王松年

例1.1～1.15．课本习题1.1～1.3 P_{174}～P_{178}

例1.16～1.17 P_{178}例6.1.1，例6.1.2

例1.18

解：系数矩阵：$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&0&3^2\end{bmatrix}$ 常数项矩阵 $b=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$ 未知量矩阵 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

增广矩阵：

$$[A\,\vdots\,b]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&2&3&1\\0&0&9&3\end{array}\right]$$

例1.19

解：

$$\begin{pmatrix}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{7}{2}r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-\frac{3}{2}r_1}}\begin{pmatrix}2&-1&4&-3&-4\\0&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&-1\\0&\frac{5}{2}&-5&\frac{9}{2}&7\\0&\frac{7}{2}&-7&\frac{15}{2}&17\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-7r_2]{r_3-5r_2}\begin{pmatrix}2&-1&4&-3&-4\\0&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&0&2&12\\0&0&0&4&24\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-2r_3}\begin{pmatrix}2&-1&4&-3&-4\\0&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&0&2&12\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{\substack{r_1\times\frac{1}{2}\\r_2\times 2}}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&2&-\frac{3}{2}&-2\\0&1&-2&1&-2\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2-r_3\\r_1+\frac{3}{2}r_3}}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&2&0&7\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

例1.20 解:

增广矩阵: $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-r_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\therefore x_1 = 1-3x_3$, $x_2 = 2x_3$, 令 $x_3 = k$, $k \in R$

$$x = \begin{bmatrix} 1-3k \\ 2k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} k, \quad k \in R$$

一定要写

验算: $x_1 + x_2 + x_3 = 1-3k+2k+k = 1$

$2x_1 + 3x_2 = 2(1-3k) + 3\times 2k = 2-6k+6k = 2$

$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3(1-3k) + 4\times 2k + k = 3-9k+8k+k = 3$

例1.21 解:

增广矩阵: $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & a & 3 & a \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & a-1 & -2 & a-1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-2r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & a+1 \end{array}\right]$

讨论: ①无解: $a-1=0$ 且 $a+1 \neq 0$ 即 $a=1$ 时, 无解;

$a \neq 1$时,有解 ②唯一解: 由上述矩阵可看出, 有自由变量 x_4, $\therefore$ 此方程组无唯一解

③.无穷多组解

$\xrightarrow{r_1-\frac{r_3}{a-1}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 5 & \frac{-2}{a-1} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(\frac{2}{a-1}+5) \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{a-1}]{r_2\times(-1)} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3-5a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a+1}{a-1} \end{array}\right)$

$\therefore x_1 = \frac{3-5a}{a-1}$, $x_2 = 1-x_4$, $x_3 = \frac{a+1}{a-1}$,

令 $x_4 = k,\ k \in R.$

$$x=\begin{bmatrix} \frac{3-5a}{a-1} \\ 1-k \\ \frac{a+1}{a-1} \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-5a}{a-1} \\ 1 \\ \frac{a+1}{a-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k$$