第一次习题课

知识点

1. 矩阵：矩阵的定义。

2. 矩阵的初等行变换。

(1) 倍加行：把其中一行的常数倍加到另一行；

(2) 交换行：交换其中的两行；

(3) 倍乘行：将其中 1 行乘非零常数。

3. 阶梯型矩阵（不唯一）和行最简阶梯型矩阵（唯一）

对于任意一个矩阵，如果满足下面三条性质，则称其为阶梯型矩阵（注：括号里是另一种表述方式，与括号前的表述等价）

(1) 每一非零行在每一零行之上；（全为 0 的行在不全为 0 的行的下边）

(2) 某一行的主元素所在的列位于前一行主元素所在列的右边；（上边行的首个非 0 元素位于下边行首个非 0 元素的左边列）；（在所有非 0 行中，每一行的第一个非零元素所在的列号严格单调递增）

(3) 不全为 0 的行的首个非 0 元素下面的元素全为 0

行最简阶梯型矩阵：若一个阶梯形矩阵满足以下性质，则称为行最简阶梯型矩阵。

(1) 每一主元都为 1；（每一行第一个非零元素都是 1）

(2) 每一主元素是该元素所在列的唯一非 0 元素。

注：只有是行阶梯形矩阵，才能判断是不是行最简阶梯型矩阵。

4.高斯消元法（5 大步骤）：前 4 步用于产生阶梯型矩阵，第 5 步产生最简阶梯型矩阵。

(1) 从左边不全为零的列开始，该列称为主元列，主元素位置位于该列的最顶端；

(2) 若 (1) 中主元素位置上的元素包含下边两种情况：a)0；b) 含有未知参数。

则需通过矩阵的初等行变换（交换行）把非零元素换到第一行；例如：

$$\text{主元素位置元素为 0：}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 13 & 0 & 2 \end{bmatrix}\text{交换 } r_1, r_2\text{，或交换 } r_1, r_3$$

$$\text{主元素位置元素含有未知参数 (1)：}\begin{bmatrix} k-1 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 13 & 0 & 2 \end{bmatrix}\text{交换 } r_1, r_2\text{，或交换 } r_1, r_3$$

$$\text{主元素位置元素含有未知参数 (2)：}\begin{bmatrix} k^2-1 & 3 & 1 \\ k-1 & 7 & 2 \end{bmatrix}\text{交换 } r_1, r_2$$

(3) 通过初等行变换（倍加行），将 (2) 中主元素下边的元素全部变为 0.

(4) 暂时不管包含主元位置的行以及它上边的各行，对剩余的子矩阵重复步骤 (1)~(3)，直到剩余的矩阵为 0 或者没有子矩阵需要进行处理为止；

(5) 从最右边的主元素开始，把每个主元素所在列的上方的元素变为 0，若某个主元素不是 1，则通过初等行变换（倍乘行）将其变成 1.

5.存在唯一性定理：

对于齐次线性方程组：一定存在解。

(1) 只有 0 解：没有自由变量。

(2) 有非零解：此时一定有无穷多组解。存在至少一个自由变量。

对于非齐次线性方程组：

(1) 解不存在：将增广矩阵化为阶梯型矩阵后，最右列是主元列。即存在形如

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & b \end{bmatrix}$$

的行。

(2) 唯一解：不存在自由变量；

(3) 无穷解：至少有一个自由变量。

6.解线性方程组的步骤

(1) 将方程标准化；

(2) 写出增广矩阵；

(3) 执行高斯消元法 1 到 4 步；

(4) 判断解的存在性：若不存在，直接结束。若存在，执行高斯消元法第 5 步。

(5) 写出上一步求出的解。

7. 特殊矩阵：对角矩阵（单位矩阵、数量矩阵）、三角矩阵（上三、下三）、对称矩阵、反对称矩阵、向量（区分向量的维数和向量空间的维数两个概念）

8. 矩阵的运算：

(1) 加减、数乘。运算律同实数运算律。注意行数列数相同矩阵才能加减。

(2) 乘法：AB=C。只有 A 的列数等于 B 的行数才能乘，C 的大小为 A 行 B 列。注意矩阵的乘法没有交换律和消去律。即 $A \cdot B \neq B \cdot A$, 如果 $A \cdot B = A \cdot C$, 推不出 $B = C$。