

第十一次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1. 期末 2014-2015 一 5.

已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = py$ 可化为标准形: $f = 6y^2$, 则 $a =$ _____。

2. 期末 2014-2015 六.

设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0)$$

的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12。

(1) 求 a, b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型, 并写出所用正交变换。

3. 期末 2015-2016 一 6.

若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$ 正定, 则 λ 满足的条件为_____。

4. 期末 2015-2016 三 3.

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置, 已知 $r(A) = 2$, 且二次型 $f(x) = x^T A^T A x$.

(1) 求 a ;

(2) 写出二次型 $f(x)$ 的矩阵 $B = A^T A$;

(3) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 $f(x)$ 化为标准型, 并写出所用的正交变换。

5. 期末 2015-2016 四 1.

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 其中 E 为单位矩阵, 试证:

(2) A 为正定矩阵。

6. 期末 2016-2017 一 6.

设 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 已知二次型 $f(x) = x^T B x$ 是正定的, 则 λ 的取值范围为_____。

7. 期末 2016-2017 三 2.

已知实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 4 \\ -1 & 3 & b \\ 4 & b & 0 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$ 相似。

(1) 求矩阵 A ;

(2) 求正交线性变换 $x = Qy$, 把二次型 $f(x) = x^T Ax$ 化为标准型.

8.期末 2016-2017 四 2.

已知 A, B 是同阶实对称矩阵.

(1) 证明如果 $A \sim B$, 则 $A \simeq B$, 也就是相似一定合同;

(2) 举例说明反过来不成立.

9.期末 2017-2018 一 6.

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____.

10.期末 2017-2018 三 2.

设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A ;

(2) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q$ 为对角型矩阵;

(3) 给出正交变换, 化该二次型为标准型.

11.期末 2018-2019 一 5.

若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则 t 应满足_____.

12.期末 2018-2019 三 2.

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A ;

(2) 求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵;

(3) 给出正交变换, 将该二次型化为标准型;

(4) 写出二次型的秩, 正惯性指标和负惯性指标.

13.期末 2019-2020 一 6.

已知实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix}$ 的正惯性指数为 3, 则 x 的取值范围为_____.

14.期末 2019-2020 三 3.

设三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A ;

(2) 用正交变换 $x = Qy$ 把该二次型化为标准型.

15.期末 2019-2020 四 1.

设 A 为 m 阶正定矩阵, B 为 $m \times n$ 实矩阵, B^T 为 B 的转置矩阵, 试证: $B^T A B$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = n$.

16.期末 2019-2020 四 2.

设 α, β 是 n 维列向量, 证明 $r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq 2$ 。

17.期末 2017-2018 四 2.

设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 证明 $Ax = 0$ 与 $(A^T A)x = 0$ 是同解方程, 进一步得出 $r(A) = r(A^T A)$ 。

18.期末 2016-2017 三 3.

在对观测数据拟合的时候经常遇到线性方程组 $Ax = b$ 是矛盾方程的情形, 是没有解的。此时我们转而解 $A^T Ax = A^T b$, 我们称 $A^T Ax = A^T b$ 是原线性方程组的正规方程组。称正规方程组的解为原方程组的最小二

乘解。设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(1) 证明 $Ax = b$ 无解;

(2) 求 $Ax = b$ 的最小二乘解。