例5.1 解：不能，只有方阵才能讨论是否相似.

例5.2

证明：$A\sim B$ 依定义，一定存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}\cdot AP=B$

$\therefore B^3=(P^{-1}AP)\cdot(P^{-1}AP)\cdot(P^{-1}AP)=P^{-1}A^3P$

$P^{-1}\cdot 2A\cdot P=2P^{-1}AP=2B$

$\therefore P^{-1}(A^3+2A-5I_n)P=P^{-1}A^3P+2P^{-1}AP-5P^{-1}I_nP=B^3+2B-5I_n$

即 $(A^3+2A-5I_n)\sim(B^3+2B-5I_n)$

例5.3

解：不一定.

理由：$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则 $A\sim B$

$C=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，则 $C\sim D$

$A+C=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$，$B+D=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$

$|A+C|=-1$，$|B+D|=0$，$\therefore A+C\nsim B+D$ (相似矩阵具有相同的行列式)

例5.4

解：相似矩阵有相同的秩和特征值、行列式.

$\therefore |A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&1&0\\2&0&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-4+2\times2=0$

$\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-2\\0&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\therefore r(A)=2$

例5.5

证明：$A\sim B$ $\therefore r(A)=r(B)$，A 可逆，则 $r(A)=n=r(B)$ $\therefore r(B)$ 可逆. 反之同理.

A 可逆时：$A\sim B$ $\therefore A=P^{-1}BP$ 则 $(A)^{-1}=(P^{-1}BP)^{-1}=P^{-1}B^{-1}(P^{-1})^{-1}=P^{-1}B^{-1}P$ 即 $A^{-1}\sim B^{-1}$

例5.6

证：$A\sim B$ 则存在可逆阵 P 使得 $A=P^{-1}BP$ $\therefore tr(A)=tr(P^{-1}BP)=tr(PP^{-1}B)=tr(B)$

例 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$tr(A)=tr(B)$，显然 $A\nsim B$ (根据可相似定义，单位阵只与自身相似)

例5.7 证：$A_i \sim B_i$，则存在可逆阵 P_i，使得 $A_i = P_i^{-1} B_i P_i$，式中 $i=1,2$

取 $P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$，则 P 可逆，$P^{-1}=\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1^{-1}A_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1^{-1}A_1P_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}A_2P_2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$ 即 $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$

例5.8 解：$A\sim B$，$\therefore |A|=|B|$，由5.6知 $tr(A)=tr(B)$

$\therefore \begin{cases} a=-3-b \\ 4a=-1+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}$

例5.9 证：$A\sim B$ 则存在一个可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$

对任意 $x\in S_1$，即 $Ax=0$。令 $f(x)=P^{-1}x$，则 $Bf(x)=BP^{-1}x=P^{-1}PBP^{-1}x=P^{-1}Ax=0$

$\therefore f(x)\in S_2$，

$\therefore$ 我们可得到一个映射：$f: S_1\to S_2$，$f(x)=P^{-1}x$.

反之，对任意 $y\in S_2$，令 $g(y)=Py$，则

$Ag(y)=APy=PP^{-1}APy=PBy=0$，即 $g(y)\in S_1$，

$\therefore \dots\dots\ g: S_2\to S_1\ \ g(y)=Py$

由于 $(f\circ g)(y)=P^{-1}(Py)=y$，所以 $f\circ g$ 是 S_2 上的恒等映射. 同理 $g\circ f$ 是 S_1 上的恒等映射.

综上…，

例5.10 证：设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

设存在可逆阵 $P=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ 使得 $P^{-1}AP=B \Rightarrow AP=PB$

即 $AP=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

$PB=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 & x_2 \\ x_3+x_4 & x_4 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3=x_1+x_2 \\ x_2+x_4=x_2 \\ x_3+x_4=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=x_3 \\ x_4=0 \\ x_1\in R \end{cases}$

取 $x_1=k_1$，$x_3=k_2$，k_1,k_2 不全为0，则 $P=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$，若 P 可逆，则 $|P|\neq 0$ 即 $k_2\neq 0$

$\therefore A\sim B$

注：相似矩阵定义中说的是存在一个可逆阵 P，$\therefore$ 只要能找到1个 P 符合条件即可，但一定要保证 P 为可逆阵.

例5.11：

证：A可逆，则 $|A|\neq0$，$r(A)=n$（n为A的阶数）

设λ对应特征值为α，则 $\alpha\neq0$，$A\alpha=\lambda\alpha$，若 $\lambda=0$，则 $A\alpha=0$

$\because\alpha\neq0$ $\therefore Ax=0$ 有非0解，即 $r(A)<n$ 与前面的 $r(A)=n$ 矛盾。

这说明我们的假设错误 即 $\lambda\neq0$.

$A\alpha=\lambda\alpha$，左乘 $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$ 有：$\frac{1}{\lambda}\alpha=A^{-1}\alpha$ 即 A^{-1} 特征值为 $\frac{1}{\lambda}$.

例5.12

证：依题有 $A\xi=\lambda\xi$，$A\eta=\lambda\eta$

假设 $\xi+\eta$ 为A的特征向量，其对应特征值为a.

则 $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=\lambda\xi+\lambda\eta=a(\xi+\eta)$

即 $(\lambda-a)\xi+(\eta-a)\eta=0$

$\because\lambda\neq\eta$ $\therefore\lambda-a\neq\eta-a$

$\because\xi,\eta$ 从属于不同特征值的特征向量，即 ξ,η 线性无关，$\therefore\lambda-a=\eta-a=0$

与 $\lambda-a\neq\eta-a$ 矛盾，$\therefore$ 假设不成立 即——.

例5.13.

证：设a对应的特征向量为α，则 $\alpha\neq0$ 且 $A\alpha=a\alpha$

$\therefore \overset{A^2\alpha}{=} A A\alpha=A(a\alpha)=aA\alpha=a a\alpha=a^2\alpha$

$A^3\alpha=AA^2\alpha=Aa^2\alpha=a^2A\alpha=a^2a\alpha=a^3\alpha$

$-2A\alpha=-2a\alpha$

$\therefore(A^3-2A+2I_n)\alpha=A^3\alpha-2A\alpha+2I_n\alpha=a^3\alpha-2a\alpha+2\alpha=(a^3-2a+2)\alpha$

即——.

例5.14.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0$ $\lambda_1=\lambda_2=1$

$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}0&-2\\0&0\end{bmatrix}$ $\therefore x_2=0$，$x\in R$ 取 $x_1=1$，则 $(\lambda E-A)x=0$ 基础解系为 $(1,0)^T$.

$\therefore$ A的特征值为1（二重根）对应特征向量为 $(k_1,0)^T$，$k_1\neq0$.

例5.15

证：设A对角元相同者均为a. $\because$ A为上三角阵，$\therefore$ A的特征值为对角元的值 a.

$\because$ 至少有1个非对角元不为0 即 (i,j)-元 $\neq0$，$i<j$)

$\therefore(\lambda E-A)x=(aE-A)x=0$ 的系数矩阵的秩 $r(aE-A)\geq1$

∴解向量的个数 $n-r(aE-A)\le n-1$

即A的线性无关的特征向量至多有 $n-1$ 个.

而特征值有n个，代数重数≠几何重数 ∴A不能对角化.

例5.16

设A可对角化为 Λ，→读作 lambda 则 $A\sim\Lambda$,

同例5.2的证明步骤有

$A^4-2A^2+5I \sim \Lambda^4-2\Lambda^2+5I$

∵Λ为对角阵 ∴ $\Lambda^4-2\Lambda^2+5I$ 也为对角阵 即 A^4-2A^2+5I 可相似对角化.

(2) $A\sim\Lambda$，存在…（方法同例5.5）

例5.17 (1) 设A可对角化为 Λ，则 $A\sim\Lambda$，设 Λ 上对角元为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$

∵相似矩阵都有相同的特征多项式

Λ 的特征多项式为 $(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\cdots(\lambda-a_n)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-a_i)=0$

即A的特征多项式可分解为….

(2) 逆命题表述：若A的特征多项式可分解为…，则A可相似对角化.

例：$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2=0$ $\lambda_1=\lambda_2=1$

$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}$ 解 ⇒ $x_2=0$ $x_1\in R$，$\alpha=(1,0)$，代数重数≠几何重数.

例5.18

解：由题A的特征值为 $1,-1,-1$，∴ $|A|=1\ne0$ ∴A可逆 $|A^{-1}|=1$

$A^*=|A|\cdot A^{-1}=A^{-1}$

∴ $(A^*)^3-2A-I_3$ 对应特征值为 $(\lambda_i^{-1})^3-2\lambda_i-1$，式中 λ_i 为A的特征值，$i=1,2,3$

∴ $|(A^*)^3-2A-I_3|=\prod_{i=1}^{3}[(\lambda_i^{-1})^3-2\lambda_i-1]=(-2)\times(0)^2=0$

例5.19

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3&-6&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)=0$，$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-4$

$\lambda_1=2$ 时：$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&4&-2\\-3&-6&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}-1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ∴ $x_1=-2x_2+x_3$

分别取 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 有 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ $[-2,1,0]^T$

$\lambda=-4$时 $[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-7&-2&1\\2&-2&-2\\-3&-6&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}2&-2&-2\\-7&-2&1\\-3&-6&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{3})]{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-7&-2&1\\1&2&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+7r_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-9&-6\\0&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-9&-6\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{9})}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{bmatrix}$

$x_1=\frac{1}{3}x_3$ $x_2=-\frac{2}{3}x_3$ 取 $x_3=3$ 有 $\alpha_3=[1,-2,3]^T$

$\therefore$ 令 $P=[\alpha_1,\alpha_2\ \alpha_3]=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\1&0&3\end{bmatrix}$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-4\end{bmatrix}$

$\therefore A=P\Lambda P^{-1}$ $\therefore A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

$[P\vdots E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\1&0&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&2&2&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-2r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&6&-1&-2&1\end{array}\right]$

$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{6}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&\frac{7}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{array}\right]$

$\therefore P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3&6&3\\-2&2&2\\-1&-2&1\end{bmatrix}$

$\therefore A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&(-4)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&6&3\\-2&2&2\\-1&-2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}7\cdot2^n-(-4)^n&2^{n+1}-2(-4)^n&-2^n+(-4)^n\\-2^{n+1}+2(-4)^n&2^{n+1}+4(-4)^n&2^{n+1}-2(-4)^n\\3\cdot2^n-3(-4)^n&6\cdot2^n-6(-4)^n&3\cdot2^n+3(-4)^n\end{bmatrix}$

例5.20 设 A的特征值为a，其对应特征向量为α，则 $A\alpha=a\alpha$，$\alpha\neq0$.

$\therefore(A^2-3A+2I_n)\alpha=(a^2-3a+2)\alpha=0$ $\therefore a^2-3a+2=0$ $\therefore a=2$ 或$a=1$

即$a=2$或$a=1$为A的特征值

$\therefore(aI-A)x=0$ 的基础解系包含向量个数为 $n-r(aI_n-A)$，

$a=2$时为 $n-r(2I_n-A)$，$a=1$时为$n-r(I_n-A)$

要证A可相似对角化，只需证 $(n-r(2I_n-A))+(n-r(I_n-A))=n$ 即可

即证 $r(2I_n-A)+r(I_n-A)=n$

$\because A^2-3A+2I_n=0$ $\therefore(A-2I_n)(A-I_n)=0$

$\therefore r(A-2I_n)+r(A-I_n)\leq n$ 即 $r(2I_n-A)+r(I_n-A)\leq n$ ①

又由 $I_n=[(A-2I_n)-(A-I_n)]$ 得 $n=r(I_n)\leq r(A-I_n)+r(A-2I_n)$ ②

联立①②得 $r(2I_n-A)+r(I_n-A)=n$.