# 第十次习题课
## 群文件《期中 & 期末试题》

### 考研例题–实对称矩阵

1.设 $A$ 是 3 阶实对称矩阵，秩 $r(A)=2$, 若 $A^2=A$, 则 $A$ 的特征值是________.

解：

设 $\lambda$ 是 $A$ 的任意特征值，$\alpha$ 是属于 $\lambda$ 的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha, \alpha\neq 0$。所以有：

$$A^2\alpha=AA\alpha=A\lambda\alpha=\lambda A\alpha=\lambda\lambda\alpha=\lambda^2\alpha$$

又因为 $A^2=A$，所以有 $A^2\alpha=A\alpha$，即 $\lambda^2\alpha=\lambda\alpha$, 解得 $\lambda=0$ 或 1。

因为 $A$ 是实对称矩阵，所以 $A\sim\Lambda$, 且 $\Lambda$ 由 $A$ 的特征值所构成，相似矩阵具有相同的秩，所以 $r(\Lambda)=r(A)=2$, 所以可以推出

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

所以矩阵 $A$ 的特征值是 $1,1,0$。 ♢

2.$n$ 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a\end{bmatrix}$$

则 $r(A)=$________.

解：

由第二题的方法 2 可快速写出 $A$ 的特征值为 $n+a-1, a-1, a-1, \cdots, a-1$. 因为 $A$ 是实对称矩阵，所以 $A\sim\Lambda$, 且 $\Lambda$ 由 $A$ 的特征值所构成，相似矩阵具有相同的秩，所以 $r(\Lambda)=r(A)$, 所以

$$\Lambda=\begin{bmatrix}n+a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1\end{bmatrix}$$

这里 $n$ 是 $A$ 的阶数，所以不会等于 0。所以

$$r(A)=\begin{cases}n, & 若 a\neq 1 且 a\neq 1-n,\\ n-1, & 若 a=1-n,\\ 1, & 若 a=1.\end{cases}$$

♢

3.设 $\alpha$ 为 $n$ 维单位列向量，$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵，则

A.$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　B.$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆　　C.$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　D.$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解：

注意：单位向量指的是向量的模（长度）为 1，要与 $[1,1,1]$ 区分开来。

$\alpha\alpha^T\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)=1\alpha$, 所以 $\alpha\alpha^T$ 有一个特征值 1.

$\alpha$ 为 $n$ 维单位列向量，所以 $r(\alpha\alpha^T)=1$, 所以由第一题的结论，$\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1,0,0,\cdots,0$。

$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵，所以 $E$ 也为实对称矩阵 (特征值为 1)，实对称矩阵相加减依然为实对称矩阵，所以上述选项中每一项均为实对称矩阵。

又由矩阵可逆则行列式一定不为 0（不可逆则行列式一定为 0，充要条件），矩阵的行列式等于特征值的乘积。

$A.c$ 的特征值为 $1-1, 1-0, 1-0, \cdots, 1-0$ 即 $0, 1, 1, \cdots, 1$，所以 $|E-\alpha\alpha^T| = 0 \times 1 \cdots 1 = 0$，即不可逆。

同理可以看出其他选项的行列式均不为 0，即可逆。 ♢

## 期末试题

4.期末 2015-2016 三 2.

设 3 阶实对称矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$，对应于 $\lambda_1$ 的特征向量 $\alpha_1 = (0,1,1)^T$。

(1) 求 $A$ 对应于特征值 1 的特征向量；

(2) 求 $A$;

(3) 求 $A^{2016}$。

解：

(1) 由于 $A$ 是实对称矩阵，所以对于 $A$ 的不同特征值的特征向量正交，所以设特征值 1 对应的特征向量是 $\alpha = [x_1, x_2, x_3]$。所以有：

$$\alpha_1^T\alpha = x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_3$$

分别取 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 得 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

$\alpha_2, \alpha_3$ 即为 $A$ 对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义：$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$。所以：

$$\begin{aligned} &A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3] \quad \Rightarrow \\ &A = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\left( \text{式中：} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$

(3) 由 (2) 得：$A^2 = E_3$（$E$ 表示单位矩阵。）所以 $A^{2016} = (A^2)^{1008} = E_3$。 ♢

5.期末 2016-2017 一 4.

设 $\alpha_1 = (a,1,1)^T, \alpha_2 = (1,b,-1)^T, \alpha_3 = (1,-2,c)^T$ 是正交向量组，则 $a+b+c =$______。

解：

由题得：

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2^T = a+b-1 = 0 \\ \alpha_1\alpha_3^T = a-2+c = 0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 1-2b-c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a+b+c = 2$$

♢

6.期末 2016-2017 一 5.

设 3 阶实对称矩阵 $A$ 的特征值分别为 $1,2,3$ 对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = (1,1,1)^T, \alpha_2 = (2,-1,-1)^T, \alpha_3$，则 $A$ 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3 =$______。

解：

设 $\alpha_3 = [x_1, x_2, x_3]^T$，实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的，所以：

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_3^T = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3^T = 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = -1$，有 $\alpha_3 = [0, 1, -1]$ $\diamondsuit$