

第十一次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

期末试题

1. 期末 2014-2015 一 5.

已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = py$ 可化为标准形: $f = 6y^2$, 则 $a =$ _____。

解:

任意二次型 $x^T Ax$ 经过正交变换化为标准型时, 标准型中平方项的系数即为二次型矩阵 A 的特征值, 即 $6, 0, 0$ 是 A 的特征值, 而 A 的对角线元素是 a, a, a , 由特征值性质 $\text{trace}(A) = a + a + a = \sum_{i=1}^3 \lambda = 6$, 所以 $a = 2$. \diamond

2. 期末 2014-2015 六.

设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0)$$

的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12。

(1) 求 a, b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型, 并写出所用正交变换。

解:

$$\text{由题得: } A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad m, |A| = 2(-2a - b^2)$$

(1) 由特征值的性质有:

$$\begin{cases} \text{trace}(A) = a + 2 - 2 = 1 \\ \prod_{i=1}^3 \lambda_i = -12 = |A| = 2(-2a - b^2) \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

分别取 $[x_2, x_3]^T = [1, 0]^T$ 和 $[0, 1]^T$ 得: $\alpha_1 = [0, 1, 0]^T, \alpha_2 = [2, 0, 1]^T$, 可以看出 α_1 与 α_2 正交。

$\lambda_3 = -3$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = -2$ 得: $\alpha_3 = [1, 0, -2]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = [0, 1, 0]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型:

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$$

◇

3. 期末 2015-2016 一 6.

若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$ 正定, 则 λ 满足的条件为_____。

解:

由题得: A 为对称矩阵, 如果 A 正定, 则 $|A| > 0$, 所以 $|A| = \lambda - 5 > 0 \Rightarrow \lambda > 5$.

◇

4. 期末 2015-2016 四 1.

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 其中 E 为单位矩阵, 试证:

(2) A 为正定矩阵。

证明:

对于 n 阶实对称矩阵, 如果 A 为正定矩阵, 则 A 的全部特征值大于 0. 设 A 的特征值为 λ . 由题得:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 2 > 0$$

所以 A 为正定矩阵。

◇

5. 期末 2016-2017 一 6.

设 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 已知二次型 $f(x) = x^T Bx$ 是正定的, 则 λ 的取值范围为_____。

解:

由题得:

$$f(x) = x^T Bx = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1 \quad 2x_1 + 2x_2 \quad 4x_1 + 6x_2 + \lambda x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

所以其对应的二次型矩阵为: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$, A 为对称矩阵, 如果 A 正定, 则 $|A| > 0$, 所以 $|A| = \lambda - 5 > 0 \Rightarrow \lambda > 5$. ◇

6. 期末 2016-2017 三 2.

已知实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 4 \\ -1 & 3 & b \\ 4 & b & 0 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$ 相似。

(1) 求矩阵 A ;

(2) 求正交线性变换 $x = Qy$, 把二次型 $f(x) = x^T Ax$ 化为标准型。

解:

对于对角矩阵, 其特征值为对角线上的元素。因为 A 与 B 相似, 所以 A 与 B 有相同的特征值。

(1) 由特征值的性质

$$\begin{cases} \text{trace}(A) = a + 3 + 0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 2 - 4 + 5 = 3 \\ |A| = (-1) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & b \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & b \end{vmatrix} = -8b - 48 = \prod_{i=1}^3 \lambda_i = 2 \times (-4) \times 5 = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

(2)

 $\lambda_1 = 2$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_1 = [1, 2, 1]^T$ 。 $\lambda_2 = -4$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = -1$ 得 $\alpha_2 = [1, 0, -1]^T$ 。 $\lambda_3 = 5$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_3 = [1, -1, 1]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型:

$$f = 2y_1^2 - 4y_2^2 + 5y_3^2$$

◇

7. 期末 2016-2017 四 2.

已知 A, B 是同阶实对称矩阵。(1) 证明如果 $A \sim B$, 则 $A \simeq B$, 也就是相似一定合同;

(2) 举例说明反过来不成立。

证明:

(1) 因为 $A \sim B$, 所以 A, B 具有相同的特征值, 记为 $\lambda_i, (1 \leq i \leq n)$ 。对于实对称矩阵 A 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。即存在正交矩阵 Q_1 , 使得 $Q_1^{-1}AQ = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, 对于正交矩阵 Q_1 , 有 $Q_1^{-1} = Q_1^T$, 即 $Q_1^T AQ = \Lambda$, 所以 A 合同于 Λ , 同理 B 合同于 Λ , 所以 A 合同于 B 。

(2) 反过来描述: A, B 是同阶实对称矩阵, $A \simeq B$, 则 $A \sim B$ 。

由惯性定理 (157 页) 知: 如果: $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}$, A, B 为对角阵, 且 $A \simeq B$, 但 A 和 B 的特征值不同, 即 A 与 B 不相似。

◇

8. 期末 2017-2018 一 6.

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____。

解:

二次型对应的矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}$$

A 的秩为 2, 即 $|A| = 0$, 解得: $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

◇

9. 期末 2017-2018 三 2.

设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A ;

(2) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q$ 为对角型矩阵;

(3) 给出正交变换, 化该二次型为标准型。

解:

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 2)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$\lambda_1 = 1$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = -1$ 得 $\alpha_1 = [1, -1, 0]^T$ 。

$\lambda_2 = 2$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 \in R \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_2 = [0, 0, 1]^T$ 。

$\lambda_3 = 3$ 时:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = 1$ 得 $\alpha_3 = [1, 1, 0]^T$ 。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = [0, 0, 1]^T \\ \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型:

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$$

◇

10.期末 2018-2019 一 5.

若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则 t 应满足_____。

解:

二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, 二次型正定, 即 A 正定, 即 A 的所有顺序主子是大于 0. 即

$$D_1 = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0 \Rightarrow -2 < t < 2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4t - 4t^2 > 0 \quad -2 < t < 1$$

综上所述: $-2 < t < 1$.

◇

11.期末 2018-2019 三 2.

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$ 。

- (1) 写出该二次型的矩阵 A ;
- (2) 求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵;
- (3) 给出正交变换, 将该二次型化为标准型;
- (4) 写出二次型的秩, 正惯性指标和负惯性指标。

12.期末 2019-2020 一 6.

已知实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix}$ 的正惯性指数为 3, 则 x 的取值范围为_____。

13.期末 2019-2020 三 3.

设三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 。

- (1) 写出该二次型的矩阵 A ;
- (2) 用正交变换 $x = Qy$ 把该二次型化为标准型。

14.期末 2019-2020 四 1.

设 A 为 m 阶正定矩阵, B 为 $m \times n$ 实矩阵, B^T 为 B 的转置矩阵, 试证: B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = n$ 。

15.期末 2019-2020 四 2.

设 α, β 是 n 维列向量, 证明 $r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq 2$ 。

16.期末 2017-2018 四 2.

设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 证明 $Ax = 0$ 与 $(A^TA)x = 0$ 是同解方程, 进一步得出 $r(A) = r(A^TA)$ 。