第四次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 88 分钟.**

26. 初等矩阵(14分钟)
27. 初等矩阵与初等变换的关系(14分钟)
28. 矩阵的等价与等价标准形(16分钟)
29. 矩阵的秩(14分钟)
30. 秩的性质(15分钟)
31. 线性方程组有解的判定定理(15分钟)

- **看视频的同时记好笔记.**
- **看线性代数教材 P23 定义1.3.7-P25, P82 例3.1.11-**

P843.1.2, P47-P55 的内容.

- **课堂上将分组讨论 2.23, 2.24, 2.25, 2.27, 2.28, 2.29, 2.33, 2.35, 2.36, 2.38.**

- **组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.**

- **每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.**

例 2.23 用初等变换把 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 化为标准型矩阵.

例 2.24 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(1) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 2×3 矩阵且 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 2$. 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的秩可能为 $2+2=4$.

(2) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则不存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

例 2.25 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & -4 & 7\\ 1 & -1 & 12\end{pmatrix}$. 问: 下面的矩阵中, 哪些是与 $\boldsymbol{A}$ 相抵 (或, 等价) 的? 说明理由.

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}6 & 7 & 8\\ 3 & -1 & 3\\ 3 & 8 & 5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例 2.26 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{0}$. 证明:

$$r(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}_n)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)=n.$$

例 2.27 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(3) 准上三角阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 的秩等于 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{C})$.

例 2.28 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$, 而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 则秩 $r(\boldsymbol{AB})=$ ______.

例 2.29 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -10 & 2 & -6 \\ 1 & -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 的秩.

例 2.30 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个 (i,j)-元都是同一个数 a. 求 $r(\boldsymbol{A})$.

例 2.31 设线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 增广矩阵为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$. 证明: $r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})$, 或者 $r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})-1$.

例 2.32 设 $\boldsymbol{A}$ 是任意的 $m\times n$ 矩阵. 任意取定 $\boldsymbol{A}$ 的 m' 行和 n' 列. 设 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的这些行和这些列的交叉处的元按在 $\boldsymbol{A}$ 中的位置而构成的 $m'\times n'$ 矩阵. 证明: $r(\boldsymbol{B})\leq r(\boldsymbol{A})$.

例 2.33 设 a_{ij} 是常数. 设有齐次线性方程组

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=0\\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=0 \end{cases}
$$

和

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+a_{41}x_4=0\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3+a_{42}x_4=0\\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3+a_{43}x_4=0\\ a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4=0 \end{cases}
$$

证明: (I) 有非零解 $\Leftrightarrow$ (II) 有非零解.

例 2.34 判断方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

是否有解; 如果有解, 是有唯一解还是无穷多个解?

例 2.35 判断方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

是否只有零解.

例 2.36 已知 λ 为常数. 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+2\lambda x_2-2x_3+3x_4=\lambda \end{cases}$$

在 λ 分别为何值时无解, 有唯一解, 有无穷多个解?

例 2.37 设一个非齐次方程组和一个齐次线性方程组的系数矩阵都是矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(1) 证明: 如果该非齐次方程组有且仅有一个解, 则该齐次方程组只有零解.

(2) 如果该齐次方程组有无穷多个解, 那么该非齐次方程组是否也有无穷多个解? 说明理由.

例 2.38 矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 什么时候无解? 什么时候有解? 有解的时候, 什么时候有唯一的一组解, 什么时候有无穷多组解?