第四次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期中试题

1.2015-2016 一 7.

设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-4\\1&2&3&-1\\2&3&-1&-1\end{bmatrix}$, 则 $ABA^{-1}=$______。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}A_{11}&0\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$，其中 $A_{11}=A_{22}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E_2, A_{21}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$. 所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}E_2&0\\-E_2A_{21}E_2&E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

所以

$$ABA^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-4\\1&2&3&-1\\2&3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-4\\3&4&7&5\\2&3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1&2&3\\-2&1&1&-4\\-11&4&7&5\\4&3&-1&-1\end{bmatrix}$$

♢

2.期中 2015-2016 一 8.

设 A,B 均为 n 阶方阵，$|A|=2$, 且 AB 可逆，则 $r(B)=$______。

解：

课本 97 页命题 3.2.4.

$|A|=2\neq 0$，所以 A 可逆，又因为 AB 可逆，所以 B 可逆，即 B 满秩。$r(B)=n$ ♢

3.2015-2016 二 3.

若 $(2I-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 求 A。

解：

由题得：$(2I-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，等式两边左乘 $(2I-C^{-1}B)^{-1}$:

$$\begin{aligned}A^T&=(2I-C^{-1}B)^{-1}C^{-1}=[C(2I-C^{-1}B)]^{-1}\\&=(2C-B)^{-1}\end{aligned}$$

$$D=2C-B=2\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

所以

$$[D|E_4] \xrightarrow[r_3-2r_4]{\substack{r_1-4r_4\\ r_2-3r_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&3&0&1&0&0&-4\\ 0&1&2&0&0&1&0&-3\\ 0&0&1&0&0&0&1&-2\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-3r_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&0&0&1&0&-3&2\\ 0&1&0&0&0&1&-2&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&-2\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-2&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&-2&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&-2\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

所以 $A^T = D^{-1} = (2C-B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&-2&1&0\\ 0&1&-2&1\\ 0&0&1&-2\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}, A = (A^T)^T = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ -2&1&0&0\\ 1&-2&1&0\\ 0&1&-2&1 \end{bmatrix}$. ♢

4.2015-2016 二 4.

设 $A = \begin{bmatrix} 1&-1&0\\ 0&1&-1\\ 0&0&1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2&1&3\\ 0&2&1\\ 0&0&2 \end{bmatrix}, A^T(BA^{-1}-I)^TX = B^T$，求 X。

解：

由题得：$A^T(BA^{-1}-I)^T = [(BA^{-1}-I)A]^T = (B-A)^T$, 所以

$$X = ((B-A)^T)^{-1}B^T = ((B-A)^{-1})^TB^T = [B(B-A)^{-1}]^T$$

$$B-A = \begin{bmatrix} 2&1&3\\ 0&2&1\\ 0&0&2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1&-1&0\\ 0&1&-1\\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&3\\ 0&1&2\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

(由上一题可以看出，B-A 是上一题目中 D 的左上角三行三列的元素。其逆矩阵也应该是 D 逆矩阵左上角三行三列，这里直接用结论) 所以：

$$(B-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&-2&1\\ 0&1&-2\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \qquad B(B-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2&1&3\\ 0&2&1\\ 0&0&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&-2&1\\ 0&1&-2\\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&-3&3\\ 0&2&-3\\ 0&0&2 \end{bmatrix}$$

$$X = [B(B-A)^{-1}]^T = \begin{bmatrix} 2&0&0\\ -3&2&0\\ 3&-3&2 \end{bmatrix}$$

♢

5.2016-2017 二 3. 第二次习题课讲过了。

6.2016-2017 三 1.

设 A 满足 $A^2-2A+4I=0$，证明 $A+I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$.

思路：题目让证明谁可逆，就凑出这个表达式与某个表达式的乘积等于单位矩阵。 证明：

由题得：$A^2-2A+4I=0$，所以：

$$A^2+A-A-2A+4I=0$$
$$A(A+I)-3A-3I+3I+4I=0$$
$$A(A+I)-3(A+I)=-7I$$
$$(A-3I)(A+I)=-7I$$
$$-\frac{1}{7}(A-3I)(A+I)=I$$

所以 $A+I$ 可逆，$(A+I)^{-1}=-\frac{1}{7}(A-3I)$. ♢

7.2017-2018 一 4. 第二次习题课讲过了。自己去翻看。

8.2017-2018 二 5. 判断是否成立并给出理由。

若 $AB=I$ 且 $BC=I$，其中 I 为单位矩阵，则 $A=C$。

解：

成立。理由如下：

设 I 为 n 阶单位矩阵，那么由矩阵乘法的定义有如下关系：

A 的列数等于 B 的行数；A 的行数等于 I 的行数等于 n；B 的列数等于 I 的列数等于 n；B 的列数等于 C 的行数；B 的行数等于 I 的行数等于 n；C 的列数等于 I 的列数等于 n.

即 A,B,C 均为 n 阶方阵，对于 n 阶方阵，如果 $AB=I$，那么 A,B 可逆，所以 A 是 B 的逆矩阵，C 是 B 的逆矩阵，由逆矩阵的唯一性可知 B=C。 ♢

9.2017-2018 二 6. 判断是否成立并给出理由。

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^3=3A(A-I)$，则 $I-A$ 可逆。

解：

成立。理由如下：

由题得：$A^3=3A(A-I)$，即 $-A^3+3A^2-3A=0$,$-A^3+3A^2-3A+I=I$，所以 $(I-A)^3=I$, 所以 $I-A$ 可逆，其逆矩阵为 $(I-A)^{-1}=(I-A)^2$ ♢

10.2018-2019 一 5.

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, 且矩阵 X 满足

$$AXA+BXB=AXB+BXA+I$$

其中 I 为 3 阶单位阵，求 X。

解：

由题得：$AXA+BXB=AXB+BXA+I$ 所以：

$$AXA+BXB-AXB-BXA=I$$
$$(A-B)XA+(B-A)XB=(A-B)XA-(A-B)XB=I$$
$$(A-B)X(A-B)=I$$
$$(A-B)X=I(A-B)^{-1}$$
$$X=(A-B)^{-1}I(A-B)^{-1}=((A-B)^{-1})^2$$

$$C=A-B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[C|E]\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

所以 $C^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},C^2=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ ◊

期末试题

11.2014-2015 七 1. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2-A-2I=0$。

(2) 证明：矩阵 $A+2I$ 可逆，并求 $(A+2I)^{-1}$。

证明：

由题得：$A^2-A-2I=0$, 所以

$$A^2+2A-2A-A-2I=0$$

$$A(A+2I)-3A-6I+6I-2I=0$$

$$A(A+2I)-3(A+2I)=(A-3I)(A+2I)=-4I$$

$$-\frac{1}{4}(A-3I)(A+2I)=I$$

所以 $A+2I$ 可逆，$(A+2I)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3I)$ ◊

12.2015-2016 二 2.

已知矩阵 X 满足方程 $X\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{bmatrix}$，求矩阵 X。

解：

由题得：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\-1&0&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2-2r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&3&0&2\\0&1&0&-2&1&-2\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right]$$

所以 $X=\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&2\\-2&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&2&-6\\14&0&11\end{bmatrix}$ ◊

13.2015-2016 四 1.(1)

设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^2-3A+2E=0$, 其中 E 为单位矩阵，试证：

(1)$A+2E$ 可逆；

证明：

由题得：$A^2-3A+2E=0$，所以：

$$A^2+2A-2A-3A+2E=0$$

$$A(A+2E)-5A-10E+10E+2E=0$$

$$A(A+2E)-5(A+2E)=(A-5E)(A+2E)=-12E$$

$$-\frac{1}{12}(A-5E)(A+2E)=E$$

所以 $A+2E$ 可逆，$(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{12}(A-5E)$ ♢

14.2017-2018 二 2.

解矩阵方程 $(2I-B^{-1}A)X^T=B^{-1}$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵，X^T 是 3 阶矩阵 X 的转置矩阵，$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$.

解：

由题得：$(2I-B^{-1}A)X^T=B^{-1}$，所以：

$$\begin{aligned}X^T&=(2I-B^{-1}A)^{-1}B^{-1}=[B(2I-B^{-1}A)]^{-1}\\&=(2B-A)^{-1}\end{aligned}$$

$$C=2B-A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由第三题的计算结果有 $C^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ 所以 $X=C^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$ ♢

15.2018-2019 二 2.

已知 $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$, 且 X 满足 $AX=X+A$，求 X。

解：

由题得：$AX=X+A$, 所以 $(A-E)X=A$，所以 $X=(A-E)^{-1}A$

$$B=A-E=\begin{bmatrix}0&3&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$[B|E]\xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&3&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&3&1&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-3r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&-3\end{array}\right]$$

所以 $(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-3\end{bmatrix}$,$X=(A-E)^{-1}A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}$ ♢

16.2018-2019 四 1.

设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+3A-4I=0$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵。

(1) 证明：$A, A+3I$ 可逆，并求他们的逆；

(2) 当 $A\neq I$ 时，判断 $A+4I$ 是否可逆并说明理由。

解：

(1) 由题得：$A^2+3A-4I=0$，所以 $A(A+3I)=4I$, 所以 $A, A+3I$ 可逆，A 的逆为 $\dfrac{1}{4}(A+3I)$,$A+3I$ 的逆为 $\dfrac{1}{4}A$。

(2) 不可逆，理由：

由题得：$A^2+3A-4I=(A+4I)(A-I)=0$, 假设 $A+4I$ 可逆，则等式两端同时左乘 $(A+4I)^{-1}$ 得 $A-I=0$, 即 $A=I$ 与题目中 $A\neq I$ 矛盾，所以假设不成立。即 $A+4I$ 不可逆。 ♢

17.2019-2020 一 3.

记 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&3\\1&1&0&0\\2&3&0&0\end{bmatrix}$, 则 A^{-1}_______。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}0&A_{12}\\A_{21}&0\end{bmatrix}$，其中 $A_{12}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$, $A_{21}=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}$，设 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，其中 a,b,c,d 为 2 阶方阵，则

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}0&A_{12}\\A_{21}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{12}c&A_{12}d\\A_{21}a&A_{21}b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2&0\\0&E_2\end{bmatrix}$$

所以：$c=A_{12}^{-1}, d=0, a=0, b=A_{21}^{-1}$.

$$[A_{12}|E_2]\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\0&-1&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&-3&2\\0&-1&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times(-1)}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&-3&2\\0&1&2&-1\end{array}\right]$$

$$[A_{21}|E_2]\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&3&-1\\0&1&-2&1\end{array}\right]$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&A_{21}^{-1}\\A_{12}^{-1}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&3&-1\\0&0&-2&1\\-3&2&0&0\\2&-1&0&0\end{bmatrix}$ ◇