第十次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 70 分钟.**

58. 特征值与特征向量(13分钟)
59. 矩阵多项式的特征值(11分钟)
60. 特征值的性质(12分钟)
61. 特征向量的性质(11分钟)
62. 矩阵相似对角化(12分钟)
63. 矩阵相似对角化的例子(11分钟)

- **看视频的同时记好笔记.**
- **看线性代数教材 P127-P140 的内容.**

- **课堂上将分组讨论 5.11, 5.12, 5.15, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32.**
- **组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.**
- **每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.**

例 5.1 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 3×2 的矩阵. 问 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 能够相似吗? 说明理由.

例 5.2 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 证明: $3\boldsymbol{A}^3 + 2\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}_n \sim 3\boldsymbol{B}^3 + 2\boldsymbol{B} - 5\boldsymbol{I}_n$.

例 5.3 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$. 问是否有 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$? 说明理由.

例 5.4 设 $\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $r(\boldsymbol{A})$.

例 5.5 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 可逆; 且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时有 $\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}$.

例 5.6 对于任意方阵 $\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 的对角元的和为 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**, 记为 $tr(\boldsymbol{A})$. 证明: 如果 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{B})$, 并举例说明逆命题不成立.

例 5.7 设 $\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_2 \sim \boldsymbol{B}_2$. 证明:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}.$$

例 5.8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$. 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 求 a,b 的值.

例 5.9 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, S_1,S_2 分别是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集. 证明: 存在从 S_1 到 S_2 的一一映射.

例 5.10 用矩阵相似的定义验证[a]: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[a] 一般地, 对任意方阵 $\boldsymbol{A}$ 都有 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}^T$, 但其证明还需要更多的概念, 细节从略.

例 5.11 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 证明: $\lambda \neq 0$ 且 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一个特征值.

例 5.12 设 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 λ, μ 的特征向量, 且 $\lambda \neq \mu$. 证明: $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

例 5.13 设 a 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 证明: a^3-2a+2 是 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n$ 的一个特征值.

例 5.14 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的全部特征值和特征向量.

例 5.15 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是对角元相同且至少有一个非对角元不为 0 的 n 阶上三角阵. 证明: $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

例 5.16 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 证明: $\boldsymbol{A}^4-2\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{I}_n$ 也可对角化. 进一步假设 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 证明: $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可对角化.

例 5.17 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 证明: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式可以分解为 n 个一次式的乘积. 举例说明逆命题不成立.

例 5.18 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$. 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 求 $(\boldsymbol{A}^*)^3-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3$ 的行列式.

例 5.19 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. 对任意正整数 n, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

例 5.20 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{0}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

例 5.21 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1} - \boldsymbol{E}| =$ ______. ($\boldsymbol{E}$ 是单位阵.)

例 5.22 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是 ______.

例 5.23 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

(1) 试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) 利用 (1) 的结果, 求矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

(3) 利用 (1) 的结果, 求矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值, 其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

例 5.24 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

例 5.25 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量, 且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0$. 记 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$. 求:

(1) $\boldsymbol{A}^2$;

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

例 5.26 令 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0)^T$, 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$,

(1) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对角阵, 并写出这个对角阵;

(2) 求 $\left|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{2017}\right|$. 其中 $\boldsymbol{I}$ 是 3 阶方阵.

例 5.27 已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 试确定参数 a,b 及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值;

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵? 说明理由.

例 5.28 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与对角矩阵

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y 的值;

(2) 求一个满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

例 5.29 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求 x 和 y 应满足的条件.

例 5.30 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

例 5.31 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

例 5.32 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$, 对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$.

又向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表出;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$ (n 为自然数).

例 5.33 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将六分之一的熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有五分之二成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n, y_n，记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.