第七次习题课

知识点

1.极大线性无关组：在不全为的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中取出一组线性无关的向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$，若任意添加 $\beta\in\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 得到的向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k},\beta$ 是线性相关的，那么我们称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组。向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩。

2.$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 一个极大线性无关组的充分必要条件是 $k=r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k})=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$. 把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 化为阶梯型矩阵后，不全为 0 的行的首个非零元对应的向量放一起就得到的是极大线性无关组。

3.向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中一部分向量（部分向量组）线性相关，则整个向量组线性相关。

推论：部分相关则整体相关，反之不成立。整体无关则部分无关，反之不成立。

4.向量组的秩:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为向量组的秩。记为 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$。

5.向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关当且仅当其中至少有一个向量是其余 $s-1$ 个向量的线性组合。

6.如何求 $Ax=0$ 的通解？

(1)$(A,0)$ 化为最简阶梯型矩阵；

(2) 找出自由变量，假设自由变量是 x_{r+1},x_{r+2},x_n；

(3) 写出基础解系（基础解系是解的极大线性无关组）

ξ_i: 取 $\xi_i=1$，其余自由变量取 0 得到的解

则通解为 $c_1\xi_1+c_2x_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 是任意常数。

7.称齐次方程 $Ax=0$ 是 $Ax=\beta$ 的导出组。

(1)η 是 $Ax=\beta$ 的一个解，ξ 是 $Ax=0$ 的解，则 $\eta+\xi$ 也是 $Ax=\beta$ 的一个解。

(2)η_1,η_2 是 $Ax=\beta$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解。

(3)η 是 $Ax=\beta$ 的一个（特）解，则 $Ax=\beta$ 的（通解）任意解都可以表示为 $\eta+\xi$ 的形式，其中 ξ 是 $Ax=0$ 的任意一个解。