第四次习题课
知识点

1.可逆矩阵的定义。

设 A 是 n 阶方阵，若存在 n 阶矩阵 B 使得 $AB = BA = E$，则称 A 可逆（或称 B 可逆），而称 B 为 A 的逆矩阵（或 A 为 B 的逆矩阵）。通常把 A 的逆矩阵表示为 A^{-1}，即 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$。

注意：

(1) 只有 A 是方阵时，才讨论其可逆性；

(2) 可逆矩阵具有左消去律和右消去律。即若 $AB = AC$，且 A 可逆，那么 $B = C$。同理 $BA = CA$, 且 A 可逆，那么那么 $B = C$。

(3) 若 A 可逆，则其逆矩阵一定唯一。

(4) 对角矩阵可逆当且仅当主对角线元素全部不为 0.

(5) 初等矩阵可逆，且其逆矩阵还是初等矩阵。

2.逆矩阵的性质 (以下所指的矩阵都可逆)

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$。

(2) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$。

(3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$。

(4) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$。

(5) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

3.n 阶方阵 A 可逆，当且仅当 $r(A) = n$。即方阵满秩则可逆，可逆则满秩。（是充要条件）

4.n 阶方阵 A 可逆当且仅当以下其中一条成立：

(1) $r(A) = n$。

(2) 线性方程组 $AX = B$ 有唯一解。即线性方程组 $AX = 0$ 只有零解。

(3) A 与可逆矩阵 B 等价。

(4) A 的等价标准型为 E。

(5) A 可以表示为一系列初等矩阵的乘积。

(6) 存在矩阵 B 使得 $AB = E$ 或者 $BA = E$。

(7) A 行等价于 E（A 列等价于 E）。

(8) $\det A \neq 0$。

5.如何求 n 阶方阵 A 的逆矩阵（如果存在的话）。

将 $(A|E_n)$ 化为最简阶梯型矩阵，则最简阶梯型矩阵为 $(E_n|A^{-1})$

6.分块矩阵的逆：

设 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$，其中 A_{11}, A_{22} 是方阵，则 A 可逆当且仅当 A_{11}, A_{22} 都可逆，并且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

设 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$，其中 A_{11},A_{22} 是方阵，则 A 可逆当且仅当 A_{11},A_{22} 都可逆，并且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & 0\\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$