第十一次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1.期末 2014-2015 一 5.

已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_2$ 经正交变换 $x=py$ 可化为标准形：$f=6y^2$, 则 $a=$______。

2.期末 2014-2015 六.

设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3 \quad (b>0)$$

的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12。

(1) 求 a,b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出所用正交变换。

3.期末 2015-2016 一 6.

若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{bmatrix}$ 正定，则 λ 满足的条件为______。

4.期末 2015-2016 四 1.

设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^2-3A+2E=0$, 其中 E 为单位矩阵，试证：

(2)A 为正定矩阵。

5.期末 2016-2017 一 6.

设 $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&6\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$, 已知二次型 $f(x)=x^TBx$ 是正定的，则 λ 的取值范围为______。

6.期末 2016-2017 三 2.

已知实对称矩阵 $A\begin{bmatrix}a&-1&4\\-1&3&b\\4&b&0\end{bmatrix}$ 与 $A\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&5\end{bmatrix}$ 相似。

(1) 求矩阵 A 化；

(2) 求正交线性变换 $x=Qy$，把二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为标准型.

7.期末 2016-2017 四 2.

已知 A,B 是同阶实对称矩阵。

(1) 证明如果 A~B，则 $A\simeq B$, 也就是相似一定合同；

(2) 举例说明反过来不成立。

8.期末 2017-2018 一 6.

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 的秩为 2，则 $t=$______。

9.期末 2017-2018 三 2.
设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$。
(1) 写出该二次型的矩阵 A;
(2) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ$ 为对角型矩阵；
(3) 给出正交变换，化该二次型为标准型。

10.期末 2018-2019 一 5.
若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 t 应满足______。

11.期末 2018-2019 三 2.
设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2$。
(1) 写出该二次型的矩阵 A;
(2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵；
(3) 给出正交变换，将该二次型化为标准型；
(4) 写出二次型的秩，正惯性指标和负惯性指标。

12.期末 2019-2020 一 6.
已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&3\\1&3&x\end{bmatrix}$ 的正惯性指数为 3，则 x 的取值范围为______。

13.期末 2019-2020 三 3.
设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$.
(1) 写出该二次型的矩阵 A;
(2) 用正交变换 $x=Qy$ 把该二次型化为标准型。

14.期末 2019-2020 四 1.
设 A 为 m 阶正定矩阵，B 为 $\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$。

15.期末 2019-2020 四 2.
设 α,β 是 n 维列向量，证明 $r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le 2$。

16.期末 2017-2018 四 2.
设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，证明 $Ax=0$ 与 $(A^TA)x=0$ 是同解方程，进一步得出 $r(A)=r(A^tA)$。