写在前面：

1.答案里说的课本指的是由四川大学数学学院编写的《线性代数》（中国人民大学出版社）。

2.仅供内部参考使用，请勿将此文档上传到百度文库以及其同类网站上。

3.由个人整理，如果发现错误或有更好的解题方法请发送邮件至 2905816868@qq.com.

习题课上总结的一些题

一. 求矩阵的 m 次方。（这里之所以写 m 是为了与矩阵的阶数 n 区别开来，以防混淆）

1. 数学归纳法。即依次求出 $A, A^2, A^3, \cdots$。一般不用，但也有特殊情况（例如 17-18 年半期测试的一大题的第四小题，当然这个题有两种解法，任选其一；15-16 年的期末试题三大题的第二小题的最后一问）。

2. 对角矩阵的 m 次方。（显然不会单独出题）

设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}$，则 $A^m=\begin{bmatrix} a_{11}^m & & & \\ & a_{22}^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^m\end{bmatrix}$.

3. 如果一个 n 阶方阵 A主对角线上以及主对角线的一侧元素全为 0，那么必有 $A^k=0$，其中 $k\geq n$。即 A 是下边的几种形状之一：(一定要注意是针对主对角线，副对角线该结论不成立，第二次习题课讲这里时讲错了，后边已更正)

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

例如：若 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$，则 $A^2=\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0\end{bmatrix}}$, $A^3=\underline{\quad 0 \quad}$.

解：

由矩阵的乘法：

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

◇

4. 一般来说，上边的 2,3 不会单独出题，因为太过简单，都是组合起来出题。

二项式定理：$(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^i\cdot b^{n-i}$, 式中：$C_n^i$ 为组合数，$C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$。

例如：若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 则 $A^m=\underline{\qquad\qquad}$.

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}=I+B$

由 3 的结论可知：$B^k=0,k\geq 3$。计算得：$B^2=\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 所以

$$\begin{aligned}A^m&=(I+B)^m=C_m^0I^mB^0+C_m^1I^{m-1}B^1+C_m^2I^{m-2}B^2+C_m^3I^{m-3}B^3+\cdots+C_m^0I^0B^m\\&=I^mB^0+mI^{m-1}B^1+\frac{m(m-1)}{2}I^{m-2}B^2=I+mB+\frac{m(m-1)}{2}B^2\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{m(m-1)}{2}\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2m&4m^2-m\\0&1&4m\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

◇

5. 如果一个 n 阶方阵 A 的秩 $r(A)=1$，那么 A 一定可以写成一个列向量与一个行向量的乘积，即（我们以 3 阶的方阵为例，最后把结果推广到 n 阶）：

设 3 阶方阵 A 的秩 $r(A)=1$，设 $\alpha=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}^T,\beta=\begin{bmatrix}y_1&y_2&y_3\end{bmatrix}^T$，则

$A=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}x_1y_1&x_1y_2&x_1y_3\\x_2y_1&x_2y_2&x_2y_3\\x_3y_1&x_3y_2&x_3y_3\end{bmatrix}$(至于这里的 x 和 y 的具体值，我们并不关心。)

$l=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. 可以看出 l 是矩阵 A 的对角线元素之和（又称 A 的迹）。

$A^2=(\alpha\beta^T)^2=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=l\alpha\beta^T=lA, A^3=AA^2=AlA=lA^2=llA=l^2A\cdots,\Rightarrow A^m=l^{m-1}A$。

例如：（对 2,3,4,5 综合运用）

设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}$，则 $A^m=$________.

解：

经观察，我们可将矩阵按下列方式进行分块：

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}\end{bmatrix}\quad A_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}\quad A_{22}=\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$$

A 分块后是对角矩阵，所以：$A^m=\begin{bmatrix}A_{11}^m&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}^m\end{bmatrix}$(注：2 的结论)

对于 A_{11}：

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3I + B \\
&\text{和 4 一样了, 此时 } B^k = 0, k \geq 2 \\
A_{11}^m &= (3I+B)^m = C_m^0 B^0 (3I)^m + C_m^1 B^1 (3I)^{m-1} + C_m^2 B^2 (3I)^{m-2} + \cdots + C_m^m B^m (3I)^0 \\
&= 3^m I + 3^{m-1} m B \\
&= \begin{bmatrix} 3^m & m3^{m-1} \\ 0 & 3^m \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

对于 A_{22}, 经过高斯消元法变换 $(r_1 - 3r_2)$ 后: $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，可以看出 $r(A_{22}) = 1$，符合本条的描述，所以

$$l = 3 + 3 = 6$$

$$A_{22}^m = l^{m-1} A = 6^{m-1} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

所以：

$$A^m = \begin{bmatrix} A_{11}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^m & m \cdot 3^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 6^{m-1} & 9 \cdot 6^{m-1} \\ 0 & 0 & 6^{m-1} & 3 \cdot 6^{m-1} \end{bmatrix}$$

◇

6. 用相似矩阵的性质来做，即若 $A \sim B$, 则 $A^m \sim B^m$(例如 17-18 年半期测试的一大题的第四小题)。

但通常有一些矩阵隐含了此属性，也可以用此方法来做，要注意辨别。(例如：课本的 140 页第 9 题，答案在 224 页)

二、特殊矩阵的特征值求法

1. 对角阵，上下三角阵的行列式均为对角线的元素。(由这些特殊行列式的算法很容易看出来)

2. 设 $A = [a_{ij}]$ 是三阶矩阵，则 (下式不做推导，感兴趣的可以自己算一下)

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{bmatrix} = \lambda^3 - \sum a_{ii} \lambda^2 + S_2 \lambda - |A|$$

式中：$S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$。

若 $r(A) = 1$(再复习一下一的第五点)，则 $|A| = 0, S_2 = 0$, 代入到上式有

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum a_{ii} \lambda^2 = \lambda^2 \left(\lambda - \sum a_{ii} \right)$$

做推广，对于 n 阶矩阵 A，若 $r(A) = 1$, 则 $|\lambda E - A| = \lambda^{n-1} (\lambda - \sum a_{ii})$

例如：

已知 $a \neq 0$，求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量。

解：

方法一：（直接计算）

由特征多项式：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -a & -a\\ -a & \lambda-1 & -a & -a\\ -a & -a & \lambda-1 & -a\\ -a & -a & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\left[\lambda-(3a+1)\right](\lambda+a-1)^3$$

得 A 的特征值是 $3a+1,1-a$。

当 $\lambda=3a+1$ 时，由 $[(3a+1)E-A]=0$，即

$$\begin{bmatrix}3a & -a & -a & -a\\ -a & 3a & -a & -a\\ -a & -a & 3a & -a\\ -a & -a & -a & 3a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可得基础解系为 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，所以 $\lambda=3a+1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1,(k_1\neq 0)$。

当 $\lambda=1-a$ 时，由 $[(1-a)E-A]=0$，即

$$\begin{bmatrix}-a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2=(-1,1,0,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1,0)^T\alpha_4=(-1,0,0,1)^T$, 所以 $\lambda=1-a$ 的特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，式中 k_2,k_3,k_4 是不全为 0 的任意常数。

方法二：（转换法）注：请注意观察下述这种方法适用的特点：其中一个矩阵必须特征值全相等才能用前边的矩阵快速求解

由题得：

$$A=\begin{bmatrix}a & a & a & a\\ a & a & a & a\\ a & a & a & a\\ a & a & a & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-a\end{bmatrix}=B+(1-a)E$$

由于 $r(B)=1$，所以有

$$|\lambda E-B|=\lambda^{4-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{4}a_{ii}\right)=\lambda^3(\lambda-4a)$$

所以矩阵 B 的特征值为 $0,0,0,4a$, 所以由特征值的性质，A 的特征值为 $3a+1,1-a,1-a,1-a$。

下边同方法一。 ◇

n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a\end{bmatrix}$$

则 $r(A)=$________.

解：

由上题可快速写出 A 的特征值为 $n+a-1, a-1, a-1, \cdots, a-1$. 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A \sim \Lambda$, 且 Λ 由 A 的特征值所构成，相似矩阵具有相同的秩，所以 $r(\Lambda)=r(A)$, 所以

$$\Lambda=\begin{bmatrix} n+a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{bmatrix}$$

这里 n 是 A 的阶数，所以不会等于 0。所以

$$r(A)=\begin{cases} n, & \text{若} a \neq 1 \text{且} a \neq 1-n, \\ n-1, & \text{若} a=1-n, \\ 1, & \text{若} a=1. \end{cases}$$

◇

设 α 为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

A.$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　B.$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆　　C.$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　D.$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解：

注意：单位向量指的是向量的模（长度）为 1，要与 $[1,1,1]$ 区分开来。

$\alpha\alpha^T\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)=1\alpha$, 所以 $\alpha\alpha^T$ 有一个特征值 1.

α 为 n 维单位列向量，所以 $r(\alpha\alpha^T)=1$, 所以由第一题的结论，$\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1,0,0,\cdots,0$。

E 为 n 阶单位矩阵，所以 E 也为实对称矩阵 (特征值为 1)，实对称矩阵相加减依然为实对称矩阵，所以上述选项中每一项均为实对称矩阵。

又由矩阵可逆则行列式一定不为 0（不可逆则行列式一定为 0，充要条件），矩阵的行列式等于特征值的乘积。

$A.c$ 的特征值为 $1-1, 1-0, 1-0, \cdots, 1-0$ 即 $0,1,1,\cdots,1$, 所以 $|E-\alpha\alpha^T|=0\times 1\cdots 1=0$, 即不可逆。

同理可以看出其他选项的行列式均不为 0，即可逆。　◇

2. 抽象矩阵特征值和特征向量的求法

设 A 是三阶矩阵，且矩阵 A 的各行元素之和均为 5，则矩阵 A 必有特征向量________.

解：

由题得：

$$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=5 \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=5 \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix} \Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 必有特征值 5 且必有特征向量 $k[1,1,1]^T, (k\neq 0)$。　◇

已知 A 是 3 阶矩阵，如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有通解 $5b+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中 η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，求 A 的特征值和特征向量。

解：

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 $Ax=b$ 的特解加上 $Ax=0$ 的通解。

由解得结构可知 $5b$ 是方程组 $Ax=b$ 的一个解，即 $A(5b)=b$, 所以 $Ab=\frac{1}{5}b$。即 $\frac{1}{5}$ 是 A 的特征值，$k_1b, (k_1\neq 0)$ 是相应的特征向量。

η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，所以必有 $A\eta_1=0=0\eta_1, A\eta_2=0=0\eta_2$, 所以 η_1,η_2 是 A 关于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量，所以特征值 0 对应的特征向量为 $k_2\eta_1+k_3\eta_2, (k_2,k_3\text{不全为}0)$。

综上所述，A 的特征值为 $\frac{1}{5},0,0$, 对应的特征向量分别是 $k_1b, (k_1\neq 0)$，$k_2\eta_1+k_3\eta_2, (k_2,k_3\text{不全为}0)$　◇

2014-2015 年第一学期

一、填空题

1. 若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=1$，则 $a=$______。

解：

$A_{21}=(-1)^{2+1}\times(3\times1-2\times1)=1$，解得 $a=2$。 ♢

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵且 $AB=0$, 则 $t=$______。

解：

B 为 3 阶非零矩阵且 $AB=0$ 即 B 的非零列向量为 $Ax=0$ 的解，即 $Ax=0$ 有非零解，即 $|A|=0$, 把 $|A|$ 按第三列展开。

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & t & 4 \end{vmatrix}=-2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & t \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-2(2t-15)+4=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{17}{2}$$

♢

3. 设 3 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的行列式 $|A|=3$, 矩阵 $B=(\alpha_2,2\alpha_3,-\alpha_1)$，则行列式 $|A-B|=$______。

解：

对 A 的第三列乘 2 得:$|\alpha_1\ \alpha_2\ 2\alpha_3|=2|A|$, 对该表达式第一列乘负一:$|-\alpha_1\ \alpha_2\ 2\alpha_3|=-2|A|$,交换一二两列,$|\alpha_2\ \alpha_1\ 2\alpha_3|=2|A|$, 交换二三两列，$|\alpha_2\ 2\alpha_3\ \alpha_1|=-2|A|$, 所以 $|B|=-2|A|$.

$$\begin{aligned}|A-B|&=|\alpha_1-\alpha_2\quad \alpha_2-2\alpha_3\quad \alpha_3+\alpha_1|=|\alpha_1\quad \alpha_2-2\alpha_3\quad \alpha_3+\alpha_1|+|-\alpha_2\quad \alpha_2-2\alpha_3\quad \alpha_3+\alpha_1|\\&=|\alpha_1\quad \alpha_2-2\alpha_3\quad \alpha_3|+|-\alpha_2\quad -2\alpha_3\quad \alpha_3+\alpha_1|\\&=|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3|+|\alpha_1\quad -2\alpha_3\quad \alpha_3|+|-\alpha_2\quad -2\alpha_3\quad \alpha_3|+|-\alpha_2\quad -2\alpha_3\quad \alpha_1|\\&=|A|+0+0-|B|=3|A|=9\end{aligned}$$

♢

4. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1,3,2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则矩阵 A^3+2A^* 主对角线元素之和为______。

解：

由题得：$|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-1\times3\times2=-6$。所以 A^* 的特征值为：$\dfrac{|A|}{\lambda_i}$。由特征值的性质：

A^3+2A^* 的特征值为 $\lambda_i^3+2\dfrac{|A|}{\lambda_i}$. 所以 A^3+2A^* 主对角线元素之和为

$$trace(A^3+2A^*)=\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i^3+2\frac{|A|}{\lambda_i}\right)=36$$

♢

5. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_2$ 经正交变换 $x=py$ 可化为标准形：$f=6y^2$, 则 $a=$______。

解：

任意二次型 x^TAx 经过正交变换化为标准型时，标准型中平方项的系数即为二次型矩阵 A 的特征值, 即 $6,0,0$ 是 A 的特征值, 而 A 的对角线元素是 a,a,a，由特征值性质 $trace(A)=a+a+a=\sum_{i=1}^{3}\lambda=6$，所以 $a=2$。 ♢

6. 设 $(1,1,1)^T$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & b \end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a-b=$______。

解：

由特征向量的定义有

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}6\\a+2\\b+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=6\\a=4\\b=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a-b=2$$

◇

二. 设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&3&1&2\\x&x&-2&1\\2&1&x&4\\x&2&1&4x\end{vmatrix}$，分别求该多项式的三次项、常数项。

解：

$Matlab$ 算出的结果为：$f(x)=8x^4-14x^3+11x^2-53x+14$（作为参考）

两种方法：

方法一：逆序数定义行列式法：

取列为自然排列。分析得：行数按 2134 和 4231 排列时，对应的项为 x^3。即

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(4231)}a_{41}a_{22}a_{33}a_{14}=(-12-2)x^3=-14x^3$$

同理，取列为自然排列。分析得行数按：3142、3412 和 3421 排列时为常数项，即

$$(-1)^{\tau(3142)}a_{31}a_{12}a_{43}a_{24}+(-1)^{\tau(3412)}a_{31}a_{42}a_{13}a_{24}+(-1)^{\tau(3421)}a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}=-6+4+16=14$$

方法二：拉普拉斯展开式定义行列式

按第一列展开（当然也可以按任意一行或一列展开）：

$$原式=2x\begin{vmatrix}x&-2&1\\1&x&4\\2&1&4x\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}3&1&2\\1&x&4\\2&1&4x\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3&1&2\\x&-2&1\\2&1&4x\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}3&1&2\\x&-2&1\\1&x&4\end{vmatrix}$$

分别从上述四项中找三次项、常数项。

第一项：按第一行展开

$$2x\begin{vmatrix}x&-2&1\\1&x&4\\2&1&4x\end{vmatrix}=2x[x(4x^2-4)+2(4x-8)+(1-2x)]$$

显然没有三次项也没有常数项，就没必要接着算了。

第二项：按第一行展开

$$-x\begin{vmatrix}3&1&2\\1&x&4\\2&1&4x\end{vmatrix}$$

可以看出只有第一行第一列展开对应的那项中含有三次项，而第一行第二列、第一行第三列的既不构成三次项也不构成常数项，所以没必要计算。

$$原式=-x\cdot 3\begin{vmatrix}x&4\\1&4x\end{vmatrix}=-3x\cdot x\cdot 4x=-12x^3$$

第三项：该行列式中总共只有两个 x，所以一定不可能构成三次项。按第一行展开：

$$2\begin{vmatrix}3&1&2\\x&-2&1\\2&1&4x\end{vmatrix}=2[3(\_\_\_-1)-(\_\_\_-2)+2(\_\_\_+4)]=2(-3+2+8)=14$$

(上式中画下划线的部分是含有 x 项的，不构成常数项，没必要计算)

第四项：有个系数 x，所以不可能构成常数项，按第一行展开，只有第一行第三列的位置处构成三次项

$$-x\cdot 2\begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -2x^3$$

所以综上所述，三次项为 $-12x^3-2x^3=-14x^3$，常数项为 14 ◇

三. 设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，求 B。

解：

由题得：$|A^*|=2\times 2\times 2\times 8=64$

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I \quad\Rightarrow\quad AB=B+3A \quad\Rightarrow\quad A^*AB=A^*B+3A^*A$$

$$A^*A=|A|A^{-1}A=|A|I \quad |A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}=|A|^{4-1}=64 \quad |A|=4$$

所以 $4B=A^*B+3\times 4 \quad\Rightarrow\quad B=12(4-A^*)^{-1}$.

求逆的过程略。

最后的结果为：

$$B=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

◇

四.λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 有无穷多组解？并在有无穷多解时，写出方程组的通解。

解：

记 $A=\begin{bmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(5\lambda+4)$$

可以看出 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -\dfrac{4}{5}$ 时即 $|A|\neq 0$ 时，方程有唯一解。

$\lambda=1$ 时：

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+2r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{中间略}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

所以 $\lambda=1$ 时有无穷多解，$x_1=1, x_2=x_3-1$.

所以通解为 $x=[1,-1,0]^T+k[0,1,1]^T,(k\in R)$

$\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，$r(A)\neq r(A,B)$，此时无解。 ◇

五. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}4\\-2\\5\\6\end{bmatrix}$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩与一个最大线性无关组；

(2) 将其余向量用极大线性无关组线性表示。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&-1&3&-2\\2&1&3&5\\3&1&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r-1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&-1&1&-3\\0&-2&2&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(1)$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$, 极大线性无关组为：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_3,\alpha_4)$.(任写一个即可。)

(2) 取 (α_1,α_2), 由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$\begin{cases}\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2\\\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2\end{cases}$$

◇

六. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\quad(b>0)$$

的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12。

(1) 求 a,b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出所用正交变换。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{bmatrix},|A|=2(-2a-b^2)$

(1) 由特征值的性质有：

$$\begin{cases}trace(A)=a+2-2=1\\\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-12=|A|=2(-2a-b^2)\\b>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$$

(2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-1)(\lambda+2)-4]=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$$

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2\in R\end{cases}$$

分别取 $[x_2,x_3]^T=[1,0]^T$ 和 $[0,1]^T$ 得：$\alpha_1=[0,1,0]^T,\alpha_2=[2,0,1]^T$，可以看出 α_1 与 α_2 正交。

$\lambda_3=-3$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -5 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_3\\ x_2=0\end{cases}$$

取 $x_3=-2$ 得：$\alpha_3=[1,0,-2]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=[0,1,0]^T\\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{2}{\sqrt5},0,\dfrac{1}{\sqrt5}\right]^T\\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt5},0,-\dfrac{2}{\sqrt5}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{2}{\sqrt5} & \dfrac{1}{\sqrt5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt5} & -\dfrac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$$

◇

七. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2-A-2I=0$。

(1) 证明：$r(A-2I)+r(A+I)=n$.

(2) 证明：矩阵 $A+2I$ 可逆，并求 $(A+2I)^{-1}$。

证明：

(1) 由题得：$A^2-A-2I=(A-2I)(A+I)=0$。

所以由矩阵秩的性质有：$r(A+2I)+r(A+I)\le n$。

$r((A-2I)-(A+I))=r(-3I)\le r(A-2I)+r(-(A+I))=r(A-2I)+r((A+I))$，即 $n\le r(A-2I)+r((A+I))$

所以 $r(A-2I)+r(A+I)=n$.

(2) 由题得：$A^2-A-2I=0$，所以

$$A^2+2A-2A-A-2I=0$$

$$A(A+2I)-3A-6I+6I-2I=0$$

$$A(A+2I)-3(A+2I)=(A-3I)(A+2I)=-4I$$

$$-\frac{1}{4}(A-3I)(A+2I)=I$$

所以 $A+2I$ 可逆，$(A+2I)^{-1}=-\dfrac{1}{4}(A-3I)$　◇

2. 设 X_0 是线性方程组 $Ax=b\ (b\neq 0)$ 的一个解，X_1,X_2 是导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系。令 $\xi_0=X_0,\xi_1=X_0+X_1,\xi_2=X_0+X_2$，证明：$\xi_0,\xi_1,\xi_2$ 线性无关。

证明：

设

$$k_0\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2=0\tag{1}$$

要证明 ξ_0,ξ_1,ξ_2 线性无关，根据定义，只需证明 $k_1=k_2=k_3=0$。

由题得：$AX_0=b,AX_1=AX_2=0$，因为 X_1,X_2 为 $AX=0$ 的基础解系，所以 X_1,X_2 线性无关。

把题中条件代入 (1) 式：

$$k_1X_0+k_2X_0+k_2X_1+k_3X_0+k_3X_2=(k_1+k_2+k_3)X_0+k_2X_1+k_3X_2=0\tag{2}$$

(2) 式两边同时左乘矩阵 A:

$$(k_1+k_2+k_3)AX_0+k_2AX_1+k_3AX_2=(k_1+k_2+k_3)b=0$$

因为 $b\neq 0$，所以 $k_1+k_2+k_3=0$. 代入 (2) 式得：$k_2X_1+k_3X_2=0$，因为 X_1,X_2 线性无关，所以 $k_2=k_3=0$。所以 $k_1=0-k_2-k_3=0$。

所以 ξ_0, ξ_1, ξ_2 线性无关。 ♢

八. 设 3 阶方阵 A 的特征值-1,1 对应的特征向量分别为 α_1, α_2，向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关；

(2) 设 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 求 $P^{-1}AP$。

解：

由题得：$A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$。

(1) 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \tag{1}$$

要证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，只需证明 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,(1) 式两边同左乘 A:

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = -k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \tag{2}$$

(1) 式减 (2) 式:$-2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$,因为 α_1 和 α_2 是分属于不同的特征值的特征向量,所以 α_1 和 α_2 线性无关。即 $\begin{cases} -2k_1 = 0 \\ -k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $k_1 = k_3 = 0$，代入到 (1) 式：$k_2\alpha_2 = 0$，又因为特征向量不为 0，所以 $k_2 = 0$。

综上所述：$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

(2) 由题得：

$$AP = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = [-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P\Lambda$$

所以 $\Lambda = P^-1AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。 ♢

2015-2016 年第一学期

一、填空题

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 2-a & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=$_______。

解：

把第二行加到第一行上：

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 2-a & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 2 & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & a & 0\\ -2 & 3-a & a\\ 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=A$$

把 A 的第二行加到第一行上：

$$A=\begin{vmatrix}2 & a & 0\\ 0 & 3 & a\\ 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & a\\ -3 & 4-a\end{vmatrix}=24$$

◇

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$, 求 A^2-2A 的秩 $r(A^2-2A)$。

解：

由题得：$A^2-2A=A(A-2E)$, 可以看出 A 是满秩方阵，即 A 可逆。满秩方阵一定可逆，所以 $r(A^2-2A)=r(A(A-2E))=r(A-2E)$。

$$A-2E=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以 r(A-2E)=3，所以 $r(A^2-2A)=3$ ◇

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，若 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_i\alpha_i$ 也是 $Ax=b$ 的解，则 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_i=$_______。

解：

由题得：$A\alpha_1=b,A\alpha_2=b,A\alpha_3=b,A\sum\limits_{i=1}^{3}c_i\alpha_i=A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3)=b.$

所以 $A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=3b$, 即 $A\left(\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_3\right)=b=A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$。 ◇

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{bmatrix}$，若 $\alpha=(1,-2,3)^T$ 是其特征向量，则 $a+b=$_______。

解：

设 α 对应的特征值为 λ。由特征向量的定义：

$$A\alpha=\lambda\alpha\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}-4\\ a+10\\ -2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\ -2\lambda\\ 3\lambda\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=-4\\ a=-2\\ b=6\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a+b=4$$

◇

5. 任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-2,3)^T\alpha_3=(t,1,2)^T$ 线性表示，则 t 应满足条件______。

解：

任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $e_1=[1,0,0]^T,e_2=[0,1,0]^T,e_3=[0,0,1]^T$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而 e_1,e_2,e_3 可以表示任意三维实列向量，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 e_1,e_2,e_3 可以相互线性表示，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,e_1,e_2,e_3)=r(e_1,e_2,e_3)=3$. 所以 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2t-6\neq0$，即 $t\neq3$。 ◇

6. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{bmatrix}$ 正定，则 λ 满足的条件为______。

解：

由题得：A 为对称矩阵，如果 A 正定，则 $|A|>0$, 所以 $|A|=\lambda-5>0\quad\Rightarrow\quad\lambda>5$. ◇

二、计算题

1. 若行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\3&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

由题得：

$$A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

把第一行的负二倍加到第二行，把第一行的负一倍分别加到第三、四行。

$$2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-2\\0&2&-2&-2\\0&-1&-2&-3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\-1&-2&-3\end{vmatrix}$$

把第一行的负一倍加到第三行：

$$4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\-1&-2&-3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\0&0&-1\end{vmatrix}=4\times(-1)\times((-1)\times(-1)-(-2)\times1)=-12$$

◇

2.

已知矩阵 X 满足方程 $X\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{bmatrix}$，求矩阵 X。

解：

由题得：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\-1&0&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2-2r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&3&0&2\\0&1&0&-2&1&-2\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right]$$

所以 $X=\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&2\\-2&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&2&-6\\14&0&11\end{bmatrix}$ ◇

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0),\alpha_5=(2,1,5,6)$, 求向量组的秩、极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{2}{3}r_2]{r_3-\frac{1}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-4&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times(-\frac{1}{4})]{r_2\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 3，极大线性无关组为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5)$.

由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$ 表示 α_3,α_5：由最简阶梯型矩阵可以看出

$$\begin{cases}\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4=3\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2\end{cases}$$

◇

三、解答题

1. 当 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=k-3\\x_1+kx_2+x_3=-2\\x_1+x_2+kx_3=-2\end{cases}$ 有唯一解，无解和有无穷多解？当方程组有无穷多解时求出所有解。

解：

（系数矩阵是方阵，也可以用行列式来做这个题。具体看 14-15 年期末试题的第四题，推荐这种方法）

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c}k&1&1&k-3\\1&k&1&-2\\1&1&k&-2\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\k&1&1&k-3\\1&1&k&-2\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-kr_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k^2&1-k&3(k-1)\\0&1-k&k-1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k&k-1&0\\0&1-k^2&1-k&3(k-1)\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-(1+k)r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k&k-1&0\\0&0&(1-k)(k+2)&3(k-1)\end{array}\right]$$

讨论：

(1) 解不存在：即存在矛盾方程（增广矩阵主元列在最右列）。即对于 r_3

$$\begin{cases}(1-k)(k+2)=0\\3(k-1)\neq0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k=-2$$

(2) 存在唯一解：主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases}1\neq0\\1-k\neq0\\(1-k)(k+2)\neq0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k\neq1\text{且}k\neq-2$$

$k \neq 1$且$k \neq -2$，继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{(k+2)(1-k)}]{r_2\times\frac{1}{1-k}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1&-1&0\\0&0&1&\frac{3}{(k+2)}\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&0&-2-\frac{3}{k+2}\\0&1&0&\frac{3}{k+2}\\0&0&1&\frac{3}{k+2}\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-kr_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-\frac{5k+1}{k+2}\\0&1&0&\frac{3}{k+2}\\0&0&1&\frac{3}{k+2}\end{array}\right]$$

所以方程组存在唯一解时：$k \neq 1$ 且 $k \neq -2$，解为

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-\frac{5k+1}{k+2}\\\frac{3}{k+2}\\\frac{3}{k+2}\end{bmatrix},\quad k\neq 1且k\neq -2$$

(3) 存在无穷解：至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases}(k-1)(k+2)=0\\3(k-1)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k=1$$

把 $k=1$ 代入阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\quad\Rightarrow\quad x=\begin{bmatrix}-2-c_1-c_2\\c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

所以 x 的解为 $x=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}c_1+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}c_1\quad c_1,c_2\in R$。 ♢

2. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 对应于 λ_1 的特征向量 $\alpha_1=(0,1,1)^T$。

(1) 求 A 对应于特征值 1 的特征向量；

(2) 求 A;

(3) 求 A^{2016}。

解：

(1) 由于 A 是实对称矩阵，所以对于 A 的不同特征值的特征向量正交，所以设特征值 1 对应的特征向量是 $\alpha=[x_1,x_2,x_3]$。所以有：

$$\alpha_1^T\alpha=x_2+x_3=0\quad\Rightarrow\quad x_2=-x_3$$

分别取 $\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 得 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$。

α_2,α_3 即为 A 对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$。所以：

$$\begin{aligned}&A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3]\quad\Rightarrow\\&A=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3][\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\left(式中：[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)$

(3) 由 (2) 得：$A^2=E_3$（E 表示单位矩阵。）所以 $A^{2016}=(A^2)^{1008}=E_3$。 ♢

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A)=2$, 且二次型 $f(x)=x^TA^TAx$.

(1) 求 a;

(2) 写出二次型 $f(x)$ 的矩阵 $B=A^TA$;

(3) 求正交变换 $x=Qy$ 将二次型 $f(x)$ 化为标准型，并写出所用的正交变换。

解：

(1) 由题得：

$$A\xrightarrow[r_4-ar_2]{r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-1-a\end{bmatrix}$$

$r(A)=2$，所以 $1+a=0$ 且 $-1-a=0$ 解得：$a=-1$。

(2)

$$B=A^TA=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$$

(3)

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

$\lambda_1=0$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}-2&0&-2\\0&-2&-2\\-2&-2&-4\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得：$\alpha_1=[1,1,-1]^T$.

$\lambda_2=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}0&0&-2\\0&0&-2\\-2&-2&-2\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}$$

取 $x_2=1$ 得：$\alpha_2=[1,-1,0]^T$.

$\lambda_3=6$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{vmatrix}4&0&-2\\0&4&-2\\-2&-2&2\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得：$\alpha_3=[1,1,2]^T$. 因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]^T\\\gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right]^T\\\gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=2y_2^2+6y_3^2$$

◇

四、证明题

1. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^2-3A+2E=0$, 其中 E 为单位矩阵，试证：

(1)$A+2E$ 可逆；

(2)A 为正定矩阵。

证明：

(1) 由题得：$A^2-3A+2E=0$，所以：

$$A^2+2A-2A-3A+2E=0$$
$$A(A+2E)-5A-10E+10E+2E=0$$
$$A(A+2E)-5(A+2E)=(A-5E)(A+2E)=-12E$$
$$-\frac{1}{12}(A-5E)(A+2E)=E$$

所以 $A+2E$ 可逆，$(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{12}(A-5E)$。

(2) 对于 n 阶实对称矩阵，如果 A 为正定矩阵，则 A 的全部特征值大于 0. 设 A 的特征值为 λ。由题得：

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=1>0,\lambda_2=2>0$$

所以 A 为正定矩阵。 ◇

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，向量 γ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha$ 线性无关。

证明：

向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即存在一组不全为 0 的 $k_i(1\le i\le 3)$, 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3 \tag{1}$$

反证：假设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha$ 线性相关。则存在一组不全为 0 的 $l_i(1\le i\le 3)$ 和 l, 使得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l(\beta+\gamma)=0 \tag{2}$$

若 $l=0$, 则 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l(\beta+\gamma)=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$，此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，与题中的条件矛盾，所以 $l\neq 0$。所以 (1) 式可变形为

$$\beta+\gamma=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)$$

代入 (1) 式：

$$\gamma=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$$

可以看出此时 γ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，与题目矛盾，所以假设错误，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha$ 线性无关。 ◇

2016-2017 年第一学期

一、填空题

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&1&0\\z&0&0&1\end{vmatrix}=$______。

解：

(注意爪型行列式的做法) 对行列式做如下变换：第一行减去 z 倍的第四行，第一行减去 y 倍的第三行，第一行减去 x 倍的第二行，得到如下行列式：

$$\begin{vmatrix}1-x^2-y^2-z^2&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=1-x^2-y^2-z^2$$

◇

2. 设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}$, 则 $r(A^2-2A)=$______。

解：

$|A^*|=|A|^{n-1}$ 得：$|A^*|=2^3=|A|^3$. 所以 $|A|=2\neq0$。即 A 可逆。

所以 $r(A^2-2A)=r(A(A-2E))=r(A-2E)=r(|A|(A^*)^{-1}-2E)=r((A^*)^{-1}-E)=3$.（求逆和秩的过程略） ◇

3. 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\ax_1-x_2-2x_3=-3\end{cases}$ 与线性方程 $ax_2+x_3=1$ 有公共的解，则 a 的取值范围为______。

解：

注意同解与公共解的区别：

对于方程组 (1) 和方程组 (2)，如果 α 既是方程组 (1) 的解，也是方程组 (2) 的解，则称 α 是方程组 (1) 和方程组 (2) 的公共解。

对于方程组 (1) 和方程组 (2)，如果 α 是方程组 (1) 的解，则 α 一定是方程组 (2) 的解，反之如果 α 是方程组 (2) 的解，则 α 一定是方程组 (1) 的解，则称, 方程组 (1) 和方程组 (2) 同解。

关于公共解，通常有如下解法:（假设方程组 (1) 有两组不同的基础解系 ξ_1,ξ_2，方程组 (2) 有两组不同的基础解系 η_1,η_2）

方法 1：分别求出方程组 (1) 和 (2) 的通解：即 (1) 得到通解为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2$,(2) 的通解为 $l_1\eta_1=l_2\eta$。令两个方程组的通解相等，找出对应的 k 和 l 的关系。

方法 2：求出其中一个通解，代入到另外一个方程组中，找出相应的系数所满足的关系式进一步求出公共解。

方法 3：联立两个方程组得到一个新的方程组 (3)，求出 (3) 的解即为公共解。

显然，此题用方法 3 更合适：联立两个方程组，得到增广矩阵：

$$[A|B]=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\a&-1&-2&-3\\0&a&1&1\end{bmatrix}$$

讨论：$a=0$ 时：显然 $r(A)=r(A|B)$，即线性方程组有解，即这两个线性方程组有公共解。

$a\neq0$ 时，对增广矩阵进一步进行高斯消元：

$$\xrightarrow{r_2-ar_1}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&-1-2a&-2-a&-3-2a\\0&a&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&a&1&1\\0&-1-2a&-2-a&-3-2a\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1+2a}{a}r_3}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&a&1&1\\0&0&-\frac{a^2-1}{a}&-\frac{2a^2+a-1}{a}\end{bmatrix}$$

当 $-\frac{a^2-1}{a}=0$ 且 $-\frac{2a^2+a-1}{a}\neq 0$ 时，无解，此时没有公共解，解得 $a=1$. 所以 $a=1$ 时无公共解，所以 $a\neq 1$。 ♢

4. 设 $\alpha_1=(a,1,1)^T,\alpha_2=(1,b,-1)^T,\alpha_3=(1,-2,c)^T$ 是正交向量组，则 $a+b+c=$______。

解：

由题得：

$$\begin{cases}\alpha_1\alpha_2^T=a+b-1=0\\ \alpha_1\alpha_3^T=a-2+c=0\\ \alpha_2\alpha_3^T=1-2b-c=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a+b+c=2$$

♢

5. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3$ 对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,-1,-1)^T,\alpha_3$，则 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3=$______。

解：

设 $\alpha_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的，所以：

$$\begin{cases}\alpha_1\alpha_3^T=x_1+x_2+x_3=0\\ \alpha_2\alpha_3^T=2x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-x_3\end{cases}$$

令 $x_3=-1$，有 $\alpha_3=[0,1,-1]$ ♢

6. 设 $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&6\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$, 已知二次型 $f(x)=x^TBx$ 是正定的，则 λ 的取值范围为______。

解：

由题得：

$$f(x)=x^TBx=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&6\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&2x_1+2x_2&4x_1+6x_2+\lambda x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1^2+2x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$$

所以其对应的二次型矩阵为：$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{bmatrix}$,$A$ 为对称矩阵，如果 A 正定，则 $|A|>0$, 所以 $|A|=\lambda-5>0\ \Rightarrow\ \lambda>5$. ♢

二、计算题

1. 若行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\0&4&1&2\\0&2&2&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}-2A_{21}+A_{31}-2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

$$A_{11}-2A_{21}+A_{31}-2A_{41}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&3&4&6\\1&4&1&2\\-2&2&2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&3&4&6\\1&4&1&2\\-1&1&1&1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+2r_1\\r_3-r_1\\r_4+r_1}}{=\!=\!=}4\begin{vmatrix}7&10&14\\1&-1&-1\\3&4&5\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1-7r_2\\r_3-3r_2}}{=\!=\!=}4\begin{vmatrix}0&17&21\\1&-1&-1\\0&7&8\end{vmatrix}$$

$$=4\times1\times(-1)^{1+2}(17\times8-7\times21)=44$$

♢

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$,$B$ 为三阶矩阵，且满足方程 $A^*BA=I+2A^{-1}B$，求矩阵 B。

解：

由题得：$|A|=1,A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}$. 对题中方程两边同时左乘 A 得：

$$BA=A+2B$$
$$B=A(A-2E)^{-1}=A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&3\\0&-1&3\\0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-4&-18\\0&-1&-6\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

(求逆的过程略。$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-2&-9\\0&-1&-3\\0&0&-1\end{bmatrix}$) ♢

3. 设向量组 $\alpha_1=(3,1,4,3)^T,\alpha_2=(1,1,2,1)^T,\alpha_3=(0,1,1,0)^T,\alpha_4=(2,2,4,2)^T$, 求向量组的所有的极大线性无关组。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}3&1&0&2\\1&1&1&2\\4&2&1&4\\3&1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&1&0&2\\4&2&1&4\\3&1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&1&0&2\\4&2&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-2&-3&-4\\0&-2&-3&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-2&-3&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 2，极大线性无关组为 $(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_3,\alpha_4)$. ♢

三、解答题

1. 令 $\alpha=(1,1,0)^T$, 实对称矩阵 $A=\alpha\alpha^T$.

(1) 把矩阵 A 相似对角化；

(2) 求 $|6I-A^{2017}|$.

解：

由题得：$A=\alpha\alpha_T=(1,1,0)^T(1,1,0)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。所以

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-1)^2-1]=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=0$$

$\lambda_1=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{高斯消元，步骤略}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

可以看出，$\lambda_1=2$ 时：代数重数等于几何重数。

$\lambda_2=\lambda_3=0$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{高斯消元，步骤略}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

可以看出，$\lambda_2=\lambda_2=0$ 时：代数重数等于几何重数。

所以 A 可以相似对角化：即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，其中 $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(2) 由特征值的性质：$6I-A^{2017}$ 的特征值为：$6-\lambda_i^{2017}$，所以

$$|6I-A^{2017}|=\prod_{i=1}^{3}(6-\lambda_i^{2017})=36\times(6-2^{2017})$$

◇

2. 已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & -1 & 4\\ -1 & 3 & b\\ 4 & b & 0\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 5\end{bmatrix}$ 相似。

(1) 求矩阵 A；

(2) 求正交线性变换 $x=Qy$，把二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为标准型.

解：

对于对角矩阵，其特征值为对角线上的元素。因为 A 与 B 相似，所以 A 与 B 有相同的特征值。

(1) 由特征值的性质

$$\begin{cases} trace(A)=a+3+0=\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=2-4+5=3 \\ |A|=(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & b\\ 4 & 0\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & b\end{vmatrix}=-8b-48=\prod\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=2\times(-4)\times5=-40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}$$

(2)

$\lambda_1=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=2x_3\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_1=[1,2,1]^T$。

$\lambda_2=-4$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -4\\ 1 & -7 & 1\\ -4 & 1 & -4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\end{cases}$$

取 $x_3=-1$ 得 $\alpha_2=[1,0,-1]^T$。

$\lambda_3=5$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_2=[1,-1,1]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right]^T\\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]^T\\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]^T\end{cases}\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=2y_1^2-4y_2^2+5y_3^2$$

◇

3. 在对观测数据拟合的时候经常遇到线性方程组 $Ax=b$ 是矛盾方程的情形，是没有解的。此时我们转而解 $A^TAx=A^Tb$，我们称 $A^TAx=A^Tb$ 是原线性方程组的正规方程组。称正规方程组的解为原方程组的最小二乘解。设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}$.

(1) 证明 $Ax=b$ 无解；

(2) 求 $Ax=b$ 的最小二乘解。

解：

(1) 由题得：

$$[A|B]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&2\\0&-1&1&7\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

可以看出 $r(A)=3\neq r(A|B)=4$，所以 $Ax=b$ 无解。

(2)

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&2\\3&3&1\\2&1&2\end{bmatrix}$$

$$A^Tb=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\6\\10\end{bmatrix}$$

高斯消元步骤略（考试必须写上）。最后解得：$x_1=8, x_2=-6, x_3=0$ ◇

四、证明题

1. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的向量组，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关，证明 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示并且表示方法唯一。

证明：

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关，则存在一组不全为 0 的 $l_i(1\leq i\leq 3)$ 和 l, 使得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l\beta=0 \tag{1}$$

若 $l=0$, 则 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$，此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，与题中的条件矛盾，所以 $l\neq 0$。所以 (1) 式可变形为

$$\beta=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)$$

即 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，不妨设任意两组不全为 0 的数 $m_i,n_i,(1\leq i\leq 3)$，使得

$$\beta=m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3 \tag{2}$$

$$\beta=n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+n_3\alpha_3 \tag{3}$$

(2) 式减 (3) 式：$0=(m_1-n1)\alpha_1+(m_2-n2)\alpha_2+(m_3-n3)\alpha_3$, 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以有 $m_1-n1=0, m_2-n2=0, m_3-n3=0$, 即 $m_1=n1, m_2=n2, m_3=n3$, 由于 m_i 和 n_i 的任意性，所以可证得表示方法唯一。 ◇

2. 已知 A, B 是同阶实对称矩阵。

(1) 证明如果 $A \sim B$，则 $A \simeq B$, 也就是相似一定合同；

(2) 举例说明反过来不成立。

证明：

(1) 因为 $A \sim B$, 所以 A, B 具有相同的特征值，记为 $\lambda_i, (1 \le i \le n)$。对于实对称矩阵 A 存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ_1$ 为对角矩阵。即存在正交矩阵 Q_1，使得 $Q_1^{-1}AQ_1 = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$，对于正交矩阵 Q_1，有 $Q_1^{-1} = Q_1^T$，即 $Q_1^T AQ_1 = \Lambda$，所以 A 合同于 Λ，同理 B 合同于 Λ，所以 A 合同于 B。

(2) 反过来描述：A, B 是同阶实对称矩阵，$A \simeq B$，则 $A \sim B$。

由惯性定理（157 页）知：如果：$A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}$，$A$,$B$ 为对角阵, 且 $A \simeq B$, 但 A 和 B 的特征值不同，即 A 与 B 不相似。 ♢

2017-2018 年第一学期

一、填空题

1. 设 A_{ij} 是三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}$ 第 i 行第 j 列元素的代数余子式，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$______。

解：

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}=\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0$$

◇

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$，则 $r(A+AB)=$______。

解：

由题得：$|A|=0$（第一行减第二行然后按第一行展开）

$$B=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$C=A+AB=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&6&9\\2&4&6\\8&16&24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7&10\\2&5&7\\10&19&27\end{bmatrix}$$

$$C\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}2&5&7\\4&7&10\\10&19&27\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}2&5&7\\0&-3&-4\\0&-6&-8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}2&5&7\\0&-3&-4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $r(A+AB)=2$ ◇

3. 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&2&2\end{bmatrix}$，记 A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$______。

解：

$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$，由题得：$|A|=8$ ◇

4. 已知 3 阶方阵 A 的秩为 2，设 $\alpha_1=(2,2,0)^T,\alpha_2=(3,3,1)^T$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则导出 $Ax=0$ 的基础解系为______。

解：

因为 α_1,α_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，所以 $A\alpha_1=b,A\alpha_2=b$，且 α_1,α_2 不相等，所以 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $AX=0$ 的基础解系。(实际上 $k(\alpha_1-\alpha_2)$ 都是导出组的基础解系。) ◇

5. 若 3 阶矩阵 A 相似于 B，矩阵 A 的特征值是 1,2,3 那么行列式 $|2B+I|=$______。(其中 I 是 3 阶单位矩阵)

解：

A 相似于 B，所以 A 与 B 的特征值相等。所以 $2B+I$ 的特征值为 $2\lambda_i+1$，所以 $|2B+I|=\prod\limits_{i=1}^{3}(2\lambda_i+1)=105$ ◇

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 的秩为 2，则 $t=$______。

解：

二次型对应的矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}$$

A 的秩为 2，即 $|A| = 0$，解得：$t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ♢

二、计算题

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解：

$$D \xlongequal[c_4+c_3]{\substack{c_1+3c_3 \\ c_2+c_3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-2c_3]{c_1-2c_3} -2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times 1 \times (-1)^{1+3} \times [3 \times (-8) - (-1) \times 4] = 40$$

♢

2. 解矩阵方程 $(2I - B^{-1}A)X^T = B^{-1}$, 其中 I 是 3 阶单位矩阵，X^T 是 3 阶矩阵 X 的转置矩阵，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

解：

由题得：$(2I - B^{-1}A)X^T = B^{-1}$，所以：

$$\begin{aligned} X^T &= (2I - B^{-1}A)^{-1}B^{-1} = [B(2I - B^{-1}A)]^{-1} \\ &= (2B - A)^{-1} \end{aligned}$$

$$C = 2B - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 所以 $X = C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ♢

3. 求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$ 的通解。

解：

增广矩阵

$$
\left[\begin{array}{cccc:c}
2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\
1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
7 & 0 & 7 & -3 & 3
\end{array}\right]
\xrightarrow[r_4-\frac{7}{2}r_1]{\substack{r_2-\frac{1}{2}r_1 \\ r_3-\frac{3}{2}r_1}}
\left[\begin{array}{cccc:c}
2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\
0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\
0 & \frac{5}{2} & -5 & \frac{9}{2} & 7 \\
0 & \frac{7}{2} & -7 & \frac{15}{2} & 17
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{r_3-5r_2 \\ r_4-7r_2}}
\left[\begin{array}{ccccc:c}
2 & -1 & 4 & -3 & & -4 \\
0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & & -1 \\
0 & 0 & & 0 & 2 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 4 & & 24
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r_4-2r_3}
\left[\begin{array}{ccccc:c}
2 & -1 & 4 & -3 & & -4 \\
0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & & -1 \\
0 & 0 & & 0 & 2 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{r_1\times\frac{1}{2} \\ r_2\times 2 \\ r_3\times\frac{1}{2}}}
\left[\begin{array}{cccc:c}
1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & -2 \\
0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{r_2-r_3 \\ r_1+\frac{3}{2}r_3}}
\left[\begin{array}{cccc:c}
1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 7 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r_1+\frac{1}{2}r_2}
\left[\begin{array}{cccc:c}
1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$x_1 = 3 - x_3 \quad x_2 = 2x_3 - 8 \quad x_3 = x_3 \quad x_4 = 6$$

令 $x_3 = C, C \in R$，则

$$
x = \begin{bmatrix} 3-C \\ 2C-8 \\ C \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} C \ , \ C \in R
$$

◇

三、解答题

1. 设 1 为矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ 的特征值，其中 $x > 1$.

(1) 求 x 及 A 的其他特征值。

(2) 判断 A 能否对角化，若能对角化，写出相应的对角矩阵 Λ。

解：

(1) 设 α_1 为特征值 1 对应的特征向量，所以 $\alpha_1 \neq 0$ 由题得：$A\alpha_1 = \alpha_1$，即 $(A-E)\alpha_1 = 0$，即 $(A-E)x = 0$ 有非零解。所以由存在唯一性定理：$|A-E| = 0$，所以

$$
|A-E| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)(x-2) = 0
$$

由题得：$x > 1$，所以解得 $x = 2$。

(2) 把 $x = 2$ 代入得：

$$
|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -(\lambda+1) & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-2)-2] = 0
$$

解得：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$。

因为 A 为三阶，并且有 3 个不同的特征值，所以可以相似对角化，$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & -1\end{bmatrix}$。（不唯一，只要对角线元素是这三个就可以）

◇

2. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$。

(1) 写出该二次型的矩阵 A;

(2) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ$ 为对角型矩阵；

(3) 给出正交变换，化该二次型为标准型。

解：

(1) 由题得:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\-1 & \lambda-2 & 0\\0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)[(\lambda-2)^2-1]=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$$

$\lambda=3$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=x_2\\x_3\in R\end{cases}$$

分别取 $[x_2,x_3]^T=[1,0]^T$ 和 $[0,1]^T$ 得 $\alpha_1=[1,1,0]^T,\alpha_2=[0,0,1]^T$。

$\lambda=1$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}$$

取 $x_2=-1$ 得 $\alpha_2=[1,-1,0]^T$。

因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{||\alpha_1||}=\left[\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2},0\right]^T\\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{||\alpha_2||}=[0,0,1]^T\\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=\left[\dfrac{1}{\sqrt2},-\dfrac{1}{\sqrt2},0\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt2} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt2}\\ \dfrac{1}{\sqrt2} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=3y_1^2+3y_2^2+y_3^2$$

◇

3. 已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T$ 及 $\beta_4=(3,10,b,4)^T$.

(1)a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合？

(2)a,b 为何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并写出该表达式。

解：

记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, 则

$$[A|\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&2\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right]$$

(1) 可以看出 $b\neq 2, a\in R$ 时，$Ax=\beta$ 无解，即 β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

(2)$b=2$ 时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

当 $a\neq 1$,$r(A)=r(A,\beta)=3$, 此时：$Ax=\beta$ 有唯一解，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{a-1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&-1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

此时 $Ax=\beta$ 的解为 $x_1=-1,x_2=2,x_3=0$，所以 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

$a=1$ 时 $r(A,\beta)=r(A)=2<3$，所以 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

所以解得 $x_1=-1-2x_3,x_2=x_3+2$，令 $x_3=k,k\in R$, 则 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-(1+2k)\alpha_1+(2+k)\alpha_2+k\alpha_3$ ◇

四、证明题

1. 设 A,B 均为 n 阶方阵，证明：若 A,B 相似则 $|A|=|B|$，举例说明反过来不成立。

证明：

若 A 与 B 相似, 则依定义有: 存在一个可逆矩阵 P, 使得 $A=P^{-1}BP$, 两边同时求行列式: $|A|=|P^{-1}BP|=|P^{-1}|\cdot|B|\cdot|P|=|B|\cdot|P^{-1}P|=|B|\cdot|E|=|B|$。

反过来描述：如果 $|A|=|B|$，则 A 和 B 相似。

例如: $A\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $|A|=1$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $|B|=1$, 所以 $|A|=|B|$, 但是: 假设存在一个可逆矩阵 P,$P^{-1}AP=P^{-1}EP=E\neq B$, 即 $|A|=|B|$，但是 A,B 不相似。 ◇

2. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，证明 $Ax=0$ 与 $(A^TA)x=0$ 是同解方程，进一步得出 $r(A)=r(A^TA)$。

解：

(1) 若 x_0 为 $Ax=0$ 的解，则 $Ax_0=0$，对等式两边同时左乘 A^T：$A^TAx_0=0$，即 x_0 为 $A^TAx=0$ 的解。

若 x_1 为 $A^TAx=0$ 的解：则 $A^TAx_1=0$，等式两边同时左乘 x_1^T：$x_1^TA^TAx_1=(Ax_1)^T(Ax_1)=0$，所以 $Ax_1=0$，所以 x_1 为 $Ax=0$ 的解。(注：这里就认为 x 是一个列向量，所以 Ax 也是列向量，用向量内积的性质。)

综上所述：$Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解。

(2)$Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解，则它们解的空间维数相同。又因为解的空间维数 = 未知量的个数-系数矩阵的秩。两个方程的未知数个数相同，所以系数矩阵相同，即 $r(A)=r(A^TA)$ ◇

2018-2019 年第一学期

一、填空题

1. 设 A 为 5 阶方阵满足 $|A|=2$,A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|2A^{-1}A^*A^T|=$______。

解：

原式 $=$

$$2^5|A^{-1}|\cdot|A^*|\cdot|A^T|=2^5\cdot|A|^{-1}\cdot|A|^{5-1}\cdot|A|=2^9=512$$

◇

2. 已知向量组 $\alpha_1=(1,3,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,4,k)$ 线性无关，则实数 k 满足的条件是______。

解：

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $|A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\3&1&4\\1&1&k\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\3&1&1\\1&1&k-1\end{vmatrix}=k-2\neq 0\quad\Rightarrow k\neq 2$$

◇

3. 设 A 为 m 阶阵，存在非零的 m 维列向量 B，使 $AB=0$ 的充分必要条件是______。

解：

B 非零，说明 $Ax=0$ 有非零解，由存在唯一性定理：$|A|=0$，或 $r(A)<m$。 ◇

4. 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，其特征值为 $1,-1,2$，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 A^* 的主对角线元素之和即 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$______。

解：

由题得：$|A|=\prod\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=-2$，所以 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_i}$，所以 A^* 的主对角线元素之和为 $trace(A^*)=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{|A|}{\lambda_i}=-1$。 ◇

5. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 t 应满足______。

解：

二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{bmatrix}$, 二次型正定，即 A 正定，即 A 的所有顺序主子是大于 0. 即

$$\begin{aligned}&D_1=1\\&D_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}=4-t^2>0\quad\Rightarrow\quad -2<t<2\\&D_3=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}=8-4t-4t^2>0\quad -2<t<1\end{aligned}$$

综上所述：$-2<t<1$. ◇

6. 设 3 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$。则行列式 $|A|=$______。

解：

由题得：$A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 所以

$$A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(-\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_2+\alpha_3)$$

即

$$|A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)| = |A|\cdot|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3| = |-\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_2+\alpha_3|$$

$$|-\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_2+\alpha_3| \xlongequal{c_3-c_2} |-\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3| = -|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|$$

$$|A| = -1$$

◇

二、计算题

1. 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 5 & 27 \end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

-48.

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 27 \end{vmatrix}$$

可以看出该式为范德蒙行列式，其中 $x_1=-1, x_2=2, x_3=1, x_4=3$, 所以上式 $=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_2)(x_2-x_1) = -48$ ◇

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 且 X 满足 $AX = X + A$，求 X。

解：

由题得：$AX = X + A$, 所以 $(A-E)X = A$，所以 $X = (A-E)^{-1}A$

$$B = A - E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B|E] \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \Leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

所以 $(A-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$,$X = (A-E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ◇

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，求 $r(A), r(A^*)$ 和 A 的列向量组的极大线性无关组。

解：

$$A \xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-\frac{1}{2}r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$r(A^*)=\begin{cases} n,\ r(A)=n; \\ 1,\ r(A)=n-1 \\ 0,\ r(A)<n-1. \end{cases}$$

上式中：n 为 A 的阶数。

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

(1)$a=1$ 且 $b=1$ 时：$r(A)=2<4-1=3$,$r(A^*)=0$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_3,\alpha_4)$.

(2)$a=1$ 且 $b\neq 1$ 时：$r(A)=3=4-1$,$r(A^*)=1$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

(3)$a\neq 1$ 且 $b=1$ 时：$r(A)=3=4-1$,$r(A^*)=1$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

(4)$a\neq 1$ 且 $b\neq 1$ 时：$r(A)=4$,$r(A^*)=4$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. ♢

三、解答题

1. 设 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=2 \end{cases}$，$\lambda$ 为何值时，该方程组无解、唯一解、无穷解？并且在有唯一解时求出解；有无穷多解时，求出全部解并用向量表示。

解：

（系数矩阵是方阵，也可以用行列式来做这个题。具体看 14-15 年期末试题的第四题，推荐这种方法）

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-\lambda r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-(\lambda+1)r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(-2-\lambda) & -\lambda-2 \end{array}\right]$$

讨论：

(1) 解不存在：即存在矛盾方程（增广矩阵主元列在最右列）。即对于 r_3

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda)=0 \\ -\lambda-2\neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda=1$$

(2) 存在唯一解：主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1\neq 0 \\ 1-\lambda\neq 0 \\ (\lambda-1)(-2-\lambda)\neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda\neq 1 且 \lambda\neq -2$$

$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$，继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{(\lambda-1)(-2-\lambda)}]{r_2\times\frac{1}{1-\lambda}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & 0 & \frac{2\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-\lambda r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right]$$

所以方程组存在唯一解时：$\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$，解为

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda\neq 1且\lambda\neq -2$$

(3) 存在无穷解：至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases}(\lambda-1)(-2-\lambda)=0\\ -2-\lambda=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda=-2$$

把 $\lambda=-2$ 代入阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&2\\0&3&-3&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \xrightarrow{r_2\times\frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&2\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \xrightarrow{r_1+2r_2} \left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&2\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$x_1=2+x_3 \quad x_2=x_3 \quad x_3=x_3$$

令 $x_3=C, C\in R$，则

$$x=\begin{bmatrix}2+C\\C\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}C\ ,\ C\in R$$

◇

2. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2$。

(1) 写出该二次型的矩阵 A;

(2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵；

(3) 给出正交变换，将该二次型化为标准型；

(4) 写出二次型的秩，正惯性指标和负惯性指标。

解：

(1) 由题得：

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&3\end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$$

$\lambda_1=1$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-3&-4\\2&-4&-2\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x_1=-2x_3\\x_2=0\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_1=[-2,0,1]^T$。

$\lambda_2=6$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&2&-4\\2&-4&9\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_3=\frac{5}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得 $\alpha_2=[1,5,2]^T$。

$\lambda_3=-6$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-6&-2&2\\-2&-10&-4\\2&-4&-3\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_3=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得 $\alpha_3=[1,-1,2]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[-\dfrac{2}{\sqrt{5}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right]^T\\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{30}},\dfrac{5}{\sqrt{30}},\dfrac{2}{\sqrt{30}}\right]^T\\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad P=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}&\dfrac{1}{\sqrt{30}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\0&\dfrac{5}{\sqrt{30}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{5}}&\dfrac{2}{\sqrt{30}}&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

所以 P 即为所求的正交矩阵，$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&6&\\&&-6\end{bmatrix}$

(3) 由 (2) 得：f 可经正交变换 $x=Py$ 化为标准型：

$$f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$$

(4) 计算得 $|A|=-2\begin{vmatrix}2&-2\\4&-3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&-2\\4&4\end{vmatrix}=-36\neq 0$，所以二次型满秩，即 $r(A)=3$。由 (3) 得，正惯性指标为 2，负惯性指标为 1。 ◇

四、证明题

1. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+3A-4I=0$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵。

(1) 证明：$A,A+3I$ 可逆，并求他们的逆；

(2) 当 $A\neq I$ 时，判断 $A+4I$ 是否可逆并说明理由。

解：

(1) 由题得：$A^2+3A-4I=0$，所以 $A(A+3I)=4I$, 所以 $A,A+3I$ 可逆，A 的逆为 $\frac{1}{4}(A+3I)$,$A+3I$ 的逆为 $\frac{1}{4}A$。

(2) 不可逆，理由：

由题得：$A^2+3A-4I=(A+4I)(A-I)=0$, 假设 $A+4I$ 可逆，则等式两端同时左乘 $(A+4I)^{-1}$ 得 $A-I=0$, 即 $A=I$ 与题目中 $A\neq I$ 矛盾，所以假设不成立。即 $A+4I$ 不可逆。 ◇

2. 若同阶矩阵 A 与 B 相似，即 $A\sim B$，证明 $A^2\sim B^2$。反过来结论是否成立并说明理由。

证明：

若 A 与 B 相似，则依定义有: 存在一个可逆矩阵 P，使得 $A=P^{-1}BP$，所以：$A^2=P^{-1}BP\cdot P^{-1}BP=P^{-1}B^2P$。所以 $A^2\sim B^2$。

反过来描述：如果 $A^2\sim B^2$，则 A 和 B 相似。

不成立。理由如下：

例如：$A\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,$B^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，所以 $A^2=B^2$, 由相似的性质 $A^2\sim B^2$ 但是：假设存在一个可逆矩阵 P,$P^{-1}AP=P^{-1}EP=E\neq B$，即 $A^2\sim B^2$，但是 A,B 不相似。 ◇

3. 设 λ_1,λ_2 是 A 的两个互异的特征值，$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量，$\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，证明：向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 线性无关。

证明：

由题得：$A\alpha_{1i}=\lambda_1\alpha_{1i},(1\leq i\leq s)$,$A\alpha_{2j}=\lambda_1\alpha_{1j},(1\leq j\leq t)$。

设

$$k_1\alpha_{11}+\cdots+k_s\alpha_{1s}+k_{s+1}\alpha_{21}+\cdots+k_{s+t}\alpha_{2t}=0\tag{1}$$

要证明向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 线性无关，只需证明 $k_1=k_2=\cdots=k_s=k_{s+1}=\cdots=k_{s+t}=0$ 即可。

在 (1) 式左边同乘 A:

$$k_1A\alpha_{11}+\cdots+k_sA\alpha_{1s}+k_{s+1}A\alpha_{21}+\cdots+k_{s+t}A\alpha_{2t}=\lambda_1(k_1\alpha_{11}+\cdots+k_s\alpha_{1s})+\lambda_2(k_{s+1}\alpha_{21}+\cdots+k_{s+t}\alpha_{2t})=0\tag{2}$$

(2)$-\lambda_2$(1) 得: $(\lambda_1-\lambda_2)(k_1\alpha_{11}+\cdots+k_s\alpha_{1s})=0$, 因为 λ_1,λ_2 是 A 的两个互异的特征值, 所以 $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$, 所以 $k_1\alpha_{11}+\cdots+k_s\alpha_{1s}=0$，又因为 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量, 所以：$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$。代入到 (1) 式得：

$k_{s+1}\alpha_{21}+\cdots+k_{s+t}\alpha_{2t}=0$，因为 $\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，所以 $k_{s+1}=k_{s+2}=\cdots=k_{s+t}=0$

综上所述：$k_1=k_2=\cdots=k_s=k_{s+1}=k_{s+2}=\cdots=k_{s+t}=0$, 所以向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 线性无关。 ◇

2019-2020 年第一学期

一、填空题

1. 设 A 是 3 阶方阵，E 是 3 阶单位矩阵，已知 A 的特征值为 $1,1,2$, 则 $\left|\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1}-2A^{-1}+E\right|=$______。

解：

由题得：$|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=2, A^*$ 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}$.

由伴随矩阵的性质：$\left(\frac{1}{2}A\right)^*=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}A^*=\frac{A^*}{4}$, 所以 $\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1}-2A^{-1}+E$ 的特征值为

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\lambda_i}\right)^{-1}-2\lambda_i^{-1}+1=2\lambda_i-\frac{2}{\lambda_i}+1$$

所以：

$$\left|\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1}-2A^{-1}+E\right|=\prod_{i=1}^{3}\left(2\lambda_i-\frac{2}{\lambda_i}+1\right)=4$$

◇

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 $k=$______。

解：

若 $k=0$，则

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-1&0&-3\\0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&-3\\0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&-3\\0&0&6\end{bmatrix}$$

所以 $r(A)=3\neq 2$，即 $k\neq 0$. 对 A 接着进行化简：

$$A\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2k-2&3k-3\\0&2k-2&3-3k^2\end{bmatrix}=B$$

若 $k=1$，则

$$B=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(A)=1\neq 2$，所以 $k\neq 1$，继续对 A 进行化简：

$$B\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{k-1}]{r_2\times\frac{1}{k-1}}\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2&3\\0&2&-3-3k\end{bmatrix}$$

如果要使 $r(A)=2$，则

$$\frac{2}{2}=\frac{3}{-3-3k}\quad\Rightarrow k=-2$$

也可以使用 $|A|=0$ 来做。

◇

3. 记 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&3\\1&1&0&0\\2&3&0&0\end{bmatrix}$, 则 A^{-1}______。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}0 & A_{12}\\ A_{21} & 0\end{bmatrix}$，其中 $A_{12}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，设 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，其中 a,b,c,d 为 2 阶方阵，则

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}0 & A_{12}\\ A_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{12}c & A_{12}d\\ A_{21}a & A_{21}b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2 & 0\\ 0 & E_2\end{bmatrix}$$

所以：$c=A_{12}^{-1}, d=0, a=0, b=A_{21}^{-1}$.

$$[A_{12}|E_2]\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times(-1)}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right]$$

$$[A_{21}|E_2]\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & A_{21}^{-1}\\ A_{12}^{-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ◇

4. 若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\ x_2+x_3=a_2\\ x_3+x_4=-a_3\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$ 有解，a_1,a_2,a_3,a_4 应满足的条件是 $\underline{a_1+a_2+a_3+a_4=0}$。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3\\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4\end{array}\right]\xrightarrow{r_4-r_1}\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3\\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1+a_4\end{array}\right]\xrightarrow{r_4+r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1+a_2+a_4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4\end{array}\right]$$

若方程有解：$a_1+a_2-a_3+a_4=0$ ◇

5. 已知 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $c\alpha$, 其中 c 为非零常数，设 n 阶方阵 P 可逆，则 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为______。

解：

由题得：$A(c\alpha)=\lambda(c\alpha)$ 等式两边同时左乘 P^{-1}:

$$P^{-1}AE(c\alpha)=P^{-1}APP^{-1}(c\alpha)=(P^{-1}AP)(P^{-1}c\alpha)=\lambda(P^{-1}c\alpha)$$

所以 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $P^{-1}c\alpha=cP^{-1}\alpha$ ◇

6. 已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 1 & 3 & x\end{bmatrix}$ 的正惯性指数为 3，则 x 的取值范围为______。

解：

A 为实对称矩阵，且 A 的正惯性指数为 3，所以 A 正定，所以 A 的所有顺序主子式大于 0. 所以 $|A|=2(3x-9)-3>0 \quad\Rightarrow\quad x>3.5$ ◇

二、计算题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. 求满足 $AX=XA$ 的全部的矩阵 X。

解：

设 $X=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$,

$$AX=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$XA=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{bmatrix}$$

$AX=XA$，即

$$\begin{bmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}d=0 & a=e & b=f\\ g=0 & h=d=0 & i=e=a\\ 0=0 & g=0 & h=0\end{cases}$$

所以 $x=\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{bmatrix}$, 其中 a,b,c 是任意常数。 ◇

2. 求线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+3x_4=0\\2x_1+4x_2+x_3+3x_4=0\\2x_1+4x_2+4x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系。

解：

由题得：增广矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2&3\\2&4&1&3\\2&4&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&3&2&3\\0&-2&-3&-3\\0&-2&-4&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&3&2&3\\0&-2&-3&-3\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+2r_3}\begin{bmatrix}1&3&0&5\\0&-2&0&-6\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&3&0&5\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

所以 $x_1=4x_4,x_2=-3x_4,x_3=x_4$，令 $x_4=1$，得基础解系：$\xi=[4,-3,1,1]^T$。 ◇

3. 记 $2n$ 阶方阵 $A_n=\begin{bmatrix}a_n&&&&&b_n\\&a_{n-1}&&&b_{n-1}&\\&&\ddots&\iddots&&\\&&a_1&b_1&&\\&&c_1&d_1&&\\&&\iddots&\ddots&&\\&c_{n-1}&&&d_{n-1}&\\c_n&&&&&d_n\end{bmatrix}$.

(1) 求 $|A_1|,|A_2|$

(2) 求 $|A_n|$。

解：

(1)

$$|A_1|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-c_1b_1$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix}=a_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \\ c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_2d_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}-b_2c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=(a_2d_2-b_2c_2)|A_1|$$

$$=(a_2d_2-b_2c_2)(a_1d_1-c_1b_1)$$

(2) 用数学归纳法：

由 (1) 得：

$$n=1: \quad |A_1|=a_1d_1-c_1b_1=\prod_{i=0}^{1}(a_id_i-c_ib_i)$$

$$n=2: \quad |A_2|=(a_2d_2-c_2b_2)\,|A_1|=\prod_{i=0}^{2}(a_id_i-c_ib_i)$$

则 $n=k-1$ 时，有 $|A_n|=\prod\limits_{i=0}^{k-1}(a_id_i-c_ib_i)$.

当 $n=k$ 时，按第一列展开，得：

$$|A_k|=a_{11}A_{11}+a_{2k1}A_{2k1}$$

$$=a_k\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} & \\ 0 & & & & & & d_k \end{bmatrix}+c_k(-1)^{2k+1}\begin{bmatrix} 0 & & & & & & b_k \\ a_{k-1} & & & & & b_{k-1} & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} & \end{bmatrix}$$

$$=a_kd_k(-1)^{2k-2+1+2k-2+1}\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} \end{bmatrix}-c_kd_k(-1)^{1+2k-2+1}\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$=(a_kd_k-c_kd_k)|A_{k-1}|=\prod_{i=1}^{k}(a_id_i-c_ib_i)$$

◇

三、解答题

1. 设向量组 $\alpha_1=(1,-4,-3)^T,\alpha_2=(-3,6,7)^T,\alpha_3=(-4,-2,6)^T,\alpha_4=(3,3\ \ -4)^T$, 求向量组的秩, 并写出一个极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解：

由题得：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\-4&6&-2&3\\-3&7&6&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+4r_1}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&-6&-18&15\\0&-2&-6&5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&-6&-18&15\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{6})}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&1&3&-2.5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{bmatrix}1&0&5&-4.5\\0&1&3&-2.5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，极大线性无关组有两个向量：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_3,\alpha_4)$.(任写一个即可)

以 (α_1,α_2) 为例：$\alpha_3=5\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_4=-4.5\alpha_1-2.5\alpha_2$。 ♢

2. 已知 3 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}-1&a+2&0\\a-2&3&0\\8&-8&-1\end{bmatrix}$ 可以相似对角化且 A 得到特征方程有一个二重根，求 a 的值。其中 $a\le 0$.

解：

由题得:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-(a+2)&0\\2-a&\lambda-3&0\\-8&8&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)[(\lambda+1)(\lambda-3)+(2+a)(2-a)]=(\lambda+1)[(\lambda-1)^2-a^2]=0$$
$$\Rightarrow\quad\lambda_1=-1,\lambda_2=1+a,\lambda_3=1-a.$$

依题意：有二重根且可以相似对角化且 $a\le 0$.

讨论：

(1)$\lambda_1=\lambda_2$，即 $-1=1+a,a=-2\le 0$, 此时 $\lambda_3=1-a=3$, 代入到 $\lambda E-A$ 得：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}\lambda+1&0&0\\4&\lambda-3&0\\-8&8&\lambda+1\end{bmatrix}$$

对于重根 -1:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}0&0&0\\4&-4&0\\-8&8&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

对于根 3:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}4&0&0\\4&0&0\\-8&8&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$$

可以看出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 A 可相似对角化，即 $a=-2$ 符合题意。

(2)$\lambda_1=\lambda_3$, 即 $-1=1-a,a=2>0$，不符合题意。

(3)$\lambda_2=\lambda=3$, 即 $1+a=1-a,a=0$。此时 $\lambda_2=\lambda_3=1$. 把 $a=0$ 代入到 $[\lambda E-A]$ 得：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}\lambda+1&-2&0\\2&\lambda-3&0\\-8&8&\lambda+1\end{bmatrix}$$

对于重根 1:

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}2&-2&0\\2&-2&0\\-8&8&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

对于重根 1，其代数重数与几何重数不相等，所以不能相似对角化。

综上所述：$a=-2$. ◇

3. 设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A；

(2) 用正交变换 $x=Qy$ 把该二次型化为标准型。

解：

(1) 由题得:

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&2\\-1&4&0\\2&0&4\end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-2\\1&\lambda-4&0\\-2&0&\lambda-4\end{vmatrix}=-2[2(\lambda-4)]+(\lambda-4)[\lambda(\lambda-4)-1]=(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda+1)\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=4,\lambda_2=5,\lambda_3=-1$$

$\lambda_1=4$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&0\\-2&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=0\\x_2=2x_3\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_1=[0,2,1]^T$。

$\lambda_2=5$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}5&1&-2\\1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3\\x_2=-\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得 $\alpha_2=[1,-1,2]^T$.

$\lambda_3=-1$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\1&-5&0\\-2&0&-5\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-\dfrac{5}{2}x_3\\x_2=-\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=-2$ 得 $\alpha_3=[5,1,-2]^T$. 因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[0,\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{1}{\sqrt5}\right]^T\\\gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt6},-\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right]^T\\\gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{5}{\sqrt{30}},\dfrac{1}{\sqrt{30}},-\dfrac{2}{\sqrt{30}}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}0&\dfrac{1}{\sqrt6}&\dfrac{5}{\sqrt{30}}\\\dfrac{2}{\sqrt5}&-\dfrac{1}{\sqrt6}&\dfrac{1}{\sqrt{30}}\\\dfrac{1}{\sqrt5}&\dfrac{2}{\sqrt6}&-\dfrac{2}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=4y_1^2+5y_2^2-y_3^2$$

◇

四. 证明题

1. 设 A 为 m 阶正定矩阵，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$。

证明：

必要性：如果 B^TB 正定，则存在任意非零实列向量 $x\neq 0$，使得 $x^TB^TBx>0$，即 $(Bx)^TA(Bx)>0$，所以 $Bx\neq 0$。所以 $Bx=0$ 只有零解，即 $r(B)=n$。

充分性：如果 B 的秩为 $r(B)=n$，则线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，所以存在任意非零实列向量 x，使得 $Bx\neq 0$。又因为 A 为正定矩阵，由正定矩阵的定义得：$(Bx)^TABx>0$，即 $x^TB^TABx=x^T(B^TAB)x>0$。因为 x 为任意非零实列向量，所以依正定矩阵的定义，矩阵 (B^TAB) 正定。 $\diamondsuit$

2. 设 α,β 是 n 维列向量，证明 $r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq 2$。

证明：

由秩的性质：

$$r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\leq \min(r(\alpha),r(\alpha^T))+\min(r(\beta),r(\beta^T))\leq 1+1=2$$

$\diamondsuit$

2020-2021 年第一学期

一、填空题 (每小题 3 分，共计 15 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$=___12___。

解：

由题得，按最后一行展开

原式 $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-6) = 12$。 ♢

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -a & -1 & a-1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 a=___1 或 3___。

解：

由题得:

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -a & -1 & a-1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{3}r_1]{r_2 + \frac{a}{3}r_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{a}{3} - 1 & \frac{a}{3} - 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & a + \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

要使秩为 2：第二行为 0 或第二第三行的非零元素成比例。

第二行为 0 即：

$$\begin{cases} \frac{a}{3} - 1 = 0 \\ \frac{a}{3} - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

第二第三行的非零元素成比例即：

$$\frac{\frac{a}{3} - 1}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{a}{3} - 1}{a + \frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

综上所述：$a = 1$ 或 3。 ♢

3. 已知 A, B, C, D, H 为 n 阶实矩阵，I 是同阶单位矩阵，且 $ABCDH = I$，则 C^{-1}=___$DHAB$___。

解：

等式两边同左乘 (AB) 的逆和右乘 (DH) 的逆：$C = (AB)^{-1}(DH)^{-1}$，该等式两边同时求逆：$C^{-1} = ((AB)^{-1}(DH)^{-1})^{-1} = ((DH)^{-1})^{-1} \cdot ((AB)^{-1})^{-1} = DHAB$

注：可逆矩阵的性质：$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ♢

4. 已知 A 是 3 阶方阵，I 是同阶单位矩阵，且 $|A-I| = 0, |A+I| = 0, |I-2A| = 0$，则 $|2A^2+2A-I|$=___-1.5___。

解：

特征多项式的定义：$|\lambda I - A| = 0$，也即 $|A - \lambda I| = 0$. 所以由题得：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, |I-2A| = |-2(A-\frac{1}{2}I)| = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_3 = 0.5$，所以 $2A^2 + 2A - I$ 的特征值为：$2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 3, -1, 0.5$，所以 $|2A^2 + 2A - I| = 3 \times (-1) \times 0.5 = -1.5$ ♢

5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n (n \geq 2)$ 中，每个向量都能被其余向量线性表出是其向量组相关的___充分不必要___条件。

解：

从左往右：（每个向量都能被其余向量线性表出 $\Rightarrow$ 向量组相关）

向量组相关的定义是只要该向量组中有一个向量能被其余向量线性表出即可，所以满足充分性。

从右往左：（向量组相关 $\Rightarrow$ 每个向量都能被其余向量线性表出）

例如：$\alpha_1 = (1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0)^T$，该向量组相关，但 α_1 不能由 α_2 表出，不满足必要性。 ♢

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$，求 $M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$，其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式。

解：

由代数余子式的定义：

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21} \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23} \qquad A_{24}=(-1)^{2+4}M_{24}=M_{24}$$

所以：

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}=-A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

◇

2. 已知向量 $\alpha=(1,-1,2)^T, \beta=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)^T$，记 $A=\alpha\beta^T$，求 A^{2021}。

解：

$$k=\beta^T\alpha=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=-2$$

$$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=\alpha k\beta^T=k\alpha\beta^T=kA=k^{2-1}A$$
$$A^3=A\cdot A^2=A\cdot kA=kA^2=kkA=k^2A=k^{3-1}A$$
$$\cdots\cdots$$
$$A^n=k^{n-1}A$$

$$A^{2021}=k^{2021-1}A=(-2)^{2020}\alpha\beta^T=2^{2020}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

◇

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 满足 $AXB=BXB+I$，其中 I 是 3 阶单位矩阵，求 X。

解：

由题得：

$$AXB=BXB+I \quad \Rightarrow \quad AXB-BXB=I \quad \Rightarrow (A-B)XB=I \quad \Rightarrow \quad X=(A-B)^{-1}B^{-1}$$

分别求两个逆（过程略）：

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A-B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A-B)^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -\frac{13}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

◇

三、解答题（每小题 13 分，共计 39 分）

1. 求向量组 $\alpha_1=(1,1,2,0)^T,\alpha_2=(-2,-1,-2,2)^T,\alpha_3=(3,4,4,-4)^T,\alpha_1=(-1,-1,0,3)^T$ 的秩以及一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量。

解：

由题得：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&1&0\\0&2&-2&2\\0&2&-4&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&-4&2\\0&0&-6&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{3}{2}r_3}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&-4&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{4})}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-3r_3}\begin{bmatrix}1&-2&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为3，极大线性无关组为：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$(依题意，任写出其中一个即可)

用 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 表示 α_4: 由最简阶梯型矩阵可以看出：$\alpha_4=\dfrac{3}{2}\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2-\dfrac{1}{2}\alpha_3$。 $\diamondsuit$

2. 判断线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+2x_4=1\\x_1+2x_2+4x_3+5x_4=2\\2x_1+4x_2+ax_3+x_4=1\\-x_1-2x_2-3x_3+7x_4=8\end{cases}$ 何时无解？何时有解？并在有无穷多组解时求出其通解。

解：

由题可列增广矩阵并进行高斯消元：

$$(A|b)=\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\1&2&4&5&2\\2&4&a&1&1\\-1&-2&-3&7&8\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4+r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&a-6&-3&1\\0&0&0&9&9\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4\div 9]{r_3-(a-6)r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&15-3a&5-a\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-(15-3a)r_4}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&0&2a-10\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&2a-10\end{bmatrix}$$

由阶梯型矩阵可以看出：当 $r(A)\neq r(A|b)$，即 $2a-10\neq 0 \quad\Rightarrow\quad a\neq 5$ 时，该线性方程组无解，当 $r(A)=r(A|b)$，即 $2a-10=0 \quad\Rightarrow\quad a=5$ 时，该线性方程组有解，且有无穷多组解。

把 $a=5$ 代入上式继续化简：

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-3r_3}\begin{bmatrix}1&2&3&0&-1\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&0&5\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：$x_1=5-2x_2,x_3=-2,x_4=1$。

所以该方程组的一个特解为：$(5,0,-2,1)^T$，其导出组的基础解系为：$(-2,1,0,0)^T$，所以原方程组的通解为：$(5,0,-2,1)^T+k(-2,1,0,0)^T,(k\in R)$。 $\diamondsuit$

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-2&-2\\-2&1&-b\\-2&-b&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 相似，求 a,b 的值以及 A 的全部的特征向量。

解：

$$|A| = a\begin{vmatrix}1 & -b\\ -b & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-2 & -b\\ -2 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & -b\end{vmatrix} = a(1-b^2) + 2(-2-2b) - 2(2b+2) = a - ab^2 - 8b - 8$$

相似矩阵具有相同的特征值，所以由特征值的性质有：

$$\begin{cases}-3\times 3\times 3 = a - ab^2 - 8b - 8\\ -3+3+3 = a+1+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=1\\ b=-10\end{cases}$$

$a=1, b=-10$ 时，$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & 10\\ -2 & 10 & 1\end{pmatrix}$，所以

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-1 & -10\\ 2 & -10 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-1)[(\lambda-1)^2 - 100] - 4[2(\lambda-1)+20] = 0$$

代入 $\lambda = 3$ 得：左式等于-278 不等于右式，即 $a=1, b=-10$ 不合题意。

$a=1, b=2$ 时，$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，所以

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix} = -(3-\lambda)[(\lambda-1)(\lambda+1)-8] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$$

符合题意。

$\lambda = 3$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3$$

分别取 $[x_2, x_3]^T = [1,0]^T, [0,1]^T$ 得基础解系：$\alpha_1 = [-1,1,0]^T, \alpha_2 = [-1,0,1]^T$，所以 $\lambda = 3$ 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 (k_1, k_2$ 不全为 $0)$。

$\lambda = -3$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x_1 = x_3\\ x_2 = x_3\end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得基础解系：$\alpha_3 = [1,1,1]^T$，所以 $\lambda = -3$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3 (k_3 \neq 0)$。

综上所述：$a=1, b=2$, A 的全部特征向量为：$k_1[-1,1,0]^T + k_2[-1,0,1]^T$ $(k_1, k_2$ 不全为 $0)$，$k_3[1,1,1]^T (k_3 \neq 0)$。 ◇

四、证明题（共计 16 分）

1.（10 分）已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + 5A + 6I = 0$，证明 $A - 2I$ 可逆，并求出其逆矩阵（用 A 的多项式表示）.

证明：

由题得：

$$A^2 + 5A + 6I = A(A-2I) + 2A + 5A + 6I = A(A-2I) + 7(A-2I) + 20I = (A+7I)(A-2I) + 20I = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{A+7I}{20}(A-2I) = I$$

所以 $A-2I$ 可逆，且 $(A-2I)^{-1}=-\dfrac{A+7I}{20}$。 ♢

2.（6 分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+t\alpha_1$ 线性相关的充分必要条件是 $t=1$。

证明：

充分性：

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+t\alpha_1$ 线性相关，则存在一组不全为 0 的数 $k_i(i=1,2,3,4)$，使得

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\alpha_4+t\alpha_1)=0$$
$$\Rightarrow$$
$$(k_1+tk_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1+tk_4=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k3=0 \\ k_3+k_4=0 \\ k_1,k_2,k_3,k_4\text{不全为}0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad k_1=-tk_4=-k_2=k_3=-k_4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad t=1$$

必要性：

$t=1$，所以 $(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)=(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_4+t\alpha_1)$，即 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+t\alpha_1$ 线性相关。

证毕。 ♢