第九次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1.期末 2014-2015 一 4.

已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1,3,2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则矩阵 A^3+2A^* 主对角线元素之和为______。

解：

由题得：$|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-1\times3\times2=-6$。所以 A^* 的特征值为：$\dfrac{|A|}{\lambda_i}$。由特征值的性质：

A^3+2A^* 的特征值为 $\lambda_i^3+2\dfrac{|A|}{\lambda_i}$. 所以 A^3+2A^* 主对角线元素之和为

$$trace(A^3+2A^*)=\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i^3+2\frac{|A|}{\lambda_i}\right)=36$$

$\diamondsuit$

2.期末 2014-2015 一 6.

设 $(1,1,1)^T$ 是矩阵 $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&a&2\\2&2&b\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a-b=$______。

解：

由特征向量的定义有

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}6\\a+2\\b+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=6\\a=4\\b=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a-b=2$$

$\diamondsuit$

3.期末 2014-2015 八.

设 3 阶方阵 A 的特征值-1,1 对应的特征向量分别为 α_1,α_2，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 设 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, 求 $P^{-1}AP$。

解：

由题得：$A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$。

(1) 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \tag{1}$$

要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，只需证明 $k_1=k_2=k_3=0$,(1) 式两边同左乘 A:

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \tag{2}$$

(1) 式减 (2) 式：$-2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$，因为 α_1 和 α_2 是分属于不同的特征值的特征向量，所以 α_1 和 α_2 线性无关。即 $\begin{cases}-2k_1=0\\-k_3=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_3=0$，代入到 (1) 式：$k_2\alpha_2=0$，又因为特征向量不为 0，所以 $k_2=0$。

综上所述：$k_1=k_2=k_3=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

(2) 由题得：

$$AP=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=P\Lambda$$

所以 $\Lambda = P^-1AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。 ♢

4.期末 2015-2016 一 4.

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix}$，若 $\alpha = (1, -2, 3)^T$ 是其特征向量，则 $a + b =$______。

解：

设 α 对应的特征值为 λ。由特征向量的定义：

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a + b = 4$$

♢

5.期末 2016-2017 三 1.

令 $\alpha = (1, 1, 0)^T$, 实对称矩阵 $A = \alpha\alpha^T$.

(1) 把矩阵 A 相似对角化;

(2) 求 $|6I - A^{2017}|$.

解：

由题得：$A = \alpha\alpha_T = (1, 1, 0)^T(1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。所以

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - 1)^2 - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\lambda_1 = 2$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元，步骤略}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以看出，$\lambda_1 = 2$ 时：代数重数等于几何重数。

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元，步骤略}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以看出，$\lambda_2 = \lambda_2 = 0$ 时：代数重数等于几何重数。

所以 A 可以相似对角化：即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$，其中 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) 由特征值的性质：$6I - A^{2017}$ 的特征值为：$6 - \lambda_i^{2017}$，所以

$$|6I - A^{2017}| = \prod_{i=1}^{3}(6 - \lambda_i^{2017}) = 36 \times (6 - 2^{2017})$$

◇

6.期末 2017-2018 一 5.

若 3 阶矩阵 A 相似于 B，矩阵 A 的特征值是 1,2,3 那么行列式 $|2B+I|=$______。(其中 I 是 3 阶单位矩阵)

解：

A 相似于 B, 所以 A 与 B 的特征值相等。所以 $2B+I$ 的特征值为 $2\lambda_i+1$，所以 $|2B+I|=\prod\limits_{i=1}^{3}(2\lambda_i+1)=105$ ◇

7.期末 2017-2018 三 1.

设 1 为矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\x&1&-1\\1&1&x\end{bmatrix}$ 的特征值，其中 $x>1$.

(1) 求 x 及 A 的其他特征值。

(2) 判断 A 能否对角化，若能对角化，写出相应的对角矩阵 Λ。

解：

设 α_1 为特征值 1 对应的特征向量，所以 $\alpha_1\neq 0$ 由题得：$A\alpha_1=\alpha_1$，即 $(A-E)\alpha_1=0$，即 $(A-E)x=0$ 有非零解。所以由存在唯一性定理：$|A-E|=0$，所以

$$|A-E|=\begin{vmatrix}0&2&3\\x&0&-1\\1&1&x-1\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}2&3\\1&x-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&3\\0&-1\end{vmatrix}=(2x-1)(x-2)=0$$

由题得：$x>1$，所以解得 $x=2$。

(2) 把 $x=2$ 代入得：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2}\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-3\\-(\lambda+1)&\lambda-1&1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-2&-3\\-1&\lambda-1&1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-2&-3\\0&\lambda-3&-2\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-2)-2]=0$$

解得：$\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-1$。

因为 A 为三阶，并且有 3 个不同的特征值，所以可以相似对角化，$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&4&\\&&-1\end{bmatrix}$。（不唯一，只要对角线元素是这三个就可以） ◇

8.期末 2017-2018 四 1.

设 A,B 均为 n 阶方阵，证明：若 A,B 相似则 $|A|=|B|$，举例说明反过来不成立。

证明：

若 A 与 B 相似，则依定义有：存在一个可逆矩阵 P，使得 $A=P^{-1}BP$，两边同时求行列式：$|A|=|P^{-1}BP|=|P^{-1}|\cdot|B|\cdot|P|=|B|\cdot|P^{-1}P|=|B|\cdot|E|=|B|$。

反过来描述：如果 $|A|=|B|$，则 A 和 B 相似。

例如：$A\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},|A|=1,B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},|B|=1$，所以 $|A|=|B|$, 但是：假设存在一个可逆矩阵 P,$P^{-1}AP=P^{-1}EP=E\neq B$，即 $|A|=|B|$，但是 A,B 不相似。 ◇

9.期末 2018-2019 一 4.

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，其特征值为 $1,-1,2$，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 A^* 的主对角线元素之和即 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$______。

解：

由题得：$|A| = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = -2$，所以 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_i}$，所以 A^* 的主对角线元素之和为 $trace(A^*) = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{|A|}{\lambda_i} = -1$。 ♢

10.期末 2018-2019 四 2.

若同阶矩阵 A 与 B 相似，即 $A \sim B$，证明 $A^2 \sim B^2$。反过来结论是否成立并说明理由。

证明：

若 A 与 B 相似，则依定义有：存在一个可逆矩阵 P，使得 $A = P^{-1}BP$，所以：$A^2 = P^{-1}BP \cdot P^{-1}BP = P^{-1}B^2P$。所以 $A^2 \sim B^2$。

反过来描述：如果 $A^2 \sim B^2$，则 A 和 B 相似。

不成立。理由如下：

例如：$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以 $A^2 = B^2$，由相似的性质 $A^2 \sim B^2$ 但是：假设存在一个可逆矩阵 $P, P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$，即 $A^2 \sim B^2$，但是 A, B 不相似。 ♢

11.期末 2018-2019 四 3.

设 λ_1, λ_2 是 A 的两个互异的特征值，$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量，$\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，证明：向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 线性无关。

证明：

由题得：$A\alpha_{1i} = \lambda_1\alpha_{1i}, (1 \le i \le s), A\alpha_{2j} = \lambda_1\alpha_{1j}, (1 \le j \le t)$。

设

$$k_1\alpha_{11} + \cdots + k_s\alpha_{1s} + k_{s+1}\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0 \tag{1}$$

要证明向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 线性无关，只需证明 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = k_{s+1} = \cdots = k_{s+t} = 0$ 即可。

在 (1) 式左边同乘 A:

$$k_1A\alpha_{11} + \cdots + k_sA\alpha_{1s} + k_{s+1}A\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}A\alpha_{2t} = \lambda_1(k_1\alpha_{11} + \cdots + k_s\alpha_{1s}) + \lambda_2(k_{s+1}\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}\alpha_{2t}) = 0 \tag{2}$$

$(2) - \lambda_2(1)$ 得：$(\lambda_1 - \lambda_2)(k_1\alpha_{11} + \cdots + k_s\alpha_{1s}) = 0$，因为 λ_1, λ_2 是 A 的两个互异的特征值，所以 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$，所以 $k_1\alpha_{11} + \cdots + k_s\alpha_{1s} = 0$，又因为 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量，所以：$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$。代入到 (1) 式得：

$k_{s+1}\alpha_{21} + \cdots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0$，因为 $\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，所以 $k_{s+1} = k_{s+2} = \cdots = k_{s+t} = 0$

综上所述：$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = k_{s+1} = k_{s+2} = \cdots = k_{s+t} = 0$，所以向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2t}$ 线性无关。 ♢

12.期末 2019-2020 一 1.

设 A 是 3 阶方阵，E 是 3 阶单位矩阵，已知 A 的特征值为 $1, 1, 2$，则 $\left|\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1} - 2A^{-1} + E\right| =$______。

解：

由题得：$|A| = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 2$，$A^*$ 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda} = \dfrac{2}{\lambda}$.

由伴随矩阵的性质：$\left(\frac{1}{2}A\right)^* = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} A^* = \dfrac{A^*}{4}$，所以 $\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1} - 2A^{-1} + E$ 的特征值为

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\lambda_i}\right)^{-1} - 2\lambda_i^{-1} + 1 = 2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1$$

所以：

$$\left|\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1} - 2A^{-1} + E\right| = \prod_{i=1}^{3}\left(2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1\right) = 4$$

♢

13.期末 2019-2020 一 5.

已知 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $c\alpha$，其中 c 为非零常数，设 n 阶方阵 P 可逆，则 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为______。

解：

由题得：$A(c\alpha)=\lambda(c\alpha)$ 等式两边同时左乘 P^{-1}：

$$P^{-1}AE(c\alpha)=P^{-1}APP^{-1}(c\alpha)=(P^{-1}AP)(P^{-1}c\alpha)=\lambda(P^{-1}c\alpha)$$

所以 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $P^{-1}c\alpha=cP^{-1}\alpha$ ♢

14.期末 2019-2020 三 2.

已知 3 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & a+2 & 0\\ a-2 & 3 & 0\\ 8 & -8 & -1\end{bmatrix}$ 可以相似对角化且 A 得到特征方程有一个二重根，求 a 的值。其中 $a\le 0$.

解：

由题得:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -(a+2) & 0\\ 2-a & \lambda-3 & 0\\ -8 & 8 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)[(\lambda+1)(\lambda-3)+(2+a)(2-a)]=(\lambda+1)[(\lambda-1)^2-a^2]=0$$

$$\Rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_2=1+a,\lambda_3=1-a.$$

依题意：有二重根且可以相似对角化且 $a\le 0$.

讨论：

(1)$\lambda_1=\lambda_2$，即 $-1=1+a, a=-2\le 0$, 此时 $\lambda_3=1-a=3$, 代入到 $\lambda E-A$ 得：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -8 & 8 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

对于重根 -1:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 4 & -4 & 0\\ -8 & 8 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

对于根 3:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ -8 & 8 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$$

可以看出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 A 可相似对角化，即 $a=-2$ 符合题意。

(2)$\lambda_1=\lambda_3$, 即 $-1=1-a, a=2>0$，不符合题意。

(3)$\lambda_2=\lambda=3$, 即 $1+a=1-a, a=0$。此时 $\lambda_2=\lambda_3=1$. 把 $a=0$ 代入到 $[\lambda E-A]$ 得：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ -8 & 8 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

对于重根 1:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ -8 & 8 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

对于重根 1，其代数重数与几何重数不相等，所以不能相似对角化。

综上所述：$a=-2$. ♢