第七次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1.期末 2015-2016 一 3.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，若 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_i\alpha_i$ 也是 $Ax=b$ 的解，则 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_i=$______。

解：

由题得：$A\alpha_1=b,A\alpha_2=b,A\alpha_3=b,A\sum\limits_{i=1}^{3}c_i\alpha_i=A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3)=b.$

所以 $A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=3b$，即 $A\left(\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_3\right)=b=A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$。◇

2.期末 2015-2016 一 5.

任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-2,3)^T\alpha_3=(t,1,2)^T$ 线性表示，则 t 应满足条件______。

解：

任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $e_1=[1,0,0]^T,e_2=[0,1,0]^T,e_3=[0,0,1]^T$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而 e_1,e_2,e_3 可以表示任意三维实列向量，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 e_1,e_2,e_3 可以相互线性表示，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(e_1,e_2,e_3)=3$. 所以 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2t-6\neq 0$，即 $t\neq 3$。◇

3.期末 2015-2016 四 2.

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，向量 γ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\gamma$ 线性无关。

证明：

向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即存在一组不全为 0 的 $k_i(1\leq i\leq 3)$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3 \tag{1}$$

反证：假设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha$ 线性相关。则存在一组不全为 0 的 $l_i(1\leq i\leq 3)$ 和 l，使得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l(\beta+\gamma)=0 \tag{2}$$

若 $l=0$，则 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l(\beta+\gamma)=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$，此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，与题中的条件矛盾，所以 $l=0$。所以 (2) 式可变形为

$$\beta+\gamma=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)$$

代入 (1) 式：

$$\gamma=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$$

可以看出此时 γ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，与题目矛盾，所以假设错误，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\gamma$ 线性无关。◇

4.期末 2016-2017 四 1.

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的向量组，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关，证明 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示并且表示方法唯一。

证明：

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关，则存在一组不全为 0 的 $l_i(1\leq i\leq 3)$ 和 l，使得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l\beta=0 \tag{1}$$

若 $l=0$，则 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$，此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，与题中的条件矛盾，所以 $l\neq 0$。所以 (1) 式可变形为

$$\beta=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)$$

即 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，不妨设任意两组不全为 0 的数 $m_i,n_i,(1\le i\le 3)$，使得

$$\beta=m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3 \tag{2}$$

$$\beta=n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+n_3\alpha_3 \tag{3}$$

(2) 式减 (3) 式：$0=(m_1-n1)\alpha_1+(m_2-n2)\alpha_2+(m_3-n3)\alpha_3$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以有 $m_1-n1=0,m_2-n2=0,m_3-n3=0$，即 $m_1=n1,m_2=n2,m_3=n3$，由于 m_i 和 n_i 的任意性，所以可证得表示方法唯一。 ◇

5.期末 2017-2018 三 3.

已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T$ 及 $\beta_4=(3,10,b,4)^T$.

(1)a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合？

(2)a,b 为何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并写出该表达式。

解：

记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，则

$$[A|\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&2\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right]$$

(1) 可以看出 $b\neq 2,a\in R$ 时，$Ax=\beta$ 无解，即 β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

(2)$b=2$ 时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

当 $a\neq 1$,$r(A)=r(A,\beta)=3$，此时：$Ax=\beta$ 有唯一解，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{a-1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&-1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

此时 $Ax=\beta$ 的解为 $x_1=-1,x_2=2,x_3=0$，所以 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

$a=1$ 时 $r(A,\beta)=r(A)=2<3$，所以 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的方法不唯一。

$$\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

所以解得 $x_1=-1-2x_3,x_2=x_3+2$，令 $x_3=k,k\in R$，则 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-(1+2k)\alpha_1+(2+k)\alpha_2+k\alpha_3$ ◇

6.期末 2018-2019 一 2.

已知向量组 $\alpha_1=(1,3,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,4,k)$ 线性无关，则实数 k 满足的条件是_______。

解：

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $|A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\3&1&4\\1&1&k\end{vmatrix}\overset{c_3-c_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&0&0\\3&1&1\\1&1&k-1\end{vmatrix}=k-2\neq 0\quad\Rightarrow k\neq 2$$

$\diamondsuit$

7.期末 2018-2019 一 6.

设 3 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$。则行列式 $|A| =$_______。

解：

由题得：$A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 所以

$$A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = (-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2 + \alpha_3)$$

即

$$|A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)| = |A| \cdot |\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3| = |-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2 + \alpha_3|$$
$$|-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2 + \alpha_3| \xlongequal{c_3 - c_2} |-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3| = -|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|$$
$$|A| = -1$$

$\diamondsuit$