第六次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 104 分钟.**

37. 2,3阶行列式的定义(7分钟)
38. n阶行列式递归的定义(15分钟)
39. 特殊行列式(8分钟)
40. 行列式的存在唯一性质(18分钟)
41. 行列式的性质(7分钟)
42. 行列式按行按列展开(10分钟)
43. 范德蒙行列式(7分钟)
44. 分块三角阵以及方阵乘积的行列式(9分钟)

45. 行列式计算的典型例子1(10分钟)
46. 行列式计算的典型例子2(13分钟)

- **看视频的同时记好笔记.**
- **看线性代数教材 P105-P114 推论3.3.5之前的内容.**
- **课堂上将分组讨论 3.5, 3.8, 3.10, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.17, 3.18,3.19.**
- **组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.**
- **每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.**

例 3.1 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

例 3.2 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(2) 对任意数 a 和任意的正整数 n, 都存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 使得 $|\boldsymbol{A}| = a$.

(3) 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个 (i,j)-元都是整数, 则 $|\boldsymbol{A}|$ 一定是整数.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是任意 n 阶方阵. 则 $|-\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$. 则 $|\boldsymbol{A}| \neq |\boldsymbol{B}|$.

例 3.3 用行列式的定义计算 n 阶行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

例 3.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵, 即, $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$. 证明: 如果 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 n 必然是偶数.

例 3.5 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(1) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|>0, |\boldsymbol{B}|>0$. 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$. 则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $n>1$, k 是不等于 1 的数. 则 $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$ 一定不成立.

(4) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵. 由于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 不一定可交换, 所以, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|$ 与 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$ 不一定相等.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的 n 阶方阵. 则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{x}|=0$, 从而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

例 3.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 证明: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解, 其中, k 是任意的正整数.

例 3.7 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(1) 用初等变换把方阵 $\boldsymbol{A}$ 变为上三角阵 $\boldsymbol{J}$, 则 $|\boldsymbol{A}|$ 等于 $\boldsymbol{J}$ 的全部对角元的乘积.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3. 则 $\boldsymbol{A}$ 的所有 3 阶子式都不为 0.

(3) 设非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有 4 阶子式都为 0, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩一定是 3.

(7) 设线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 如果 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则该方程组没有解.

例 3.8 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$. 则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为 ______.

例 3.9 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & x+1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$. 求 $f(x)=0$ 的根.

例 3.10 求 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix}=0$ 的根.

例 3.11 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$. 求 $f(x)$ 中 x^3 的系数.

例 3.12 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\gamma}_2\ \boldsymbol{\gamma}_3\ \boldsymbol{\gamma}_4)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\gamma}_2\ \boldsymbol{\gamma}_3\ \boldsymbol{\gamma}_4)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}_2$, $\boldsymbol{\gamma}_3$, $\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$, $|\boldsymbol{B}|=1$. 则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ ______.

例 3.13 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & 5 & 3 & & \\ & 2 & 5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix}$, 其中没有写出来的元素为零.

例 3.14 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

例 3.15 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$.

例 3.16 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

例 3.17 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

例 3.18 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$.

例 3.19 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$,
其中没有写出来的元素为零.