第十一次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1.期末 2014-2015 一 5.

已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_2$ 经正交变换 $x=py$ 可化为标准形：$f=6y^2$, 则 $a=$______。

解：

任意二次型 x^TAx 经过正交变换化为标准型时，标准型中平方项的系数即为二次型矩阵 A 的特征值, 即 $6,0,0$ 是 A 的特征值，而 A 的对角线元素是 a,a,a，由特征值性质 $trace(A)=a+a+a=\sum_{i=1}^{3}\lambda=6$，所以 $a=2$。 ♢

2.期末 2014-2015 六.

设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ \ (b>0)$$

的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12。

(1) 求 a,b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出所用正交变换。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{bmatrix},|A|=2(-2a-b^2)$

(1) 由特征值的性质有：

$$\begin{cases}trace(A)=a+2-2=1\\ \prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-12=|A|=2(-2a-b^2)\\ b>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$$

(2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-1)(\lambda+2)-4]=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$$

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2\in R\end{cases}$$

分别取 $[x_2,x_3]^T=[1,0]^T$ 和 $[0,1]^T$ 得：$\alpha_1=[0,1,0]^T,\alpha_2=[2,0,1]^T$，可以看出 α_1 与 α_2 正交。

$\lambda_3=-3$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=0\end{cases}$$

取 $x_3=-2$ 得：$\alpha_3=[1,0,-2]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=[0,1,0]^T\\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{2}{\sqrt5},0,\dfrac{1}{\sqrt5}\right]^T\\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt5},0,-\dfrac{2}{\sqrt5}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$$

◇

3.期末 2015-2016 一 6.

若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{bmatrix}$ 正定，则 λ 满足的条件为______。

解：

由题得：A 为对称矩阵，如果 A 正定，则 $|A|>0$，所以 $|A|=\lambda-5>0\quad\Rightarrow\quad\lambda>5.$ ◇

4.期末 2015-2016 三 3.

设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A)=2$, 且二次型 $f(x)=x^TA^TAx$.

(1) 求 a;

(2) 写出二次型 $f(x)$ 的矩阵 $B=A^TA$;

(3) 求正交变换 $x=Qy$ 将二次型 $f(x)$ 化为标准型，并写出所用的正交变换。

解：

(1) 由题得：

$$A\xrightarrow[r_4-ar_2]{r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-1-a\end{bmatrix}$$

$r(A)=2$，所以 $1+a=0$ 且 $-1-a=0$ 解得：$a=-1$。

(2)

$$B=A^TA=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$$

(3)

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

$\lambda_1=0$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}-2&0&-2\\0&-2&-2\\-2&-2&-4\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得：$\alpha_1=[1,1,-1]^T$.

$\lambda_2=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}0&0&-2\\0&0&-2\\-2&-2&-2\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}$$

取 $x_2=1$ 得：$\alpha_2=[1,-1,0]^T$.

$\lambda_3=6$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}4&0&-2\\0&4&-2\\-2&-2&2\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得：$\alpha_3=[1,1,2]^T$. 因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]^T\\\gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right]^T\\\gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right]^T\end{cases}\qquad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=2y_2^2+6y_3^2$$

◇

5.期末 2015-2016 四 1.

设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^2-3A+2E=0$, 其中 E 为单位矩阵，试证：

(2)A 为正定矩阵。

证明：

对于 n 阶实对称矩阵，如果 A 为正定矩阵，则 A 的全部特征值大于 0. 设 A 的特征值为 λ。由题得：

$$\lambda^2-3\lambda+2=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=1>0,\lambda_2=2>0$$

所以 A 为正定矩阵。 ◇

6.期末 2016-2017 一 6.

设 $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&6\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$, 已知二次型 $f(x)=x^TBx$ 是正定的，则 λ 的取值范围为_______。

解：

由题得：

$$f(x)=x^TBx=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&6\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&2x_1+2x_2&4x_1+6x_2+\lambda x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1^2+2x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$$

所以其对应的二次型矩阵为：$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{bmatrix}$,$A$ 为对称矩阵，如果 A 正定，则 $|A|>0$, 所以 $|A|=\lambda-5>0\quad\Rightarrow\quad\lambda>5$. ◇

7.期末 2016-2017 三 2.

已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&-1&4\\-1&3&b\\4&b&0\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&5\end{bmatrix}$ 相似。

(1) 求矩阵 A；

(2) 求正交线性变换 $x=Qy$，把二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为标准型.

解：

对于对角矩阵，其特征值为对角线上的元素。因为 A 与 B 相似，所以 A 与 B 有相同的特征值。

(1) 由特征值的性质

$$\begin{cases} trace(A)=a+3+0=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=2-4+5=3 \\ |A|=(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & b\\ 4 & 0\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & b\end{vmatrix}=-8b-48=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=2\times(-4)\times 5=-40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$$

(2)

$\lambda_1=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=2x_3 \end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_1=[1,2,1]^T$。

$\lambda_2=-4$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=0 \end{cases}$$

取 $x_3=-1$ 得 $\alpha_2=[1,0,-1]^T$。

$\lambda_3=5$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_2=[1,-1,1]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases} \gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6},\dfrac{1}{\sqrt6}\right]^T \\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt2},0,-\dfrac{1}{\sqrt2}\right]^T \\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt3},-\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right]^T \end{cases} \Rightarrow Q=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt6} & \dfrac{1}{\sqrt2} & \dfrac{1}{\sqrt3} \\ \dfrac{2}{\sqrt6} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt3} \\ \dfrac{1}{\sqrt6} & -\dfrac{1}{\sqrt2} & \dfrac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=2y_1^2-4y_2^2+5y_3^2$$

◇

8.期末 2016-2017 四 2.

已知 A,B 是同阶实对称矩阵。

(1) 证明如果 $A\sim B$，则 $A\simeq B$, 也就是相似一定合同；

(2) 举例说明反过来不成立。

证明：

(1) 因为 $A\sim B$, 所以 A,B 具有相同的特征值，记为 $\lambda_i,(1\le i\le n)$。对于实对称矩阵 A 存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。即存在正交矩阵 Q_1，使得 $Q_1^{-1}AQ_1=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$，对于正交矩阵 Q_1，有 $Q_1^{-1}=Q_1^T$，即 $Q_1^TAQ_1=\Lambda$，所以 A 合同于 Λ，同理 B 合同于 Λ，所以 A 合同于 B。

(2) 反过来描述：A,B 是同阶实对称矩阵，$A\simeq B$，则 $A\sim B$。

由惯性定理（157 页）知：如果：$A=\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & \\ & 3\end{bmatrix}$，$A$,$B$ 为对角阵, 且 $A\simeq B$, 但 A 和 B 的特征值不同，即 A 与 B 不相似。

◇

9.期末 2017-2018 一 6.

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 的秩为 2，则 $t=$_______。

解：

二次型对应的矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&t\\0&t&1\end{bmatrix}$$

A 的秩为 2，即 $|A|=0$, 解得：$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ♢

10.期末 2017-2018 三 2.

设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$。

(1) 写出该二次型的矩阵 A;

(2) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ$ 为对角型矩阵；

(3) 给出正交变换，化该二次型为标准型。

解：

(1) 由题得:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-2)^2-1]=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

$\lambda_1=1$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}$$

取 $x_2=-1$ 得 $\alpha_1=[1,-1,0]^T$。

$\lambda_2=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=x_2=0\\x_3\in R\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_2=[0,0,1]^T$。

$\lambda_3=3$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=0\end{cases}$$

取 $x_2=1$ 得 $\alpha_3=[1,1,0]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right]^T\\\gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=[0,0,1]^T\\\gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型：

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$$

$\diamondsuit$

11.期末 2018-2019 一 5.

若二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定，则 t 应满足_______。

解：

二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，二次型正定，即 A 正定，即 A 的所有顺序主子是大于 0. 即

$$\begin{aligned} &D_1 = 1 \\ &D_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -2 < t < 2 \\ &D_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4t - 4t^2 > 0 \quad -2 < t < 1 \end{aligned}$$

综上所述：$-2 < t < 1$. $\diamondsuit$

12.期末 2018-2019 三 2.

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$。

(1) 写出该二次型的矩阵 A;

(2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵；

(3) 给出正交变换，将该二次型化为标准型；

(4) 写出二次型的秩，正惯性指标和负惯性指标。

解：

(1) 由题得：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 36) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$$

$\lambda_1 = 1$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_1 = [-2, 0, 1]^T$。

$\lambda_2 = 6$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 = \dfrac{5}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 2$ 得 $\alpha_2 = [1, 5, 2]^T$。

$\lambda_3=-6$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-6&-2&2\\-2&-10&-4\\2&-4&-3\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3\\ x_3=-\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得 $\alpha_3=[1,-1,2]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[-\dfrac{2}{\sqrt5},0,-\dfrac{1}{\sqrt5}\right]^T\\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{30}},\dfrac{5}{\sqrt{30}},\dfrac{2}{\sqrt{30}}\right]^T\\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt6},-\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad P=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt5}&\dfrac{1}{\sqrt{30}}&\dfrac{1}{\sqrt6}\\0&\dfrac{5}{\sqrt{30}}&-\dfrac{1}{\sqrt6}\\\dfrac{1}{\sqrt5}&\dfrac{2}{\sqrt{30}}&\dfrac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

所以 P 即为所求的正交矩阵，$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&6&\\&&-6\end{bmatrix}$

(3) 由 (2) 得：f 可经正交变换 $x=Py$ 化为标准型：

$$f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$$

(4) 计算得 $|A|=-2\begin{vmatrix}2&-2\\4&-3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&-2\\4&4\end{vmatrix}=-36\neq0$，所以二次型满秩，即 $r(A)=3$。由 (3) 得，正惯性指标为 2，负惯性指标为 1。 ♢

13.期末 2019-2020 一 6.

已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&3\\1&3&x\end{bmatrix}$ 的正惯性指数为 3，则 x 的取值范围为_______。

解：

A 为实对称矩阵，且 A 的正惯性指数为 3，所以 A 正定，所以 A 的所有顺序主子式大于 0. 所以 $|A|=2(3x-9)-3>0\quad\Rightarrow\quad x>3.5$ ♢

14.期末 2019-2020 三 3.

设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A；

(2) 用正交变换 $x=Qy$ 把该二次型化为标准型。

解：

(1) 由题得:

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&2\\-1&4&0\\2&0&4\end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-2\\1&\lambda-4&0\\-2&0&\lambda-4\end{vmatrix}=-2[2(\lambda-4)]+(\lambda-4)[\lambda(\lambda-4)-1]=(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda+1)\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=4,\lambda_2=5,\lambda_3=-1$$

$\lambda_1=4$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&0\\-2&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=0\\x_2=2x_3\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_1=[0,2,1]^T$。

$\lambda_2=5$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}5&1&-2\\1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得 $\alpha_2=[1,-1,2]^T$.

$\lambda_3=-1$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\1&-5&0\\-2&0&-5\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-\frac{5}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=-2$ 得 $\alpha_3=[5,1,-2]^T$. 因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T\\\gamma_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T\\\gamma_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=4y_1^2+5y_2^2-y_3^2$$

◇

15.期末 2019-2020 四 1.

设 A 为 m 阶正定矩阵，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$。

解：

必要性：如果 B^TB 正定，则存在任意非零实列向量 $x\neq 0$，使得 $x^TB^TBx>0$，即 $(Bx)^TA(Bx)>0$，所以 $Bx\neq 0$。所以 $Bx=0$ 只有零解，即 $r(B)=n$。

充分性：如果 B 的秩为 $r(B)=n$，则线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，所以存在任意非零实列向量 x，使得 $Bx\neq 0$。又因为 A 为正定矩阵，由正定矩阵的定义得：$(Bx)^TABx>0$，即 $x^TB^TABx=x^T(B^TAB)x>0$。因为 x 为任意非零实列向量，所以依正定矩阵的定义，矩阵 (B^TAB) 正定。 ◇

16.期末 2019-2020 四 2.

设 α,β 是 n 维列向量，证明 $r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq 2$。

证明：

由秩的性质：

$$r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\leq\min(r(\alpha),r(\alpha^T))+\min(r(\beta),r(\beta^T))\leq 1+1=2$$

◇

17.期末 2017-2018 四 2.

设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，证明 $Ax=0$ 与 $(A^TA)x=0$ 是同解方程，进一步得出 $r(A)=r(A^TA)$。

解：

(1) 若 x_0 为 $Ax=0$ 的解，则 $Ax_0=0$，对等式两边同时左乘 A^T：$A^TAx_0=0$，即 x_0 为 $A^TAx=0$ 的解。

若 x_1 为 $A^TAx=0$ 的解：则 $A^TAx_1=0$，等式两边同时左乘 x_1^T：$x_1^TA^TAx_1=(Ax_1)^T(Ax_1)=0$，所以 $Ax_1=0$，所以 x_1 为 $Ax=0$ 的解。(注：这里就认为 x 是一个列向量，所以 Ax 也是列向量，用向量内积的性质。)

综上所述：$Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解。

(2)$Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解，则它们解的空间维数相同。又因为解的空间维数 = 未知量的个数-系数矩阵的秩。两个方程的未知数个数相同，所以系数矩阵相同，即 $r(A)=r(A^TA)$ ◇

18.期末 2016-2017 三 3.

在对观测数据拟合的时候经常遇到线性方程组 $Ax=b$ 是矛盾方程的情形，是没有解的。此时我们转而解 $A^TAx=A^Tb$，我们称 $A^TAx=A^Tb$ 是原线性方程组的正规方程组。称正规方程组的解为原方程组的最小二乘解。设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}$.

(1) 证明 $Ax=b$ 无解；

(2) 求 $Ax=b$ 的最小二乘解。

解：

(1) 由题得：

$$[A|B]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&2\\0&-1&1&7\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

可以看出 $r(A)=3\neq r(A|B)=4$，所以 $Ax=b$ 无解。

(2)

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&2\\3&3&1\\2&1&2\end{bmatrix}$$

$$A^Tb=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\6\\10\end{bmatrix}$$

高斯消元步骤略（考试必须写上）。最后解得：$x_1=8, x_2=-6, x_3=0$ ◇