第二次习题课

知识点

1. 矩阵的转置。$(AB)^T = B^T A^T$

2. 向量的内积。

3. 方阵的幂。

4. 矩阵多项式：设 A 是方阵，$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，则定义 $f(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_n A^n$. 如果 X 与 A 可交换，则 X 与 $f(A)$ 可交换。

5. 分块矩阵：分块矩阵的定义。分块矩阵的加减，数乘。

分块矩阵的乘法：设 A、B 都是分块矩阵，A 的列数和 B 的行数相同，且 A 的列分法与 B 的行分法相同，则采用 A 的行分法和 B 的列分法对 AB 进行分块，看作分块矩阵 $(AB)_{pq} = \sum_{j=1}^{t} A_{pj} B_{jp}$。

分块矩阵乘法常用的结果：

(1) 若 $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$,$B_{n\times l} = \begin{bmatrix} \beta_1, \cdots, \beta_l \end{bmatrix}$，则 $AB = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_l \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & \alpha_2\beta_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m\beta_1 & \alpha_m\beta_2 & \cdots & \alpha_m\beta_l \end{bmatrix}$

(2) 若 $A_{m\times n}, B_{n\times l} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_l \end{bmatrix}$，则有

$$AB = \begin{bmatrix} A\beta_1 & A\beta_2 & \cdots & A\beta_l \end{bmatrix}$$

(3) 如果 $AB = 0$, 显然 $A\beta_j = 0$, 也就是 B 的列向量是 $Ax = 0$ 的解。

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

分块矩阵的转置：如果 A 是分块矩阵，则 A^T 的行采用与 A 的列相同的分法。即

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}$$

6. 线性方程组、矩阵方程、向量方程组的转化。