期中试卷剩余部分习题
群文件《期中 & 期末试题》

1.期中 2016-2017 一 4.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$,A 为 n 阶方阵，定义 $f(A)=aA^2+bA+cI$，如果 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $f(x)=x^2-x-1$, 则 $f(A)=$______。

解：

由题得：

$$A=E+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=E+B$$

可以看出：$B^2=0$. 所以 $A^2=(E+B)^2=E+B^2+2EB=E+2B$.

所以 $f(A)=A^2-A-E=E+2B-E-B-E=B-E=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\2&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$ ◇

2.期中 2017-2018 二 1. 判断是否成立并给出理由。

设 A,B 为同阶对称方阵，则 AB 一定是对称矩阵；

解：

不成立。理由：

以 2 阶对称矩阵为例：（式中:a,b,c,x,y,z 为任意实数。）

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}x&y\\y&z\end{bmatrix}\quad AB=\begin{bmatrix}ax+by&ay+bz\\bx+cy&by+cz\end{bmatrix}$$

可以看出，由于 a,b,c,x,y,z 取值的任意性，所以 $ay+bz\neq by+cz$。（可以取 $a=1,b=2,c=3,x=3,y=4,z=5$ 实际验证一下。） ◇

3.期中 2017-2018 二 4. 判断是否成立并给出理由。

设 2 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 若 A 与所有的 2 阶矩阵均可以交换，则 $a=d,b=c=0$。

解：

成立，理由如下：

取任意二阶矩阵（x,y,z,w 为任意实数）:$B=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}$, 则

$$AB=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+bz&ay+bw\\cx+dz&cy+dw\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xa+cy&xb+yd\\az+cw&bz+dw\end{bmatrix}$$

若 A 与 B 可交换，则有 $AB = BA$, 即：

$$ax + bz = xa + cy \tag{1}$$
$$ay + bw = xb + yd \tag{2}$$
$$cx + dz = az + cw \tag{3}$$
$$cy + dw = bz + dw \tag{4}$$

由 (1) 式和 (4) 式得：$bz = cy$，因为 z 和 y 为任意数，所以 $b = c = 0$，代入 (2) 式和 (3) 式：$ay = dy, az = dz$，所以 $a = d$。$\diamondsuit$

4.期中 2018-2019 二 2.

设 A 是 n 阶实对称矩阵，如果 $A^2 = 0$。证明 $A = 0$. 并举例说明，如果 A 不是实对称矩阵，上述命题不正确。

解：

证明：（用定义）。

举例：对于二阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,$A^2 = 0$，但 A 不是对称矩阵。 $\diamondsuit$