第一次课

- 在下次课之前完成下列视频. 合计 79 分钟.

1. 阶乘、连加号、连乘号(12分钟)
2. 排列组合(12分钟)
3. 矩阵(系数矩阵、增广矩阵)(14分钟)
4. 消元法解线性方程组(9分钟)
5. 阶梯形矩阵与最简阶梯形矩阵(12分钟)
6. 高斯消元法(11分钟)
7. 线性方程组的解的存在唯一性定理(9分钟)

- 看视频的同时记好笔记.

- **看线性代数教材 P1-P23 定义1.3.7之前的内容.**

- **课堂上将分组讨论1.6，1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18,1.21.**

- **组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.**

- **每位同学在课堂讨论完成以后独立完成以下全部作业.**

例 1.1 写出一个只有零解的齐次线性方程组的例子. 写出一个有非零解的齐次线性方程组的例子.

例 1.2 证明: 如果一个线性方程组有零解, 则该方程组一定是齐次线性方程组. (等价地, 非齐次线性方程组一定没有零解.)

例 1.3 证明: 如果 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \cdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \cdots \\ x_n = d_n \end{cases}$ 都是非齐次线性方程组 1.1.3 的解, 则 $\begin{cases} x_1 = c_1 - d_1 \\ x_2 = c_2 - d_2 \\ \cdots \\ x_n = c_n - d_n \end{cases}$ 是齐次线性方程组 1.1.5 的解.

例 1.4 证明: 如果 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \cdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 是非齐次线性方程组 1.1.3 的解, 而 $\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \cdots \\ x_n = d_n \end{cases}$ 是齐次线性方程组 1.1.5 的解, 则 $\begin{cases} x_1 = c_1 + d_1 \\ x_2 = c_2 + d_2 \\ \cdots \\ x_n = c_n + d_n \end{cases}$ 是非齐次线性方程组 1.1.3 的解.

例 1.5 下述方程组中, 哪些是阶梯形方程组, 哪些是行简化阶梯形方程组?

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_4 = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}.$$

$$(3)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_4 = 6 \end{cases}.$$

例 1.6 在对线性方程组作初等变换时, 能否用 0 乘以某个方程的两边? 为什么?

例 1.7 是否存在恰好有两个解的线性方程组? 为什么?

例 1.8 给定一个由 m 个方程组成的 n 元非齐次线性方程组. 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由.

(1) 如果 $m < n$, 则该方程组一定有无穷多个解.

(2) 如果 $m < n$, 且该方程组有解, 则有可能只有一个解.

(3) 如果 $m = n$, 则该方程组一定有唯一解.

(4) 如果 $m > n$, 则该方程组一定没有解.

(5) 如果 $m > n$, 则该方程组可能有且仅有一个解.

(6) 如果 $m > n$, 则该方程组可能有无穷多个解.

例 1.9 给定一个由 m 个方程组成的 n 元齐次线性方程组. 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由.

(1) 如果 $m < n$, 则该方程组一定有无穷多个解.

(2) 如果 $m = n$, 则该方程组只有零解.

(3) 如果 $m > n$, 则该方程组可能没有解.

(4) 如果 $m > n$, 则该方程组可能只有零解.

(5) 如果 $m > n$, 则该方程组可能有非零解.

例 1.10 证明: 线性方程组的初等变换一定把齐次线性方程组变为齐次线性方程组, 把非齐次线性方程组变为非齐次线性方程组.

例 1.11 求 a, b, c 使得

$$\begin{pmatrix} -1 & a+b & 0 \\ c-2 & -1 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 3a-2b & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.12 有人把线性方程组 $\begin{cases} x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的增广矩阵写为: $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 是否正确? 若不正确, 请写出正确的增广矩阵和系数矩阵.

例 1.13 下述初等行变换是否正确? 如果不正确, 说明理由.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例 1.14 用初等行变换把 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -4 & -7 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵.

例 1.15 用初等行变换把 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & -8 \\ -3 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ 化为行简化阶梯形矩阵.

例 1.16 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. 用初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 变为一个阶梯形矩阵.

例 1.17 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. 用初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 变为行简化阶梯形矩阵.

例 1.18 请写出下面方程组的系数矩阵、常数项矩阵、未知量矩阵和增广矩阵.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ \quad\;\; 2x_2+3x_3=1 \\ \qquad\quad\;\; 3^2x_3=3 \end{cases}$$

例 1.19 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{pmatrix}$ 的最简阶梯形矩阵.

例 1.20 求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\2x_1+3x_2=2\\3x_1+4x_2+x_3=3\end{cases}$ 的解集.

例 1.21 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 + 3x_4 = a \end{cases}$ 什么时候无解? 什么时候有解? 有解时, 什么时候有有唯一解, 什么时候有无穷多组解? 有解时, 并将所有的解表示出来. 其中 a 是常数.