第十一次

例5.34

解：设该正交向量为 $\xi=(x_1, x_2, x_3)^T$ 则：$\xi\cdot\xi_1^T=0$，$\xi\cdot\xi_3^T=0$ 即

$$\begin{cases} x_1-2x_2=0 \\ x_1-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=2x_2 \quad x_1=x_3 \quad 取 x_2=k 得 \xi=[2k, k, 2k]^T, k\in R.$$

例5.35

P_{226}, 2

例5.36

解：$r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=3$ ∴ ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关，使用施密特正交化方法：

$\eta_1=\xi_1$

$$\eta_2=\xi_2-\frac{\xi_2^T\cdot\eta_1}{\eta_1^T\cdot\eta_1}\cdot\eta_1=\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right]^T$$

$$\eta_3=\xi_3-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\xi_3^T\cdot\eta_i}{\eta_i^T\cdot\eta_i}\cdot\eta_i\right)=\left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right]^T$$

η_1, η_2, η_3 即为所求

例5.37 P_{227}. 4

例5.38

解：实对称阵一定可以对角化

$|\lambda E-A|$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_4]{r_2+r_4} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-3)^3(\lambda-7)=0$

∴该对角阵为 $\begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 7 \end{bmatrix}$

例5.39

解：$|\lambda E-A|$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_3} \begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & 5-\lambda \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-4 & 4 \\ 4 & 2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$ ∴ $\lambda_1=\lambda_2=5, \lambda_3=-4$

$\lambda=5$时

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}x_2-x_3$$

分别取 $[x_2,x_3]^T=[0,1]^T,[2,0]^T$ $\alpha_1=[-1,0,1]^T$ $\alpha_2=[-1,2,0]^T$

施密特正交化：$\xi_1=\alpha_1$，$\xi_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\cdot\xi_1}{\xi_1^T\cdot\xi_1}\cdot\xi_1=-\frac{1}{2}[1,-4,1]$

单位化：$\eta_1=+\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ $\eta_2=-\frac{\sqrt{2}}{6}[1,-4,1]$

$\lambda=-4$时

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}-5&2&4\\1&-4&1\\4&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&-4&1\\-5&2&4\\4&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+5r_1}\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&-18&9\\0&18&-9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&-18&9\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{18})}\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+4r_2}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{18}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}\quad x_1=\frac{+1}{18}x_3\quad x_2=+\frac{1}{2}x_3$$

$\therefore\alpha_3=[2,1,2]^T$ 单位化：$\eta_3=\frac{1}{3}[2,1,2]$

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{pmatrix}$

例5.40 P29 7. ，例5.41 P30，8 例5.42 P30 . 9 例5.43. P31. 10

例5.44

解：(1) 令 $\xi_1=(1,0,-1)^T$，$\xi_2=(1,0,1)^T$

则 $A(\xi_1\ \ \xi_2)=(-\xi_1,\ \xi_2)\Rightarrow A\xi_1=-\xi_1\quad A\xi_2=\xi_2$

$\because r(A)=2\ \therefore|A|=0$

$\therefore$ 由以上可以看出 A的特征值为 $-1,1,0$.

$\because$ A实对称 $\therefore$ A不同特征值对应的特征向量正交

$\therefore$ 再设 0对应的特征向量为 $\xi_3=[x_1,x_2,x_3]^T$

则 $\xi_1^T\xi_3=0$，$\xi_2^T\xi_3=0\Rightarrow$

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\xi_3=[0,1,0]^T$$

$\therefore$ A的特征值 -1 对应的特征向量为 $k_1(1,0,-1)^T,\ k_1\neq0$

1 $k_2(1,0,1)^T,\ k_2\neq0$

0 $k_3[0,1,0]^T,\ k_3\neq0$

(2) 取 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$

$$(P\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\-1&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

$\therefore A=P\Lambda P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

例5.45.

解：(1) $|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}a+2&1&a\\a+2&a&1\\a+2&1&1\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(a+2)\begin{vmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&0&1-a\end{vmatrix}$

$=(a+2)(a-1)^2$

$\because Ax=\beta$ 解不唯一，$\therefore r(A)<3$，$|A|=0\Rightarrow a=-2$ 或 $a=1$

$a=-2$：$[A\vdots\beta]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&-2\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{cccc}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{array}\right]\Rightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)=2$

$a=1$ $[A\vdots\beta]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{array}\right]$ $r(A)\neq r(A\vdots\beta)$

$\therefore a=-2$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\\lambda&\lambda+2&-1\\\lambda&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&\lambda+2&-1\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&\lambda+3&-3\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)\Rightarrow\lambda_1=0,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-3$

$\lambda=0$ 时 $[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}-1&-1&2\\0&3&-3\\0&-3&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{matrix}$.

$\therefore\alpha_1=[1,1,1]^T$，单位化：$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$

$\lambda=3$ 时 $[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+\frac{1}{2}r_1}\begin{bmatrix}2&-1&2\\0&\frac{9}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_2=0\\x_1=-x_3\end{matrix}$ $\therefore\alpha_2=[-1,0,1]^T$

单位化 $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,0,1]^T$

$\lambda=-3$时

$[\lambda E-A]$

$$=\begin{bmatrix}-4 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -4 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-4r_1}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & -3 & -6\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x_1=x_3\\ x_2=-2x_3\end{matrix}\quad \alpha_3=[1,-2,1]^T$$

单位化：$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,-2,1]^T$

$\therefore Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$. $Q^TAQ=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 3 & \\ & & -3\end{bmatrix}$