第五次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 59 分钟.**

32. 逆矩阵的概念(16分钟)
33. 逆矩阵的性质及可逆的判别法(13分钟)
34. 逆矩阵的等价条件(11分钟)
35. 如何求逆矩阵(9分钟)
36. 分块矩阵的逆(10分钟)

- **看视频的同时记好笔记.**
- **看线性代数教材 P94-P104 的内容.**
- **课堂上将分组讨论 2.40, 2.41, 2.42, 2.43, 2.45, 2.46,**

2.47, 2.48, 2.49, 2.50.

• 组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.

• 每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.

例 2.40 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$, 又已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^5$.

例 2.41 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 是准下三角阵. 证明: $\boldsymbol{M}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

例 2.42 判断矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 是否可逆, 如果可逆, 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 2.43 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$. 证明: $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 可逆.

例 2.44 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 不是数量阵且满足 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{0}$, a 是数. 证明: $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{I}_n$ 可逆 $\Leftrightarrow a\neq 2$ 且 $a\neq 3$.

例 2.45 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵. 则 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可交换 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$ 可交换.

例 2.46 设 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, 则矩阵 $\boldsymbol{B} =$ ______.

例 2.47 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a, 0, \cdots, 0, a)^T$, $(a < 0)$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则 $a =$ ______.

例 2.48 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ _______.

例 2.49 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵, 且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$. 求 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

例 2.50 已知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵, 且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆;

(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.