

## 习题课上总结的一些题

一. 求矩阵的  $m$  次方。(这里之所以写  $m$  是为了与矩阵的阶数  $n$  区别开来, 以防混淆)

1. 数学归纳法。即依次求出  $A, A^2, A^3, \dots$ 。一般不用, 但也有特殊情况 (例如 17-18 年半期测试的一大题的第四小题, 当然这个题有两种解法, 任选其一; 15-16 年的期末试题三大题的第二小题的最后一问)。

2. 对角矩阵的  $m$  次方。(显然不会单独出题)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^m = \begin{bmatrix} a_{11}^m & & & \\ & a_{22}^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^m \end{bmatrix}.$$

3. 如果一个  $n$  阶方阵  $A$  主对角线上以及主对角线的一侧元素全为 0, 那么必有  $A^k = 0$ , 其中  $k \geq n$ 。即  $A$  是下边的几种形状之一: (一定要注意是针对主对角线, 副对角线该结论不成立, 第二次习题课讲这里时讲错了, 后边已更正)

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{例如: 若 } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \underline{\quad 0 \quad}.$$

解:

由矩阵的乘法:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇

4. 一般来说, 上边的 2,3 不会单独出题, 因为太过简单, 都是组合起来出题。

**二项式定理:**  $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i \cdot b^{n-i}$ , 式中:  $C_n^i$  为组合数,  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ 。

$$\text{例如: 若 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^m = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解:

$$\text{由题得: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I + B$$

由 3 的结论可知:  $B^k = 0, k \geq 3$ 。计算得:  $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  所以

$$\begin{aligned} A^m &= (I + B)^m = C_m^0 I^m B^0 + C_m^1 I^{m-1} B^1 + C_m^2 I^{m-2} B^2 + C_m^3 I^{m-3} B^3 + \cdots + C_m^0 I^0 B^m \\ &= I^m B^0 + m I^{m-1} B^1 + \frac{m(m-1)}{2} I^{m-2} B^2 = I + mB + \frac{m(m-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{m(m-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2m & 4m^2 - m \\ 0 & 1 & 4m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

5. 如果一个  $n$  阶方阵  $A$  的秩  $r(A) = 1$ , 那么  $A$  一定可以写成一个列向量与一个行向量的乘积, 即 (我们以 3 阶的方阵为例, 最后把结果推广到  $n$  阶):

设 3 阶方阵  $A$  的秩  $r(A) = 1$ , 设  $\alpha = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T, \beta = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$ , 则

$$A = \alpha \beta^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{至于这里的 } x \text{ 和 } y \text{ 的具体值, 我们并不关心。})$$

$l = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ . 可以看出  $l$  是矩阵  $A$  的对角线元素之和 (又称  $A$  的迹)。

$$A^2 = (\alpha \beta^T)^2 = \alpha (\beta^T \alpha) \beta^T = l \alpha \beta^T = l A, A^3 = A A^2 = A l A = l A^2 = l l A = l^2 A \cdots, \Rightarrow A^m = l^{m-1} A.$$

例如: (对 2,3,4,5 综合运用)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^m = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解:

经观察, 我们可将矩阵按下列方式进行分块:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ 分块后是对角矩阵, 所以: } A^m = \begin{bmatrix} A_{11}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^m \end{bmatrix} \quad (\text{注: 2 的结论})$$

对于  $A_{11}$ :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3I + B$$

和 4 一样了, 此时  $B^k = 0, k \geq 2$

$$\begin{aligned} A_{11}^m &= (3I + B)^m = C_m^0 B^0 (3I)^m + C_m^1 B^1 (3I)^{m-1} + C_m^2 B^2 (3I)^{m-2} + \cdots + C_m^m B^m (3I)^0 \\ &= 3^m I + 3^{m-1} m B \\ &= \begin{bmatrix} 3^m & m 3^{m-1} \\ 0 & 3^m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对于  $A_{22}$ , 经过高斯消元法变换  $(r_1 - 3r_2)$  后:  $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 可以看出  $r(A_{22}) = 1$ , 符合本条的描述, 所以

$$l = 3 + 3 = 6$$

$$A_{22}^m = l^{m-1} A = 6^{m-1} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

所以:

$$A^m = \begin{bmatrix} A_{11}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^m & m \cdot 3^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 6^{m-1} & 9 \cdot 6^{m-1} \\ 0 & 0 & 6^{m-1} & 3 \cdot 6^{m-1} \end{bmatrix}$$

◇

6. 用相似矩阵的性质来做, 即若  $A \sim B$ , 则  $A^m \sim B^m$  (例如 17-18 年半期测试的一大题的第四小题)。

但通常有一些矩阵隐含了此属性, 也可以用此方法来做, 要注意辨别。(例如: 课本的 140 页第 9 题, 答案在 224 页)

## 二、特殊矩阵的特征值求法

1. 对角阵, 上下三角阵的行列式均为对角线的元素。(由这些特殊行列式的算法很容易看出来)
2. 设  $A = [a_{ij}]$  是三阶矩阵, 则 (下式不做推导, 感兴趣的可以自己算一下)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 - \sum a_{ii} \lambda^2 + S_2 \lambda - |A|$$

$$\text{式中: } S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}。$$

若  $r(A) = 1$  (再复习一下一的第五点), 则  $|A| = 0, S_2 = 0$ , 代入到上式有

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum a_{ii} \lambda^2 = \lambda^2 \left( \lambda - \sum a_{ii} \right)$$

做推广, 对于  $n$  阶矩阵  $A$ , 若  $r(A) = 1$ , 则  $|\lambda E - A| = \lambda^{n-1} (\lambda - \sum a_{ii})$

例如:

已知  $a \neq 0$ , 求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量。

解:

方法一: (直接计算)

由特征多项式:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -a & -a \\ -a & \lambda - 1 & -a & -a \\ -a & -a & \lambda - 1 & -a \\ -a & -a & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = [\lambda - (3a + 1)](\lambda + a - 1)^3$$

得  $A$  的特征值是  $3a + 1, 1 - a$ 。

当  $\lambda = 3a + 1$  时, 由  $[(3a + 1)E - A] = 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} 3a & -a & -a & -a \\ -a & 3a & -a & -a \\ -a & -a & 3a & -a \\ -a & -a & -a & 3a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得基础解系为  $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ , 所以  $\lambda = 3a + 1$  的特征向量为  $k_1\alpha_1, (k_1 \neq 0)$ 。

当  $\lambda = 1 - a$  时, 由  $[(1 - a)E - A] = 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系  $\alpha_2 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1, 0)^T, \alpha_4 = (-1, 0, 0, 1)^T$ , 所以  $\lambda = 1 - a$  的特征向量为  $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$ , 式中  $k_2, k_3, k_4$  是不全为 0 的任意常数。

方法二: (转换法)

由题得:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} = B + (1-a)E$$

由于  $r(B) = 1$ , 所以有

$$|\lambda E - B| = \lambda^{4-1} \left( \lambda - \sum_{i=1}^4 a_{ii} \right) = \lambda^3 (\lambda - 4a)$$

所以矩阵  $B$  的特征值为  $0, 0, 0, 4a$ , 所以由特征值的性质,  $A$  的特征值为  $3a + 1, 1 - a, 1 - a, 1 - a$ 。

下边同方法一。

◇

$n$  阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

则  $r(A) =$ \_\_\_\_\_.

解:

由上题可快速写出  $A$  的特征值为  $n+a-1, a-1, a-1, \cdots, a-1$ . 因为  $A$  是实对称矩阵, 所以  $A \sim \Lambda$ , 且  $\Lambda$  由  $A$  的特征值所构成, 相似矩阵具有相同的秩, 所以  $r(\Lambda) = r(A)$ , 所以

$$\Lambda = \begin{bmatrix} n+a-1 & & & & \\ & a-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a-1 & \end{bmatrix}$$

这里  $n$  是  $A$  的阶数, 所以不会等于 0。所以

$$r(A) = \begin{cases} n, & \text{若 } a \neq 1 \text{ 且 } a \neq 1-n, \\ n-1, & \text{若 } a = 1-n, \\ 1, & \text{若 } a = 1. \end{cases}$$

◇

设  $\alpha$  为  $n$  维单位列向量,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 则

A.  $E - \alpha\alpha^T$  不可逆

B.  $E + \alpha\alpha^T$  不可逆

C.  $E + 2\alpha\alpha^T$  不可逆

D.  $E - 2\alpha\alpha^T$  不可逆

解:

注意: 单位向量指的是向量的模 (长度) 为 1, 要与  $[1, 1, 1]$  区分开来。

$\alpha\alpha^T\alpha = \alpha(\alpha^T\alpha) = 1\alpha$ , 所以  $\alpha\alpha^T$  有一个特征值 1.

$\alpha$  为  $n$  维单位列向量, 所以  $r(\alpha\alpha^T) = 1$ , 所以由第一题的结论,  $\alpha\alpha^T$  的特征值为  $1, 0, 0, \cdots, 0$ .

$E$  为  $n$  阶单位矩阵, 所以  $E$  也为实对称矩阵 (特征值为 1), 实对称矩阵相加减依然为实对称矩阵, 所以上述选项中每一项均为实对称矩阵。

又由矩阵可逆则行列式一定不为 0 (不可逆则行列式一定为 0, 充要条件), 矩阵的行列式等于特征值的乘积。

$A.c$  的特征值为  $1-1, 1-0, 1-0, \cdots, 1-0$  即  $0, 1, 1, \cdots, 1$ , 所以  $|E - \alpha\alpha^T| = 0 \times 1 \cdots 1 = 0$ , 即不可逆。

同理可以看出其他选项的行列式均不为 0, 即可逆。

◇

## 2. 抽象矩阵特征值和特征向量的求法

设  $A$  是三阶矩阵, 且矩阵  $A$  的各行元素之和均为 5, 则矩阵  $A$  必有特征向量\_\_\_\_\_.

解:

由题得:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以矩阵  $A$  必有特征值 5 且必有特征向量  $k[1, 1, 1]^T, (k \neq 0)$ 。

◇

已知  $A$  是 3 阶矩阵, 如果非齐次线性方程组  $Ax = b$  有通解  $5b + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ , 其中  $\eta_1, \eta_2$  是  $Ax = 0$  的基础解系, 求  $A$  的特征值和特征向量。

解:

非齐次线性方程组  $Ax = b$  的通解为  $Ax = b$  的特解加上  $Ax = 0$  的通解。

由解得结构可知  $5b$  是方程组  $Ax = b$  的一个解, 即  $A(5b) = b$ , 所以  $Ab = \frac{1}{5}b$ 。即  $\frac{1}{5}$  是  $A$  的特征值,  $k_1b, (k_1 \neq 0)$  是相应的特征向量。

$\eta_1, \eta_2$  是  $Ax = 0$  的基础解系, 所以必有  $A\eta_1 = 0 = 0\eta_1, A\eta_2 = 0 = 0\eta_2$ , 所以  $\eta_1, \eta_2$  是  $A$  关于  $\lambda = 0$  的线性无关的特征向量, 所以特征值 0 对应的特征向量为  $k_2\eta_1 + k_3\eta_2, (k_2, k_3 \text{不全为} 0)$ 。

综上所述,  $A$  的特征值为  $\frac{1}{5}, 0, 0$ , 对应的特征向量分别是  $k_1b, (k_1 \neq 0), k_2\eta_1 + k_3\eta_2, (k_2, k_3 \text{不全为} 0)$

◇

## 2014-2015 年第一学期

## 一、填空题

1. 若已知行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  的代数余子式  $A_{21} = 1$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

解:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \times (3 \times 1 - 2 \times 1) = 1, \text{ 解得 } a = 2. \quad \diamond$$

2. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B$  为 3 阶非零矩阵且  $AB = 0$ , 则  $t =$ \_\_\_\_\_。

解:

$B$  为 3 阶非零矩阵且  $AB = 0$  即  $B$  的非零列向量为  $Ax = 0$  的解, 即  $Ax = 0$  有非零解, 即  $|A| = 0$ , 把  $|A|$  按第三列展开。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{vmatrix} = -2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & t \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2(2t - 15) + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{17}{2}$$

3. 设 3 阶方阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  的行列式  $|A| = 3$ , 矩阵  $B = (\alpha_2, 2\alpha_3, -\alpha_1)$ , 则行列式  $|A - B| =$ \_\_\_\_\_。

解:

对  $A$  的第三列乘 2 得:  $|\alpha_1 \ \alpha_2 \ 2\alpha_3| = 2|A|$ , 对该表达式第一列乘负一:  $|- \alpha_1 \ \alpha_2 \ 2\alpha_3| = -2|A|$ , 交换一二两列,  $|\alpha_2 \ \alpha_1 \ 2\alpha_3| = 2|A|$ , 交换二三两列,  $|\alpha_2 \ 2\alpha_3 \ \alpha_1| = -2|A|$ , 所以  $|B| = -2|A|$ 。

$$\begin{aligned} |A - B| &= |\alpha_1 - \alpha_2 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| = |\alpha_1 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| + |-\alpha_2 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= |\alpha_1 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| + |\alpha_1 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_1| \\ &= |A| + 0 + 0 - |B| = 3|A| = 9 \end{aligned}$$

4. 已知 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $-1, 3, 2$ ,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则矩阵  $A^3 + 2A^*$  主对角线元素之和为\_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -1 \times 3 \times 2 = -6$ 。所以  $A^*$  的特征值为:  $\frac{|A|}{\lambda_i}$ 。由特征值的性质:

$A^3 + 2A^*$  的特征值为  $\lambda_i^3 + 2\frac{|A|}{\lambda_i}$ 。所以  $A^3 + 2A^*$  主对角线元素之和为

$$\text{trace}(A^3 + 2A^*) = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i^3 + 2\frac{|A|}{\lambda_i} \right) = 36$$

5. 已知实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$  经正交变换  $x = py$  可化为标准形:  $f = 6y^2$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

解:

任意二次型  $x^T A x$  经过正交变换化为标准型时, 标准型中平方项的系数即为二次型矩阵  $A$  的特征值, 即  $6, 0, 0$  是  $A$  的特征值, 而  $A$  的对角线元素是  $a, a, a$ , 由特征值性质  $\text{trace}(A) = a + a + a = \sum_{i=1}^3 \lambda = 6$ , 所以  $a = 2$ 。

6. 设  $(1, 1, 1)^T$  是矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & b \end{bmatrix}$  的一个特征向量, 则  $a - b =$ \_\_\_\_\_。

解:

由特征向量的定义有

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ a+2 \\ b+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a - b = 2$$

◇

二. 设多项式  $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & -2 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$ , 分别求该多项式的三次项、常数项。

解:

Matlab 算出的结果为:  $f(x) = 8x^4 - 14x^3 + 11x^2 - 53x + 14$  (作为参考)

取列为自然排列。分析得: 行数按 2134 和 4231 排列时, 对应的项为  $x^3$ 。即

$$(-1)^{\tau(2134)} a_{21} a_{12} a_{33} a_{44} + (-1)^{\tau(4231)} a_{41} a_{22} a_{33} a_{14} = (-12 - 2)x^3 = -14x^3$$

同理, 取列为自然排列。分析得行数按: 3142、3412 和 3421 排列时为常数项, 即

$$(-1)^{\tau(3142)} a_{31} a_{12} a_{43} a_{24} + (-1)^{\tau(3412)} a_{31} a_{42} a_{13} a_{24} + (-1)^{\tau(3421)} a_{31} a_{42} a_{23} a_{14} = -6 + 4 + 16 = 14$$

◇

三. 设  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ , 求  $B$ 。

解:

由题得:  $|A^*| = 2 \times 2 \times 2 \times 8 = 64$

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \Rightarrow AB = B + 3A \Rightarrow A^*AB = A^*B + 3A^*A$$

$$A^*A = |A|A^{-1}A = |A|I \quad |A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n|A|^{-1} = |A|^{n-1} = |A|^{4-1} = 64 \quad |A| = 4$$

所以  $4B = A^*B + 3 \times 4 \Rightarrow B = 12(4 - A^*)^{-1}$ 。

求逆的过程略。

最后的结果为:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

◇

四.  $\lambda$  为何值时, 方程组  $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$  有无穷多组解? 并在有无穷多解时, 写出方程组的通解。

解。



解:

$$\text{记 } A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_2} \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(5\lambda+4)$$

可以看出  $\lambda \neq 1$  且  $\lambda \neq -\frac{4}{5}$  时即  $|A| \neq 0$  时, 方程有唯一解。

$\lambda = 1$  时:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{中间略}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以  $\lambda = 1$  时有无穷多解,  $x_1 = 1, x_2 = x_3 - 1$ .

所以通解为  $x = [1, -1, 0]^T + k[0, 1, 1]^T, (k \in R)$

$\lambda = -\frac{4}{5}$  时,  $r(A) \neq r(A, B)$ , 此时无解。

◇

$$\text{五. 设 } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(1) 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩与一个最大线性无关组;

(2) 将其余向量用极大线性无关组线性表示。

解:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-r_1} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

(1)  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ , 极大线性无关组为:  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_2, \alpha_4), (\alpha_3, \alpha_4)$ . (任写一个即可。)

(2) 取  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , 由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases}$$

◇

六. 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0)$$

的矩阵  $A$  的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12。

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 利用正交变换将二次型  $f$  化为标准型, 并写出所用正交变换。

解:

$$\text{由题得: } A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix} m, |A| = 2(-2a - b^2)$$

(1) 由特征值的性质有:

$$\begin{cases} \text{trace}(A) = a + 2 - 2 = 1 \\ \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -12 = |A| = 2(-2a - b^2) \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

分别取  $[x_2, x_3]^T = [1, 0]^T$  和  $[0, 1]^T$  得:  $\alpha_1 = [0, 1, 0]^T, \alpha_2 = [2, 0, 1]^T$ , 可以看出  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  正交。

$\lambda_3 = -3$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取  $x_3 = -2$  得:  $\alpha_3 = [1, 0, -2]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = [0, 1, 0]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[ \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

所以  $f$  可经正交变换  $x = Qy$  化为标准型:

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$$

◇

七. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 且  $A^2 - A - 2I = 0$ 。

(1) 证明:  $r(A - 2I) + r(A + I) = n$ 。

(2) 证明: 矩阵  $A + 2I$  可逆, 并求  $(A + 2I)^{-1}$ 。

证明:

(1) 由题得:  $A^2 - A - 2I = (A - 2I)(A + I) = 0$ 。

所以由矩阵秩的性质有:  $r(A + 2I) + r(A + I) \leq n$ 。

$r((A - 2I) - (A + I)) = r(-3I) \leq r(A - 2I) + r(-(A + I)) = r(A - 2I) + r((A + I))$ , 即  $n \leq r(A - 2I) + r((A + I))$

所以  $r(A - 2I) + r(A + I) = n$ 。

(2) 由题得:  $A^2 - A - 2I = 0$ , 所以

$$A^2 + 2A - 2A - A - 2I = 0$$

$$A(A + 2I) - 3A - 6I + 6I - 2I = 0$$

$$A(A + 2I) - 3(A + 2I) = (A - 3I)(A + 2I) = -4I$$

$$-\frac{1}{4}(A - 3I)(A + 2I) = I$$

所以  $A + 2I$  可逆,  $(A + 2I)^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 3I)$  ◇

2. 设  $X_0$  是线性方程组  $Ax = b$  ( $b \neq 0$ ) 的一个解,  $X_1, X_2$  是导出组  $Ax = 0$  的一个基础解系。令  $\xi_0 = X_0, \xi_1 = X_0 + X_1, \xi_2 = X_0 + X_2$ , 证明:  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  线性无关。

证明:

设

$$k_0\xi_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0 \quad (1)$$

要证明  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  线性无关, 根据定义, 只需证明  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。

由题得:  $AX_0 = b, AX_1 = AX_2 = 0$ , 因为  $X_1, X_2$  为  $AX = 0$  的基础解系, 所以  $X_1, X_2$  线性无关。

把题中条件代入 (1) 式:

$$k_1X_0 + k_2X_0 + k_2X_1 + k_3X_0 + k_3X_2 = (k_1 + k_2 + k_3)X_0 + k_2X_1 + k_3X_2 = 0 \quad (2)$$

(2) 式两边同时左乘矩阵  $A$ :

$$(k_1 + k_2 + k_3)AX_0 + k_2AX_1 + k_3AX_2 = (k_1 + k_2 + k_3)b = 0$$

因为  $b \neq 0$ , 所以  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ 。代入 (2) 式得:  $k_2X_1 + k_3X_2 = 0$ , 因为  $X_1, X_2$  线性无关, 所以  $k_2 = k_3 = 0$ 。所以  $k_1 = 0 - k_2 - k_3 = 0$ 。

所以  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  线性无关。 ◇

八. 设 3 阶方阵  $A$  的特征值 -1, 1 对应的特征向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ , 向量  $\alpha_3$  满足  $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 。

(1) 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关;

(2) 设  $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ , 求  $P^{-1}AP$ 。

解:

由题得:  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ 。

(1) 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (1)$$

要证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 只需证明  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , (1) 式两边同左乘  $A$ :

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = -k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (2)$$

(1) 式减 (2) 式:  $-2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$ , 因为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是分属于不同的特征值的特征向量, 所以  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  线性无关。即

$$\begin{cases} -2k_1 = 0 \\ -k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_3 = 0, \text{ 代入到 (1) 式: } k_2\alpha_2 = 0, \text{ 又因为特征向量不为 } 0, \text{ 所以 } k_2 = 0.$$

综上所述:  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。

(2) 由题得:

$$AP = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = [-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P\Lambda$$

$$\text{所以 } \Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇

## 2015-2016 年第一学期

## 一、填空题

1. 行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解:

把第二行加到第一行上:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ -2 & 3-a & a \\ 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = A$$

把  $A$  的第二行加到第一行上:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & a \\ -3 & 4-a \end{vmatrix} = 24$$

◇

2. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ , 求  $A^2 - 2A$  的秩  $r(A^2 - 2A)$ 。

解:

由题得:  $A^2 - 2A = A(A - 2E)$ , 可以看出  $A$  是满秩方阵, 即  $A$  可逆。满秩方阵一定可逆, 所以  $r(A^2 - 2A) = r(A(A - 2E)) = r(A - 2E)$ 。

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以  $r(A - 2E) = 3$ , 所以  $r(A^2 - 2A) = 3$ 

◇

3. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 若  $\sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i$  也是  $Ax = b$  的解, 则  $\sum_{i=1}^3 c_i = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得:  $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b, A\alpha_3 = b, A \sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i = A(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3) = b$ 。

所以  $A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = 3b$ , 即  $A \left( \frac{1}{3} \alpha_1 + \frac{1}{3} \alpha_2 + \frac{1}{3} \alpha_3 \right) = b = A(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3)$ , 所以  $\sum_{i=1}^3 c_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ 。◇

4. 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix}$ , 若  $\alpha = (1, -2, 3)^T$  是其特征向量, 则  $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

设  $\alpha$  对应的特征值为  $\lambda$ 。由特征向量的定义:

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ a+10 \\ -2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -4 \\ a = -2 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$$

◇

5. 任意 3 维实列向量都可以由向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 3)^T, \alpha_3 = (t, 1, 2)^T$  线性表示, 则  $t$  应满足条件\_\_\_\_\_。

解:

任意 3 维实列向量都可以由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 则  $e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T$  也可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 而  $e_1, e_2, e_3$  可以表示任意三维实列向量, 即向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $e_1, e_2, e_3$  可以相互线性表示, 所以  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(e_1, e_2, e_3) = 3$ . 所以  $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2t - 6 \neq 0$ , 即  $t \neq 3$ 。

◇

6. 若矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$  正定, 则  $\lambda$  满足的条件为\_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $A$  为对称矩阵, 如果  $A$  正定, 则  $|A| > 0$ , 所以  $|A| = \lambda - 5 > 0 \Rightarrow \lambda > 5$ 。

◇

## 二、计算题

1. 若行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ , 求  $A_{11} + 2A_{21} + A_{31} + 2A_{41}$ , 其中  $A_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式。

解:

由题得:

$$A_{11} + 2A_{21} + A_{31} + 2A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

把第一行的负二倍加到第二行, 把第一行的负一倍分别加到第三、四行。

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

把第一行的负一倍加到第三行:

$$4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-1) \times ((-1) \times (-1) - (-2) \times 1) = -12$$

◇

2.

已知矩阵  $X$  满足方程  $X \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $X$ 。

解:

由题得:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+r_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2-2r_3 \\ r_1+2r_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -6 \\ 14 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

◇

3. 设向量组  $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$ , 求向量组的秩、极大线性无关组, 并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-\frac{1}{3}r_2 \\ r_4-\frac{2}{3}r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{3} \\ r_4 \times (-\frac{1}{4})}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 3, 极大线性无关组为  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5), (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$ .

由  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$  表示  $\alpha_3, \alpha_5$ : 由最简阶梯型矩阵可以看出

$$\begin{cases} \alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

◇

### 三、解答题

$$1. \text{ 当 } k \text{ 为何值时, 线性方程组 } \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k - 3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases} \quad \text{有唯一解, 无解和有无穷多解? 当方程组有无穷多解时求出所有解.}$$

解:

(系数矩阵是方阵, 也可以用行列式来做这个题。具体看 14-15 年期末试题的第四题, 推荐这种方法)

增广矩阵

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2-kr_1 \\ r_3-r_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 3(k-1) \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 3(k-1) \end{array} \right] \xrightarrow{r_3-(1+k)r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(k+2) & 3(k-1) \end{array} \right]$$

讨论:

(1) 解不存在: 即存在矛盾方程 (增广矩阵主元列在最右列)。即对于  $r_3$

$$\begin{cases} (1-k)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k = -2$$

(2) 存在唯一解: 主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-k \neq 0 \\ (1-k)(k+2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k \neq 1 \text{ 且 } k \neq -2$$

$k \neq 1$  且  $k \neq -2$ , 继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{(k+2)(1-k)}]{r_2 \times \frac{1}{1-k}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array} \right] \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & -2-\frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array} \right] \xrightarrow{r_1-k r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5k+1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array} \right]$$

所以方程组存在唯一解时:  $k \neq 1$  且  $k \neq -2$ , 解为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5k+1}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \end{bmatrix}, \quad k \neq 1 \text{ 且 } k \neq -2$$

(3) 存在无穷解: 至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (k-1)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

把  $k = 1$  代入阶梯矩阵:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2 - c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } x \text{ 的解为 } x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_2 \quad c_1, c_2 \in R.$$

◇

2. 设 3 阶实对称矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , 对应于  $\lambda_1$  的特征向量  $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$ 。

(1) 求  $A$  对应于特征值 1 的特征向量;

(2) 求  $A$ ;

(3) 求  $A^{2016}$ 。

解:

(1) 由于  $A$  是实对称矩阵, 所以对于  $A$  的不同特征值的特征向量正交, 所以设特征值 1 对应的特征向量是  $\alpha = [x_1, x_2, x_3]^T$ 。所以有:

$$\alpha_1^T \alpha = x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$$

$$\text{分别取 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 得 } \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\alpha_2, \alpha_3$  即为  $A$  对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义:  $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ 。所以:

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3] \Rightarrow$$

$$A = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left( \text{式中: } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$$

(3) 由 (2) 得:  $A^2 = E_3$  ( $E$  表示单位矩阵。) 所以  $A^{2016} = (A^2)^{1008} = E_3$ 。

◇

3. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$ ,  $A^T$  为矩阵  $A$  的转置, 已知  $r(A) = 2$ , 且二次型  $f(x) = x^T A^T A x$ .

(1) 求  $a$ ;

(2) 写出二次型  $f(x)$  的矩阵  $B = A^T A$ ;

(3) 求正交变换  $x = Qy$  将二次型  $f(x)$  化为标准型, 并写出所用的正交变换。

解:

(1) 由题得:

$$A \xrightarrow[r_4 - ar_2]{r_3 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -1-a \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$ , 所以  $1+a=0$  且  $-1-a=0$  解得:  $a=-1$ 。

(2)

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(3)

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$\lambda_1 = 0$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

取  $x_3 = 1$  得:  $\alpha_1 = [1, 1, -1]^T$ .

$\lambda_2 = 2$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取  $x_2 = 1$  得:  $\alpha_2 = [1, -1, 0]^T$ .

$\lambda_3 = 6$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取  $x_3 = 2$  得:  $\alpha_3 = [1, 1, 2]^T$ . 因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  为正交向量组。



单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

所以  $f$  可经正交变换  $x = Qy$  化为标准型:

$$f = 2y_2^2 + 6y_3^2$$

◇

#### 四、证明题

1. 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 且满足  $A^2 - 3A + 2E = 0$ , 其中  $E$  为单位矩阵, 试证:

(1)  $A + 2E$  可逆;

(2)  $A$  为正定矩阵。

证明:

(1) 由题得:  $A^2 - 3A + 2E = 0$ , 所以:

$$\begin{aligned} A^2 + 2A - 2A - 3A + 2E &= 0 \\ A(A + 2E) - 5A - 10E + 10E + 2E &= 0 \\ A(A + 2E) - 5(A + 2E) &= (A - 5E)(A + 2E) = -12E \\ -\frac{1}{12}(A - 5E)(A + 2E) &= E \end{aligned}$$

所以  $A + 2E$  可逆,  $(A + 2E)^{-1} = -\frac{1}{12}(A - 5E)$ 。

(2) 对于  $n$  阶实对称矩阵, 如果  $A$  为正定矩阵, 则  $A$  的全部特征值大于 0。设  $A$  的特征值为  $\lambda$ 。由题得:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 2 > 0$$

所以  $A$  为正定矩阵。

◇

2. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 向量  $\gamma$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha$  线性无关。

证明:

向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 即存在一组不全为 0 的  $k_i (1 \leq i \leq 3)$ , 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \quad (1)$$

反证: 假设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha$  线性相关。则存在一组不全为 0 的  $l_i (1 \leq i \leq 3)$  和  $l$ , 使得

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l(\beta + \gamma) = 0 \quad (2)$$

若  $l = 0$ , 则  $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l(\beta + \gamma) = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 = 0$ , 此时  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 与题中的条件矛盾, 所以  $l \neq 0$ 。所以 (1) 式可变形为

$$\beta + \gamma = -\frac{1}{l}(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3)$$

代入 (1) 式:

$$\gamma = -\frac{1}{l}(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3) - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3$$

可以看出此时  $\gamma$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 与题目矛盾, 所以假设错误, 即向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha$  线性无关。

◇

## 2016-2017 年第一学期

## 一、填空题

1. 行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

(注意爪型行列式的做法) 对行列式做如下变换: 第一行减去  $z$  倍的第四行, 第一行减去  $y$  倍的第三行, 第一行减去  $x$  倍的第二行, 得到如下行列式:

$$\begin{vmatrix} 1-x^2-y^2-z^2 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-x^2-y^2-z^2$$

◇

2. 设  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 则  $r(A^2 - 2A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

$|A^*| = |A|^{n-1}$  得:  $|A^*| = 2^3 = |A|^3$ . 所以  $|A| = 2 \neq 0$ . 即  $A$  可逆。

所以  $r(A^2 - 2A) = r(A(A - 2)) = r(A - 2) = r(|A|(A^*)^{-1} - 2) = r((A^*)^{-1} - E) = 3$ . (求逆和秩的过程略)

◇

3. 已知线性方程组  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$  与线性方程  $ax_2 + x_3 = 1$  有公共的解, 则  $a$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

注意同解与公共解的区别:

对于方程组 (1) 和方程组 (2), 如果  $\alpha$  既是方程组 (1) 的解, 也是方程组 (2) 的解, 则称  $\alpha$  是方程组 (1) 和方程组 (2) 的公共解。

对于方程组 (1) 和方程组 (2), 如果  $\alpha$  是方程组 (1) 的解, 则  $\alpha$  一定是方程组 (2) 的解, 反之如果  $\alpha$  是方程组 (2) 的解, 则  $\alpha$  一定是方程组 (1) 的解, 则称, 方程组 (1) 和方程组 (2) 同解。

关于公共解, 通常有如下解法: (假设方程组 (1) 有两组不同的基础解系  $\xi_1, \xi_2$ , 方程组 (2) 有两组不同的基础解系  $\eta_1, \eta_2$ )

方法 1: 分别求出方程组 (1) 和 (2) 的通解: 即 (1) 得到通解为:  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ , (2) 的通解为  $l_1\eta_1 + l_2\eta_2$ . 令两个方程组的通解相等, 找出对应的  $k$  和  $l$  的关系。

方法 2: 求出其中一个通解, 代入到另外一个方程组中, 找出相应的系数所满足的关系式进一步求出公共解。

方法 3: 联立两个方程组得到一个新的方程组 (3), 求出 (3) 的解即为公共解。

显然, 此题用方法 3 更合适: 联立两个方程组, 得到增广矩阵:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & -1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

讨论:  $a = 0$  时: 显然  $r(A) = r(A|B)$ , 即线性方程组有解, 即这两个线性方程组有公共解。

$a \neq 0$  时, 对增广矩阵进一步进行高斯消元:

$$\xrightarrow{r_2 - ar_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1-2a & -2-a & -3-2a \\ 0 & a & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & -1-2a & -2-a & -3-2a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + \frac{1+2a}{a}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2-1}{a} & -\frac{2a^2+a-1}{a} \end{bmatrix}$$

当  $-\frac{a^2-1}{a}=0$  且  $-\frac{2a^2+a-1}{a}\neq 0$  时, 无解, 此时没有公共解, 解得  $a=1$ . 所以  $a=1$  时无公共解, 所以  $a\neq 1$ .  $\diamond$

4. 设  $\alpha_1=(a, 1, 1)^T, \alpha_2=(1, b, -1)^T, \alpha_3=(1, -2, c)^T$  是正交向量组, 则  $a+b+c=$ \_\_\_\_\_。

解:

由题得:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2^T = a+b-1=0 \\ \alpha_1\alpha_3^T = a-2+c=0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 1-2b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=2$$

$\diamond$

5. 设 3 阶实对称矩阵  $A$  的特征值分别为 1, 2, 3 对应的特征向量分别为  $\alpha_1=(1, 1, 1)^T, \alpha_2=(2, -1, -1)^T, \alpha_3$ , 则  $A$  的对应于特征值 3 的一个特征向量  $\alpha_3=$ \_\_\_\_\_。

解:

设  $\alpha_3=[x_1, x_2, x_3]^T$ , 实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的, 所以:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_3^T = x_1+x_2+x_3=0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 2x_1-x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$$

令  $x_3=-1$ , 有  $\alpha_3=[0, 1, -1]$   $\diamond$

6. 设  $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ , 已知二次型  $f(x)=x^TBx$  是正定的, 则  $\lambda$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

解:

由题得:

$$f(x)=x^TBx=[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & 2x_1+2x_2 & 4x_1+6x_2+\lambda x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_1^2+2x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$$

所以其对应的二次型矩阵为:  $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$ ,  $A$  为对称矩阵, 如果  $A$  正定, 则  $|A|>0$ , 所以  $|A|=\lambda-5>0 \Rightarrow \lambda>5$ .  $\diamond$

## 二、计算题

1. 若行列式  $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ , 求  $A_{11}-2A_{21}+A_{31}-2A_{41}$ , 其中  $A_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式。

解:

$$\begin{aligned} A_{11}-2A_{21}+A_{31}-2A_{41} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_2+2r_1, r_3-r_1} 4 \begin{vmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1-7r_2} 4 \begin{vmatrix} 0 & 17 & 21 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times 1 \times (-1)^{1+2} (17 \times 8 - 7 \times 21) = 44 \end{aligned}$$

$\diamond$

2. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B$  为三阶矩阵, 且满足方程  $A^*BA = I + 2A^{-1}B$ , 求矩阵  $B$ 。

解:

由题得:  $|A| = 1, A^* = |A|A^{-1} = A^{-1}$ . 对题中方程两边同时左乘  $A$  得:

$$BA = A + 2B$$

$$B = A(A - 2E)^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -18 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(求逆的过程略。  $(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ )

◇

3. 设向量组  $\alpha_1 = (3, 1, 4, 3)^T, \alpha_2 = (1, 1, 2, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1, 0)^T, \alpha_4 = (2, 2, 4, 2)^T$ , 求向量组的所有的极大线性无关组。

解:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 2, 极大线性无关组为  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_3, \alpha_4)$ .

◇

### 三、解答题

1. 令  $\alpha = (1, 1, 0)^T$ , 实对称矩阵  $A = \alpha\alpha^T$ .

(1) 把矩阵  $A$  相似对角化;

(2) 求  $|6I - A^{2017}|$ .

解:

由题得:  $A = \alpha\alpha^T = (1, 1, 0)^T(1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . 所以

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - 1)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\lambda_1 = 2$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元, 步骤略}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以看出,  $\lambda_1 = 2$  时: 代数重数等于几何重数。

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元, 步骤略}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以看出,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  时: 代数重数等于几何重数。

所以  $A$  可以相似对角化: 即存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ , 其中  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) 由特征值的性质:  $6I - A^{2017}$  的特征值为:  $6 - \lambda_i^{2017}$ , 所以

$$|6I - A^{2017}| = \prod_{i=1}^3 (6 - \lambda_i^{2017}) = 36 \times (6 - 2^{2017})$$

◇

2. 已知实对称矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 4 \\ -1 & 3 & b \\ 4 & b & 0 \end{bmatrix}$  与  $B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$  相似。

(1) 求矩阵  $A$ ;

(2) 求正交线性变换  $x = Qy$ , 把二次型  $f(x) = x^T Ax$  化为标准型。

解:

对于对角矩阵, 其特征值为对角线上的元素。因为  $A$  与  $B$  相似, 所以  $A$  与  $B$  有相同的特征值。

(1) 由特征值的性质

$$\begin{cases} \text{trace}(A) = a + 3 + 0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 2 - 4 + 5 = 3 \\ |A| = (-1) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & b \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & b \end{vmatrix} = -8b - 48 = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = 2 \times (-4) \times 5 = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

(2)

$\lambda_1 = 2$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

取  $x_3 = 1$  得  $\alpha_1 = [1, 2, 1]^T$ 。

$\lambda_2 = -4$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取  $x_3 = -1$  得  $\alpha_2 = [1, 0, -1]^T$ 。

$\lambda_3 = 5$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

取  $x_3 = 1$  得  $\alpha_3 = [1, -1, 1]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

所以  $f$  可经正交变换  $x = Qy$  化为标准型:

$$f = 2y_1^2 - 4y_2^2 + 5y_3^2$$

◇

3. 在对观测数据拟合的时候经常遇到线性方程组  $Ax = b$  是矛盾方程的情形, 是没有解的。此时我们转而解  $A^T Ax = A^T b$ , 我们称  $A^T Ax = A^T b$  是原线性方程组的正规方程组。称正规方程组的解为原方程组的最小

二乘解。设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(1) 证明  $Ax = b$  无解;

(2) 求  $Ax = b$  的最小二乘解。

解:

(1) 由题得:

$$[A|B] \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出  $r(A) = 3 \neq r(A|B) = 4$ , 所以  $Ax = b$  无解。

(2)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

高斯消元步骤略 (考试必须写上)。最后解得:  $x_1 = 8, x_2 = -6, x_3 = 0$

◇

#### 四、证明题

1. 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是线性无关的向量组, 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  线性相关, 证明  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示并且表示方法唯一。

证明:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  线性相关, 则存在一组不全为 0 的  $l_i (1 \leq i \leq 3)$  和  $l$ , 使得

$$l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l \beta = 0 \quad (1)$$

若  $l = 0$ , 则  $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 = 0$ , 此时  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 与题中的条件矛盾, 所以  $l \neq 0$ 。所以 (1) 式可变形为

$$\beta = -\frac{1}{l}(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3)$$

即  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

$\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 不妨设任意两组不全为 0 的数  $m_i, n_i, (1 \leq i \leq 3)$ , 使得

$$\beta = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 \quad (2)$$

$$\beta = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 \quad (3)$$

(2) 式减 (3) 式:  $0 = (m_1 - n_1)\alpha_1 + (m_2 - n_2)\alpha_2 + (m_3 - n_3)\alpha_3$ , 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 所以有  $m_1 - n_1 = 0, m_2 - n_2 = 0, m_3 - n_3 = 0$ , 即  $m_1 = n_1, m_2 = n_2, m_3 = n_3$ , 由于  $m_i$  和  $n_i$  的任意性, 所以可证得表示方法唯一。◇

2. 已知  $A, B$  是同阶实对称矩阵。

(1) 证明如果  $A \sim B$ , 则  $A \simeq B$ , 也就是相似一定合同;

(2) 举例说明反过来不成立。

证明:

(1) 因为  $A \sim B$ , 所以  $A, B$  具有相同的特征值, 记为  $\lambda_i, (1 \leq i \leq n)$ 。对于实对称矩阵  $A$  存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1}AQ$  为对角矩阵。即存在正交矩阵  $Q_1$ , 使得  $Q_1^{-1}AQ = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ , 对于正交矩阵  $Q_1$ , 有  $Q_1^{-1} = Q_1^T$ , 即  $Q_1^T A Q_1 = \Lambda$ ,

所以  $A$  合同于  $\Lambda$ , 同理  $B$  合同于  $\Lambda$ , 所以  $A$  合同于  $B$ 。

(2) 反过来描述:  $A, B$  是同阶实对称矩阵,  $A \simeq B$ , 则  $A \sim B$ 。

由惯性定理 (157 页) 知: 如果:  $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}$ ,  $A, B$  为对角阵, 且  $A \simeq B$ , 但  $A$  和  $B$  的特征值不同, 即  $A$  与  $B$  不相似。◇

## 2017-2018 年第一学期

## 一、填空题

1. 设  $A_{ij}$  是三阶行列式  $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$  第  $i$  行第  $j$  列元素的代数余子式, 则  $A_{31} + A_{32} + A_{33} =$ \_\_\_\_\_。

解:

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

◇

2. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , 则  $r(A + AB) =$ \_\_\_\_\_。

解:

$$A \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3$ , 满秩。所以  $r(A + AB) = r(A(E + B)) = r(E + B)$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以  $r(E + B) = 3$ , 所以  $r(A + AB) = r(E + B) = 3$

◇

3. 设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ , 记  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $(A^*)^{-1} =$ \_\_\_\_\_。

解:

$$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}, \text{ 由题得: } |A| = 8$$

◇

4. 已知 3 阶方阵  $A$  的秩为 2, 设  $\alpha_1 = (2, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (3, 3, 1)^T$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 则导出  $Ax = 0$  的基础解系为\_\_\_\_\_。

解:

因为  $\alpha_1, \alpha_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 所以  $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b$ , 且  $\alpha_1, \alpha_2$  不相等, 所以  $\alpha_1 - \alpha_2$  是  $AX = 0$  的基础解系。(实际上  $k(\alpha_1 - \alpha_2)$  都是导出组的基础解系。)

◇

5. 若 3 阶矩阵  $A$  相似于  $B$ , 矩阵  $A$  的特征值是 1, 2, 3 那么行列式  $|2B + I| =$ \_\_\_\_\_。(其中  $I$  是 3 阶单位矩阵)

解:

$$A \text{ 相似于 } B, \text{ 所以 } A \text{ 与 } B \text{ 的特征值相等。所以 } 2B + I \text{ 的特征值为 } 2\lambda_i + 1, \text{ 所以 } |2B + I| = \prod_{i=1}^3 (2\lambda_i + 1) = 105$$

◇



6. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$  的秩为 2, 则  $t =$ \_\_\_\_\_。

解:

二次型对应的矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}$$

$A$  的秩为 2, 即  $|A| = 0$ , 解得:  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

◇

二、计算题

1. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ .

解:

$$\begin{aligned} D & \xrightarrow{\substack{c_1+3c_3 \\ c_2+c_3 \\ c_4+c_3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1-2c_3 \\ c_2-2c_3}} -2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \end{vmatrix} \\ & = -2 \times 1 \times (-1)^{1+3} \times [3 \times (-8) - (-1) \times 4] = 40 \end{aligned}$$

◇

2. 解矩阵方程  $(2I - B^{-1}A)X^T = B^{-1}$ , 其中  $I$  是 3 阶单位矩阵,  $X^T$  是 3 阶矩阵  $X$  的转置矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解:

由题得:  $(2I - B^{-1}A)X^T = B^{-1}$ , 所以:

$$\begin{aligned} X^T &= (2I - B^{-1}A)^{-1}B^{-1} = [B(2I - B^{-1}A)]^{-1} \\ &= (2B - A)^{-1} \end{aligned}$$

$$C = 2B - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 所以 } X = C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

◇

3. 求线性方程组  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$  的通解。

解:

增广矩阵

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 - \frac{7}{2}r_1]{r_2 - \frac{1}{2}r_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 & \frac{15}{2} & 17 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - 7r_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{4}]{r_1 \times \frac{1}{2}, r_2 \times 2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[r_1 + \frac{3}{2}r_3]{r_2 - r_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 + \frac{1}{2}r_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$x_1 = 3 - x_3 \quad x_2 = x_3 - 8 \quad x_3 = x_3 \quad x_4 = 6$$

令  $x_3 = C, C \in R$ , 则

$$x = \begin{bmatrix} 3-C \\ C-8 \\ C \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} C, C \in R$$

◇

### 三、解答题

1. 设 1 为矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$  的特征值, 其中  $x > 1$ .

(1) 求  $x$  及  $A$  的其他特征值。

(2) 判断  $A$  能否对角化, 若能对角化, 写出相应的对角矩阵  $\Lambda$ 。

解:

(1) 设  $\alpha_1$  为特征值 1 对应的特征向量, 所以  $\alpha_1 \neq 0$  由题得:  $A\alpha_1 = \alpha_1$ , 即  $(A-E)\alpha_1 = 0$ , 即  $(A-E)x = 0$  有非零解。所以由存在唯一性定理:  $|A-E| = 0$ , 所以

$$|A-E| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)(x-2) = 0$$

由题得:  $x > 1$ , 所以解得  $x = 2$ 。

(2) 把  $x = 2$  代入得:

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -(\lambda+1) & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-2) - 2] = 0
 \end{aligned}$$

解得:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$ 。

因为  $A$  为三阶, 并且有 3 个不同的特征值, 所以可以相似对角化,  $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ 。(不唯一, 只要对角线元素是这三个就可以)

◇

2. 设  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$ 。

(1) 写出该二次型的矩阵  $A$ ;

(2) 求正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A Q = Q^{-1} A Q$  为对角型矩阵;

(3) 给出正交变换, 化该二次型为标准型。

解:

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 2)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$\lambda_1 = 1$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取  $x_2 = -1$  得  $\alpha_1 = [1, -1, 0]^T$ 。

$\lambda_2 = 2$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 \in R \end{cases}$$

取  $x_3 = 1$  得  $\alpha_2 = [0, 0, 1]^T$ 。

$\lambda_3 = 3$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取  $x_2 = 1$  得  $\alpha_3 = [1, 1, 0]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = [0, 0, 1]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以  $f$  可经正交变换  $x = Qy$  化为标准型:

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$$

◇

3. 已知  $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$  及  $\beta_4 = (3, 10, b, 4)^T$ 。

(1)  $a, b$  为何值时,  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合?

(2)  $a, b$  为何值时,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示? 并写出该表达式。

解:

记  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ , 则

$$[A|\beta] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array} \right]$$

(1) 可以看出  $b \neq 2, a \in R$  时,  $Ax = \beta$  无解, 即  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合。

(2)  $b = 2$  时,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

当  $a \neq 1, r(A) = r(A, \beta) = 3$ , 此时:  $Ax = \beta$  有唯一解, 即  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_3 \times \frac{1}{a-1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2-r_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1+2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

此时  $Ax = \beta$  的解为  $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$ , 所以  $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ 。

$a = 1$  时  $r(A, \beta) = r(A) = 2 < 3$ , 所以  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_1+2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以解得  $x_1 = -1 - 2x_3, x_2 = x_3 + 2$ , 令  $x_3 = k, k \in R$ , 则  $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = -(1+2k)\alpha_1 + (2+k)\alpha_2 + k\alpha_3$  ◇

#### 四、证明题

1. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 证明: 若  $A, B$  相似则  $|A| = |B|$ , 举例说明反过来不成立。

证明:

若  $A$  与  $B$  相似, 则依定义有: 存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P^{-1}BP$ , 两边同时求行列式:  $|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}| \cdot |B| \cdot |P| = |B| \cdot |P^{-1}P| = |B| \cdot |E| = |B|$ 。

反过来描述: 如果  $|A| = |B|$ , 则  $A$  和  $B$  相似。

例如:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = 1, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |B| = 1$ , 所以  $|A| = |B|$ , 但是: 假设存在一个可逆矩阵  $P, P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$ , 即  $|A| = |B|$ , 但是  $A, B$  不相似。 ◇

2. 设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵, 证明  $Ax = 0$  与  $(A^T A)x = 0$  是同解方程, 进一步得出  $r(A) = r(A^T A)$ 。

解:

(1) 若  $x_0$  为  $Ax = 0$  的解, 则  $Ax_0 = 0$ , 对等式两边同时左乘  $A^T$ :  $A^T Ax_0 = 0$ , 即  $x_0$  为  $A^T Ax = 0$  的解。

若  $x_1$  为  $A^T Ax = 0$  的解: 则  $A^T Ax_1 = 0$ , 等式两边同时左乘  $x_1^T$ :  $x_1^T A^T Ax_1 = (Ax_1)^T (Ax_1) = 0$ , 两边同时求行列式有:  $|(Ax_1)^T (Ax_1)| = |(Ax_1)^T| |(Ax_1)| = |Ax_1|^2 = 0$ , 所以  $Ax_1 = 0$ , 所以  $x_1$  为  $Ax = 0$  的解。

综上所述:  $Ax = 0$  与  $A^T Ax = 0$  同解。

(2)  $Ax = 0$  与  $A^T Ax = 0$  同解, 则它们解的空间维数相同。又因为解的空间维数 = 未知量的个数 - 系数矩阵的秩。两个方程的未知数个数相同, 所以系数矩阵相同, 即  $r(A) = r(A^T A)$  ◇

## 2018-2019 年第一学期

## 一、填空题

1. 设  $A$  为 5 阶方阵满足  $|A| = 2$ ,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $|2A^{-1}A^*A^T| =$ \_\_\_\_\_。

解:

原式 =

$$2^5 |A^{-1}| \cdot |A^*| \cdot |A^T| = 2^5 \cdot |A|^{-1} \cdot |A|^{5-1} \cdot |A| = 2^9 = 512$$

◇

2. 已知向量组  $\alpha_1 = (1, 3, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 4, k)$  线性无关, 则实数  $k$  满足的条件是\_\_\_\_\_。

解:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 即  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$ , 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = k-2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$$

◇

3. 设  $A$  为  $m$  阶阵, 存在非零的  $m$  维列向量  $B$ , 使  $AB = 0$  的充分必要条件是\_\_\_\_\_。

解:

$B$  非零, 说明  $Ax = 0$  有非零解, 由存在唯一性定理:  $|A| = 0$ , 或  $r(A) < m$ 。

◇

4. 设  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , 其特征值为  $1, -1, 2$ ,  $A_{ij}$  是元素  $a_{ij}$  的代数余子式,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $A^*$  的主对角线元素之和即  $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$ \_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -2$ , 所以  $A^*$  的特征值为  $\frac{|A|}{\lambda_i}$ , 所以  $A^*$  的主对角线元素之和为  $\text{trace}(A^*) = \sum_{i=1}^3 \frac{|A|}{\lambda_i} = -1$ 。

◇

5. 若二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  正定, 则  $t$  应满足\_\_\_\_\_。

解:

$$\text{二次型矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{二次型正定, 即 } A \text{ 正定, 即 } A \text{ 的所有顺序主子是大于 } 0. \text{ 即}$$

$$D_1 = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0 \Rightarrow -2 < t < 2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4t - 4t^2 > 0 \Rightarrow -2 < t < 1$$

综上所述:  $-2 < t < 1$ 。

◇

6. 设 3 维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 3 阶方阵  $A$  满足  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 。则行列式  $|A| =$ \_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$  所以

$$A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3)$$

即

$$\begin{aligned}
 |A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)| &= |A| \cdot |\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| = |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3| \\
 |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_2 + \alpha_3| &\stackrel{c_3 - c_2}{=} |-\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| = -|\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3| \\
 |A| &= -1
 \end{aligned}$$

◇

## 二、计算题

1. 已知  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 5 & 27 \end{vmatrix}$ , 求  $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$ , 其中  $A_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式。

解:

-48.

$$A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 27 \end{vmatrix}$$

可以看出该式为范德蒙行列式, 其中  $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 3$ , 所以上式  $= (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = -48$

◇

2. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 且  $X$  满足  $AX = X + A$ , 求  $X$ 。

解:

由题得:  $AX = X + A$ , 所以  $(A - E)X = A$ , 所以  $X = (A - E)^{-1}A$

$$\begin{aligned}
 B = A - E &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 [B|E] &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } (A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, X = (A - E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

◇

3. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 求  $r(A), r(A^*)$  和  $A$  的列向量组的极大线性无关组。

解:

$$A \xrightarrow{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-\frac{1}{2}r_2 \\ r_4-\frac{1}{2}r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n; \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

上式中:  $n$  为  $A$  的阶数。

记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

(1)  $a = 1$  且  $b = 1$  时:  $r(A) = 2 < 4 - 1 = 3, r(A^*) = 0$ 。极大线性无关组:  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_3, \alpha_4)$ 。

(2)  $a = 1$  且  $b \neq 1$  时:  $r(A) = 3 = 4 - 1, r(A^*) = 1$ 。极大线性无关组:  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 。

(3)  $a \neq 1$  且  $b = 1$  时:  $r(A) = 3 = 4 - 1, r(A^*) = 1$ 。极大线性无关组:  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 。

(4)  $a \neq 1$  且  $b \neq 1$  时:  $r(A) = 4, r(A^*) = 4$ 。极大线性无关组:  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 。 ◇

### 三、解答题

1. 设 
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$$
,  $\lambda$  为何值时, 该方程组无解、唯一解、无穷解? 并且在有唯一解时求出解; 有无穷多解时, 求出全部解并用向量表示。

解:

(系数矩阵是方阵, 也可以用行列式来做这个题。具体看 14-15 年期末试题的第四题, 推荐这种方法)

增广矩阵

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2-\lambda r_1 \\ r_3-r_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3-(\lambda+1)r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(-2-\lambda) & -\lambda-2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

讨论:

(1) 解不存在: 即存在矛盾方程 (增广矩阵主元列在最右列)。即对于  $r_3$

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda) = 0 \\ -\lambda-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$$

(2) 存在唯一解: 主元列三个元素都不为 0。即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-\lambda \neq 0 \\ (\lambda-1)(-2-\lambda) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq -2$$

$\lambda \neq 1$  且  $\lambda \neq -2$ , 继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{r_3 \times \frac{1}{(\lambda-1)(-2-\lambda)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2+r_3 \\ r_1-r_3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & \frac{2\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right] \xrightarrow{r_1-\lambda r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right] \end{aligned}$$

所以方程组存在唯一解时:  $\lambda \neq 1$  且  $\lambda \neq -2$ , 解为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq -2$$

(3) 存在无穷解: 至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda) = 0 \\ -2-\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2$$

把  $\lambda = -2$  代入阶梯矩阵:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$x_1 = 2 + x_3 \quad x_2 = x_3 \quad x_3 = x_3$$

令  $x_3 = C, C \in R$ , 则

$$x = \begin{bmatrix} 2+C \\ C \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} C, \quad C \in R$$

◇

2. 设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$ 。

- (1) 写出该二次型的矩阵  $A$ ;
- (2) 求正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角型矩阵;
- (3) 给出正交变换, 将该二次型化为标准型;
- (4) 写出二次型的秩, 正惯性指标和负惯性指标。

解:

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-36) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$$

$\lambda_1 = 1$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取  $x_3 = 1$  得  $\alpha_1 = [-2, 0, 1]^T$ 。

$\lambda_2 = 6$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{5}{2}x_3 \end{cases}$$



取  $x_3 = 2$  得  $\alpha_2 = [1, 5, 2]^T$ 。

$\lambda_3 = -6$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -2 & -10 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取  $x_3 = 2$  得  $\alpha_3 = [1, -1, 2]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

所以  $P$  即为所求的正交矩阵,  $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 6 & \\ & & -6 \end{bmatrix}$

(3) 由 (2) 得:  $f$  可经正交变换  $x = Py$  化为标准型:

$$f = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$$

(4) 计算得  $|A| = -2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$ , 所以二次型满秩, 即  $r(A) = 3$ 。由 (3) 得, 正惯性指标为 2, 负惯性指标为 1。

◇

#### 四、证明题

1. 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 + 3A - 4I = 0$ , 其中  $I$  为  $n$  阶单位矩阵。

(1) 证明:  $A, A + 3I$  可逆, 并求他们的逆;

(2) 当  $A \neq I$  时, 判断  $A + 4I$  是否可逆并说明理由。

解:

(1) 由题得:  $A^2 + 3A - 4I = 0$ , 所以  $A(A + 3I) = 4I$ , 所以  $A, A + 3I$  可逆,  $A$  的逆为  $\frac{1}{4}(A + 3I)$ ,  $A + 3I$  的逆为  $\frac{1}{4}A$ 。

(2) 不可逆, 理由:

由题得:  $A^2 + 3A - 4I = (A + 4I)(A - I) = 0$ , 假设  $A + 4I$  可逆, 则等式两端同时左乘  $(A + 4I)^{-1}$  得  $A - I = 0$ , 即  $A = I$  与题目中  $A \neq I$  矛盾, 所以假设不成立。即  $A + 4I$  不可逆。

◇

2. 若同阶矩阵  $A$  与  $B$  相似, 即  $A \sim B$ , 证明  $A^2 \sim B^2$ 。反过来结论是否成立并说明理由。

证明:

若  $A$  与  $B$  相似, 则依定义有: 存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P^{-1}BP$ , 所以:  $A^2 = P^{-1}BP \cdot P^{-1}BP = P^{-1}B^2P$ 。所以  $A^2 \sim B^2$ 。

反过来描述: 如果  $A^2 \sim B^2$ , 则  $A$  和  $B$  相似。

不成立。理由如下:

例如:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 所以  $A^2 = B^2$ , 由相似的性质  $A^2 \sim B^2$  但是: 假设存在一个可逆矩阵  $P$ ,  $P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$ , 即  $A^2 \sim B^2$ , 但是  $A, B$  不相似。

◇

3. 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是  $A$  的两个互异的特征值,  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}$  是对应于  $\lambda_1$  的线性无关的特征向量,  $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  是对应于  $\lambda_2$  的线性无关的特征向量, 证明: 向量组  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  线性无关。

证明:

由题得:  $A\alpha_{1i} = \lambda_1\alpha_{1i}, (1 \leq i \leq s), A\alpha_{2j} = \lambda_2\alpha_{2j}, (1 \leq j \leq t)$ 。

设

$$k_1\alpha_{11} + \dots + k_s\alpha_{1s} + k_{s+1}\alpha_{21} + \dots + k_{s+t}\alpha_{2t} = 0 \quad (1)$$

要证明向量组  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  线性无关, 只需证明  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = k_{s+1} = \dots = k_{s+t} = 0$  即可。

在 (1) 式左边同乘  $A$ :

$$k_1 A\alpha_{11} + \dots + k_s A\alpha_{1s} + k_{s+1} A\alpha_{21} + \dots + k_{s+t} A\alpha_{2t} = \lambda_1 (k_1 \alpha_{11} + \dots + k_s \alpha_{1s}) + \lambda_2 (k_{s+1} \alpha_{21} + \dots + k_{s+t} \alpha_{2t}) = 0 \quad (2)$$

(2) -  $\lambda_2$ (1) 得:  $(\lambda_1 - \lambda_2)(k_1 \alpha_{11} + \dots + k_s \alpha_{1s}) = 0$ , 因为  $\lambda_1, \lambda_2$  是  $A$  的两个互异的特征值, 所以  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , 所以  $k_1 \alpha_{11} + \dots + k_s \alpha_{1s} = 0$ , 又因为  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}$  是对应于  $\lambda_1$  的线性无关的特征向量, 所以:  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ 。代入到 (1) 式得:

$k_{s+1} \alpha_{21} + \dots + k_{s+t} \alpha_{2t} = 0$ , 因为  $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  是对应于  $\lambda_2$  的线性无关的特征向量, 所以  $k_{s+1} = k_{s+2} = \dots = k_{s+t} = 0$

综上所述:  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = k_{s+1} = k_{s+2} = \dots = k_{s+t} = 0$ , 所以向量组  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2t}$  线性无关。  $\diamond$

## 2019-2020 年第一学期

## 一、填空题

1. 设  $A$  是 3 阶方阵,  $E$  是 3 阶单位矩阵, 已知  $A$  的特征值为 1, 1, 2, 则  $\left| \left( \left( \frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得:  $|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = 2$ ,  $A^*$  的特征值为  $\frac{|A|}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$ 。

由伴随矩阵的性质:  $\left( \frac{1}{2}A \right)^* = \left( \frac{1}{2} \right)^{3-1} A^* = \frac{A^*}{4}$ , 所以  $\left( \left( \frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E$  的特征值为

$$\left( \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\lambda_i} \right)^{-1} - 2\lambda_i^{-1} + 1 = 2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1$$

所以:

$$\left| \left( \left( \frac{1}{2}A \right)^* \right)^{-1} - 2A^{-1} + E \right| = \prod_{i=1}^3 \left( 2\lambda_i - \frac{2}{\lambda_i} + 1 \right) = 4$$

◇

2. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{bmatrix}$  的秩为 2, 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

若  $k = 0$ , 则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

所以  $r(A) = 3 \neq 2$ , 即  $k \neq 0$ . 对  $A$  接着进行化简:

$$A \xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2k-2 & 3k-3 \\ 0 & 2k-2 & 3-3k^2 \end{bmatrix} = B$$

若  $k = 1$ , 则

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以  $r(A) = 1 \neq 2$ , 所以  $k \neq 1$ , 继续对  $A$  进行化简:

$$B \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{k-1}]{r_2 \times \frac{1}{k-1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3-3k \end{bmatrix}$$

如果要使  $r(A) = 2$ , 则

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{-3-3k} \Rightarrow k = -2$$

也可以使用  $|A| = 0$  来做。

◇

4. 若线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$  有解,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  应满足的条件是  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ 。

解:

增广矩阵

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right] \xrightarrow{r_4-r_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1+a_4 \end{array} \right] \xrightarrow{r_4+r_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1+a_2+a_4 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{r_4-r_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

若方程有解:  $a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0$  ◇

5. 已知  $n$  阶方阵  $A$  对应于特征值  $\lambda$  的全部的特征向量为  $c\alpha$ , 其中  $c$  为非零常数, 设  $n$  阶方阵  $P$  可逆, 则  $P^{-1}AP$  对应于特征值  $\lambda$  的全部的特征向量为\_\_\_\_\_。

解:

由题得:  $A(c\alpha) = \lambda(c\alpha)$  等式两边同时左乘  $P^{-1}$ :

$$P^{-1}AE(c\alpha) = P^{-1}APP^{-1}(c\alpha) = (P^{-1}AP)(P^{-1}c\alpha) = \lambda(P^{-1}c\alpha)$$

所以  $P^{-1}AP$  对应于特征值  $\lambda$  的全部的特征向量为  $P^{-1}c\alpha = cP^{-1}\alpha$  ◇

6. 已知实对称矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix}$  的正惯性指数为 3, 则  $x$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

解:

$A$  为实对称矩阵, 且  $A$  的正惯性指数为 3, 所以  $A$  正定, 所以  $A$  的所有顺序主子式大于 0. 所以  $|A| = 2(3x-9) - 3 > 0 \Rightarrow x > 3.5$  ◇

## 二、计算题

1. 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . 求满足  $AX = XA$  的全部的矩阵  $X$ 。

解:

$$\text{设 } X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 AX &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 XA &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

 $AX = XA$ , 即

$$\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d=0 & a=e & b=f \\ g=0 & h=d=0 & i=e=a \\ 0=0 & g=0 & h=0 \end{cases}$$

所以  $x = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ , 其中  $a, b, c$  是任意常数。

◇

2. 求线性方程组  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$  的一个基础解系。

解:

由题得: 增广矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_1 + 2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 \times (-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以  $x_1 = 4x_4, x_2 = -3x_4, x_3 = x_4$ , 令  $x_4 = 1$ , 得基础解系:  $\xi = [4, -3, 1, 1]^T$ 。

◇

3. 记  $2n$  阶方阵  $A_n = \begin{bmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & a_1 & b_1 & \\ & & & c_1 & d_1 & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & d_n \end{bmatrix}$ .

(1) 求  $|A_1|, |A_2|$ (2) 求  $|A_n|$ 。

解:

(1)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - c_1 b_1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \\ c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_2 d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} - b_2 c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = (a_2 d_2 - b_2 c_2) |A_1|$$

$$= (a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_1 d_1 - c_1 b_1)$$

(2) 用数学归纳法:

由 (1) 得:

$$n=1: |A_1| = a_1 d_1 - c_1 b_1 = \prod_{i=0}^1 (a_i d_i - c_i b_i)$$

$$n=2: |A_2| = (a_2 d_2 - b_2 c_2) |A_1| = \prod_{i=0}^2 (a_i d_i - c_i b_i)$$

则  $n = k - 1$  时, 有  $|A_n| = \prod_{i=0}^{k-1} (a_i d_i - c_i b_i)$ .

当  $n = k$  时, 按第一列展开, 得:

$$\begin{aligned}
 |A_k| &= a_{11}A_{11} + a_{2k1}A_{2k1} \\
 &= a_k \begin{bmatrix} a_{k-1} & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & d_{k-1} \\ 0 & & & d_k \end{bmatrix} + c_k(-1)^{2k+1} \begin{bmatrix} 0 & & & b_k \\ a_{k-1} & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & d_{k-1} \end{bmatrix} \\
 &= a_k d_k (-1)^{2k-2+1+2k-2+1} \begin{bmatrix} a_{k-1} & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & d_{k-1} \end{bmatrix} - c_k d_k (-1)^{1+2k-2+1} \begin{bmatrix} a_{k-1} & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & d_{k-1} \end{bmatrix} \\
 &= (a_k d_k - c_k d_k) |A_{k-1}| = \prod_{i=1}^k (a_i d_i - c_i b_i)
 \end{aligned}$$

◇

### 三、解答题

1. 设向量组  $\alpha_1 = (1, -4, -3)^T, \alpha_2 = (-3, 6, 7)^T, \alpha_3 = (-4, -2, 6)^T, \alpha_4 = (3, 3, -4)^T$ , 求向量组的秩, 并写出一个极大线性无关组, 并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解:

由题得:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+4r_1 \\ r_3+3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_2 \times (-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -4.5 \\ 0 & 1 & 3 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

所以  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ , 极大线性无关组有两个向量:  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_2, \alpha_4), (\alpha_3, \alpha_4)$ . (任写一个即可)

以  $(\alpha_1, \alpha_2)$  为例:  $\alpha_3 = 5\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_4 = -4.5\alpha_1 - 2.5\alpha_2$ .

◇

2. 已知 3 阶方阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & a+2 & 0 \\ a-2 & 3 & 0 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}$  可以相似对角化且  $A$  得到特征方程有一个二重根, 求  $a$  的

值。其中  $a \leq 0$ .

解:

由题得:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -(a+2) & 0 \\ 2-a & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)[(\lambda+1)(\lambda-3) + (2+a)(2-a)] = (\lambda+1)[(\lambda-1)^2 - a^2] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1+a, \lambda_3 = 1-a.$$

依题意: 有二重根且可以相似对角化且  $a \leq 0$ .

讨论:

(1)  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 即  $-1 = 1+a, a = -2 \leq 0$ , 此时  $\lambda_3 = 1-a = 3$ , 代入到  $\lambda E - A$  得:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根  $-1$ :

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于根  $3$ :

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可以看出  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 即  $A$  可相似对角化, 即  $a = -2$  符合题意。

(2)  $\lambda_1 = \lambda_3$ , 即  $-1 = 1-a, a = 2 > 0$ , 不符合题意。

(3)  $\lambda_2 = \lambda = 3$ , 即  $1+a = 1-a, a = 0$ 。此时  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。把  $a = 0$  代入到  $[\lambda E - A]$  得:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根  $1$ :

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -8 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于重根  $1$ , 其代数重数与几何重数不相等, 所以不能相似对角化。

综上所述:  $a = -2$ .

◇

3. 设三元二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ .

(1) 写出该二次型的矩阵  $A$ ;

(2) 用正交变换  $x = Qy$  把该二次型化为标准型。

解:

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = -2[2(\lambda - 4)] + (\lambda - 4)[\lambda(\lambda - 4) - 1] = (\lambda - 4)(\lambda - 5)(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -1$$

 $\lambda_1 = 4$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

取  $x_3 = 1$  得  $\alpha_1 = [0, 2, 1]^T$ 。 $\lambda_2 = 5$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取  $x_3 = 2$  得  $\alpha_2 = [1, -1, 2]^T$ 。 $\lambda_3 = -1$  时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取  $x_3 = -2$  得  $\alpha_3 = [5, 1, -2]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}\right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

所以  $f$  可经正交变换  $x = Qy$  化为标准型:

$$f = 4y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$$

◇

## 四. 证明题

1. 设  $A$  为  $m$  阶正定矩阵,  $B$  为  $m \times n$  实矩阵,  $B^T$  为  $B$  的转置矩阵, 试证:  $B^T A B$  为正定矩阵的充分必要条件是  $B$  的秩  $r(B) = n$ 。

证明:

必要性: 如果  $B^T A B$  正定, 则存在任意非零实列向量  $x \neq 0$ , 使得  $x^T B^T A B x > 0$ , 即  $(Bx)^T A (Bx) > 0$ , 所以  $Bx \neq 0$ 。所以  $Bx = 0$  只有零解, 即  $r(B) = n$ 。

充分性: 如果  $B$  的秩为  $r(B) = n$ , 则线性方程组  $Bx = 0$  只有零解, 所以存在任意非零实列向量  $x$ , 使得  $Bx \neq 0$ 。又因为  $A$  为正定矩阵, 由正定矩阵的定义得:  $(Bx)^T A Bx > 0$ , 即  $x^T B^T A B x = x^T (B^T A B) x > 0$ 。因为  $x$  为任意非零实列向量, 所以依正定矩阵的定义, 矩阵  $(B^T A B)$  正定。

◇

2. 设  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量, 证明  $r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq 2$ 。

证明:

由秩的性质:

$$r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq \min(\alpha, \alpha^T) + \min(\beta, \beta^T) \leq 1 + 1 = 2$$

◇