

补充

1. 二项式定理 (记住这个结论, 后边会用到):

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n (C_n^i a^i b^{n-i})$$

期中试题

2. 16-17 学年 (一.3)

$$\text{设方程组} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ 有非零解, 则 } k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解:

由题得, 系数矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{k}{2}r_1]{r_2 - \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & k + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 + \frac{k}{2} & 1 - \frac{k}{2} \end{pmatrix}$$

要使齐次方程组有非零解, 则需存在自由变量。对于齐次方程, 方程的个数小于未知数个数则有非零解, 此时只需让第二个和第三个方程中对应的非零系数成比例即可 (这样便可以消去其中一个方程), 即

$$\frac{k+1/2}{1+k/2} = \frac{-3/2}{1-k/2} \Rightarrow k=4 \text{ 或 } k=-1$$

◇

期末试题

3. 14-15 学年 (四)

$$\lambda \text{ 为何值时, 方程组} \begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases} \text{ 有无穷多组解? 并在有无穷多解时, 写出方程组的通解。}$$

解:

由题得增广矩阵:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - \frac{1}{2}r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1 - \frac{\lambda^2}{2} & 1 + \frac{\lambda}{2} & 2 - \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 5 - 2\lambda & -3 & -3 \end{array} \right)$$

第二行中: $\lambda^2 \geq 0$, 所以可以推出 $-1 - \frac{\lambda^2}{2} \leq -1$, 即 $-1 - \frac{\lambda^2}{2} \neq 0$, 继续高斯消元:

$$\xrightarrow[r_3 + r_2]{r_3 + r_2 \frac{5-2\lambda}{1+\frac{\lambda^2}{2}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1 - \frac{\lambda^2}{2} & 1 + \frac{\lambda}{2} & 2 - \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-5\lambda^2 + \lambda + 4}{\lambda^2 + 2} & \frac{-\lambda^2 - 13\lambda + 14}{\lambda^2 + 2} \end{array} \right)$$

要使方程组有无穷多解, 则需存在自由变量, 而 $-1 - \frac{\lambda^2}{2} \neq 0$, 即 x_1, x_2 都不为自由变量, 所以 x_3 为自由变量, 所以:

$$\frac{-5\lambda^2 + \lambda + 4}{\lambda^2 + 2} = 0 \quad \text{且} \quad \frac{-\lambda^2 - 13\lambda + 14}{\lambda^2 + 2} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

计算结果代入上述阶梯型矩阵:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \times (-\frac{2}{3})]{r_1 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - \frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

由最简阶梯型矩阵可以得出: $x_1 = 1, x_2 = x_3 - 1$, 令 $x_3 = k, k \in R$ 则

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

◇

4. 15-16 学年 (三.1)

当 k 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k-3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$$
 有唯一解, 无解和有无穷多解? 当方程组

有无穷多解时求出所有解。

解:

增广矩阵

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - kr_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 3(k-1) \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 3(k-1) \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - (1+k)r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(k+2) & 3(k-1) \end{array} \right] \end{aligned}$$

讨论:

(1) 解不存在: 即存在矛盾方程 (增广矩阵主元列在最右列)。即对于 r_3

$$\begin{cases} (1-k)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k = -2$$

(2) 存在唯一解: 主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-k \neq 0 \\ (1-k)(k+2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k \neq 1 \text{ 且 } k \neq -2$$

$k \neq 1$ 且 $k \neq -2$, 继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{(k+2)(1-k)}]{r_2 \times \frac{1}{1-k}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{(k+2)} \end{array} \right] \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & -2 - \frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 - kr_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5k+1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array} \right]$$

所以方程组存在唯一解时: $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$, 解为

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{5k+1}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \end{bmatrix}, \quad k \neq 1 \text{ 且 } k \neq -2$$

(3) 存在无穷解: 至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (k-1)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

把 $k = 1$ 代入阶梯矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2 - c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

所以 x 的解为 $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_2 \quad c_1, c_2 \in R$.

◇

5. 17-18 学年 (二.3)

求线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$
 的通解。

解:

增广矩阵

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2 - \frac{1}{2}r_1 \\ r_3 - \frac{3}{2}r_1 \\ r_4 - \frac{7}{2}r_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 & \frac{9}{2} & 7 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 & \frac{15}{2} & 17 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_3 - 5r_2 \\ r_4 - 7r_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_4 - 2r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1 \times \frac{1}{2} \\ r_2 \times 2 \\ r_3 \times \frac{1}{2}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2 - r_3 \\ r_1 + \frac{3}{2}r_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_1 + \frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$x_1 = 3 - x_3 \quad x_2 = 2x_3 - 8 \quad x_3 = x_3 \quad x_4 = 6$$

令 $x_3 = C, C \in R$, 则

$$x = \begin{bmatrix} 3 - C \\ 2C - 8 \\ C \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} C, \quad C \in R$$

◇

6. 18-19 学年 (三.1)

设
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$$
, λ 为何值时, 该方程组无解、唯一解、无穷解? 并且在有唯一解时

求出解; 有无穷多解时, 求出全部解并用向量表示。

解:

增广矩阵

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda - 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda - 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2 - \lambda r_1 \\ r_3 - r_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda & -\lambda - 2 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda & -\lambda - 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - (\lambda + 1)r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(-\lambda - 2) & -\lambda - 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

讨论:

(1) 解不存在: 即存在矛盾方程 (增广矩阵主元列在最右列)。即对于 r_3

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda)=0 \\ -\lambda-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=1$$

(2) 存在唯一解: 主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-\lambda \neq 0 \\ (\lambda-1)(-2-\lambda) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq -2$$

$\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$, 继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{(\lambda-1)(-2-\lambda)}]{r_2 \times \frac{1}{1-\lambda}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right] \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & \frac{2\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right] \xrightarrow{r_1-\lambda r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right]$$

所以方程组存在唯一解时: $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$, 解为

$$x = \begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq -2$$

(3) 存在无穷解: 至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda)=0 \\ -2-\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-2$$

把 $\lambda=-2$ 代入阶梯矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1+2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出:

$$x_1 = 2 + x_3 \quad x_2 = x_3 \quad x_3 = x_3$$

令 $x_3 = C, C \in R$, 则

$$x = \begin{bmatrix} 2+C \\ C \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} C, \quad C \in R$$

◇

7. 19-20 学年 (一.4)

若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$ 有解, a_1, a_2, a_3, a_4 应满足的条件是_____。

8. 19-20 学年 (二.2)

求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系。

9. 20-21 学年 (三.2)

判断线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 8 \end{cases}$$
 何时无解？何时有解？并在有无穷多组解时求出其通解。