第八次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 53 分钟.**

50. 线性空间的概念(11分钟)
51. 线性组合(15分钟)
52. 向量组的等价(14分钟)
53. 线性相关(无关)(13分钟)

- **看视频的同时记好笔记.**
- **看线性代数教材 P26-P46 的内容.**
- **课堂上将分组讨论4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13.**

- 组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.

- 每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.

例 4.1 计算

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

例 4.2 写出如下矩阵的行向量组和列向量组.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2&1\\-3&1&1&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\\4&-5\end{pmatrix}.$$

例 4.3 设 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 而每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都可以由 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 线性表出. 证明: $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 线性表出.

例 4.4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 3 维向量. 证明: 3 维零向量 $\mathbf{0}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出的方式有无穷多.

例 4.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量, 且 3 维零向量 $\mathbf{0}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出的方式是唯一的. 在每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的第 3 个分量后任意添加 2 个分量, 得到 5 维向量 $\widetilde{\alpha}_i$ $(1 \leq i \leq 3)$. 证明: 5 维零向量 $\mathbf{0}$ 由 $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3$ 线性表出的方式仍然是唯一的.

例 4.6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组. 设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= 3\boldsymbol{\alpha}_1 - 4\boldsymbol{\alpha}_2 + 6\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\beta}_3 &= 2\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3.\end{aligned}$$

判断 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是否线性相关.

例 4.7 举例说明, 把两个线性无关的 m 维向量组放在一起, 得到的向量组可以是线性无关的, 也可以是线性相关的.

例 4.8 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 则下列说法正确的是哪些, 并说明理由.

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

例 4.9 设有三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+\lambda,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1+\lambda,1)^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1+\lambda)^T,\quad \boldsymbol{\beta}=(0,\lambda,\lambda^2)^T.$$

问 λ 取何值时:

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 且表达式唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 且表达式不唯一;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

例 4.10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出? 证明你的结论;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出? 证明你的结论.

例 4.11 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,4,0,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,7,1,3)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a)^T$ 及 $\boldsymbol{\beta} = (3,10,b,4)^T$.

(1) a, b 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合?

(2) a, b 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性表示? 并写出该表示式.

例 4.12 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$, 三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^T$. 已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 求 a.

例 4.13 设向量组 $(2,1,1,1)$, $(2,1,a,a)$, $(3,2,1,a)$, $(4,3,2,1)$ 线性相关, 且 $a\neq 1$, 则$a=$ ______.

例 4.14 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由.

(1) 因为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ 含有零向量, 所以, 线性相关.

(2) 在一个线性相关的向量组中, 每个向量都可以由其余的向量线性表出.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也是线性相关的.

(4) 如果一个向量组去掉它的任意一个向量后得到的向量组都是线性无关的, 则该向量组是线性无关的.

例 4.15 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由.

(5) 如果存在不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \mathbf{0},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(6) 如果一个向量组的分量不成比例, 则一定线性无关.

(7) 向量组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ 有可能是线性无关的.

例 4.16 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由.

(1) 设向量组 (I) 可以由 (II) 的一个子组线性表出, 则 (I) 可以由 (II) 线性表出.

(2) 设向量组 (I) 可以由 (II) 线性表出. 如果 (I) 线性相关, 则 (I) 所包含的向量个数大于 (II) 所包含的向量个数.

(3) 如果两个向量组是等价的, 则它们要么都是线性相关的, 要么都是线性无关的.

(4) 如果一个向量组线性无关, 那么它不可能与它的任意真子组等价. (真子组是除去若干个向量后得到的子组.)

(5) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是等价的, 则齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 与 $x_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0}$ 的解集相同.