第五次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期中试题

1.2015-2016 一 1.

已知 $A=\begin{bmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{bmatrix}$, 则代数余子式之和 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$___0___。

解：

由题得：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=a_{3,2}A_{32}=(-1)^{3+2}\times(-7)\times\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0$$

◇

2.2015-2016 一 3.

设 a,b,c 满足方程 $\begin{vmatrix}1&a&b&c\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=1$，则 $abc=$______。

解：

对行列式做如下变换：第一行减去 c 倍的第四行，第一行减去 b 倍的第三行，第一行减去 a 倍的第二行，得到如下行列式：

$$\begin{vmatrix}1&a&b&c\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-a^2-b^2-c^2&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=1-a^2-b^2-c^2=1$$

即 $a^2+b^2+c^2=0$, 对于实数，任何数的平方都大于等于 0，所以可以推出 $a=0,b=0,c=0$，所以 $abc=0$。 ◇

3.2015-2016 一 4.

设 $A=\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}$, 若 $B=2BA-3I$，其中 I 为单位矩阵，则 $|B|=$______。

解：

由题得：$B=2BA-3I \quad\Rightarrow B(2A-I)=3I$，所以 $|B(2A-I)|=|3I|=3^2=9,|2A-I|=\begin{vmatrix}3&0\\2&7\end{vmatrix}=21$，所以 $|B(2A-I)|=|B||2A-I|=21|B|=9$, 解得 $|B|=\dfrac{3}{7}$ ◇

4.2015-2016 二 1.

计算行列式 $\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$。

解：

（过程不唯一）

对行列式做如下变换：把第二行加到第三行，把第二行加到第四行，由行列式的性质，此时行列式的值没有改变。即

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -|A|$$

对于 $|A|$：把第二行的负一倍加到第一行

$$-\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+3} \times (5 \times 3 - 2 \times 4) = -7$$

◇

5.2015-2016 二 2.

计算行列式 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$。

解：

对行列式做如下变换：把第二列的负一倍分别加到第一列和第三列上。得到 $\begin{vmatrix} a(a-b) & ab & b(b-a) \\ a-b & a+b & b-a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

把第三列加到第一列上：

$$\begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab & b(b-a) \\ 0 & a+b & b-a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(a-b)^2[(a+b)0-(b-a)] = (a-b)^3$$

◇

6.2015-2016 三 2.

设 A 为 n 阶方阵，$AA^T = I$，$|A| < 0$，证明:$|A+I| = 0$。

证明：

由行列式的性质得 $|AB| = |A||B|, |A^T| = |A|$，所以由题得

$|AA^T| = |I|$, 等号左边：$|AA^T| = |A||A^T| = |A||A| = |A|^2$, 等号右边等于 1，由题得 $|A| < 0$，所以 $|A| = -1$.

$|A+I| = |A+AA^T| = |A(I+A^T)| = |A||(I+A)^T| = -|I+A|$，所以 $|A+I| = 0$。（注：两个矩阵相加的转置等于两个矩阵分别转置后相加，即 $A^T + B^T = (A+B)^T$） ◇

7.2016-2017 一 1.

设 M_{ij} 是 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的第 i 行第 j 列元素的余子式，则 $M_{11} + M_{12} =$_______。

解：

由题得：$M_{11} + M_{12} = M_{11} + M_{12} + 0M_{13} = A_{11} - A_{12} + 0A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{(3+1)} \times [(-1) \times 2 - 2 \times 0] = -4$

◇

8.2016-2017 一 2.

计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} =$_______。

解：

经观察，该行列式为四阶范德蒙行列式，且 $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$，所以原式 $=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)=12$ ◇

9.2016-2017 二 1.

计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$。

解：

步骤不唯一

把所有列加到第一列，原行列式变为

$$\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$$

把第一行的负一倍分别加到第二行，第三行，第四行。$10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}$，把第四行加到第二行

$$10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&-4\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}=10\times(-4)\times2\times(-1)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=80\times1\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=160$$

◇

10.2016-2017 二 2.

设 $f(x)=\begin{vmatrix}x-1&1&-1&1\\-1&x+1&-1&1\\-1&1&x-1&1\\-1&1&-1&x+1\end{vmatrix}$，求 $f(x)=0$ 的根。

解：

分别把第四行的负一倍加到第一行、第二行与第三行上

$$\begin{vmatrix}x&0&0&-x\\0&x&0&-x\\0&0&x&-x\\-1&1&-1&x+1\end{vmatrix}$$

把前边三列全部加到第四列上：

$$\begin{vmatrix}x&0&0&0\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\-1&1&-1&x\end{vmatrix}=x^4$$

所以 $f(x)=x^4=0$ 的根为 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. ◇

11.2017-2018 一 1.

计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解：

过程不唯一。

把第一列的负一倍分别加到第二、三、四列上：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3\times(3-1)}{2}} 6 = -6$$

◇

12.期中 2017-2018 一 2.

求方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ 的根。

解：

把第一行的负一倍分别加到第二、三行上：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = (x-2) \times (-1)^{1+1}[(x-1)x - 2 \times 1] = 0$$

解得：$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -1$。 ◇

13.期中 2017-2018 一 3.

设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 及 β 均为 4 维列向量。4 阶矩阵 $A = [\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4], B = [\beta\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4]$, 若 $|A| = 2, |B| = 3$，求

(1)$|A + B|$;

(2)$|A^2 + AB|$;

解：

(1)$A + B = [\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4] + [\beta\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4] = [\gamma_1 + \beta\ \ 2\gamma_2\ \ 2\gamma_3\ \ 2\gamma_4]$，由行列式的性质：

$$\begin{aligned} |A + B| &= |\gamma_1 + \beta\ \ 2\gamma_2\ \ 2\gamma_3\ \ 2\gamma_4| = |\gamma_1\ \ 2\gamma_2\ \ 2\gamma_3\ \ 2\gamma_4| + |\beta\ \ 2\gamma_2\ \ 2\gamma_3\ \ 2\gamma_4| \\ &= 2 \times 2 \times 2|\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4| + 2 \times 2 \times 2|\beta\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4| = 8|A| + 8|B| = 8(|A| + |B|) = 40 \end{aligned}$$

(2)$|A^2 + AB| = |A(A + B)| = |A||A + B| = 2 \times 40 = 80.$ ◇

14.期中 2018-2019 一 1.

计算行列式 $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & c^2 + a^2 & a^2 + b^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

解：

把第三行加到第一行上：

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & b^2+c^2+a^2 & a^2+b^2+c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)|A|$$

可以看出 $|A|$ 是三阶范德蒙行列式，所以原式 $=(a^2+b^2+c^2)(c-b)(c-a)(b-a)$ ♢

15.期中 2018-2019 一 2.

设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,A^*$ 为 A 的伴随矩阵。

(2) 若 $|A^{-1}+B|=2$，求 $|A+B^{-1}|$.

解：

$|A+B^{-1}|=|EA+B^{-1}E|=|B^{-1}BA+B^{-1}A^{-1}A|=|B^{-1}(BA+A^{-1}A)|=|B^{-1}|\cdot|BA+A^{-1}A|=|B^{-1}|\cdot|(B+A^{-1})A|=|B^{-1}|\cdot|(B+A^{-1})|\cdot|A|=2^{-1}\times 2\times 3=3$ ♢

16.期中 2018-2019 一 4.

设 n 阶行列式 $D_n(n=1,2,\cdots):D_1=1,D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},\dots\dots,D_n=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(1) 给出 D_n,D_{n-1},D_{n-2} 的关系；

(2) 利用找到的递推关系及 $D_1=1,D_2=0$, 计算 $D_3,D_4,\cdots,D_8$;

(3) 求 D_{2018}

解：

(1) 对 D_n 按第一列进行行列式展开 (a_{11} 表示第一行第一列的元素，A_{11} 表示第一行第一列元素对应的代数余子式)：

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}+1\times(-1)^(2+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=D_{n-1}-D_{n-2}$$

(2) 由 (1) 得：

$$D_3=D_{3-1}-D_{3-2}=D_2-D_1=-1$$
$$D_4=D_{4-1}-D_{4-2}=D_3-D_2=-1$$
$$D_5=D_{5-1}-D_{5-2}=D_4-D_3=0$$
$$D_6=D_{6-1}-D_{6-2}=D_5-D_4=1$$
$$D_7=D_{7-1}-D_{7-2}=D_6-D_5=1$$
$$D_8=D_{8-1}-D_{8-2}=D_7-D_6=0$$

(3) 由 (2) 可以看出，每 6 组数据为一个循环，即 $D_n = D_{n+6}$, 所以 $2018 \div 6 = 336$ 余 2。所以 $D_{2018} = D_2 = 0$ ◇

期末试题

17.期末 2014-2015 一 1.

若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21} = 1$，则 $a =$_______。

解：

$A_{21} = (-1)^{2+1} \times (3 \times 1 - 2 \times 1) = 1$，解得 $a = 2$。 ◇

18.期末 2014-2015 一 3.

设 3 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的行列式 $|A| = 3$, 矩阵 $B = (\alpha_2, 2\alpha_3, -\alpha_1)$，则行列式 $|A - B| =$_______。

解：

对 A 的第三列乘 2 得: $|\alpha_1\ \alpha_2\ 2\alpha_3| = 2|A|$, 对该表达式第一列乘负一: $|-\alpha_1\ \alpha_2\ 2\alpha_3| = -2|A|$, 交换一二两列, $|\alpha_2\ \alpha_1\ 2\alpha_3| = 2|A|$，交换二三两列，$|\alpha_2\ 2\alpha_3\ \alpha_1| = -2|A|$, 所以 $|B| = -2|A|$.

$$\begin{aligned}
|A - B| &= |\alpha_1 - \alpha_2 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| = |\alpha_1 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| + |-\alpha_2 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| \\
&= |\alpha_1 \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3 + \alpha_1| \\
&= |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| + |\alpha_1 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_1| \\
&= |A| + 0 + 0 - |B| = 3|A| = 9
\end{aligned}$$

◇

19.期末 2015-2016 一 1.

行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} =$_______。

解：

把第二行加到第一行上：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ -2 & 3-a & a \\ 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = A$$

把 A 的第二行加到第一行上：

$$A = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & a \\ -3 & 4-a \end{vmatrix} = 24$$

◇

20.期末 2015-2016 二 1.

若行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$，求 $A_{11} + 2A_{21} + A_{31} + 2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

由题得：

$$A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

把第一行的负二倍加到第二行，把第一行的负一倍分别加到第三、四行。

$$2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-2\\0&2&-2&-2\\0&-1&-2&-3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\-1&-2&-3\end{vmatrix}$$

把第一行的负一倍加到第三行：

$$4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\-1&-2&-3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\0&0&-1\end{vmatrix}=4\times(-1)\times((-1)\times(-1)-(-2)\times 1)=-12$$

◇

21.期末 2016-2017 一 1.

行列式 $D=\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&1&0\\z&0&0&1\end{vmatrix}=$______。

解：

对行列式做如下变换：第一行减去 z 倍的第四行，第一行减去 y 倍的第三行，第一行减去 x 倍的第二行，得到如下行列式：

$$\begin{vmatrix}1-x^2-y^2-z^2&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=1-x^2-y^2-z^2$$

◇

22.期末 2016-2017 二 1.

若行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\0&4&1&2\\0&2&2&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}-2A_{21}+A_{31}-2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

44. 过程略。 ◇

23.期末 2017-2018 一 1.

设 A_{ij} 是三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}$ 第 i 行第 j 列元素的代数余子式，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$______。

解：

0. 过程略。 ◇

24.期末 2017-2018 二 1.

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解：

40. 过程略 ♢

25.期末 2018-2019 二 1.

已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 5 & 27 \end{vmatrix}$，求 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$，其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

-48. 过程略。 ♢

26.期末 2019-2020 二 3.

记 $2n$ 阶方阵 $A_n = \begin{bmatrix} a_n & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & \iddots & & \\ & & & a_1 \quad b_1 & & & \\ & & & c_1 \quad d_1 & & & \\ & & \iddots & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & d_n \end{bmatrix}$.

(1) 求 $|A_1|, |A_2|$

(2) 求 $|A_n|$。

解：

(1)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1d_1 - c_1b_1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \\ c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_2d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} - b_2c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = (a_2d_2 - b_2c_2)|A_1|$$

$$= (a_2d_2 - b_2c_2)(a_1d_1 - c_1b_1)$$

(2) 用数学归纳法：

由 (1) 得：

$$n = 1: \quad |A_1| = a_1d_1 - c_1b_1 = \prod_{i=0}^{1}(a_id_i - c_ib_i)$$

$$n = 2: \quad |A_2| = (a_2d_2 - c_2b_2)\,|A_1| = \prod_{i=0}^{2}(a_id_i - c_ib_i)$$

则 $n=k-1$ 时，有 $|A_n|=\prod_{i=0}^{k-1}(a_id_i-c_ib_i)$.
当 $n=k$ 时，按第一列展开，得：

$$
\begin{aligned}
|A_k| &= a_{11}A_{11}+a_{2k1}A_{2k1} \\
&= a_k\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} & \\ 0 & & & & & & d_k \end{bmatrix} + c_k(-1)^{2k+1}\begin{bmatrix} 0 & & & & & & b_k \\ a_{k-1} & & & & & b_{k-1} & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} & \end{bmatrix} \\
&= a_kd_k(-1)^{2k-2+1+2k-2+1}\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} \end{bmatrix} - c_kd_k(-1)^{1+2k-2+1}\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} \end{bmatrix} \\
&= (a_kd_k-c_kd_k)|A_{k-1}| = \prod_{i=1}^{k}(a_id_i-c_ib_i)
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$