

第十次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1. 期末 2015-2016 三 2.

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$ 。

(1) 求 A 对应于特征值 1 的特征向量;

(2) 求 A ;

(3) 求 A^{2016} 。

解:

(1) 由于 A 是实对称矩阵, 所以对于 A 的不同特征值的特征向量正交, 所以设特征值 1 对应的特征向量是 $\alpha = [x_1, x_2, x_3]$ 。所以有:

$$\alpha_1^T \alpha = x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$$

分别取 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 得 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

α_2, α_3 即为 A 对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义: $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ 。所以:

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3] \Rightarrow$$

$$A = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

式中: $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(3) 由 (2) 得: $A^2 = E_3$ (E 表示单位矩阵。) 所以 $A^{2016} = (A^2)^{1008} = E_3$ 。

◇

2. 期末 2016-2017 一 4.

设 $\alpha_1 = (a, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, b, -1)^T, \alpha_3 = (1, -2, c)^T$ 是正交向量组, 则 $a + b + c =$ _____。

解:

由题得:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2^T = a + b - 1 = 0 \\ \alpha_1\alpha_3^T = a - 2 + c = 0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 1 - 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 2$$

◇

3. 期末 2016-2017 一 5.

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 1, 2, 3 对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, -1, -1)^T, \alpha_3$, 则 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3 =$ _____。

解:

设 $\alpha_3 = [x_1, x_2, x_3]^T$, 实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的, 所以:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_3^T = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = -1$, 有 $\alpha_3 = [0, 1, -1]$

◇