

第三次习题课 知识点

1.初等矩阵: 对单位矩阵做一次初等变换得到的矩阵。

2.初等矩阵的分类:

(1) 交换其中的两行或两列;

(2) 第 i 行 (列) 乘上一个非零常数;

(3) 第 j 行 (列) 的 l 倍加到第 i 行 (列)。

3.矩阵的等价: 定义和性质 (三条)。

4.标准型矩阵: $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (r 表示单位矩阵的阶数, $r \geq 0$) 一个矩阵一定可以通过初等变换化为标准型矩阵。

5.矩阵的秩。定义。

性质 (很重要):

(1) 矩阵的秩 \leq 矩阵的行数与列数的最小值。即: $R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$ 。

(2) 转置不改变矩阵的秩。即 $R(A) = R(A^T)$ 。

(3) 等价矩阵的秩相同。即 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$ 。

(4) A, B 是同型矩阵 (行数和列数相同), $R(A) = R(B)$ 当且仅当 $A \sim B$ 。

(5) 子矩阵的秩 \leq 矩阵的秩, 矩阵的秩 \leq 所有子矩阵的秩之和。即: $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$ 。

(6) 矩阵之和的秩 \leq 矩阵的秩之和。即: $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$ 。

(7) 矩阵乘积的秩 \leq 乘积因子的秩之最小值。即: $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$ 。

(8) 若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = 0$, 则 $R(A) + R(B) \leq n$ 。

(9) 左乘或右乘可逆矩阵秩不变。(左乘列满秩矩阵不改变矩阵的秩, 右乘行满秩矩阵不改变矩阵的秩。)

6.矩阵相抵。课本 100 页, 定理 3.2.3

7.存在唯一性定理。