第八次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1.期末 2014-2015 五.

设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}4\\-2\\5\\6\end{bmatrix}$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩与一个最大线性无关组；

(2) 将其余向量用极大线性无关组线性表示。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&-1&3&-2\\2&1&3&5\\3&1&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r-1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&-1&1&-3\\0&-2&2&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(1)$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$, 极大线性无关组为：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_3,\alpha_4)$.(任写一个即可。)

(2) 取 (α_1,α_2), 由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$\begin{cases}\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2\\\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2\end{cases}$$

◇

2.期末 2014-2015 七 2.

设 X_0 是线性方程组 $Ax=b\ (b\neq 0)$ 的一个解，X_1,X_2 是导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系。令 $\xi_0=X_0,\xi_1=X_0+X_1,\xi_2=X_0+X_2$，证明：$\xi_0,\xi_1,\xi_2$ 线性无关。

证明：

设

$$k_0\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2=0\tag{1}$$

要证明 ξ_0,ξ_1,ξ_2 线性无关，根据定义，只需证明 $k_1=k_2=k_3=0$。

由题得：$AX_0=b,AX_1=AX_2=0$，因为 X_1,X_2 为 $AX=0$ 的基础解系，所以 X_1,X_2 线性无关。

把题中条件代入 (1) 式：

$$k_1X_0+k_2X_0+k_2X_1+k_3X_0+k_3X_2=(k_1+k_2+k_3)X_0+k_2X_1+k_3X_2=0\tag{2}$$

(2) 式两边同时左乘矩阵 A:

$$(k_1+k_2+k_3)AX_0+k_2AX_1+k_3AX_2=(k_1+k_2+k_3)b=0$$

因为 $b\neq 0$，所以 $k_1+k_2+k_3=0$. 代入 (2) 式得：$k_2X_1+k_3X_2=0$，因为 X_1,X_2 线性无关，所以 $k_2=k_3=0$。所以 $k_1=0-k_2-k_3=0$。

所以 ξ_0,ξ_1,ξ_2 线性无关。

◇

3.期末 2015-2016 二 3.

设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0),\alpha_5=(2,1,5,6)$，求向量组的秩、极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-1\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&0\\0&1&1&0\\0&2&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{2}{3}r_2]{r_3-\frac{1}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4\times(-\frac{1}{4})]{r_2\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 3，极大线性无关组为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$ 表示 α_3：由最简阶梯型矩阵可以看出 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4=3\alpha_1+\alpha_2$。 ◇

4.期末 2016-2017 一 3.

已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\ax_1-x_2-2x_3=-3\end{cases}$ 与线性方程 $ax_2+x_3=1$ 有公共的解，则 a 的取值范围为_______。

解：

注意同解与公共解的区别：

对于方程组 (1) 和方程组 (2)，如果 α 既是方程组 (1) 的解，也是方程组 (2) 的解，则称 α 是方程组 (1) 和方程组 (2) 的公共解。

对于方程组 (1) 和方程组 (2)，如果 α 是方程组 (1) 的解，则 α 一定是方程组 (2) 的解，反之如果 α 是方程组 (2) 的解，则 α 一定是方程组 (1) 的解，则称，方程组 (1) 和方程组 (2) 同解。

关于公共解，通常有如下解法：(假设方程组 (1) 有两组不同的基础解系 ξ_1,ξ_2，方程组 (2) 有两组不同的基础解系 η_1,η_2)

方法 1：分别求出方程组 (1) 和 (2) 的通解：即 (1) 得到通解为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2$,(2) 的通解为 $l_1\eta_1=l_2\eta$。令两个方程组的通解相等，找出对应的 k 和 l 的关系。

方法 2：求出其中一个通解，代入到另外一个方程组中，找出相应的系数所满足的关系式进一步求出公共解。

方法 3：联立两个方程组得到一个新的方程组 (3)，求出 (3) 的解即为公共解。

显然，此题用方法 3 更合适：联立两个方程组，得到增广矩阵：

$$[A|B]=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\a&-1&-2&-3\\0&a&1&1\end{bmatrix}$$

讨论：$a=0$ 时：显然 $r(A)=r(A|B)$，即线性方程组有解，即这两个线性方程组有公共解。

$a\neq0$ 时，对增广矩阵进一步进行高斯消元：

$$\xrightarrow{r_2-ar_1}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&-1-2a&-2-a&-3-2a\\0&a&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&a&1&1\\0&-1-2a&-2-a&-3-2a\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1+2a}{a}r_3}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&a&1&1\\0&0&-\frac{a^2-1}{a}&-\frac{2a^2+a-1}{a}\end{bmatrix}$$

当 $-\frac{a^2-1}{a}=0$ 且 $-\frac{2a^2+a-1}{a}\neq0$ 时，无解，此时没有公共解，解得 $a=1$. 所以 $a=1$ 时无公共解，所以 $a\neq1$。 ◇

5.期末 2016-2017 二 3.

设向量组 $\alpha_1=(3,1,4,3)^T,\alpha_2=(1,1,2,1)^T,\alpha_3=(0,1,1,0)^T,\alpha_4=(2,2,4,2)^T$，求向量组的所有的极大线性无关组。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}3&1&0&2\\1&1&1&2\\4&2&1&4\\3&1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&1&0&2\\4&2&1&4\\3&1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&1&0&2\\4&2&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-2&-3&-4\\0&-2&-3&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-2&-3&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 2，极大线性无关组为 $(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_3,\alpha_4)$. ◇

6.期末 2017-2018 一 4.

已知 3 阶方阵 A 的秩为 2，设 $\alpha_1=(2,2,0)^T,\alpha_2=(3,3,1)^T$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则导出 $Ax=0$ 的基础解系为______。

解：

因为 α_1,α_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，所以 $A\alpha_1=b,A\alpha_2=b$，且 α_1,α_2 不相等，所以 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $AX=0$ 的基础解系。 ◇

7.期末 2018-2019 二 3.

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&3\\3&5&1&5\end{bmatrix}$,$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，求 $r(A),r(A^*)$ 和 A 的列向量组的极大线性无关组。

解：

$$A\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&1\\0&2&-2&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&-2&2\\0&1&a-2&1\\0&1&-1&b\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{1}{2}r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&-2&2\\0&0&a-3&0\\0&0&0&b-1\end{bmatrix}$$

$$r(A^*)=\begin{cases}n,\ r(A)=n;\\1,\ r(A)=n-1\\0,\ r(A)<n-1.\end{cases}$$

上式中：n 为 A 的阶数。

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

(1)$a=3$ 且 $b=1$ 时：$r(A)=2<4-1=3$,$r(A^*)=0$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_3,\alpha_4)$.

(2)$a=3$ 且 $b\neq1$ 时：$r(A)=3=4-1$,$r(A^*)=1$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

(3)$a\neq3$ 且 $b=1$ 时：$r(A)=3=4-1$,$r(A^*)=1$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

(4)$a\neq3$ 且 $b\neq1$ 时：$r(A)=4$,$r(A^*)=4$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. ◇

8.期末 2019-2020 二 2.

求线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+4x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系。

解：

由题得：增广矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2&3\\2&4&1&3\\2&4&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&3&2&3\\0&-2&-3&-3\\0&-2&-4&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&3&2&3\\0&-2&-3&-3\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+2r_3}\begin{bmatrix}1&3&0&5\\0&-2&0&-6\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&3&0&5\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

所以 $x_1=4x_4, x_2=-3x_4, x_3=x_4$，令 $x_4=1$，得基础解系：$\xi=[4,-3,1,1]^T$。 ◇

9.期末 2019-2020 三 1.

设向量组 $\alpha_1=(1,-4,-3)^T, \alpha_2=(-3,6,7)^T, \alpha_3=(-4,-2,6)^T, \alpha_4=(3,3\ -4)^T$, 求向量组的秩, 并写出一个极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解：

由题得：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\-4&6&-2&3\\-3&7&6&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+4r_1}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&-6&-18&15\\0&-2&-6&5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&-6&-18&15\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{6})}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&1&3&-2.5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{bmatrix}1&0&5&-4.5\\0&1&3&-2.5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，极大线性无关组有两个向量：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_3,\alpha_4)$.(任写一个即可)

以 (α_1,α_2) 为例：$\alpha_3=5\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_4=-4.5\alpha_1-2.5\alpha_2$。 ◇