四川大学《线性代数三》历年期中测试答案解析

王松年

写在前面：

1.答案里说的课本指的是由四川大学数学学院编写的《线性代数》（中国人民大学出版社）。

2.仅供内部参考使用，请勿将此文档上传到百度文库以及其同类网站上。

3.由个人整理，如果发现错误或有更好的解题方法请发送邮件至 1315030237@$qq.com$.

2015-2016 年第一学期

一、填空题

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{bmatrix}$，则代数余子式之和 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$___0___。

解：

由题得：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=a_{3,2}A_{32}=(-1)^{3+2}\times(-7)\times\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0$$

◇

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&x&1&2\\1&x&1&-1\\3&2&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}$，则 x^3 的系数为______。

解：

方法一：求出对应的行列式，然后写出 x^3 的系数。(此方法太过繁琐，容易出错，不推荐使用)

用 $Matlab$ 计算出来的结果为：$f(x)=2x^4-x^3-7x^2+12x-8$.(仅供参考)

方法二：使用定义，课本 106-108 页。

思路：使用行列式的定义来做。仅找出与 x^3 有关的项。这里取列按照自然排列，行由自己指定（也可以取行按照自然排列，列由自己指定）。

第一列中：取第一行，第二列第三列第四列无论怎么取都不可能构成 x^3。

（注意：在行列式的定义式中，每一项中的几个元素必须来自不同的行数和列数，如：对于此题来说，列按自然排列，第一个元素取第一列中的第一行，那么第二个元素只能从剩下三列中的剩下三行来取）

第一列中：取第二行，第二列取第一行，第三列取第三行，第四列取第四行。即 $(-1)^{\tau(2134)}a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}=(-1)^1 1*x*x*x=-x^3$(注意下标，列（黑色）是自然排列，行（红色）是上边分析得来的)

第一列取第三行第四行都不能构成 x^3。

验证：x^2 的系数

列取自然排列，行按下述几个取时构成 x^2:1324 3124 3214 4231 4132 即：

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}+(-1)^{\tau(3124)}a_{31}a_{12}a_{23}a_{44}+\\&(-1)^{\tau(3214)}a_{31}a_{22}a_{13}a_{44}+(-1)^{\tau(4132)}a_{41}a_{12}a_{33}a_{24}+(-1)^{\tau(4231)}a_{41}a_{22}a_{33}a_{14}\\=&(-4+3-3-1-2)x^2=-7x^2\end{aligned}$$

可以看出和方法 1 算的结果一样。 ◇

3. 设 a,b,c 满足方程 $\begin{vmatrix}1&a&b&c\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=1$，则 $abc=$______。

解：

对行列式做如下变换：第一行减去 c 倍的第四行，第一行减去 b 倍的第三行，第一行减去 a 倍的第二行，得到如下行列式：

$$\begin{vmatrix}1&a&b&c\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-a^2-b^2-c^2&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=1-a^2-b^2-c^2=1$$

即 $a^2+b^2+c^2=0$, 对于实数，任何数的平方都大于等于 0，所以可以推出 $a=0,b=0,c=0$，所以 $abc=0$。 ◇

4. 设 $A=\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}$, 若 $B=2BA-3I$，其中 I 为单位矩阵，则 $|B|=$______。

解：

由题得：$B=2BA-3I \quad\Rightarrow B(2A-I)=3I$，所以 $|B(2A-I)|=|3I|=3^2=9, |2A-I|=\begin{vmatrix}3&0\\2&7\end{vmatrix}=21$, 所以 $|B(2A-I)|=|B||2A-I|=21|B|=9$, 解得 $|B|=\dfrac{3}{7}$ ◇

5. 若 A 为 4 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$, 则 $\left|\left(\dfrac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|=$______。

解：

$\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|=\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-|A|A^{-1}\right|=|4A^{-1}-\frac{1}{2}A^{-1}|=|\frac{7}{2}A^{-1}|=\left(\frac{7}{2}\right)^4|A|^{-1}=\frac{7^4}{8}$ ◇

6. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1}=$______。

解：

$A^*=|A|A^{-1}$，所以 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}(A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A$

$|A|=1\times1\times3=3$ 所以：$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{3}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}$ ◇

7. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-4\\1&2&3&-1\\2&3&-1&-1\end{bmatrix}$, 则 $ABA^{-1}=$______。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}A_{11}&0\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$，其中 $A_{11}=A_{22}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E_2, A_{21}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$. 所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}E_2&0\\-E_2A_{21}E_2&E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

所以

$$ABA^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-4\\1&2&3&-1\\2&3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-4\\3&4&7&5\\2&3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1&2&3\\-2&1&1&-4\\-11&4&7&5\\4&3&-1&-1\end{bmatrix}$$

◇

8. 设 A,B 均为 n 阶方阵，$|A|=2$, 且 AB 可逆，则 $r(B)=$______。

解：

课本 97 页命题 3.2.4.

$|A|=2\neq 0$，所以 A 可逆，又因为 AB 可逆，所以 B 可逆，即 B 满秩。$r(B)=n$ ◇

二、解答题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$。

解：

（过程不唯一）

对行列式做如下变换：把第二行加到第三行，把第二行加到第四行，由行列式的性质，此时行列式的值没有改变。即

$$\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\5&0&4&1\\2&0&3&2\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\times(-1)\times\begin{vmatrix}5&4&2\\5&4&1\\2&3&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&4&2\\5&4&1\\2&3&2\end{vmatrix}=-|A|$$

对于 $|A|$：把第二行的负一倍加到第一行

$$-\begin{vmatrix}5&4&2\\5&4&1\\2&3&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&0&1\\5&4&1\\2&3&2\end{vmatrix}=-(-1)^{1+3}\times(5\times3-2\times4)=-7$$

◇

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}$。

解：

对行列式做如下变换：把第二列的负一倍分别加到第一列和第三列上。得到 $\begin{vmatrix}a(a-b)&ab&b(b-a)\\a-b&a+b&b-a\\0&1&0\end{vmatrix}$

把第三列加到第一列上：

$$\begin{vmatrix}(a-b)^2&ab&b(b-a)\\0&a+b&b-a\\0&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}(a-b)^2[(a+b)0-(b-a)]=(a-b)^3$$

◇

3. 若 $(2I-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 求 A。

解：

由题得：$(2I-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，等式两边左乘 $(2I-C^{-1}B)^{-1}$:

$$\begin{aligned}A^T&=(2I-C^{-1}B)^{-1}C^{-1}=[C(2I-C^{-1}B)]^{-1}\\&=(2C-B)^{-1}\end{aligned}$$

$$D=2C-B=2\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

所以

$$[D|E_4]\xrightarrow[r_3-2r_4]{\substack{r_1-4r_4\\r_2-3r_4}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&0&1&0&0&-4\\0&1&2&0&0&1&0&-3\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-3r_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&-3&2\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

所以 $A^T=D^{-1}=(2C-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,$A=(A^T)^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$. ◇

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$,$A^T(BA^{-1}-I)^TX=B^T$，求 X。

解：

由题得：$A^T(BA^{-1}-I)^T=[(BA^{-1}-I)A]^T=(B-A)^T$, 所以

$$X=((B-A)^T)^{-1}B^T=((B-A)^{-1})^TB^T=[B(B-A)^{-1}]^T$$

$$B-A=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(由上一题可以看出，B-A 是上一题目中 D 的左上角三行三列的元素。其逆矩阵也应该是 D 逆矩阵左上角三行三列，这里直接用结论) 所以：

$$(B-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad B(B-A)^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&3\\0&2&-3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$X=\left[B(B-A)^{-1}\right]^T=\begin{bmatrix}2&0&0\\-3&2&0\\3&-3&2\end{bmatrix}$$

◇

5. 设 $A=\begin{bmatrix}3&4&1\\0&2&0\\5&1&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&3&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 求 AB 的秩 $r(AB)$。

解：

由题得：$r(B)=2$。

$$|A|=2\times\begin{vmatrix}3&1\\5&3\end{vmatrix}=8\neq 0$$

所以 A 可逆，即 A 满秩，$r(A)=3$，所以 $r(AB)=r(B)=2$。 ♢

三、证明题

1. 设 A 可逆，且 $A^*B=A^{-1}+B$，证明 B 可逆，当 $A=\begin{bmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{bmatrix}$ 时，求 B。

证明：

由题得：$A^*B=A^{-1}+B$，即 $(A^*-E)B=A^{-1}$，两边同时左乘 A 得：$A(A^*-E)B=E$，所以 B 可逆，其逆矩阵为 $A(A^*-E)=(|A|E-A)$.

由题得：$|A|=2\times 2\times 2=8$

$$B=(|A|E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}6&-6&0\\0&6&-6\\0&0&6\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

♢

2. （18-19 学年二大题的第 1 题） 设 A 为 n 阶方阵，$AA^T=I$，$|A|<0$，证明:$|A+I|=0$。

证明：

由行列式的性质得 $|AB|=|A||B|, |A^T|=|A|$，所以由题得

$|AA^T|=|I|$, 等号左边：$|AA^T|=|A||A^T|=|A||A|=|A|^2$, 等号右边等于 1，由题得 $|A|<0$，所以 $|A|=-1$.

$|A+I|=|A+AA^T|=|A(I+A^T)|=|A||(I+A)^T|=-|I+A|$，所以 $|A+I|=0$。（注：两个矩阵相加的转置等于两个矩阵分别转置后相加，即 $A^T+B^T=(A+B)^T$） ♢

2016-2017 年第一学期

一、填空题

1. 设 M_{ij} 是 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的第 i 行第 j 列元素的余子式，则 $M_{11}+M_{12}=$_______。

解:

由题得: $M_{11}+M_{12}=M_{11}+M_{12}+0M_{13}=A_{11}-A_{12}+0A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\times(-1)^{(3+1)}\times[(-1)\times 2-2\times 0]=-4$

◇

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=$_______。

解:

经观察，该行列式为四阶范德蒙行列式，且 $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$，所以原式 $=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)=12$ ◇

3. 设方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2-x_3=0 \\ kx_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 $k=$ __-1 或 4__。

解:

该方程组的系数矩阵为一个三阶方阵，由解得存在唯一性定理，如果 $Ax=0$ 有非零解，则 $|A|=0$。所以:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1+k)(4-k)=0 \quad \Rightarrow k_1=-1 \ k_2=4$$

(上述行列式第一行减去第三行, 第二行加上第三行后按第三列展开) ◇

4. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,A 为 n 阶方阵，定义 $f(A)=aA^2+bA+cI$，如果 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f(x)=x^2-x-1$, 则 $f(A)=$_______。

解:

由题得:

$$A=E+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=E+B$$

可以看出: $B^2=0$. 所以 $A^2=(E+B)^2=E+B^2+2EB=E+2B$.

所以 $f(A)=A^2-A-E=E+2B-E-B-E=B-E=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ◇

5. 若 A 为 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$______。

解：

$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|3^{-1}A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|A|^{-1}=-\frac{16}{27}$ ◇

6. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\-1&a&2&1\\3&1&b&-1\end{bmatrix}$, $r(A)=2$，则 $a+b=$ <u>-3</u>。

解：

由题得：

$$A\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&a-1&4&2\\0&4&b-6&-4\end{bmatrix}$$

若 $r(A)=2$，则 $r_2=kr_3$ 其中 $k\neq 0$.(指的是非零元素成比例) 即：

$$\frac{a-1}{4}=\frac{4}{b-6}=\frac{2}{-4}\quad\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$$

◇

二、解答题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$。

解：

步骤不唯一

把所有列加到第一列，原行列式变为

$$\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$$

把第一行的负一倍分别加到第二行，第三行，第四行。$10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}$，把第四行加到第二行

$$10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&-4\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}=10\times(-4)\times 2\times(-1)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=80\times 1\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=160$$

◇

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix}x-1&1&-1&1\\-1&x+1&-1&1\\-1&1&x-1&1\\-1&1&-1&x+1\end{vmatrix}$, 求 $f(x)=0$ 的根。

解：

分别把第四行的负一倍加到第一行、第二行与第三行上

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ -1 & 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$$

把前边三列全部加到第四列上：

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ -1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^4$$

所以 $f(x) = x^4 = 0$ 的根为 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$ ♢

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，若矩阵 X 满足方程 $AX + I = A^2 + X$，求 X。

解：

由题得：$AX + I = A^2 + X$, 所以 $(A-I)X = A^2 - I = (A+I)(A-I) = (A-I)(A+I)$. 等式两边同时左乘 $(A-I)^{-1}$:

$$(A-I)^{-1}(A-I)X = (A-I)^{-1}(A-I)(A+I) \quad \Rightarrow \quad X = (A+I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

♢

4.（2015-2016 的期末试题一大题第 2，原题）

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $A^2 - 2A$ 的秩 $r(A^2 - 2A)$。

解：

由题得: $A^2 - 2A = A(A-2E)$, 可以看出 A 是满秩方阵, 即 A 可逆。满秩方阵一定可逆, 所以 $r(A^2-2A) = r(A(A-2E)) = r(A-2E)$。

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 r(A-2E)=3，所以 $r(A^2 - 2A) = 3$ ♢

5. 若 $\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1} BA^{-1} = 2AB + I$，且 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 B。

解：

由题得：$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以有：

$$|A_{11}| = |A_{22}| = 2 \times 1 = 2; \quad |A| = |A_{11}| \cdot |A_{22}| = 4; \quad A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}; \quad A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+I \quad\Rightarrow\quad 4(|A|A^{-1})^{-1}BA^{-1}=2AB+I \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{|A|}ABA^{-1}=2AB+I$$

$$ABA^{-1}=2AB+I \quad\Rightarrow\quad AB=2ABA+A \quad\Rightarrow\quad AB(E-2A)=A \quad\Rightarrow\quad B(E-2A)=I \quad\Rightarrow\quad B=(E-2A)^{-1}$$

$$B=(E-2A)^{-1}=\begin{bmatrix}-3&0&0&0\\-2&-1&0&0\\0&0&-3&-2\\0&0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&0&0&0\\\frac{2}{3}&-1&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

◇

三、证明题

1. 设 A 满足 $A^2-2A+4I=0$，证明 $A+I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$.

思路：题目让证明谁可逆，就凑出这个表达式与某个表达式的乘积等于单位矩阵。

证明：

由题得：$A^2-2A+4I=0$，所以：

$$A^2+A-A-2A+4I=0$$
$$A(A+I)-3A-3I+3I+4I=0$$
$$A(A+I)-3(A+I)=-7I$$
$$(A-3I)(A+I)=-7I$$
$$-\frac{1}{7}(A-3I)(A+I)=I$$

所以 $A+I$ 可逆，$(A+I)^{-1}=-\dfrac{1}{7}(A-3I)$. ◇

2. 已知 $A=(a_{ij})$ 是三阶的非零矩阵，设 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，且对任意的 i,j 有 $A_{ij}+a_{ij}=0$，求 A 的行列式。

解：

因为 $A_{ij}+a_{ij}=0$，所以可以推出 $A+(A^*)^T=0$。即 $(A^*)^T=-A$.（看不懂的用伴随矩阵的定义表达出伴随矩阵，代入该式看一下）两边同时取行列式：

左边：$|(A^*)^T|=|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}=|A|^2$

右边：$|-A|=(-1)^3|A|=-|A|$

所以 $|A|^2=-|A|$，解得 $|A|=-1$ 或 $|A|=0$。

又因为 $(A^*)^T=-A$, 所以有 $r((A^*)^T)=r(-A)$，即 $r(A^*)=r(A)$，所以 $r(A)=n=3$。注：此步看不懂的看课本 121 页的例 3.3.23，记住这个例题的结论。

$r(A)=3$，即满秩，满秩即（可逆 & 行列式不为 0），所以 $|A|=-1$。 ◇

2017-2018 年第一学期

一、解答题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解：

过程不唯一。

把第一列的负一倍分别加到第二、三、四列上：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3\times(3-1)}{2}} 6 = -6$$

◇

2. 求方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ 的根。

解：

把第一行的负一倍分别加到第二、三行上：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = (x-2) \times (-1)^{1+1}[(x-1)x - 2 \times 1] = 0$$

解得：$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -1$。 ◇

3. 设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 及 β 均为 4 维列向量。4 阶矩阵 $A = [\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4], B = [\beta\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4]$, 若 $|A| = 2, |B| = 3$，求

(1)$|A + B|$;

(2)$|A^2 + AB|$;

解：

(1)$A + B = [\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4] + [\beta\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4] = [\gamma_1 + \beta\ \ 2\gamma_2\ \ 2\gamma_3\ \ 2\gamma_4]$，由行列式的性质：

$$\begin{aligned} |A + B| &= |\gamma_1 + \beta\ \ 2\gamma_2\ \ 2\gamma_3\ \ 2\gamma_4| = |\gamma_1\ \ 2\gamma_2\ \ 2\gamma_3\ \ 2\gamma_4| + |\beta\ \ 2\gamma_2\ \ 2\gamma_3\ \ 2\gamma_4| \\ &= 2 \times 2 \times 2|\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4| + 2 \times 2 \times 2|\beta\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4| = 8|A| + 8|B| = 8(|A| + |B|) = 40 \end{aligned}$$

(2)$|A^2 + AB| = |A(A + B)| = |A||A + B| = 2 \times 40 = 80.$ ◇

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $AX + 2B = BA + 2X$，求 X^{2017}。

解：

若存在可逆矩阵 P，使得 $A = P^{-1}BP$，则称矩阵 A 与矩阵 B 相似，记为 $A \sim B$

由题得：$(A - 2I)X = B(A - 2I)$, 等式两边同时乘 $(A - 2I)^{-1}$ 得：$X = (A - 2I)^{-1}B(A - 2I)$，令 $P = A - 2I$，则 $X = P^{-1}BP$. 所以

$$X^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}BPP^{-1}BP = P^{-1}BIBP = P^{-1}B^2P$$

同理可以推出：$X^n = P^{-1}B^nP$.（由此我们可以得出一条结论：若 $A\sim B$，则 $A^n = P^{-1}B^nP$，以后做题可直接使用）对于任意对角矩阵 $C = \begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn} \end{bmatrix}$，可以计算得:$C^2 = \begin{bmatrix} c_{11}^2 & & & \\ & c_{22}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn}^2 \end{bmatrix}$，所以$C^n = \begin{bmatrix} c_{11}^n & & & \\ & c_{22}^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn}^n \end{bmatrix}$ 所以：

$$B^{2017} = \begin{bmatrix} 1^{2017} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2017} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B$$

（下边求逆的过程略）

$$P = A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以：

$$X^{2017} = P^{-1}B^{2017}P = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

◇

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 1 & a \end{bmatrix}$，若 $r(A) = r(B)$，则 a 应满足什么条件。

解：

由题得

$$A \xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 7 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \Leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-7r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -13 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

所以 $r(A) = 4$。$r(B) = 4$，B 满秩即 B 可逆，即 $|B| \neq 0$:

$$|B| \xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1-a & 2-a & 3-a \\ a-1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 2-a & 1 \\ a-1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = -a(1-a) \neq 0$$

所以 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$.

◇

二、判断下列命题是否成立并给出理由。

1. 设 A,B 为同阶对称方阵，则 AB 一定是对称矩阵；

解：

不成立。理由如下：

以 2 阶对称矩阵为例：（式中:a,b,c,x,y,z 为任意实数。）

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \quad AB=\begin{bmatrix} ax+by & ay+bz \\ bx+cy & by+cz \end{bmatrix}$$

可以看出，由于 a,b,c,x,y,z 取值的任意性，所以 $ay+bz\neq by+cz$。（可以取 $a=1,b=2,c=3,x=3,y=4,z=5$ 实际验证一下。） ♢

2. 设 A,B 为 n 阶可逆方阵，则 $(AB)^*=B^*A^*$.

解：

成立。理由如下：

因为 A,B 为 n 阶可逆方阵，所以 AB 可逆，所以 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=|A|B^*A^{-1}=B^*A^*$ ♢

3. 若 $A^2=B^2$，则 $A=B$ 或 $A=-B$。

解：

不成立。理由如下：

理由：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出 $A^2=B^2$，但是 $A\neq B$,$A\neq -B$ ♢

4. 设 2 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若 A 与所有的 2 阶矩阵均可以交换，则 $a=d,b=c=0$。

解：

成立。理由如下：

取任意二阶矩阵（x,y,z,w 为任意实数）:$B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, 则

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$$
$$BA=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} xa+cy & xb+yd \\ az+cw & bz+dw \end{bmatrix}$$

若 A 与 B 可交换，则有 $AB=BA$, 即：

$$ax+bz=xa+cy \tag{1}$$
$$ay+bw=xb+yd \tag{2}$$
$$cx+dz=az+cw \tag{3}$$
$$cy+dw=bz+dw \tag{4}$$

由 (1) 式和 (4) 式得：$bz=cy$，因为 z 和 y 为任意数，所以 $b=c=0$，代入 (2) 式和 (3) 式：$ay=dy,az=dz$，所以 $a=d$。♢

5. 若 $AB=I$ 且 $BC=I$，其中 I 为单位矩阵，则 $A=C$。

解：

成立。理由如下：

设 I 为 n 阶单位矩阵，那么由矩阵乘法的定义有如下关系：

A 的列数等于 B 的行数；A 的行数等于 I 的行数等于 n；B 的列数等于 I 的列数等于 n；
B 的列数等于 C 的行数；B 的行数等于 I 的行数等于 n；C 的列数等于 I 的列数等于 n.

即 A,B,C 均为 n 阶方阵，对于 n 阶方阵，如果 $AB=I$，那么 A,B 可逆，所以 A 是 B 的逆矩阵，C 是 B 的逆矩阵，由逆矩阵的唯一性可知 B=C。 ♢

6. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^3=3A(A-I)$，则 $I-A$ 可逆。

解：

成立。理由如下：

由题得：$A^3=3A(A-I)$，即 $-A^3+3A^2-3A=0$,$-A^3+3A^2-3A+I=I$，所以 $(I-A)^3=I$, 所以 $I-A$ 可逆，其逆矩阵为 $(I-A)^{-1}=(I-A)^2$ ♢

2018-2019 年第一学期

一、解答题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

解：

把第三行加到第一行上：

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & b^2+c^2+a^2 & a^2+b^2+c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)|A|$$

可以看出 $|A|$ 是三阶范德蒙行列式，所以原式 $=(a^2+b^2+c^2)(c-b)(c-a)(b-a)$ ♢

2. 设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,A^*$ 为 A 的伴随矩阵。

(1) 若交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C, 求 $|CA^*|$;

(2) 若 $|A^{-1}+B|=2$，求 $|A+B^{-1}|$.

解：

(1) 交换交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C，所以 $|C|=-|A|$, 所以 $|CA^*|=|C||A^*|=-|A|||A|A^{-1}|-|A||A|^3|A|^{-1}=-|A|^3=-27$。

(2) $|A+B^{-1}|=|EA+B^{-1}E|=|B^{-1}BA+B^{-1}A^{-1}A|=|B^{-1}(BA+A^{-1}A)|=|B^{-1}|\cdot|BA+A^{-1}A|=|B^{-1}|\cdot|(B+A^{-1})A|=|B^{-1}|\cdot|(B+A^{-1})|\cdot|A|=2^{-1}\times 2\times 3=3$。 ♢

3. 已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵。

解：

由伴随矩阵的性质：$A^*=|A|A^{-1}$, 所以 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A=|A^{-1}|A$

由题得：

$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$[A^{-1}|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

所以 $(A^*)^{-1}=|A^{-1}|A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ♢

4. 设 n 阶行列式 $D_n(n=1,2,\cdots):D_1=1,D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},\ldots\ldots,D_n=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(1) 给出 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} 的关系；

(2) 利用找到的递推关系及 $D_1 = 1, D_2 = 0$, 计算 $D_3, D_4, \cdots, D_8$;

(3) 求 D_{2018}

解：

(1) 对 D_n 按第一列进行行列式展开 (a_{11} 表示第一行第一列的元素，A_{11} 表示第一行第一列元素对应的代数余子式)：

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = D_{n-1} - D_{n-2}$$

(2) 由 (1) 得：

$$\begin{aligned} D_3 &= D_{3-1} - D_{3-2} = D_2 - D_1 = -1 \\ D_4 &= D_{4-1} - D_{4-2} = D_3 - D_2 = -1 \\ D_5 &= D_{5-1} - D_{5-2} = D_4 - D_3 = 0 \\ D_6 &= D_{6-1} - D_{6-2} = D_5 - D_4 = 1 \\ D_7 &= D_{7-1} - D_{7-2} = D_6 - D_5 = 1 \\ D_8 &= D_{8-1} - D_{8-2} = D_7 - D_6 = 0 \end{aligned}$$

(3) 由 (2) 可以看出，每 6 组数据为一个循环，即 $D_n = D_{n+6}$, 所以 $2018 \div 6 = 336$ 余 2。所以 $D_{2018} = D_2 = 0$ ◇

5. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 且矩阵 X 满足

$$AXA + BXB = AXB + BXA + I$$

其中 I 为 3 阶单位阵，求 X。

解：

由题得：$AXA + BXB = AXB + BXA + I$ 所以：

$$\begin{aligned} AXA + BXB - AXB - BXA &= I \\ (A-B)XA + (B-A)XB = (A-B)XA - (A-B)XB &= I \\ (A-B)X(A-B) &= I \\ (A-B)X &= I(A-B)^{-1} \\ X = (A-B)^{-1}I(A-B)^{-1} &= ((A-B)^{-1})^2 \end{aligned}$$

$$C=A-B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[C|E]\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

所以 $C^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $C^2=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ ◇

6. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$。

(1) 问 a 为何值时，矩阵 A 和 B 等价。

(2) 当 A 和 B 等价时，求可逆矩阵 P，使得 $PA=B$。

解：

(1) 由题得：$r(B)=2$，若 A 和 B 等价，则 $r(A)=2$。

$$A\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&a\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&a+4\end{bmatrix}$$

$a+4=0$ 即 $a=-4$ 时，$r(A)=2$，所以 $a=-4$。

(2) 由 (1) 得：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}=B$$

由初等行变换得：$E(3\ 2(2))E(2\ 1(1))A=B$ 所以

$$P=E(3\ 2(2))E(2\ 1(1))=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{bmatrix}$$

◇

二、证明题

1. 若 n 阶实矩阵 Q 满足 $QQ^T=I$，则称 Q 为正交矩阵。设 Q 为正交矩阵，则

(1)Q 的行列式为 1 或-1.

(2) 当 $|Q|=1$ 且 n 为奇数时，证明 $|I-Q|=0$，其中 I 是 n 阶单位矩阵；

(3)Q 的逆矩阵 Q^{-1} 和伴随矩阵 Q^* 都是正交矩阵。

证明：

(1) 由题得：$|QQ^T|=|I|=1$, 由行列式的性质：$|QQ^T|=|Q|\cdot|Q^T|, |Q^T|=|Q|$，所以 $|QQ^T|=|Q|^2=1$，解得 $|Q|=1$ 或 $|Q|=-1$.

(2)$|I-Q|=|QQ^T-Q|=|Q|\cdot|Q^T-I|=|Q^T-I|=|(Q^T)^T-I^T|=|Q-I|=|-(I-Q)|=(-1)^n|I-Q|$，因为 n 为奇数，所以 $(-1)^n=-1$, 即 $|I-Q|=-|I-Q|$，所以 $|I-Q|=0$。

(3) 因为 $QQ^T=I$，两边同时左乘 Q^{-1}:$Q^T=Q^{-1}$, 两边同时右乘 $(Q^T)^{-1}$:$I=Q^{-1}(Q^T)^{-1}=Q^{-1}(Q^{-1})^T$, 所以 Q^{-1} 是正交矩阵。

由伴随矩阵的性质：$Q^*=|Q|Q^{-1},(Q^T)^*=(Q^*)^T=|Q^T|(Q^T)^{-1}=|Q|(Q^{-1})^T$，所以 $Q^*(Q^*)^T=|Q|Q^{-1}|Q|(Q^{-1})^T=|Q|^2Q^{-1}(Q^{-1})^T$

由 (1) 得 $|Q|^2=1$, 所以有 $|Q|^2Q^{-1}(Q^{-1})^T=Q^{-1}(Q^{-1})^T=I$, 所以 Q^* 是正交矩阵。 ◇

2. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，如果 $A^2=0$，证明 $A=0$. 并举例说明，如果 A 不是实对称矩阵，上述命题不正确。

证明：

(1) 依题意设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，所以 A^2 为：只看 A^2 对角线上的元素，A^2 的第 k 行第 k 列的元素为 A 的第 k 行乘第 k 列：$a_{1k}^2+a_{2k}^2+\cdots+a_{kk}^2+a_{kk+1}^2+a_{kk+2}^2+\cdots+a_{kn}^2=0$，因为平方一定大于等于 0，所以该式的每一项都为 0，即 $a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{kk},a_{kk+1},a_{kk+2},\cdots,a_{kn}$ 为 0. 即 A 的第 k 行和第 k 列元素为 0.（这一步看不懂的计算一下 A^2 的第一行第一列，第二行第二列的元素验证一下）

因为 A^2 为 0，即其对角线每个元素都为 0，由上边的步骤可以推出 A 的每行每列元素都为 0，即 $A=0$。

(2) 举例：对于二阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,$A^2=0$，$A$ 不是对称矩阵,$A^2=0$ 但 $A\neq 0$。 ◇