第十次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

考研例题–特征值

1.求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-3\\-4&\lambda-2&-6\\-6&-3&\lambda-9\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-3c_2}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-4&\lambda-2&-3\lambda\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_w-3r_3}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-22&\lambda-11&0\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-13\lambda)=0$$

得到矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=13,\lambda_2=\lambda_3=0$

对 $\lambda=13$：(高斯消元的步骤略，下来自己写)

$$\begin{bmatrix}11&-1&-3\\-4&11&-6\\-6&-3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&-5\\0&3&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1=[1,2,3]^T$，所以属于特征值 13 的特征向量是 $k_1\alpha_1,(k_1\neq 0)$

对 $\lambda=0$：(高斯消元的步骤略，下来自己写)

$$\begin{bmatrix}-2&-1&-3\\-4&-2&-6\\-6&-3&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2=[-1,2,0]^T,\alpha_3=[-3,0,2]^T$，所以属于特征值 0 的特征向量是 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,(k_2,k_3$不全为 $0)$。 $\diamondsuit$

设 $A=[a_{ij}]$ 是三阶矩阵，则 (该式不做推导，感兴趣的可以自己算一下)

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{bmatrix}=\lambda^3-\lambda^2\sum a_{ii}+S_2\lambda-|A|$$

式中：$S_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$。

若 $r(A)=1$(再复习一下第二次习题课讲的这个知识点相关的例题)，则 $|A|=0,S_2=0$, 代入到上式有

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-\sum a_{ii}\lambda^2=\lambda^2\left(\lambda-\sum a_{ii}\right)$$

做推广，对于 n 阶矩阵 A，若 $r(A)=1$, 则 $|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum a_{ii}\right)$

2.已知 $a\neq 0$，求矩阵

$$\begin{bmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量。

解：

方法一：（直接计算）

由特征多项式：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -a & -a\\ -a & \lambda-1 & -a & -a\\ -a & -a & \lambda-1 & -a\\ -a & -a & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\left[\lambda-(3a+1)\right](\lambda+a-1)^3$$

得 A 的特征值是 $3a+1,1-a$。

当 $\lambda=3a+1$ 时，由 $[(3a+1)E-A]=0$，即

$$\begin{bmatrix}3a & -a & -a & -a\\ -a & 3a & -a & -a\\ -a & -a & 3a & -a\\ -a & -a & -a & 3a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可得基础解系为 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，所以 $\lambda=3a+1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1,(k_1\neq0)$。

当 $\lambda=1-a$ 时，由 $[(1-a)E-A]=0$，即

$$\begin{bmatrix}-a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2=(-1,1,0,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1,0)^T\alpha_4=(-1,0,0,1)^T$，所以 $\lambda=1-a$ 的特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，式中 k_2,k_3,k_4 是不全为 0 的任意常数。

方法二：（转换法）

由题得：

$$A=\begin{bmatrix}a & a & a & a\\ a & a & a & a\\ a & a & a & a\\ a & a & a & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-a\end{bmatrix}=B+(1-a)E$$

由于 $r(B)=1$，所以有

$$|\lambda E-B|=\lambda^{4-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{4}a_{ii}\right)=\lambda^3(\lambda-4a)$$

所以矩阵 B 的特征值为 $0,0,0,4a$，所以由特征值的性质，A 的特征值为 $3a+1,1-a,1-a,1-a$。

下边同方法一。 ◇

3.抽象矩阵 1

设 A 是三阶矩阵，且矩阵 A 的各行元素之和均为 5，则矩阵 A 必有特征向量________.

解：

由题得：

$$\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=5\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=5\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=5\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 必有特征值 5 且必有特征向量 $k[1,1,1]^T,(k\neq0)$。 ◇

4.抽象矩阵 2

已知 A 是 3 阶矩阵，如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有通解 $5b+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中 η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，求 A 的特征值和特征向量。

解：

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 $Ax=b$ 的特解加上 $Ax=0$ 的通解。

由解得结构可知 $5b$ 是方程组 $Ax=b$ 的一个解，即 $A(5b)=b$, 所以 $Ab=\frac{1}{5}b$。即 $\frac{1}{5}$ 是 A 的特征值，$k_1b,(k_1\neq 0)$ 是相应的特征向量。

η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，所以必有 $A\eta_1=0=0\eta_1, A\eta_2=0=0\eta_2$, 所以 η_1,η_2 是 A 关于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量，所以特征值 0 对应的特征向量为 $k_2\eta_1+k_3\eta_2,(k_2,k_3$不全为$0)$。

综上所述，A 的特征值为 $\frac{1}{5},0,0$, 对应的特征向量分别是 $k_1b,(k_1\neq 0)$，$k_2\eta_1+k_3\eta_2,(k_2,k_3$不全为$0)$ ◇

5.抽象矩阵 3

设 A 为 3 阶方阵，且 $|A-2E|=|A+2E|=|A-E|=0$, 则 $|3A^*-2A^{-1}|=$________.

解：

A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(-1)^n|A-\lambda E|=0$，所以由题得 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，所以 $|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-4$。所以 A 可逆，所以 $A^*=|A|A^{-1}=-4A^{-1}$, 所以

$$|3A^*-2A^{-1}|=|3\times(-4A^{-1})-2A^{-1}|=|-14A^{-1}|=(-14)^3|A|^{-1}=686$$

◇

考研例题–实对称矩阵

6.设 A 是 3 阶实对称矩阵，秩 $r(A)=2$, 若 $A^2=A$, 则 A 的特征值是________.

解：

设 λ 是 A 的任意特征值，α 是属于 λ 的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$。所以有：

$$A^2\alpha=AA\alpha=A\lambda\alpha=\lambda A\alpha=\lambda\lambda\alpha=\lambda^2\alpha$$

又因为 $A^2=A$，所以有 $A^2\alpha=A\alpha$，即 $\lambda^2\alpha=\lambda\alpha$, 解得 $\lambda=0$ 或 1。

因为 A 是实对称矩阵，所以 $A\sim\Lambda$, 且 Λ 由 A 的特征值所构成，相似矩阵具有相同的秩，所以 $r(\Lambda)=r(A)=2$, 所以可以推出

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 的特征值是 $1,1,0$。 ◇

7.n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\1&1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&a\end{bmatrix}$$

则 $r(A)=$________.

解：

由第二题的方法 2 可快速写出 A 的特征值为 $n+a-1,a-1,a-1,\cdots,a-1$. 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A\sim\Lambda$, 且 Λ 由 A 的特征值所构成，相似矩阵具有相同的秩，所以 $r(\Lambda)=r(A)$, 所以

$$\Lambda=\begin{bmatrix}n+a-1&&&\\&a-1&&\\&&\ddots&\\&&&a-1\end{bmatrix}$$

这里 n 是 A 的阶数，所以不会等于 0。所以

$$r(A)=\begin{cases} n, & 若 a\neq 1 且 a\neq 1-n,\\ n-1, & 若 a=1-n,\\ 1, & 若 a=1.\end{cases}$$

◇

8.设 α 为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

A.$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆 B.$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆 C.$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆 D.$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解：

注意：单位向量指的是向量的模（长度）为 1，要与 $[1,1,1]$ 区分开来。

$\alpha\alpha^T\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)=1\alpha$, 所以 $\alpha\alpha^T$ 有一个特征值 1.

α 为 n 维单位列向量, 所以 $r(\alpha\alpha^T)=1$, 所以由第一题的结论，$\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1,0,0,\cdots,0$。

E 为 n 阶单位矩阵，所以 E 也为实对称矩阵 (特征值为 1)，实对称矩阵相加减依然为实对称矩阵，所以上述选项中每一项均为实对称矩阵。

又由矩阵可逆则行列式一定不为 0（不可逆则行列式一定为 0，充要条件），矩阵的行列式等于特征值的乘积。

$A.c$ 的特征值为 $1-1,1-0,1-0,\cdots,1-0$ 即 $0,1,1,\cdots,1$, 所以 $|E-\alpha\alpha^T|=0\times 1\cdots 1=0$, 即不可逆。

同理可以看出其他选项的行列式均不为 0，即可逆。 ◇

期末试题

9.期末 2015-2016 三 2.

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 对应于 λ_1 的特征向量 $\alpha_1=(0,1,1)^T$。

(1) 求 A 对应于特征值 1 的特征向量；

(2) 求 A;

(3) 求 A^{2016}。

解：

(1) 由于 A 是实对称矩阵，所以对于 A 的不同特征值的特征向量正交，所以设特征值 1 对应的特征向量是 $\alpha=[x_1,x_2,x_3]$。所以有：

$$\alpha_1^T\alpha=x_2+x_3=0 \quad\Rightarrow\quad x_2=-x_3$$

分别取 $\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 得 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$。

α_2,α_3 即为 A 对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$。所以：

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3] \quad\Rightarrow$$
$$A=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3][\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$\left(式中：[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)$

(3) 由 (2) 得：$A^2=E_3$（E 表示单位矩阵。）所以 $A^{2016}=(A^2)^{1008}=E_3$。 ◇

10.期末 2016-2017 一 4.

设 $\alpha_1=(a,1,1)^T,\alpha_2=(1,b,-1)^T,\alpha_3=(1,-2,c)^T$ 是正交向量组，则 $a+b+c=$______。

解：

由题得：

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2^T = a+b-1=0 \\ \alpha_1\alpha_3^T = a-2+c=0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 1-2b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=2$$

$\diamondsuit$

11.期末 2016-2017 一 5.

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3$ 对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,-1,-1)^T,\alpha_3$，则 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3=$______。

解：

设 $\alpha_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的，所以：

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_3^T = x_1+x_2+x_3=0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 2x_1-x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$$

令 $x_3=-1$，有 $\alpha_3=[0,1,-1]$ $\diamondsuit$