

四川大学《线性代数三》历年期中测试答案解析

王松年

写在前面：

1. 答案里说的课本指的是由四川大学数学学院编写的《线性代数》(中国人民大学出版社)。
2. 仅供内部参考使用，请勿将此文档上传到百度文库以及其同类网站上。
3. 由个人整理，如果发现错误或有更好的解题方法请发送邮件至 1315030237@qq.com.

2015-2016 年第一学期

一、填空题

1. 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, 则代数余子式之和 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \underline{0}$ 。

解：

由题得：

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{3,2}A_{32} = (-1)^{3+2} \times (-7) \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$, 则 x^3 的系数为_____。

解：

方法一：求出对应的行列式，然后写出 x^3 的系数。(此方法太过繁琐，容易出错，不推荐使用)

用 Matlab 计算出来的结果为： $f(x) = 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 12x - 8$ 。(仅供参考)

方法二：使用定义，课本 106-108 页。

思路：使用行列式的定义来做。仅找出与 x^3 有关的项。这里取列按照自然排列，行由自己指定（也可以取行按照自然排列，列由自己指定）。

第一列中：取第一行，第二列第三列第四列无论怎么取都不可能构成 x^3 。

(注意：在行列式的定义式中，每一项中的几个元素必须来自不同的行数和列数，如：对于此题来说，列按自然排列，第一个元素取第一列中的第一行，那么第二个元素只能从剩下三列中的剩下三行来取)

第一列中：取第二行，第二列取第一行，第三列取第三行，第四列取第四行。即 $(-1)^{\tau(2134)} a_{21} a_{12} a_{33} a_{44} = (-1)^1 1 * x * x * x = -x^3$ (注意下标，列(黑色)是自然排列，行(红色)是上边分析得来的)

第一列取第三行第四行都不能构成 x^3 。

验证： x^2 的系数

列取自然排列，行按下述几个取时构成 x^2 : 1324 3124 3214 4231 4132 即：

$$\begin{aligned} & (-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{32} a_{23} a_{44} + (-1)^{\tau(3124)} a_{31} a_{12} a_{23} a_{44} + \\ & (-1)^{\tau(3214)} a_{31} a_{22} a_{13} a_{44} + (-1)^{\tau(4132)} a_{41} a_{12} a_{33} a_{24} + (-1)^{\tau(4231)} a_{41} a_{22} a_{33} a_{14} \\ & = (-4 + 3 - 3 - 1 - 2)x^2 = -7x^2 \end{aligned}$$

可以看出和方法 1 算的结果一样。

3. 设 a, b, c 满足方程
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
, 则 $abc =$ _____。

解:

对行列式做如下变换: 第一行减去 c 倍的第四行, 第一行减去 b 倍的第三行, 第一行减去 a 倍的第二行, 得到如下行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a^2-b^2-c^2 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-a^2-b^2-c^2 = 1$$

即 $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, 对于实数, 任何数的平方都大于等于 0, 所以可以推出 $a = 0, b = 0, c = 0$, 所以 $abc = 0$ 。

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, 若 $B = 2BA - 3I$, 其中 I 为单位矩阵, 则 $|B| =$ _____。

解:

由题得: $B = 2BA - 3I \Rightarrow B(2A - I) = 3I$, 所以 $|B(2A - I)| = |3I| = 3^2 = 9, |2A - I| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21$, 所以

$|B(2A - I)| = |B||2A - I| = 21|B| = 9$, 解得 $|B| = \frac{3}{7}$ 。

5. 若 A 为 4 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $\left| \left(\frac{1}{4}A \right)^{-1} - A^* \right| =$ _____。

解:

$$\left| \left(\frac{1}{4}A \right)^{-1} - A^* \right| = \left| \left(\frac{1}{4}A \right)^{-1} - |A|A^{-1} \right| = \left| 4A^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1} \right| = \left| \frac{7}{2}A^{-1} \right| = \left(\frac{7}{2} \right)^4 |A|^{-1} = \frac{7^4}{8}$$

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1} =$ _____。

解:

$A^* = |A|A^{-1}$, 所以 $(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}(A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}A$

$|A| = 1 \times 1 \times 3 = 3$ 所以: $(A^*)^{-1} = \frac{1}{3}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $ABA^{-1} =$ _____。

解:

由题得: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $A_{11} = A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2, A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ -E_2 A_{21} E_2 & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ -11 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

◇

8. 设 A, B 均为 n 阶方阵, $|A| = 2$, 且 AB 可逆, 则 $r(B) =$ _____。

解:

课本 97 页命题 3.2.4.

$|A| = 2 \neq 0$, 所以 A 可逆, 又因为 AB 可逆, 所以 B 可逆, 即 B 满秩。 $r(B) = n$

◇

二、解答题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 。

解:

(过程不唯一)

对行列式做如下变换: 把第二行加到第三行, 把第二行加到第四行, 由行列式的性质, 此时行列式的值没有改变。即

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -|A|$$

对于 $|A|$: 把第二行的负一倍加到第一行

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+3} \times (5 \times 3 - 2 \times 4) = -7$$

◇

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 。

解:

对行列式做如下变换: 把第二列的负一倍分别加到第一列和第三列上。得到

$$\begin{vmatrix} a(a-b) & ab & b(b-a) \\ a-b & a+b & b-a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

把第三列加到第一列上:

$$\begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab & b(b-a) \\ 0 & a+b & b-a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} (a-b)^2 [(a+b)0 - (b-a)] = (a-b)^3$$

◇

3. 若 $(2I - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 。

解:

由题得: $(2I - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 等式两边左乘 $(2I - C^{-1}B)^{-1}$:

$$A^T = (2I - C^{-1}B)^{-1}C^{-1} = [C(2I - C^{-1}B)]^{-1} \\ = (2C - B)^{-1}$$

$$D = 2C - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$[D|E_4] \xrightarrow{\substack{r_1-4r_4 \\ r_2-3r_4 \\ r_3-2r_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1-3r_3 \\ r_2-2r_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{r_1-2r_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } A^T = D^{-1} = (2C - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = (A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$4. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^T(BA^{-1} - I)^T X = B^T, \text{ 求 } X.$$

解:

由题得: $A^T(BA^{-1} - I)^T = [(BA^{-1} - I)A]^T = (B - A)^T$, 所以

$$X = ((B - A)^T)^{-1} B^T = ((B - A)^{-1})^T B^T = [B(B - A)^{-1}]^T$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(由上一题可以看出, $B-A$ 是上一题目中 D 的左上角三行三列的元素。其逆矩阵也应该是 D 逆矩阵左上角三行三列, 这里直接用结论) 所以:

$$(B - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B(B - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ X = [B(B - A)^{-1}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 AB 的秩 $r(AB)$ 。

解:

由题得: $r(B) = 2$ 。

$$|A| = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

所以 A 可逆, 即 A 满秩, $r(A) = 3$, 所以 $r(AB) = r(B) = 2$ 。

三、证明题

1. 设 A 可逆, 且 $A^*B = A^{-1} + B$, 证明 B 可逆, 当 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 时, 求 B 。

证明:

由题得: $A^*B = A^{-1} + B$, 即 $(A^* - E)B = A^{-1}$, 两边同时左乘 A 得: $A(A^* - E)B = E$, 所以 B 可逆, 其逆矩阵为 $A(A^* - E) = (|A|E - A)$ 。

由题得: $|A| = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$$B = (|A|E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. (18-19 学年二大题的第 1 题) 设 A 为 n 阶方阵, $AA^T = I$, $|A| < 0$, 证明: $|A + I| = 0$ 。

证明:

由行列式的性质得 $|AB| = |A||B|$, $|A^T| = |A|$, 所以由题得

$|AA^T| = |I|$, 等号左边: $|AA^T| = |A||A^T| = |A||A| = |A|^2$, 等号右边等于 1, 由题得 $|A| < 0$, 所以 $|A| = -1$ 。

$|A + I| = |A + AA^T| = |A(I + A^T)| = |A||I + A^T| = -|I + A|$, 所以 $|A + I| = 0$ 。(注: 两个矩阵相加的转置等于两个矩阵分别转置后相加, 即 $A^T + B^T = (A + B)^T$)

2016-2017 年第一学期

一、填空题

1. 设 M_{ij} 是 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的第 i 行第 j 列元素的余子式, 则 $M_{11} + M_{12} =$ _____。

解:

由题得: $M_{11} + M_{12} = M_{11} + M_{12} + 0M_{13} = A_{11} - A_{12} + 0A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{(3+1)} \times [(-1) \times 2 - 2 \times 0] = -4$

◇

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} =$ _____。

解:

经观察, 该行列式为四阶范德蒙行列式, 且 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$, 所以原式 $= (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) = 12$

◇

3. 设方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 $k =$ -1 或 4。

解:

该方程组的系数矩阵为一个三阶方阵, 由解得存在唯一性定理, 如果 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $|A| = 0$ 。所以:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+k)(4-k) = 0 \Rightarrow k_1 = -1 \quad k_2 = 4$$

(上述行列式第一行减去第三行, 第二行加上第三行后按第三列展开)

◇

4. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c, A$ 为 n 阶方阵, 定义 $f(A) = aA^2 + bA + cI$, 如果 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, f(x) =$

$x^2 - x - 1$, 则 $f(A) =$ _____。

解:

由题得:

$$A = E + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E + B$$

可以看出: $B^2 = 0$ 。所以 $A^2 = (E + B)^2 = E + B^2 + 2EB = E + 2B$ 。

$$\text{所以 } f(A) = A^2 - A - E = E + 2B - E - B - E = B - E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

◇

5. 若 A 为 3 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|(3A)^{-1} - 2A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

$$|(3A)^{-1} - 2A^*| = |3^{-1}A^{-1} - 2|A|A^{-1}| = |-\frac{2}{3}A^{-1}| = (-\frac{2}{3})^3 |A|^{-1} = -\frac{16}{27}$$

◇

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ 3 & 1 & b & -1 \end{bmatrix}$, $r(A) = 2$, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解:

由题得:

$$A \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & b-6 & -4 \end{bmatrix}$$

若 $r(A) = 2$, 则 $r_2 = kr_3$ 其中 $k \neq 0$ (指的是非零元素成比例) 即:

$$\frac{a-1}{4} = \frac{4}{b-6} = \frac{2}{-4} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

◇

二、解答题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 。

解:

步骤不唯一

把所有列加到第一列, 原行列式变为

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

把第一行的负一倍分别加到第二行, 第三行, 第四行。10 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$, 把第四行加到第二行

$$10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \times (-4) \times 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 80 \times 1 \times (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 160$$

◇

2. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & x+1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$, 求 $f(x) = 0$ 的根。

解:

分别把第四行的负一倍加到第一行、第二行与第三行上

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ -1 & 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$$

把前边三列全部加到第四列上:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ -1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^4$$

所以 $f(x) = x^4 = 0$ 的根为 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. ◇

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 若矩阵 X 满足方程 $AX + I = A^2 + X$, 求 X .

解:

由题得: $AX + I = A^2 + X$, 所以 $(A - I)X = A^2 - I = (A + I)(A - I) = (A - I)(A + I)$. 等式两边同时左乘 $(A - I)^{-1}$:

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(A - I)(A + I) \Rightarrow X = (A + I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

4. (2015-2016 的期末试题一大题第 2, 原题)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $A^2 - 2A$ 的秩 $r(A^2 - 2A)$.

解:

由题得: $A^2 - 2A = A(A - 2E)$, 可以看出 A 是满秩方阵, 即 A 可逆. 满秩方阵一定可逆, 所以 $r(A^2 - 2A) = r(A(A - 2E)) = r(A - 2E)$.

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(A - 2E) = 3$, 所以 $r(A^2 - 2A) = 3$ ◇

5. 若 $\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1} = 2AB + I$, 且 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 B .

解:

由题得: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 所以有:

$$|A_{11}| = |A_{22}| = 2 \times 1 = 2; \quad |A| = |A_{11}| \cdot |A_{22}| = 4; \quad A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}; \quad A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1} &= 2AB + I \Rightarrow 4(|A|A^{-1})^{-1}BA^{-1} = 2AB + I \Rightarrow \frac{4}{|A|}ABA^{-1} = 2AB + I \\ ABA^{-1} &= 2AB + I \Rightarrow AB = 2ABA + A \Rightarrow AB(E - 2A) = A \Rightarrow B(E - 2A) = I \Rightarrow B = (E - 2A)^{-1} \end{aligned}$$

$$B = (E - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

三、证明题

1. 设 A 满足 $A^2 - 2A + 4I = 0$, 证明 $A + I$ 可逆, 并求 $(A + I)^{-1}$.

思路: 题目让证明谁可逆, 就凑出这个表达式与某个表达式的乘积等于单位矩阵。

证明:

由题得: $A^2 - 2A + 4I = 0$, 所以:

$$\begin{aligned} A^2 + A - A - 2A + 4I &= 0 \\ A(A + I) - 3A - 3I + 3I + 4I &= 0 \\ A(A + I) - 3(A + I) &= -7I \\ (A - 3I)(A + I) &= -7I \\ -\frac{1}{7}(A - 3I)(A + I) &= I \end{aligned}$$

所以 $A + I$ 可逆, $(A + I)^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 3I)$.

2. 已知 $A = (a_{ij})$ 是三阶的非零矩阵, 设 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 且对任意的 i, j 有 $A_{ij} + a_{ij} = 0$, 求 A 的行列式。

解:

因为 $A_{ij} + a_{ij} = 0$, 所以可以推出 $A + (A^*)^T = 0$. 即 $(A^*)^T = -A$. (看不懂的用伴随矩阵的定义表达出伴随矩阵, 代入该式看一下) 两边同时取行列式:

$$\text{左边: } |(A^*)^T| = |A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n|A|^{-1} = |A|^{n-1} = |A|^2$$

$$\text{右边: } |-A| = (-1)^3|A| = -|A|$$

$$\text{所以 } |A|^2 = -|A|, \text{ 解得 } |A| = -1 \text{ 或 } |A| = 0.$$

又因为 $(A^*)^T = -A$, 所以有 $r((A^*)^T) = r(-A)$, 即 $r(A^*) = r(A)$, 所以 $r(A) = n = 3$. 注: 此步看不懂的看课本 121 页的例 3.3.23, 记住这个例题的结论。

$$r(A) = 3, \text{ 即满秩, 满秩即 (可逆 \& 行列式不为 0), 所以 } |A| = -1.$$

2017-2018 年第一学期

一、解答题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解:

过程不唯一。

把第一列的负一倍分别加到第二、三、四列上:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3 \times (3-1)}{2}} 6 = -6$$

2. 求方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ 的根。

解:

把第一行的负一倍分别加到第二、三行上:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = (x-2) \times (-1)^{1+1} [(x-1)x - 2 \times 1] = 0$$

解得: $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -1$.

3. 设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 及 β 均为 4 维列向量。4 阶矩阵 $A = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4], B = [\beta \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4]$, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 求

(1) $|A + B|$;

(2) $|A^2 + AB|$;

解:

(1) $A + B = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4] + [\beta \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4] = [\gamma_1 + \beta \ 2\gamma_2 \ 2\gamma_3 \ 2\gamma_4]$, 由行列式的性质:

$$\begin{aligned} |A + B| &= |\gamma_1 + \beta \ 2\gamma_2 \ 2\gamma_3 \ 2\gamma_4| = |\gamma_1 \ 2\gamma_2 \ 2\gamma_3 \ 2\gamma_4| + |\beta \ 2\gamma_2 \ 2\gamma_3 \ 2\gamma_4| \\ &= 2 \times 2 \times 2 |\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4| + 2 \times 2 \times 2 |\beta \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4| = 8|A| + 8|B| = 8(|A| + |B|) = 40 \end{aligned}$$

(2) $|A^2 + AB| = |A(A + B)| = |A||A + B| = 2 \times 40 = 80$.

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $AX + 2B = BA + 2X$, 求 X^{2017} .

解:

若存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P^{-1}BP$, 则称矩阵 A 与矩阵 B 相似, 记为 $A \sim B$

由题得: $(A - 2I)X = B(A - 2I)$, 等式两边同时乘 $(A - 2I)^{-1}$ 得: $X = (A - 2I)^{-1}B(A - 2I)$, 令 $P = A - 2I$, 则 $X = P^{-1}BP$. 所以

$$X^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}BPP^{-1}BP = P^{-1}BIBP = P^{-1}B^2P$$

同理可以推出: $X^n = P^{-1}B^nP$. (由此我们可以得出一条结论: 若 $A \sim B$, 则 $A^n = P^{-1}B^nP$, 以后做题可直接使用) 对于任意

对角矩阵 $C = \begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn} \end{bmatrix}$, 可以计算得: $C^2 = \begin{bmatrix} c_{11}^2 & & & \\ & c_{22}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn}^2 \end{bmatrix}$, 所以 $C^n = \begin{bmatrix} c_{11}^n & & & \\ & c_{22}^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn}^n \end{bmatrix}$ 所以:

$$B^{2017} = \begin{bmatrix} 1^{2017} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2017} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B$$

(下边求逆的过程略)

$$P = A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以:

$$\begin{aligned} X^{2017} &= P^{-1}B^{2017}P = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 1 & a \end{bmatrix}$, 若 $r(A) = r(B)$, 则 a 应满足什么条件.

解:

由题得

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 7 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - 7r_2 \\ r_4 + 2r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -13 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以 $r(A) = 4$. $r(B) = 4$, B 满秩即 B 可逆, 即 $|B| \neq 0$:

$$|B| = \begin{vmatrix} c_2 - c_1 & c_3 - c_1 & c_4 - c_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 - a & 2 - a & 3 - a \\ a - 1 & 0 & a - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - a & 2 - a & 1 \\ a - 1 & 0 & a - 1 \end{vmatrix} = -a(1 - a) \neq 0$$

所以 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$.

二、判断下列命题是否成立并给出理由。

1. 设 A, B 为同阶对称方阵, 则 AB 一定是对称矩阵;

解:

不成立。理由如下:

以 2 阶对称矩阵为例: (式中: a, b, c, x, y, z 为任意实数。)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} ax+by & ay+bz \\ bx+cy & by+cz \end{bmatrix}$$

可以看出, 由于 a, b, c, x, y, z 取值的任意性, 所以 $ay+bz \neq by+cz$ 。(可以取 $a=1, b=2, c=3, x=3, y=4, z=5$ 实际验证一下。)

2. 设 A, B 为 n 阶可逆方阵, 则 $(AB)^* = B^*A^*$ 。

解:

成立。理由如下:

因为 A, B 为 n 阶可逆方阵, 所以 AB 可逆, 所以 $(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = |A|B^*A^{-1} = B^*A^*$ ◇

3. 若 $A^2 = B^2$, 则 $A = B$ 或 $A = -B$ 。

解:

不成立。理由如下:

理由:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出 $A^2 = B^2$, 但是 $A \neq B, A \neq -B$ ◇

4. 设 2 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若 A 与所有的 2 阶矩阵均可以交换, 则 $a = d, b = c = 0$ 。

解:

成立。理由如下:

取任意二阶矩阵 (x, y, z, w 为任意实数): $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, 则

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa+cy & xb+yd \\ az+cw & bz+dw \end{bmatrix}$$

若 A 与 B 可交换, 则有 $AB = BA$, 即:

$$ax+bz = xa+cy \quad (1)$$

$$ay+bw = xb+yd \quad (2)$$

$$cx+dz = az+cw \quad (3)$$

$$cy+dw = bz+dw \quad (4)$$

由 (1) 式和 (4) 式得: $bz = cy$, 因为 z 和 y 为任意数, 所以 $b = c = 0$, 代入 (2) 式和 (3) 式: $ay = dy, az = dz$, 所以 $a = d$ 。◇

5. 若 $AB = I$ 且 $BC = I$, 其中 I 为单位矩阵, 则 $A = C$ 。

解:

成立。理由如下:

设 I 为 n 阶单位矩阵，那么由矩阵乘法的定义有如下关系：

A 的列数等于 B 的行数； A 的行数等于 I 的行数等于 n ； B 的列数等于 I 的列数等于 n ；

B 的列数等于 C 的行数； B 的行数等于 I 的行数等于 n ； C 的列数等于 I 的列数等于 n 。

即 A, B, C 均为 n 阶方阵，对于 n 阶方阵，如果 $AB = I$ ，那么 A, B 可逆，所以 A 是 B 的逆矩阵， C 是 B 的逆矩阵，由逆矩阵的唯一性可知 $B=C$ 。◇

6. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = 3A(A - I)$ ，则 $I - A$ 可逆。

解：

成立。理由如下：

由题得： $A^3 = 3A(A - I)$ ，即 $-A^3 + 3A^2 - 3A = 0$ ， $-A^3 + 3A^2 - 3A + I = I$ ，所以 $(I - A)^3 = I$ ，所以 $I - A$ 可逆，其逆矩阵为 $(I - A)^{-1} = (I - A)^2$ ◇

2018-2019 年第一学期

一、解答题

1. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

解:

把第三行加到第一行上:

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & b^2+c^2+a^2 & a^2+b^2+c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)|A|$$

可以看出 $|A|$ 是三阶范德蒙行列式, 所以原式 $= (a^2+b^2+c^2)(c-b)(c-a)(b-a)$ ◇

2. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, A^*$ 为 A 的伴随矩阵。

(1) 若交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C , 求 $|CA^*|$;

(2) 若 $|A^{-1} + B| = 2$, 求 $|A + B^{-1}|$.

解:

(1) 交换 A 的第一行与第二行得矩阵 C , 所以 $|C| = -|A|$, 所以 $|CA^*| = |C||A^*| = -|A||A|^{-1}|A| = -|A|^3 = -27$.

(2) $|A + B^{-1}| = |EA + B^{-1}E| = |B^{-1}BA + B^{-1}A^{-1}A| = |B^{-1}(BA + A^{-1}A)| = |B^{-1}| \cdot |BA + A^{-1}A| = |B^{-1}| \cdot |(B + A^{-1})A| = |B^{-1}| \cdot |(B + A^{-1})| \cdot |A| = 2^{-1} \times 2 \times 3 = 3$. ◇

3. 已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵。

解:

由伴随矩阵的性质: $A^* = |A|A^{-1}$, 所以 $(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}A = |A^{-1}|A$

由题得:

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} [A^{-1}|E] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{r_1-r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

所以 $(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ◇

4. 设 n 阶行列式 $D_n (n = 1, 2, \dots)$: $D_1 = 1, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \dots, D_n =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

- (1) 给出 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} 的关系;
 (2) 利用找到的递推关系及 $D_1 = 1, D_2 = 0$, 计算 D_3, D_4, \cdots, D_8 ;
 (3) 求 D_{2018}

解:

- (1) 对 D_n 按第一列进行行列式展开 (a_{11} 表示第一行第一列的元素, A_{11} 表示第一行第一列元素对应的代数余子式):

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = D_{n-1} - D_{n-2}$$

- (2) 由 (1) 得:

$$D_3 = D_{3-1} - D_{3-2} = D_2 - D_1 = -1$$

$$D_4 = D_{4-1} - D_{4-2} = D_3 - D_2 = -1$$

$$D_5 = D_{5-1} - D_{5-2} = D_4 - D_3 = 0$$

$$D_6 = D_{6-1} - D_{6-2} = D_5 - D_4 = 1$$

$$D_7 = D_{7-1} - D_{7-2} = D_6 - D_5 = 1$$

$$D_8 = D_{8-1} - D_{8-2} = D_7 - D_6 = 0$$

- (3) 由 (2) 可以看出, 每 6 组数据为一个循环, 即 $D_n = D_{n+6}$, 所以 $2018 \div 6 = 336$ 余 2。所以 $D_{2018} = D_2 = 0$ ◇

5. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 且矩阵 X 满足

$$AXA + BXB = AXB + BXA + I$$

其中 I 为 3 阶单位阵, 求 X 。

解:

由题得: $AXA + BXB = AXB + BXA + I$ 所以:

$$AXA + BXB - AXB - BXA = I$$

$$(A - B)XA + (B - A)XB = (A - B)XA - (A - B)XB = I$$

$$(A - B)X(A - B) = I$$

$$(A - B)X = I(A - B)^{-1}$$

$$X = (A - B)^{-1}I(A - B)^{-1} = ((A - B)^{-1})^2$$

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C|E] \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

所以 $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(1) 问 a 为何值时, 矩阵 A 和 B 等价。

(2) 当 A 和 B 等价时, 求可逆矩阵 P , 使得 $PA = B$ 。

解:

(1) 由题得: $r(B) = 2$, 若 A 和 B 等价, 则 $r(A) = 2$ 。

$$A \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+4 \end{bmatrix}$$

$a+4=0$ 即 $a=-4$ 时, $r(A)=2$, 所以 $a=-4$ 。

(2) 由 (1) 得:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

由初等行变换得: $E(3 \ 2(2))E(2 \ 1(1))A = B$ 所以

$$P = E(3 \ 2(2))E(2 \ 1(1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

二、证明题

1. 若 n 阶实矩阵 Q 满足 $QQ^T = I$, 则称 Q 为正交矩阵。设 Q 为正交矩阵, 则

(1) Q 的行列式为 1 或 -1。

(2) 当 $|Q| = 1$ 且 n 为奇数时, 证明 $|I - Q| = 0$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵;

(3) Q 的逆矩阵 Q^{-1} 和伴随矩阵 Q^* 都是正交矩阵。

证明:

(1) 由题得: $|QQ^T| = |I| = 1$, 由行列式的性质: $|QQ^T| = |Q| \cdot |Q^T|$, $|Q^T| = |Q|$, 所以 $|QQ^T| = |Q|^2 = 1$, 解得 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$ 。

(2) $|I - Q| = |QQ^T - Q| = |Q| \cdot |Q^T - I| = |Q^T - I| = |(Q^T)^T - I^T| = |Q - I| = |-(I - Q)| = (-1)^n |I - Q|$, 因为 n 为奇数, 所以 $(-1)^n = -1$, 即 $|I - Q| = -|I - Q|$, 所以 $|I - Q| = 0$ 。

(3) 因为 $QQ^T = I$, 两边同时左乘 Q^{-1} : $Q^T = Q^{-1}$, 两边同时右乘 $(Q^T)^{-1}$: $I = Q^{-1}(Q^T)^{-1} = Q^{-1}(Q^{-1})^T$, 所以 Q^{-1} 是正交矩阵。

由伴随矩阵的性质: $Q^* = |Q|Q^{-1}, (Q^T)^* = (Q^*)^T = |Q^T|(Q^T)^{-1} = |Q|(Q^{-1})^T$, 所以 $Q^*(Q^*)^T = |Q|Q^{-1}|Q|(Q^{-1})^T = |Q|^2Q^{-1}(Q^{-1})^T$

由 (1) 得 $|Q|^2 = 1$, 所以有 $|Q|^2Q^{-1}(Q^{-1})^T = Q^{-1}(Q^{-1})^T = I$, 所以 Q^* 是正交矩阵。◇

2. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 如果 $A^2 = 0$, 证明 $A = 0$. 并举例说明, 如果 A 不是实对称矩阵, 上述命题不正确。

证明:

(1) 依题意设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, 所以 A^2 为: 只看 A^2 对角线上的元素, A^2 的第 k 行第 k 列的元素为 A 的

第 k 行乘第 k 列: $a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \cdots + a_{kk}^2 + a_{kk+1}^2 + a_{kk+2}^2 + \cdots + a_{kn}^2 = 0$, 因为平方一定大于等于 0, 所以该式的每一项都为 0, 即 $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{kk}, a_{kk+1}, a_{kk+2}, \cdots, a_{kn}$ 为 0. 即 A 的第 k 行和第 k 列元素为 0. (这一步看不懂的计算一下 A^2 的第一行第一列, 第二行第二列的元素验证一下)

因为 A^2 为 0, 即其对角线每个元素都为 0, 由上边的步骤可以推出 A 的每行每列元素都为 0, 即 $A = 0$.

(2) 举例: 对于二阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = 0$, A 不是对称矩阵, $A^2 = 0$ 但 $A \neq 0$. ◇