

第四次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

期中试题

1. 2015-2016 一 7.

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $ABA^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $A_{11} = A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ -E_2 A_{21} E_2 & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ -11 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

◇

2. 期中 2015-2016 一 8.

设 A, B 均为 n 阶方阵, $|A| = 2$, 且 AB 可逆, 则 $r(B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

课本 97 页命题 3.2.4.

$|A| = 2 \neq 0$, 所以 A 可逆, 又因为 AB 可逆, 所以 B 可逆, 即 B 满秩。 $r(B) = n$

◇

3. 2015-2016 二 3.

若 $(2I - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 。

解:

由题得: $(2I - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 等式两边左乘 $(2I - C^{-1}B)^{-1}$:

$$A^T = (2I - C^{-1}B)^{-1}C^{-1} = [C(2I - C^{-1}B)]^{-1} \\ = (2C - B)^{-1}$$

$$D = 2C - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$[D|E_4] \xrightarrow{\substack{r_1-4r_4 \\ r_2-3r_4 \\ r_3-2r_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1-3r_3 \\ r_2-2r_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } A^T = D^{-1} = (2C - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = (A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇

4.2015-2016 二 4.

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^T(BA^{-1} - I)^T X = B^T, \text{ 求 } X.$$

解:

由题得: $A^T(BA^{-1} - I)^T = [(BA^{-1} - I)A]^T = (B - A)^T$, 所以

$$X = ((B - A)^T)^{-1} B^T = ((B - A)^{-1})^T B^T = [B(B - A)^{-1}]^T$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(由上一题可以看出, $B - A$ 是上一题目中 D 的左上角三行三列的元素。其逆矩阵也应该是 D 逆矩阵左上角三行三列, 这里直接用结论) 所以:

$$(B - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B(B - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = [B(B - A)^{-1}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

◇

5.2016-2017 二 3. 第二次习题课讲过了。

6.2016-2017 三 1.

设 A 满足 $A^2 - 2A + 4I = 0$, 证明 $A + I$ 可逆, 并求 $(A + I)^{-1}$.

思路: 题目让证明谁可逆, 就凑出这个表达式与某个表达式的乘积等于单位矩阵。证明:

由题得: $A^2 - 2A + 4I = 0$, 所以:

$$\begin{aligned} A^2 + A - A - 2A + 4I &= 0 \\ A(A + I) - 3A - 3I + 3I + 4I &= 0 \\ A(A + I) - 3(A + I) &= -7I \\ (A - 3I)(A + I) &= -7I \\ -\frac{1}{7}(A - 3I)(A + I) &= I \end{aligned}$$

所以 $A + I$ 可逆, $(A + I)^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 3I)$. ◇

7.2017-2018 一 4. 第二次习题课讲过了。自己去翻看。

8.2017-2018 二 5. 判断是否成立并给出理由。

若 $AB = I$ 且 $BC = I$, 其中 I 为单位矩阵, 则 $A = C$ 。

解:

成立。理由如下:

设 I 为 n 阶单位矩阵, 那么由矩阵乘法的定义有如下关系:

A 的列数等于 B 的行数; A 的行数等于 I 的行数等于 n ; B 的列数等于 I 的列数等于 n ;

B 的列数等于 C 的行数; B 的行数等于 I 的行数等于 n ; C 的列数等于 I 的列数等于 n 。

即 A, B, C 均为 n 阶方阵, 对于 n 阶方阵, 如果 $AB = I$, 那么 A, B 可逆, 所以 A 是 B 的逆矩阵, C 是 B 的逆矩阵, 由逆矩阵的唯一性可知 $B = C$ 。 ◇

9.2017-2018 二 6. 判断是否成立并给出理由。

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = 3A(A - I)$, 则 $I - A$ 可逆。

解:

成立。理由如下:

由题得: $A^3 = 3A(A - I)$, 即 $-A^3 + 3A^2 - 3A = 0, -A^3 + 3A^2 - 3A + I = I$, 所以 $(I - A)^3 = I$, 所以 $I - A$ 可逆, 其逆矩阵为 $(I - A)^{-1} = (I - A)^2$ ◇

10.2018-2019 一 5.

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 且矩阵 X 满足

$$AXA + BXB = AXB + BXA + I$$

其中 I 为 3 阶单位阵, 求 X 。

解:

由题得: $AXA + BXB = AXB + BXA + I$ 所以:

$$\begin{aligned} AXA + BXB - AXB - BXA &= I \\ (A - B)XA + (B - A)XB &= (A - B)XA - (A - B)XB = I \\ (A - B)X(A - B) &= I \\ (A - B)X &= I(A - B)^{-1} \\ X &= (A - B)^{-1}I(A - B)^{-1} = ((A - B)^{-1})^2 \end{aligned}$$

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C|E] \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◇

期末试题

11.2014-2015 七 1. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $A^2 - A - 2I = 0$ 。

(2) 证明: 矩阵 $A + 2I$ 可逆, 并求 $(A + 2I)^{-1}$ 。

证明:

由题得: $A^2 - A - 2I = 0$, 所以

$$A^2 + 2A - 2A - A - 2I = 0$$

$$A(A + 2I) - 3A - 6I + 6I - 2I = 0$$

$$A(A + 2I) - 3(A + 2I) = (A - 3I)(A + 2I) = -4I$$

$$-\frac{1}{4}(A - 3I)(A + 2I) = I$$

所以 $A + 2I$ 可逆, $(A + 2I)^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 3I)$

◇

12.2015-2016 二 2.

已知矩阵 X 满足方程 $X \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 求矩阵 X 。

解:

由题得:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2-2r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -6 \\ 14 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

◇

13.2015-2016 四 1.(1)

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$, 其中 E 为单位矩阵, 试证:

(1) $A + 2E$ 可逆;

证明:

由题得: $A^2 - 3A + 2E = 0$, 所以:

$$A^2 + 2A - 2A - 3A + 2E = 0$$

$$A(A + 2E) - 5A - 10E + 10E + 2E = 0$$

$$A(A + 2E) - 5(A + 2E) = (A - 5E)(A + 2E) = -12E$$

$$-\frac{1}{12}(A - 5E)(A + 2E) = E$$

所以 $A + 2E$ 可逆, $(A + 2E)^{-1} = -\frac{1}{12}(A - 5E)$ ◇

14.2017-2018 二 2.

解矩阵方程 $(2I - B^{-1}A)X^T = B^{-1}$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵, X^T 是 3 阶矩阵 X 的转置矩阵, $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解:

由题得: $(2I - B^{-1}A)X^T = B^{-1}$, 所以:

$$\begin{aligned} X^T &= (2I - B^{-1}A)^{-1}B^{-1} = [B(2I - B^{-1}A)]^{-1} \\ &= (2B - A)^{-1} \end{aligned}$$

$$C = 2B - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由第三题的计算结果有 $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 所以 $X = C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ◇

15.2018-2019 二 2.

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 且 X 满足 $AX = X + A$, 求 X 。

解:

由题得: $AX = X + A$, 所以 $(A - E)X = A$, 所以 $X = (A - E)^{-1}A$

$$B = A - E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B|E] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

所以 $(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $X = (A - E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ◇

16.2018-2019 四 1.

设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 3A - 4I = 0$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵。

(1) 证明: $A, A + 3I$ 可逆, 并求他们的逆;

(2) 当 $A \neq I$ 时, 判断 $A + 4I$ 是否可逆并说明理由。

解:

(1) 由题得: $A^2 + 3A - 4I = 0$, 所以 $A(A + 3I) = 4I$, 所以 $A, A + 3I$ 可逆, A 的逆为 $\frac{1}{4}(A + 3I)$, $A + 3I$ 的逆为 $\frac{1}{4}A$ 。

(2) 不可逆, 理由:

由题得: $A^2 + 3A - 4I = (A + 4I)(A - I) = 0$, 假设 $A + 4I$ 可逆, 则等式两端同时左乘 $(A + 4I)^{-1}$ 得 $A - I = 0$, 即 $A = I$ 与题目中 $A \neq I$ 矛盾, 所以假设不成立。即 $A + 4I$ 不可逆。 ◇

17.2019-2020 — 3.

记 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^{-1} _____。

解:

由题得: $A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 设 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c, d 为 2 阶方阵, 则

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}c & A_{12}d \\ A_{21}a & A_{21}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$$

所以: $c = A_{12}^{-1}, d = 0, a = 0, b = A_{21}^{-1}$.

$$\begin{aligned} [A_{12}|E_2] &\xrightarrow{r_2-2r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1+2r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \times (-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \\ [A_{21}|E_2] &\xrightarrow{r_2-2r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^{-1} \\ A_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇