第十次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1.期末 2015-2016 三 2.

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 对应于 λ_1 的特征向量 $\alpha_1=(0,1,1)^T$。

(1) 求 A 对应于特征值 1 的特征向量；

(2) 求 A;

(3) 求 A^{2016}。

解：

(1) 由于 A 是实对称矩阵，所以对于 A 的不同特征值的特征向量正交，所以设特征值 1 对应的特征向量是 $\alpha=[x_1,x_2,x_3]$。所以有：

$$\alpha_1^T\alpha=x_2+x_3=0 \quad\Rightarrow\quad x_2=-x_3$$

分别取 $\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 得 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$。

α_2,α_3 即为 A 对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$。所以：

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3] \quad\Rightarrow$$

$$A=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3][\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\left(\text{式中：}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)$$

(3) 由 (2) 得：$A^2=E_3$（E 表示单位矩阵。）所以 $A^{2016}=(A^2)^{1008}=E_3$。 ♢

2.期末 2016-2017 一 4.

设 $\alpha_1=(a,1,1)^T,\alpha_2=(1,b,-1)^T,\alpha_3=(1,-2,c)^T$ 是正交向量组，则 $a+b+c=$_______。

解：

由题得：

$$\begin{cases}\alpha_1\alpha_2^T=a+b-1=0\\ \alpha_1\alpha_3^T=a-2+c=0\\ \alpha_2\alpha_3^T=1-2b-c=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad a+b+c=2$$

♢

3.期末 2016-2017 一 5.

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3$ 对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,-1,-1)^T,\alpha_3$，则 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3=$_______。

解：

设 $\alpha_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的，所以：

$$\begin{cases}\alpha_1\alpha_3^T=x_1+x_2+x_3=0\\ \alpha_2\alpha_3^T=2x_1-x_2-x_3=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x_1=0\\ x_2=-x_3\end{cases}$$

令 $x_3=-1$，有 $\alpha_3=[0,1,-1]$ ♢