【题目】 设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}$，则 $A^n=$ ________.

解：

经观察，我们可将矩阵按下列方式进行分块：

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}\end{bmatrix}\quad A_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}\quad A_{22}=\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$$

A 分块后是对角矩阵（主对角线之外的元素都为 0），对角矩阵的 n 次方等于各个元素 的 n 次方。

所以：$A^n=\begin{bmatrix}A_{11}^n&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}^n\end{bmatrix}$。

对于 A_{11}：

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=3I+B$$

二项式定理：$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^i\cdot b^{n-i}$，式中：$C_n^i$ 为组合数，$C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$。
对于任意 n 阶矩阵 A，如果矩阵的对角线元素以及对角线一侧的元素全为 0，则 $A^k=0,k\geq n$。

所以：

$$\begin{aligned}A_{11}^n&=(3I+B)^n=C_n^0B^0(3I)^n+C_n^1B^1(3I)^{n-1}+C_n^2B^2(3I)^{n-2}+\cdots+C_n^nB^n(3I)^0\\&=3^nI+3^{n-1}nB\\&=\begin{bmatrix}3^n&n3^{n-1}\\0&3^n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

对于 n 维方阵 A，如果 $r(A)=1$，则 A 一定可以分解为一个列向量 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$ 和一个行向量 $\beta^T=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$ 的乘积（此处只给结论，不做证明，至于 a 和 b 的具体值，也不需要关注。）。
以 3 维来讨论，讨论结果可以推广到 n 维：即 $A=\alpha\cdot\beta^T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}$，$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，可以看出 $\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$ 是 A 的主对角线元素之和，记为 l。
则 $A^2=\alpha\cdot\beta^T\cdot\alpha\cdot\beta^T=\alpha l\beta^T=lA,A^3=A^2A=lA\cdot A=lA^2=l^2A,\cdots,A^n=l^{n-1}A$

所以对于 A_{22}，经过高斯消元法变换 (r_1-3r_2) 后：$\begin{bmatrix}3&9\\0&0\end{bmatrix}$，可以看出 $r(A_{22})=1$，符合上边的描述，所以

$$l=3+3=6$$

$$A_{22}^n=l^{n-1}A=6^{n-1}\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$$

所以：

$$A^n=\begin{bmatrix}A_{11}^n&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot3^{n-1}&0&0\\0&3^n&0&0\\0&0&3\cdot6^{n-1}&9\cdot6^{n-1}\\0&0&6^{n-1}&3\cdot6^{n-1}\end{bmatrix}$$

◇