第二次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 93 分钟.**

8. 矩阵以及特殊的矩阵(11分钟)
9. 矩阵的线性运算(加减)(8分钟)
10. 矩阵的线性运算(数乘)(8分钟)
11. 矩阵的乘法(15分钟)
12. 矩阵乘积的性质(9分钟)
13. 矩阵的乘法没有交换律(11分钟)
14. 矩阵的乘法没有消去律(6分钟)
15. 线性方程组与矩阵方程之间的转化(6分钟)

16. 矩阵的转置(12分钟)
17. 方阵的幂以及矩阵多项式(7分钟)

- **看视频的同时记好笔记.**
- **看线性代数教材 P75-P81引理3.1.1之前、 P86-88页例3.2.6之前的内容.**
- **课堂上将分组讨论2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.11, 2.13, 2.14.**
- **组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.**
- **每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部**

作业.

例 2.1 计算:

$$-2\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2.2 计算:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

例 2.3 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(3) 设 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$. 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $n \times n$ 矩阵. 则

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2.$$

(5) 如果 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A\beta} = \boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{\beta}$ 是任意的 $n \times 1$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

例 2.4 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量, $\boldsymbol{\alpha}^T$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = $ ______.

例 2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵, $tr(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的全部 (i,i)-元的和.

(1) 对任意 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 证明:

$$tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=tr(\boldsymbol{A})+tr(\boldsymbol{B});$$

$$tr(k\boldsymbol{A})=ktr(\boldsymbol{A})\quad(k\text{ 是任意数});$$

$$tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=tr(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}).$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 实矩阵且 $tr(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=0$. 证明: $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

例 2.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$. 计算 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}_3$.

例 2.7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. 求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

例 2.8 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$ 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}_n$.

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵. 则

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2)=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{B}^3.$$

例 2.9 计算$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&4\\0&1&0&2\\1&4&4&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&0&2\\2&3&1&2\end{pmatrix}.$$

例 2.10 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

判断运算$\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$是否有意义,若有意义,算出结果.

例 2.11 设$\boldsymbol{A}_{3\times2}$, $\boldsymbol{B}_{2\times3}$, $\boldsymbol{C}_{3\times3}$,则以下运算

$$\boldsymbol{AC},\boldsymbol{BC},\boldsymbol{ABC},\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BC}$$

哪些有意义?有意义时求出得到矩阵的大小.

例 2.12 下列计算哪些是错误的:

$$k\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 3k & 4k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2.13 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,求$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2)$.

例 2.14 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是三维列向量, $\boldsymbol{\beta}^T$ 表示 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置, 如果 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ 与 $(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta})^2$, $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)^2$.

例 2.15 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 均是 n 维列向量, 证明: $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$.