $k_2[1,-1,0]^T+k_3[-1,-1,1]^T$ (k_2,k_3不全为0).

例 5.25 (第二次习题课，第10次习题课 知识点) 群文件

解: (1) $A^2=\alpha\beta^T\cdot\alpha\beta^T=\alpha\cdot(\beta^T\cdot\alpha)\cdot\beta^T$

由内积定义: $\alpha^T\beta=\beta^T\cdot\alpha$ $\therefore A^2=0_{n\times n}$.

(2) 由题得: $r(A)=1$

$\therefore |\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_{ii})=\lambda^{n-1}(\lambda-\alpha^T\cdot\beta)=\lambda^n=0$ $\therefore$ 特征值全为0.

$\therefore [\lambda E-A]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\\0&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$

设 ξ_i 为方程组 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的基础解系, 则该方程的通解即为A的特征值0

对应的特征向量 即: $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1}$ (k_i $(1\le i\le n-1)$不全为0)

例 5.26

解: $\alpha^T\cdot\alpha=1+1=2$ $\therefore$ $\alpha\cdot\alpha^T\cdot\alpha=A\cdot\alpha=2\alpha$ 即2为A的一个特征值

$A=\alpha\cdot\alpha^T=(1,1,0)^T(1,1,0)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore r(A)=1$

$\because$ A实对称 $\therefore$ A一定可对角化

即 $A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$ $\because r(A)=1$ $\therefore r(\Lambda)=1$ $\therefore \lambda_2=\lambda_3=0$

$\lambda=0$ 时:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x_1=-x_2\\ x_3任意\in R\end{matrix}$$ 分别取 $[x_2,x_3]^T=[1,0]^T,[0,1]^T$ 有 $\alpha_1=[-1,1,0]^T,\alpha_2=[0,0,1]^T$

$\lambda=2$ 时

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix} \Rightarrow x_1=x_2,\ x_3=0$$ 取 $x_2=1$, $\alpha_3=[1,1,0]^T$

令 $P=[\alpha_3\ \alpha_1\ \alpha_2]$ 则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(2) $|I-A^{2017}|=\prod_{i=1}^{3}(1-\lambda_i^{2017})=1\times1\times(1-2^{2017})=1-2^{2017}$

例5.27

解:(1)设 ξ 对应特征值为 λ,则 $A\xi=\lambda\xi \Rightarrow \begin{cases}2-1-2=\lambda\\5+a-3=\lambda\\-1+b+2=-\lambda\end{cases} \Rightarrow \lambda=-1,\ a=-3,\ b=0$

(2) 由(1)知

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0 \quad \therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$$

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&1\\-5&2&-3\\-3&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+5r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\lambda E-A)=2$,其对应基础解系个数为1,代数重数 $\neq$ 几何重数,不能相似于对角阵.

例5.28

解:(1) $A\sim B$ $\therefore |A|=|B|$, $trace(A)=tr(B)$ 即 $-2=-2y$, $2+x=2+y-1$

$\Rightarrow x=0,\ y=1$

(2) $A\sim B$ $\therefore$ A的特征值为 $2,1,-1$

$\lambda=2$ 时, $[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore x_1\in R$ $x_2=0,\ x_3=0$, $\alpha_1=[1,0,0]^T$

$\lambda=1$ 时 $[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore x_1=0$, $x_2=x_3$, 取 $x_3=1$, $\alpha_2=[0,1,1]^T$

$\lambda=-1$ 时 $[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore x_1=0$, $x_2=-x_3$ 取 $x_3=1$, $\alpha_3=[0,-1,1]^T$

令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$,则 $P^{-1}AP=B$

例5.29

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -x & \lambda-1 & -y\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$ $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

$\lambda=1$时：$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

当$r(\lambda E-A)=1$时，$\lambda=1$对应特征向量有2个，才符合题意，即$\frac{1}{-x}=\frac{-1}{-y}$ $\Rightarrow x+y=0$

例5.30

解：$|\lambda E-A|$

$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 2-\lambda & \lambda-2 & 0\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)=0$ ①

① 设2为2重根 则 $2^2-8\times2+18+3a=0\Rightarrow a=-2$ 代入①式：$(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$

$\lambda=2$时：

$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ $r(\lambda E-A)=1$，$(\lambda E-A)x=0$有2个基础解系，即可以相似对角化。

② 2不是2重根

则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$

$\lambda^2-8\lambda+16=-2-3a$

$\therefore -2-3a=0\Rightarrow a=-\frac{2}{3}$ 此时$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$

$\lambda=4$时：

$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & \frac{2}{3} & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $r(\lambda E-A)=2$，$(\lambda E-A)x=0$有1个基础解系

代数重数≠几何重数 $\therefore$不可相似对角化。

综上所述：$a=-2$，可以相似对角化

$a=-\frac{2}{3}$，不……。

例5.31

解 (1) 第10次刷题课第2题 方法2，步骤略。，第7题

$\lambda_1=1+(n-1)b$ $\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=1-b$

$\lambda=1-b$：$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ $\cdots$ $\alpha_{n-1}\begin{bmatrix}-1\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$，特征向量$k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，$k_1\cdots k_{n-1}$不全为0.

$\lambda=1+(n-1)b$ 特征向量 $k_n[1,1,\cdots1]^T$，$k_n\neq0$

(2) $b=0$时 $A=E_n$，任取可逆阵P都可使A对角化。

$b\neq0$时 令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 则 $\Lambda=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1-b & & \\ & \ddots\ 1-b & \\ & & 1+(n-1)b\end{bmatrix}$

例5.32

解:

(1) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

$\therefore \beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$

(2) $A^n\beta=2A^n\xi_1-2A^n\xi_2+A^n\xi_3$

$=2\lambda_1^n\xi_1-2\lambda_2^n\xi_2+\lambda_3^n\xi_3$

$=2\xi_1-2^{n+1}\xi_2+3^n\xi_3$

$=(2-2^{n+1}+3^n,\ 2-2^{n+2}+3^{n+1},\ 2-2^{n+3}+3^{n+2})^T$

例5.33

解: (1) 由题得: $x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n+y_n)\quad y_{n+1}=\frac{3}{5}(\frac{1}{6}x_n+y_n)$

即 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$，令 $A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}9&4\\1&6\end{pmatrix}$ 则 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$

(2) 令 $B=\begin{pmatrix}9&4\\1&6\end{pmatrix}$

$B\eta_1=\begin{pmatrix}9&4\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$B\eta_2=\begin{pmatrix}9&4\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$ η_1,η_2是B对应于特征值10,5的特征向量

$\because A=\frac{1}{10}B$ $\therefore$ η_1,η_2是A对应于特征值$1,\frac{1}{2}$的特征向量

(3) 由(1)得 ~~令~~ $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\eta_1+\frac{3}{10}\eta_2$

$\therefore \begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^n(\frac{1}{5}\eta_1+\frac{3}{10}\eta_2)=\frac{1}{5}A^n\eta_1+\frac{3}{10}A^n\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}-\frac{3}{10\cdot2^n}\\\frac{1}{5}+\frac{3}{10\cdot2^n}\end{pmatrix}$