第十次习题课

知识点

1.在 $\mathbb{R}^n$ 中，设向量 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$，实数 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ 称为向量 α 和 β 的内积。记作 $\alpha^T\beta$ 或 $\alpha\cdot\beta$.

性质：

(1)$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$;

(2)$(k\alpha)^T\beta=k\beta^T\alpha$;

(3)$(\alpha+\beta)^T\gamma=\alpha^T\gamma+\beta^T\gamma$

(4)$\alpha^T\alpha\geq 0,\alpha^T\alpha=0$, 当且仅当 $\alpha=0$。

2.$\forall\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$，定义其长度

$$\|\alpha\|=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

, 向量长度称为向量范数。

性质：

(1)$\|\alpha\|\geq 0,\|\alpha\|=0$ 当且仅当 $\alpha=0$。非负性

(2)$\|k\alpha\|=|k|\|\alpha\|$，$k$ 为实数。

(3) 对任意向量 α,β，有 $|\alpha^T\beta|\leq\|\alpha\|\|\beta\|$（$Schwarz$ 不等式）

3.单位向量。对任意非零向量 $\alpha\in\mathbb{R}^n$，则向量 $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是一个单位向量。

4.$\alpha\beta\in\mathbb{R}^n$, 若 α 与 β 的内积为零，则称 α 与 β 正交（垂直）。

5.如果 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 两两正交，$\alpha_i^T\alpha_j=0(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,s)$, 则称该向量组为正交向量组。进一步，如果 $\forall i,\|\alpha_i\|=1$, 则称为单位（规范）正交向量组。

6.$\mathbb{R}^n$ 中的正交向量组线性无关。

7.$\mathbb{R}^n$ 中的线性无关向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 可以化为另一正交向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$，并且

$$\alpha_1\leftrightarrow\beta_1$$

$$\alpha_1\alpha_2\leftrightarrow\beta_1\beta_2$$

$$\cdots$$

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_s\leftrightarrow\beta_1,\cdots,\beta_s$$

这一方法称为施密特正交化方法。

$$\beta_n=\alpha_n-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_n^T\beta_i}{\beta_i^T\beta_i}\beta_i\quad(n=1,2,\cdots,s)$$

8.若 n 阶实矩阵 Q，满足 $Q^TQ=E$，则称 Q 为正交矩阵。

性质：

(1) 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q|=1$ 或 $|Q|=-1$。

(2) 若 Q 为正交矩阵，则 $Q^{-1}=Q^T$。

(3) 若 P,Q 为正交矩阵，则 PQ 是正交矩阵。

(4)Q 是正交矩阵等价于 $QQ^T=E$

9.设 Q 为 n 阶实矩阵，则 Q 为正交矩阵的充分必要条件是其列（行）向量组是规范正交向量组。

10.实对称矩阵的特征值都是实数。

11.实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量是正交的。

12.设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。