第9次线性代数

4.17 解: 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

$$A\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&-3&2&-1\\0&-1&1&0\\0&5&-5&0\\0&-3&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3+5r_2\\r_4-3r_2}}\begin{bmatrix}1&-3&2&-1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$

由组合数, $C_4^2=\frac{4\times3}{2}=6$ 可以看出最多有6个极大线性无关组

但由行阶梯形矩阵可以看出, α_1,α_4 显然线性相关。

$\therefore$ 极大线性无关组为 (α_1,α_2) (α_1,α_3) (α_2,α_3) (α_2,α_4) (α_3,α_4)。

根据题意,写出其中一个即可。

4.18 (1) ×, eg. $\alpha_1=(1,0)^T$, $\alpha_2=(0,0)^T$, $\alpha_3=(0,0)^T$, 只有1个极大线性无关组。但线性相关。

(2) √, 极大线性无关组一定不含0向量, 而~~0向量~~极大线性无关组为向量组的秩。

(3) √ 某向量可由其他向量线性表出, 说明线性相关而极大线性无关组中向量一定线性无关, 所以去掉后不影响。

(4) ×, 如(1)中的例子, (α_1,α_2)线性相关, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$秩为1, 去掉 α_1,α_2后秩为0, 即可能会改变向量组的秩。

(5) √, 这r个线性无关组一定可以构成一个线性无关组, 而极大线性无关组中向量也线性无关, 即这r个向量为极大无关组的一个子组。即:

$$r\le \#(\text{极大无关组中向量个数})=\text{向量组的秩}。$$

4.19 (6) ×, eg. $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$, $\alpha_3=(0,0,1)^T$, $\alpha_4=(0,0,0)^T$, $\alpha_5=(0,0,0)^T$, $\alpha_6=(0,0,0)^T$, 可以看出该向量组含有3个线性相关的向量, 即 $r+1=3$, $r=2$, 而向量组秩为3.

(7) √ 理由 P_{163} (7)

4.20. 解: 由题得 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

$\because r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$ $\therefore a-1\ne0$ 否则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$ 不合题意, 即 $a\ne1$

又$\because r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ $\therefore b-2=0$ 即 $b=2$

把 $a\neq 1$, $b=2$ 代入继续高斯消元:

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{a-1}}\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 则 $Ax=\alpha_4$ 的解为 $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=0$ 即

$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$

例4.21 解:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&10&20&3b\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{10}{6}r_2}\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&3b+\frac{5}{3}(1-2b)\end{bmatrix}$$

$\because \beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出 $\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=2$

$\therefore 3b+\frac{5}{3}(1-2b)=0$ 即 $b=5$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&2&1\\0&a&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&3&1\\0&a&5\end{pmatrix}$$

$\because r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ $\therefore \frac{3}{a}=\frac{1}{5}\Rightarrow a=15$

综上所述 $a=15$, $b=5$

例4.22 解:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\xrightarrow[r_4-\frac{1}{2}r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3+2r_1}}\begin{bmatrix}2&4&6&1\\0&-2&-3&0\\0&2&3&3\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}2&4&6&1\\0&-2&-3&0\\0&0&0&3\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{r_3}{6}}\begin{bmatrix}2&4&6&1\\0&-2&-3&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$

由组合数, $C_4^3=C_4^1=4$ $\therefore$ 至多只能有4个极大无关组, 显然 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不是极大无关组的

所有极大无关组: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$ $(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)$ $\cancel{(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}$

例4.23 证: 导出组 $Ax=0$. γ 为 $Ax=0$ 的解, 即 $A\gamma=0$, $Ax=\beta$, γ_0 为 $Ax=\beta$ 的解,

即 $A\gamma_0=\beta$ 所以 $A(\gamma_0+\gamma)=A\gamma_0+A\gamma=0+\beta=\beta$ 即 $(\gamma_0+\gamma)$ 为 $Ax=\beta$ 的解。

例4.24 B

通解为 $Ax=b$ 的特解 + $Ax=0$ 的通解.

由题: $A\beta_1=b$ $A\beta_2=b$ $\therefore A(\frac{\beta_1-\beta_2}{2})=\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=0$ 即 $\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ 为 $Ax=0$ 的解

A. 三项都为 $Ax=0$ 的解.

B. $A(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}) = \frac{b}{2}+\frac{b}{2} = b$ 即 $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 为 $Ax=b$ 的一个特解

∴ B √

C. 由B得，$\beta_1+\beta_2$ 不是 $Ax=b$ 的解，更不是 $Ax=0$ 的解，排除

D. $Ax=0$ 的通解中要求各向量必须线性无关，但 α_1, $(\beta_1-\beta_2)$ 不一定线性无关，排除

4.25 解：

(1) (I) 的增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$，解得：$x_1=-x_4$, $x_2=x_4$, $x_3\in R$,

分别取 $[x_3, x_4]^T=[0,1]^T$ 和 $[1,0]^T$ 得：$\xi_1=[-1,1,0,1]^T$, $\xi_2=[0,0,1,0]^T$

ξ_1, ξ_2 即为 (I) 的基础解系。

(2) 假设 (I) (II) 有非0公共解.

依题意可列：$l_1\xi_1+l_2\xi_2=k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$ 式中，$l_1\in R$, $l_2\in R$

即 $(-l_1, l_1, l_2, l_1)^T=(-k_2, k_1+2k_2, k_1+2k_2, k_2)^T$

解得 $l_1=l_2=-k_1=k_2$，取 $l_1=t$, $t\in R$，则公共解为

$l_1\xi_1+l_2\xi_2=t(\xi_1+\xi_2)=t(-1,1,1,1)^T$, $t\in R$

4.26 解：记第1个方程组为(I)，第2个方程组为(II).

分别记这两个方程组增广矩阵为 $(A_1 \vdots B_1)$ $(A_2 \vdots B_2)$

则 $r(A_2)\le \min\{3,2\}=2<3$ ∴(II)一定有无穷多解

∴ $r(A_1)<3$.

$$A_1 \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$ ∵ $r(A_1)<3$ ∴ $a-2$ 必为0，即 $a=2$

$$\xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $x_1=-x_3$，$x_2=-x_3$ 取 $x_3=-1$, $\xi_1=(1,1,-1)^T$

ξ_1 即为 (I) 的一个基础解系

(I). (II) 同解，∴把 ξ_1 代入 (II) 中有：$\begin{cases} 1+b-c=0 \\ 2+b^2-(c+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$

$b=0$, $c=1$ 代入 (II) 中：$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=-x_3$，$x_2\in R$，显然此时(II)有两个基础解系与(I)不同解.

$b=1$, $c=2$ 代入(II)中：$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 可以推出与(I)同解.

综上所述，$a=2$, $b=1$, $c=2$

例4.27 解:

(I) $x_1=-x_2-x_3-x_4$

分别取 $(x_2,x_3,x_4)^T=(1,0,0)^T,(0,1,0)^T,(0,0,1)^T$ 得:

$\xi_1=(-1,1,0,0)^T$, $\xi_2=(-1,0,1,0)^T$, $\xi_3=(-1,0,0,1)^T$, ξ_1,ξ_2,ξ_3 即为所求

(II) $A\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&-1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}x_1=x_2-x_3\\x_4=0\end{matrix}$

分别取 $(x_2,x_3)^T=(1,0)^T$ 和 $(0,1)^T$ 得: $\xi_1=(1,1,0,0)^T$, $\xi_2=(-1,0,1,0)^T$, ξ_1,ξ_2 即为所求。

例4.28 解:

(1) √ P187. 2.

(2) ×, 线性无关解的个数=未知数的个数 − 秩

(3) ×, 只有齐次线性方程组才有基础解系。

例4.29

(4) √

(5) √

例4.30

解: $A\xrightarrow{r_2-4r_1}\begin{bmatrix}1&-3&6\\0&11&-23\\0&8&-17\end{bmatrix}$, $|A|=11\times(-17)-8\times(-23)\neq 0$ ∴ $r(A)=3$, 只有0解.

例4.31

$A\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-3&2&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&-3&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}x_1=3x_2-2x_3\\x_4=0\end{matrix}$

分别取 $(x_2,x_3)^T=(1,0)^T$ 和 $(0,1)^T$ 得 $\xi_1=(3,1,0,0)^T$, $\xi_2=(-2,0,1,0)^T$

∴ 通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1(3,1,0,0)^T+k_2(-2,0,1,0)^T$, $k_1,k_2\in R$

例4.32

(1) ×, 非齐次系数的秩不一定等于增广矩阵的秩;

(2) √, $r(A)=r(\bar{A})<n$, 则 $n-r(A)$ 为导出组基础解系的个数.

(3) √,

(4) √

(5). √

例4.33 解:

$[A:B]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&6&-1&4&-3\\0&6&-1&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&6&-1&4&-3\\0&0&0&-6&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{6})]{r_2\times\frac{1}{6}}\begin{bmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-\frac{2}{3}r_3}\begin{bmatrix}1&-2&1&0&\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{1}{6}&0&-\frac{5}{18}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{9}\\0&1&-\frac{1}{6}&0&-\frac{5}{18}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$\therefore x_1=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}x_3 \quad x_2=\frac{1}{6}x_3-\frac{5}{18} \quad x_4=-\frac{1}{3}$

$$\therefore x=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}\\-\frac{5}{18}\\0\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\\1\\0\end{bmatrix},\ t\in R$$

例4.34

$$[A\vdots B]\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1,\ r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\0&6&-1&-3\\0&6&-2&-1\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\0&6&-1&-3\\0&0&-1&2\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+r_3]{r_4+r_3,\ r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&-2&0&3\\0&6&0&-5\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times\frac{1}{6}}\begin{bmatrix}1&-2&0&3\\0&1&0&-\frac{5}{6}\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&-\frac{5}{6}\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\therefore x=[\frac{4}{3},-\frac{5}{6},-2]^T$$

例4.35

$$[A\vdots B]\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-2r_1,\ r_3-3r_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&1\\0&0&1&-1&-4\\0&0&1&-1&-4\\0&0&2&-2&-8\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_1+r_2,\ r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&-3\\0&0&1&-1&-4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\therefore\begin{matrix}x_1=x_2-3\\x_3=x_4-4\end{matrix}$$

$\therefore x=[-3,0,-4,0]^T+k_1[1,1,0,0]^T+k_2[0,0,1,1]^T,\ k_1,k_2\in R$

例4.36

$$[A\vdots B]\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}a&1&1&4\\0&0&1&-2\\1&1&b&1\end{bmatrix}$$ $\therefore x_3=-2$，代入原方程得：$\begin{cases}ax_1+x_2-2=4\\ax_1+x_2-4=2\\x_1+x_2-2b=1\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}ax_1+x_2=6\\x_1+x_2=2b+1\end{cases}\quad\left[\begin{array}{cc:c}a&1&6\\1&1&2b-1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-ar_2}\begin{bmatrix}0&1-a&6-a(2b-1)\\1&1&2b-1\end{bmatrix}$$

$a=1$，$b\neq\frac{5}{2}$ 时，$r(A')\neq r(A'\vdots B')$ 此时无解. $\therefore a\neq1$，解得 $x_1=\frac{5-2b}{a-1}$，$x_2=\frac{a+2ab-6}{a-1}$

综上：$a=1$，$b\neq\frac{5}{2}$ 时，线性方程组无解，$a=1$，$b=\frac{5}{2}$ 时，$x=[6,0,-2]^T+t[-1,1,0]^T,\ t\in R$

$a\neq1$ 时，$x=[\frac{5-2b}{a-1},\frac{a+2ab-6}{a-1},-2]^T$

例4.37解:

(1) 证: 任取一个解: $\xi=(-2+3s-2t,\ 1-2s+3t,\ -1+s,\ 2+t)$

设 $\xi=0$, 则 $\begin{cases}-2+3s-2t=0\\ 1-2s+3t=0\\ -1+s=0\\ 2+t=0\end{cases}$, 四个方程 推出矛盾: 由 $-1+s=0 \Rightarrow s=1$, $2+t=0 \Rightarrow t=-2$ 代入 $-2+3s-2t$ 得 $5 \neq 0$

∴ 假设不成立, 即 ξ 不会为0, 即当原方程一定无0解, 即该方程组不是线性方程组

(2) $(-2+3s-2t,\ 1-2s+3t,\ -1+s,\ 2+t)$

$=(-2,0,-1,2)+s(3,-2,1,0)+t(-2,3,0,1)$, 可看出有2个自由变量

∴ 原方程组秩为 $n-2=4-2=2$

导出组基础解系为 $\xi_1=(3,-2,1,0)$, $\xi_1=(-2,3,0,1)$

例4.38

证: 由题知, 该导出组有2个基础解系 ξ_1, ξ_2.

任取原方程组的一个解 η.

则 $\gamma_1=\eta$, $\gamma_2=\eta+\xi_1$, $\gamma_3=\eta+\xi_2$ 为原方程一组线性无关的解.

设 γ 为原方程组的任意一个解, 则存在数 k_1, k_2, 使得:

$$\gamma=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2$$

$Ax=b$ 的解 $=$ ($Ax=b$ 的特解) + ($Ax=0$ 的通解)

$$=(1-c_1-c_2)\eta+c_1(\xi_1+\eta)+c_2(\xi_2+\eta)$$

$$=(1-c_1-c_2)\gamma_1+c_1\gamma_2+c_2\gamma_3$$ 即 γ 可由 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性表出。

例4.39 只有0解, 即 $|A|\neq 0$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0\\ 1-\lambda & 0 & 0\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \neq 0 \quad \therefore \lambda \neq 1$$

例4.40

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a\\ 0 & a-2 & -3\end{vmatrix} = 3-a(a-2) = 3-a^2+2a$$

① 当 $|A|\neq 0$ 时, 即 $a\neq 3$ 且 $a\neq -1$ 时 $r(A)=3$, 方程才能有~~无穷多~~唯一解

$$[A\,\vdots\,B] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & a-2 & -3 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+(a-2)r_2} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & (a-3)\end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\times\frac{1}{(a-3)(a+1)}} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-ar_3} \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \frac{a}{a+1}\\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{a+1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1}\end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a+1}\\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{a+1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1}\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $a\neq 3$ 且 $a\neq -1$ 时有唯一解，$x=\left[\frac{a+2}{a+1}, -\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right]$

② $a=-1$ 时

$$[A\vdots B]=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&3\\1&-1&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&-3&-3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-(-3)r_2}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$$

$r(A)\neq r(A\vdots B)$ 此时无解.

③. $a=3$ 时

$$[A\vdots B]=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&5&3\\1&3&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&1&-3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&7&3\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&7&3\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x_1=3-7x_3$
$x_2=3x_3-1$

$\therefore$ $x=[3,-1,0]^T+k[-7,3,1]^T$, $k\in R$

例. 4.41

(1) 非齐次线性方程有3个线性无关的解，则其导出组有 $3-1=2$ 个基础解系.
其系数矩阵的秩为 $n-$基础解系的个数 $=4-2=2$

(2). $[A\vdots B]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&2&1&2\\0&a-1&4&2&2\\0&3&b-4&-3&-3\end{bmatrix}$

由(1)知 $r(A)=2$ $\therefore$ $\frac{a-1}{3}=\frac{4}{b-4}=\frac{2}{-3}$ $\Rightarrow$ $a=-1$ $b=-2$

代入继续高斯消元

$$\xrightarrow{r_3+\frac{3}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&-1&2&1&2\\0&-2&4&2&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&-2&4&2&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&-2&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1=1$, $x_2=2x_3+x_4-1$

$\therefore$ $x=[1,-1,0,0]^T+k_1[0,2,1,0]^T+k_2[0,1,0,1]^T$, $k_1,k_2\in R$