第十一次习题课
知识点

1.只含有二次项的 n 元多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个 n 元二次齐次多项式，简称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个 n 元二次型。

2.作一个 n 阶对称矩阵，$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \\x_n\end{bmatrix}$，可以验证 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，一般用 $f(x)=x^TAx$ 表示二次型。矩阵 A 称为二次型 $f(x)$ 的矩阵。对称矩阵 A 与二次型 $f(x)$ 是一一对应的，定义二次型 $f(x)$ 的秩为 $r(A)$。

3.设 $C_{m\times n}$，我们称 $C:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$\forall v\in\mathbb{R}^n,v\mapsto Cv$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个线性变换。

4.设 $C_{n\times n}$ 是可逆矩阵，$x\in\mathbb{R}^n$，此时称 $x=Cy$ 是可逆线性变换，此时二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx=(Cy)^TA(Cy)=y^TC^TACy=y^T(C^TAC)y$$

变为矩阵 $B=C^TAC$ 的 y 的 n 元二次型。

若 $y^T(C^TAC)y$ 形如 $d_1y_1^2+\cdots+d_ry_r^2$，其中 $d_1\cdots d_r\neq 0$, 则称 $y^T(C^TAC)y$ 为 x^TAx 的一个标准型。

5.设 A,B 为两个 n 阶矩阵，如果存在 n 阶可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$ 则称矩阵 A 合同于矩阵 B，或 A 与 B 合同。记为 $A\simeq B$。

6.如果线性变换 C 是正交矩阵，则称 $x=Cy$ 为正交变换。

设 A 为实对称矩阵，则存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵，由于二次型的矩阵是一个实对称矩阵，则 Q^TAQ 为对角矩阵。

7.二次型一定可以用正交变换化为标准型。

8.对任意二次型 $f(x)=x^TAx$, 存在正交矩阵 Q，经过正交变换 $x=Qy$ 可化为标准型

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_{1n}y_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是二次型 $f(x)$ 的矩阵 A 的全部特征值。(注：非零特征值要放在前面)

补充：

正交变换化二次型为标准型的方法：(以 3 阶为例)

(1) 写出二次型矩阵 A;

(2) 求矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$;

(3) 求出矩阵的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;

(4) 把 (3) 特征向量改造（施密特正交化，单位化）为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$;

(5) 构造正交矩阵 $Q=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$, 经坐标变换 $x=Qy$ 得：

$$x^TAx=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$$

应当注意：Λ 中特征值的顺序应与 Q 中对应的向量顺序一致。 $\diamondsuit$

9.对任意一个实对称矩阵 A，存在一个非奇异矩阵 C，使 C^TAC 为对角阵。即任何一个实对称矩阵都与一个对角矩阵合同。(称这个对角阵为 A 的标准形)

补充：

课本 157 页惯性定理。 ◇

10.二次型可以通过非退化线性变换化为规范形且规范形唯一。

规范形中正项个数 p 称为二次型的正惯性指标，负项个数 $r-p$ 称为二次型的副惯性指标，r 是二次型的秩。

11.任给 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $f(x) = x^T Ax > 0$(或 < 0)，则称 A 为正定矩阵 (负定矩阵)。或称 $f(x) = x^T Ax > 0$ 为正定 (负定) 二次型。

12.半正定，半负定

13.设 A 为正 (负) 定矩阵。如果 A, B 合同，则 B 也是正 (负) 定矩阵。合同矩阵具有相同的有定性。

14.单位矩阵是正定的。负单位矩阵是负定的。$I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{bmatrix}$ 不定。

$\begin{bmatrix} I_p & \\ & 0 \end{bmatrix}$ 半正定。

$\begin{bmatrix} -I_q & \\ & 0 \end{bmatrix}$ 半负定。

$\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 不定。

15.实对称矩阵 A 为

正定矩阵，当且仅当 A 的特征值全大于 0。

负定矩阵，当且仅当 A 的特征值全小于 0。

半正定矩阵，当且仅当 A 的特征值有正有 0。

半负定矩阵，当且仅当 A 的特征值有负有 0。

不定矩阵，当且仅当 A 的特征值有正有负。

16.如果矩阵 A 正定，以下描述等价

(1)A 的特征值全大于 0。

(2)A 的规范形为 E_n。

(3) 存在可逆矩阵 C，$C^T AC = E_n$。

(4) 存在可逆矩阵 B，$B = C^{-1}, A = B^T B$。

17.k 阶主子式，k 阶顺序主子式。

18.实对称矩阵 $A = (a_{ij_{n\times n}})$ 为正定矩阵当且仅当 A 的所有顺序主子式大于 0。