第十二次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 53 分钟.**

68. 二次型的概念(11分钟)
69. 线性变换与二次型的标准形(12分钟)
70. 正交变换法化二次型的标准形(9分钟)
71. 二次型的规范形(17分钟)
72. 二次型的有定性(11分钟)
73. 利用顺序主子式判断有定性(9分钟)

- **看视频的同时记好笔记.**
- **看线性代数教材 P153-P173 的内容.**

- **课堂上将分组讨论6.3, 6.4, 6.6, 6.7, 6.9, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6,19, 6.24, 6.26, 6.29.**

- **组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.**

- **每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.**

例 6.1 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 证明:

(1) $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$.

(2) $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 同为正, 或同为负, 或同为 0.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 则 $\boldsymbol{B}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 合同.

例 6.2 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 合同. 证明: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 合同.

例 6.3 设 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_3)^2-3x_2^2$. 通过换元:
$\begin{cases} y_1 = x_1-2x_3 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$ 可以得到 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-3y_2^2$. 问: 这里的换元是否是非退化线性替换? 若不是, 请写出正确的非退化线性替换.

例 6.4 举例说明: 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同时, 不一定有: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$; 当 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 时不一定有 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

例 6.5 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称阵. 证明: 如果 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

例 6.6 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 证明:

(1) 如果 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + d_3y_3^2$ 是 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的一个标准型, 则 $\frac{1}{d_1}y_1^2 + \frac{1}{d_2}y_2^2 + \frac{1}{d_3}y_3^2$ 是二次型 $g(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$ 的一个标准型.

(2) 二次型 $h(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 的规范型为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

例 6.7 设 3 元实二次型 $g(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵是 $\boldsymbol{A}$. 方阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2$, 且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同. 证明: 对任意 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 都有:

$$-2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\leq \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\leq (x_1^2+x_2^2+x_3^2).$$

例 6.8 用配方法求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$$

的标准型.

例 6.9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -2\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}$. 用合同变换求可逆阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角阵, 并求 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数和负惯性指数.

例 6.10 用正交变换求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

的标准型, 并求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

例 6.11 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为 ______.

例 6.12 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=\boldsymbol{P}y$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$, 则 $a=$ ______.

例 6.13 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵.

例 6.14 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3, 试求 y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

例 6.15 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$$

经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为 $f=y_2^2+2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$ 是三维列向量, $\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交矩阵. 试求 a,b 的取值.

例 6.16 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $r(\boldsymbol{A})=n$, A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$. 把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写出矩阵形式, 并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范形是否相同? 并说明理由.

例 6.17 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2+3x_3)^2$ 是否是正定的? 说明理由.

例 6.18 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的. 证明: 对任意正数 a, 二次型 $af(x_1,x_2,x_3)$ 也是正定的.

例 6.19 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$$

是否正定.

例 6.20 设 $\boldsymbol{A}$ 是任意实对称阵. 证明: $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n$ 是正定阵.

例 6.21 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵. 证明: $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定阵.

例 6.22 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵. 证明: 对任意非负数 a 都有: $\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{I}_n$ 可逆.

例 6.23 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 是正定的且其矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. 设 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的第二、三、四行和第二、三、四列所构成的子矩阵. 证明: $\boldsymbol{B}$ 也是正定的.

例 6.24 如果二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的值域是 $[0,+\infty)$, 则称 $f(x_1,\cdots$ 是半正定的. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是半正定的, 且其矩阵是 $\boldsymbol{A}$.

(1) 证明: $|\boldsymbol{A}|\geq 0$.

(2) 设 $\boldsymbol{B}$ 是正定的 3 阶方阵. 证明: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$.

例 6.25 如果二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的值域是 $(-\infty,0]$, 且, 只有当 $x_1=\cdots=x_n=0$ 时才有 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$, 则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是负定的. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵, Δ_1, Δ_2, Δ_3 是 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式. 证明: $f(x_1,x_2,x_3)$ 是负定的 $\Leftrightarrow \Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0$.

例 6.26 求实数 a 的取值范围, 使得二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$$

是正定的.

例 6.27 已知二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$, f 为正定二次型, 求 λ 取值范围.

例 6.28 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$. 试证: 当 $\lambda>0$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

例 6.29 设有 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$, 其中 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 试问: 当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时, 二次型为正定二次型.