写在前面：

1.答案里说的课本指的是由四川大学数学学院编写的《线性代数》(中国人民大学出版社)。

2.仅供内部参考使用，请勿将此文档上传到百度文库以及其同类网站上。

3.由个人整理，如果发现错误或有更好的解题方法请发送邮件至 $1315030237@qq.com$.

习题课上总结的一些题

一. 求矩阵的 m 次方。(这里之所以写 m 是为了与矩阵的阶数 n 区别开来，以防混淆)

1. 数学归纳法。即依次求出 $A, A^2, A^3, \cdots$。一般不用，但也有特殊情况（例如 17-18 年半期测试的一大题的第四小题，当然这个题有两种解法，任选其一；15-16 年的期末试题三大题的第二小题的最后一问)。

2. 对角矩阵的 m 次方。(显然不会单独出题)

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$，则 $A^m = \begin{bmatrix} a_{11}^m & & & \\ & a_{22}^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^m \end{bmatrix}$.

3. 如果一个 n 阶方阵 A主对角线上以及主对角线的一侧元素全为 0，那么必有 $A^k = 0$，其中 $k \geq n$。即 A 是下边的几种形状之一：(一定要注意是针对主对角线，副对角线该结论不成立，第二次习题课讲这里时讲错了，后边已更正)

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

例如：若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$，则 $A^2 = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$,$A^3 = \underline{\quad 0 \quad}$.

解：

由矩阵的乘法：

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇

4. 一般来说，上边的 2,3 不会单独出题，因为太过简单，都是组合起来出题。

二项式定理：$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i \cdot b^{n-i}$，式中：$C_n^i$ 为组合数，$C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$。

例如：若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $A^m = \underline{\qquad\qquad}$.

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}=I+B$

由 3 的结论可知：$B^k=0,k\geq 3$。计算得：$B^2=\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 所以

$$\begin{aligned}A^m&=(I+B)^m=C_m^0I^mB^0+C_m^1I^{m-1}B^1+C_m^2I^{m-2}B^2+C_m^3I^{m-3}B^3+\cdots+C_m^0I^0B^m\\&=I^mB^0+mI^{m-1}B^1+\frac{m(m-1)}{2}I^{m-2}B^2=I+mB+\frac{m(m-1)}{2}B^2\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{m(m-1)}{2}\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2m&4m^2-m\\0&1&4m\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

◇

5. 如果一个 n 阶方阵 A 的秩 $r(A)=1$，那么 A 一定可以写成一个列向量与一个行向量的乘积，即（我们以 3 阶的方阵为例，最后把结果推广到 n 阶）：

设 3 阶方阵 A 的秩 $r(A)=1$，设 $\alpha=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}^T,\beta=\begin{bmatrix}y_1&y_2&y_3\end{bmatrix}^T$，则

$A=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}x_1y_1&x_1y_2&x_1y_3\\x_2y_1&x_2y_2&x_2y_3\\x_3y_1&x_3y_2&x_3y_3\end{bmatrix}$(至于这里的 x 和 y 的具体值，我们并不关心。)

$l=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. 可以看出 l 是矩阵 A 的对角线元素之和（又称 A 的迹）。

$A^2=(\alpha\beta^T)^2=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=l\alpha\beta^T=lA,A^3=AA^2=AlA=lA^2=llA=l^2A\cdots,\Rightarrow A^m=l^{m-1}A$。

例如：（对 2,3,4,5 综合运用）

设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}$，则 $A^m=$ ________.

解：

经观察，我们可将矩阵按下列方式进行分块：

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}\end{bmatrix}\quad A_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}\ A_{22}=\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$$

A 分块后是对角矩阵，所以：$A^m=\begin{bmatrix}A_{11}^m&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}^m\end{bmatrix}$(注：2 的结论)

对于 A_{11}：

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=3I+B$$

和 4 一样了，此时 $B^k=0,k\geq 2$

$$\begin{aligned}A_{11}^m&=(3I+B)^m=C_m^0B^0(3I)^m+C_m^1B^1(3I)^{m-1}+C_m^2B^2(3I)^{m-2}+\cdots+C_m^mB^m(3I)^0\\&=3^mI+3^{m-1}mB\\&=\begin{bmatrix}3^m&m3^{m-1}\\0&3^m\end{bmatrix}\end{aligned}$$

对于 A_{22}，经过高斯消元法变换 (r_1-3r_2) 后：$\begin{bmatrix}3&9\\0&0\end{bmatrix}$，可以看出 $r(A_{22})=1$，符合本条的描述，所以

$$l=3+3=6$$

$$A_{22}^m=l^{m-1}A=6^{m-1}\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$$

所以：

$$A^m=\begin{bmatrix}A_{11}^m&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_{22}^m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^m&m\cdot 3^{m-1}&0&0\\0&3^m&0&0\\0&0&3\cdot 6^{m-1}&9\cdot 6^{m-1}\\0&0&6^{m-1}&3\cdot 6^{m-1}\end{bmatrix}$$

◇

6. 用相似矩阵的性质来做，即若 $A\sim B$, 则 $A^m\sim B^m$(例如 17-18 年半期测试的一大题的第四小题)。

但通常有一些矩阵隐含了此属性，也可以用此方法来做，要注意辨别。（例如：课本的 140 页第 9 题，答案在 224 页）

二、特殊矩阵的特征值求法

1. 对角阵，上下三角阵的行列式均为对角线的元素。（由这些特殊行列式的算法很容易看出来）

2. 设 $A=[a_{ij}]$ 是三阶矩阵，则 (下式不做推导，感兴趣的可以自己算一下)

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{bmatrix}=\lambda^3-\sum a_{ii}\lambda^2+S_2\lambda-|A|$$

式中：$S_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$。

若 $r(A)=1$(再复习一下一的第五点)，则 $|A|=0,S_2=0$, 代入到上式有

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-\sum a_{ii}\lambda^2=\lambda^2\left(\lambda-\sum a_{ii}\right)$$

做推广，对于 n 阶矩阵 A，若 $r(A)=1$, 则 $|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum a_{ii}\right)$

例如：

已知 $a \neq 0$，求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量。

解：

方法一：（直接计算）

由特征多项式：

$$\left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -a & -a \\ -a & \lambda-1 & -a & -a \\ -a & -a & \lambda-1 & -a \\ -a & -a & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \left[\lambda - (3a+1)\right](\lambda + a - 1)^3$$

得 A 的特征值是 $3a+1, 1-a$。

当 $\lambda = 3a+1$ 时，由 $[(3a+1)E - A] = 0$，即

$$\begin{bmatrix} 3a & -a & -a & -a \\ -a & 3a & -a & -a \\ -a & -a & 3a & -a \\ -a & -a & -a & 3a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得基础解系为 $\alpha_1 = (1,1,1,1)^T$，所以 $\lambda = 3a+1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1, (k_1 \neq 0)$。

当 $\lambda = 1-a$ 时，由 $[(1-a)E - A] = 0$，即

$$\begin{bmatrix} -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (-1,1,0,0)^T, \alpha_3 = (-1,0,1,0)^T \alpha_4 = (-1,0,0,1)^T$, 所以 $\lambda = 1-a$ 的特征向量为 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$, 式中 k_2, k_3, k_4 是不全为 0 的任意常数。

方法二：（转换法）

由题得：

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} = B + (1-a)E$$

由于 $r(B) = 1$，所以有

$$|\lambda E - B| = \lambda^{4-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^{4} a_{ii}\right) = \lambda^3(\lambda - 4a)$$

所以矩阵 B 的特征值为 $0,0,0,4a$, 所以由特征值的性质，A 的特征值为 $3a+1, 1-a, 1-a, 1-a$。

下边同方法一。 ◇

n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

则 $r(A)=$________.

解：

由上题可快速写出 A 的特征值为 $n+a-1, a-1, a-1, \cdots, a-1$. 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A \sim \Lambda$, 且 Λ 由 A 的特征值所构成，相似矩阵具有相同的秩，所以 $r(\Lambda)=r(A)$, 所以

$$\Lambda=\begin{bmatrix} n+a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{bmatrix}$$

这里 n 是 A 的阶数，所以不会等于 0。所以

$$r(A)=\begin{cases} n, & 若 a \neq 1 且 a \neq 1-n, \\ n-1, & 若 a=1-n, \\ 1, & 若 a=1. \end{cases}$$

◇

设 α 为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

A.$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　B.$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆　C.$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　D.$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解：

注意：单位向量指的是向量的模（长度）为 1，要与 $[1,1,1]$ 区分开来。

$\alpha\alpha^T\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)=1\alpha$, 所以 $\alpha\alpha^T$ 有一个特征值 1.

α 为 n 维单位列向量, 所以 $r(\alpha\alpha^T)=1$, 所以由第一题的结论，$\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1,0,0,\cdots,0$。

E 为 n 阶单位矩阵，所以 E 也为实对称矩阵 (特征值为 1)，实对称矩阵相加减依然为实对称矩阵，所以上述选项中每一项均为实对称矩阵。

又由矩阵可逆则行列式一定不为 0（不可逆则行列式一定为 0，充要条件），矩阵的行列式等于特征值的乘积。

$A.c$ 的特征值为 $1-1, 1-0, 1-0, \cdots, 1-0$ 即 $0,1,1,\cdots,1$, 所以 $|E-\alpha\alpha^T|=0\times 1\cdots 1=0$, 即不可逆。

同理可以看出其他选项的行列式均不为 0，即可逆。 ◇

2. 抽象矩阵特征值和特征向量的求法

设 A 是三阶矩阵，且矩阵 A 的各行元素之和均为 5，则矩阵 A 必有特征向量________.

解：

由题得：

$$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=5 \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=5 \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 必有特征值 5 且必有特征向量 $k[1,1,1]^T, (k \neq 0)$。 ◇

已知 A 是 3 阶矩阵，如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有通解 $5b+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中 η_1, η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，求 A 的特征值和特征向量。

解：

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 $Ax=b$ 的特解加上 $Ax=0$ 的通解。

由解得结构可知 $5b$ 是方程组 $Ax=b$ 的一个解，即 $A(5b)=b$, 所以 $Ab=\frac{1}{5}b$。即 $\frac{1}{5}$ 是 A 的特征值，$k_1b,(k_1\neq 0)$ 是相应的特征向量。

η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，所以必有 $A\eta_1=0=0\eta_1, A\eta_2=0=0\eta_2$, 所以 η_1,η_2 是 A 关于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量，所以特征值 0 对应的特征向量为 $k_2\eta_1+k_3\eta_2,(k_2,k_3\text{不全为}0)$。

综上所述，A 的特征值为 $\frac{1}{5},0,0$, 对应的特征向量分别是 $k_1b,(k_1\neq 0)$，$k_2\eta_1+k_3\eta_2,(k_2,k_3\text{不全为}0)$ ◇

2014-2015 年第一学期

一、填空题

1. 若已知行列式 $\begin{vmatrix}1 & 3 & a\\ 5 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=1$，则 $a=$______。

解：

$A_{21}=(-1)^{2+1}\times(3\times 1-2\times 1)=1$，解得 $a=2$。 ◇

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & t & 4\end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵且 $AB=0$, 则 $t=$______。

解：

B 为 3 阶非零矩阵且 $AB=0$ 即 B 的非零列向量为 $Ax=0$ 的解，即 $Ax=0$ 有非零解，即 $|A|=0$, 把 $|A|$ 按第三列展开。

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & t & 4\end{vmatrix}=-2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & t\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-2(2t-15)+4=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{17}{2}$$

◇

3. 设 3 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的行列式 $|A|=3$, 矩阵 $B=(\alpha_2,2\alpha_3,-\alpha_1)$，则行列式 $|A-B|=$______。

解：

对 A 的第三列乘 2 得: $|\alpha_1\ \alpha_2\ 2\alpha_3|=2|A|$, 对该表达式第一列乘负一: $|-\alpha_1\ \alpha_2\ 2\alpha_3|=-2|A|$, 交换一二两列, $|\alpha_2\ \alpha_1\ 2\alpha_3|=2|A|$，交换二三两列，$|\alpha_2\ 2\alpha_3\ \alpha_1|=-2|A|$, 所以 $|B|=-2|A|$.

$$\begin{aligned}|A-B| &= |\alpha_1-\alpha_2 \quad \alpha_2-2\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_1| = |\alpha_1 \quad \alpha_2-2\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_1| + |-\alpha_2 \quad \alpha_2-2\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_1|\\ &= |\alpha_1 \quad \alpha_2-2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_1|\\ &= |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| + |\alpha_1 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_3| + |-\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha_1|\\ &= |A|+0+0-|B| = 3|A| = 9\end{aligned}$$

◇

4. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1,3,2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则矩阵 A^3+2A^* 主对角线元素之和为______。

解：

由题得：$|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-1\times 3\times 2=-6$。所以 A^* 的特征值为：$\dfrac{|A|}{\lambda_i}$。由特征值的性质：

A^3+2A^* 的特征值为 $\lambda_i^3+2\dfrac{|A|}{\lambda_i}$. 所以 A^3+2A^* 主对角线元素之和为

$$trace(A^3+2A^*)=\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i^3+2\frac{|A|}{\lambda_i}\right)=36$$

◇

5. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_2$ 经正交变换 $x=py$ 可化为标准形：$f=6y^2$, 则 $a=$______。

解：

任意二次型 x^TAx 经过正交变换化为标准型时，标准型中平方项的系数即为二次型矩阵 A 的特征值, 即 $6,0,0$ 是 A 的特征值，而 A 的对角线元素是 a,a,a，由特征值性质 $trace(A)=a+a+a=\sum_{i=1}^{3}\lambda=6$，所以 $a=2$。 ◇

6. 设 $(1,1,1)^T$ 是矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & a & 2\\2 & 2 & b\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a-b=$______。

解：

由特征向量的定义有

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}6\\a+2\\b+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=6\\a=4\\b=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a-b=2$$

◇

二. 设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & 3 & 1 & 2\\x & x & -2 & 1\\2 & 1 & x & 4\\x & 2 & 1 & 4x\end{vmatrix}$，分别求该多项式的三次项、常数项。

解：

$Matlab$ 算出的结果为：$f(x)=8x^4-14x^3+11x^2-53x+14$（作为参考）

取列为自然排列。分析得：行数按 2134 和 4231 排列时，对应的项为 x^3。即

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(4231)}a_{41}a_{22}a_{33}a_{14}=(-12-2)x^3=-14x^3$$

同理，取列为自然排列。分析得行数按：3142、3412 和 3421 排列时为常数项，即

$$(-1)^{\tau(3142)}a_{31}a_{12}a_{43}a_{24}+(-1)^{\tau(3412)}a_{31}a_{42}a_{13}a_{24}+(-1)^{\tau(3421)}a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}=-6+4+16=14$$

◇

三. 设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\1 & 0 & 2 & 0\\0 & -3 & 0 & 8\end{bmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，求 B。

解：

由题得：$|A^*|=2\times2\times2\times8=64$

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I\quad\Rightarrow\quad AB=B+3A\quad\Rightarrow\quad A^*AB=A^*B+3A^*A$$

$$A^*A=|A|A^{-1}A=|A|I\quad |A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}=|A|^{4-1}=64\quad |A|=4$$

所以 $4B=A^*B+3\times4\quad\Rightarrow\quad B=12(4-A^*)^{-1}$.

求逆的过程略。

最后的结果为：

$$B=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\0 & 6 & 0 & 0\\3 & 0 & 6 & 0\\0 & 4.5 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

◇

四.λ 为何值时，方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\\lambda x_1-x_2+x_3=2\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 有无穷多组解？并在有无穷多解时，写出方程组的通解。

解：

记 $A=\begin{bmatrix}2&\lambda&-1\\ \lambda&-1&1\\ 4&5&-5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$,

$$|A|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\ \lambda&-1&1\\ 4&5&-5\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix}2&\lambda&\lambda-1\\ \lambda&-1&0\\ 4&5&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4)$$

可以看出 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 时即 $|A|\neq0$ 时，方程有唯一解。

$\lambda=1$ 时：

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&3&-3&-3\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+2r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{中间略}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

所以 $\lambda=1$ 时有无穷多解，$x_1=1,x_2=x_3-1.$

所以通解为 $x=[1,-1,0]^T+k[0,1,1]^T,(k\in R)$

$\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，$r(A)\neq r(A,B)$，此时无解。 ◇

五. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}4\\-2\\5\\6\end{bmatrix}$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩与一个最大线性无关组；

(2) 将其余向量用极大线性无关组线性表示。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&-1&3&-2\\2&1&3&5\\3&1&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r-1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&-1&1&-3\\0&-2&2&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(1)$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$, 极大线性无关组为：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_3,\alpha_4)$.(任写一个即可。)

(2) 取 (α_1,α_2), 由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$\begin{cases}\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2\\ \alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2\end{cases}$$

◇

六. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\quad(b>0)$$

的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12。

(1) 求 a, b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出所用正交变换。

解：

由题得：$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}, |A| = 2(-2a - b^2)$

(1) 由特征值的性质有：

$$\begin{cases} trace(A) = a + 2 - 2 = 1 \\ \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = -12 = |A| = 2(-2a - b^2) \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

分别取 $[x_2, x_3]^T = [1, 0]^T$ 和 $[0, 1]^T$ 得：$\alpha_1 = [0, 1, 0]^T, \alpha_2 = [2, 0, 1]^T$，可以看出 α_1 与 α_2 正交。

$\lambda_3 = -3$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = -2$ 得：$\alpha_3 = [1, 0, -2]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = [0, 1, 0]^T \\ \gamma_2 = \dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right]^T \\ \gamma_3 = \dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]^T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型：

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$$

◇

七. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2 - A - 2I = 0$。

(1) 证明：$r(A - 2I) + r(A + I) = n$.

(2) 证明：矩阵 $A + 2I$ 可逆，并求 $(A + 2I)^{-1}$。

证明：

(1) 由题得：$A^2 - A - 2I = (A - 2I)(A + I) = 0$。

所以由矩阵秩的性质有：$r(A + 2I) + r(A + I) \le n$。

$r((A - 2I) - (A + I)) = r(-3I) \le r(A - 2I) + r(-(A + I)) = r(A - 2I) + r((A + I))$, 即 $n \le r(A - 2I) + r((A + I))$

所以 $r(A - 2I) + r(A + I) = n$.

(2) 由题得：$A^2-A-2I=0$，所以

$$A^2+2A-2A-A-2I=0$$
$$A(A+2I)-3A-6I+6I-2I=0$$
$$A(A+2I)-3(A+2I)=(A-3I)(A+2I)=-4I$$
$$-\frac{1}{4}(A-3I)(A+2I)=I$$

所以 $A+2I$ 可逆，$(A+2I)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3I)$ ◇

2. 设 X_0 是线性方程组 $Ax=b\ (b\neq 0)$ 的一个解，X_1,X_2 是导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系。令 $\xi_0=X_0,\xi_1=X_0+X_1,\xi_2=X_0+X_2$，证明：$\xi_0,\xi_1,\xi_2$ 线性无关。

证明：

设

$$k_0\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2=0 \tag{1}$$

要证明 ξ_0,ξ_1,ξ_2 线性无关，根据定义，只需证明 $k_1=k_2=k_3=0$。

由题得：$AX_0=b,AX_1=AX_2=0$，因为 X_1,X_2 为 $AX=0$ 的基础解系，所以 X_1,X_2 线性无关。

把题中条件代入 (1) 式：

$$k_1X_0+k_2X_0+k_2X_1+k_3X_0+k_3X_2=(k_1+k_2+k_3)X_0+k_2X_1+k_3X_2=0 \tag{2}$$

(2) 式两边同时左乘矩阵 A:

$$(k_1+k_2+k_3)AX_0+k_2AX_1+k_3AX_2=(k_1+k_2+k_3)b=0$$

因为 $b\neq 0$，所以 $k_1+k_2+k_3=0$. 代入 (2) 式得：$k_2X_1+k_3X_2=0$，因为 X_1,X_2 线性无关，所以 $k_2=k_3=0$。所以 $k_1=0-k_2-k_3=0$。

所以 ξ_0,ξ_1,ξ_2 线性无关。 ◇

八. 设 3 阶方阵 A 的特征值-1,1 对应的特征向量分别为 α_1,α_2，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 设 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, 求 $P^{-1}AP$。

解：

由题得：$A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$。

(1) 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \tag{1}$$

要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，只需证明 $k_1=k_2=k_3=0$,(1) 式两边同左乘 A:

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \tag{2}$$

(1) 式减 (2) 式：$-2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$，因为 α_1 和 α_2 是分属于不同的特征值的特征向量，所以 α_1 和 α_2 线性无关。即 $\begin{cases}-2k_1=0\\-k_3=0\end{cases}$ $\Rightarrow k_1=k_3=0$，代入到 (1) 式：$k_2\alpha_2=0$，又因为特征向量不为 0，所以 $k_2=0$。

综上所述：$k_1=k_2=k_3=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

(2) 由题得：

$$AP=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=[-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=P\Lambda$$

所以 $\Lambda=P^-1AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$。 ◇

2015-2016 年第一学期

一、填空题

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 2-a & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=$______。

解：

把第二行加到第一行上：

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 2-a & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 2 & a & 0\\ 0 & -2 & 3-a & a\\ 0 & 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & a & 0\\ -2 & 3-a & a\\ 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=A$$

把 A 的第二行加到第一行上：

$$A=\begin{vmatrix}2 & a & 0\\ 0 & 3 & a\\ 0 & -3 & 4-a\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & a\\ -3 & 4-a\end{vmatrix}=24$$

◇

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$，求 A^2-2A 的秩 $r(A^2-2A)$。

解：

由题得：$A^2-2A=A(A-2E)$，可以看出 A 是满秩方阵，即 A 可逆。满秩方阵一定可逆，所以 $r(A^2-2A)=r(A(A-2E))=r(A-2E)$。

$$A-2E=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以 r(A-2E)=3，所以 $r(A^2-2A)=3$ ◇

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，若 $\sum_{i=1}^{3}c_i\alpha_i$ 也是 $Ax=b$ 的解，则 $\sum_{i=1}^{3}c_i=$______。

解：

由题得：$A\alpha_1=b, A\alpha_2=b, A\alpha_3=b, A\sum_{i=1}^{3}c_i\alpha_i=A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3)=b$.

所以 $A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=3b$，即 $A\left(\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_3\right)=b=A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3)$，所以 $\sum_{i=1}^{3}c_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$。◇

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{bmatrix}$，若 $\alpha=(1,-2,3)^T$ 是其特征向量，则 $a+b=$______。

解：

设 α 对应的特征值为 λ。由特征向量的定义：

$$A\alpha=\lambda\alpha \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}-4\\ a+10\\ -2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\ -2\lambda\\ 3\lambda\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=-4\\ a=-2\\ b=6\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a+b=4$$

$\diamondsuit$

5. 任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-2,3)^T\alpha_3=(t,1,2)^T$ 线性表示，则 t 应满足条件_______。

解：

任意 3 维实列向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $e_1=[1,0,0]^T,e_2=[0,1,0]^T,e_3=[0,0,1]^T$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而 e_1,e_2,e_3 可以表示任意三维实列向量，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 e_1,e_2,e_3 可以相互线性表示，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(e_1,e_2,e_3)=3$. 所以 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2t-6\neq 0$，即 $t\neq 3$。 $\diamondsuit$

6. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{bmatrix}$ 正定，则 λ 满足的条件为_______。

解：

由题得：A 为对称矩阵，如果 A 正定，则 $|A|>0$, 所以 $|A|=\lambda-5>0 \quad\Rightarrow\quad \lambda>5.$ $\diamondsuit$

二、计算题

1. 若行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\3&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

由题得：

$$A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

把第一行的负二倍加到第二行，把第一行的负一倍分别加到第三、四行。

$$2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-2\\0&2&-2&-2\\0&-1&-2&-3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\-1&-2&-3\end{vmatrix}$$

把第一行的负一倍加到第三行：

$$4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\-1&-2&-3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1&-2&-2\\1&-1&-1\\0&0&-1\end{vmatrix}=4\times(-1)\times((-1)\times(-1)-(-2)\times 1)=-12$$

$\diamondsuit$

2.

已知矩阵 X 满足方程 $X\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{bmatrix}$，求矩阵 X。

解：

由题得：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\-1&0&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2-2r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&3&0&2\\0&1&0&-2&1&-2\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right]$$

所以 $X=\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&2\\-2&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&2&-6\\14&0&11\end{bmatrix}$ ◇

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0),\alpha_5=(2,1,5,6)$, 求向量组的秩、极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{2}{3}r_2]{r_3-\frac{1}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-4&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times(-\frac{1}{4})]{r_2\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 3，极大线性无关组为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5),(\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5)$.

由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$ 表示 α_3,α_5：由最简阶梯型矩阵可以看出

$$\begin{cases}\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4=3\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2\end{cases}$$

◇

三、解答题

1. 当 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=k-3\\x_1+kx_2+x_3=-2\\x_1+x_2+kx_3=-2\end{cases}$ 有唯一解，无解和有无穷多解？当方程组有无穷多解时求出所有解。

解：

（系数矩阵是方阵，也可以用行列式来做这个题。具体看 14-15 年期末试题的第四题，推荐这种方法）

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c}k&1&1&k-3\\1&k&1&-2\\1&1&k&-2\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\k&1&1&k-3\\1&1&k&-2\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-kr_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k^2&1-k&3(k-1)\\0&1-k&k-1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k&k-1&0\\0&1-k^2&1-k&3(k-1)\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-(1+k)r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&k&1&-2\\0&1-k&k-1&0\\0&0&(1-k)(k+2)&3(k-1)\end{array}\right]$$

讨论：

(1) 解不存在：即存在矛盾方程（增广矩阵主元列在最右列）。即对于 r_3

$$\begin{cases}(1-k)(k+2)=0\\3(k-1)\neq 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k=-2$$

(2) 存在唯一解：主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-k \neq 0 \\ (1-k)(k+2) \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k \neq 1 且 k \neq -2$$

$k \neq 1$且$k \neq -2$，继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{(k+2)(1-k)}]{r_2 \times \frac{1}{1-k}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{(k+2)} \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & -2 - \frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 - kr_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5k+1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k+2} \end{array}\right]$$

所以方程组存在唯一解时：$k \neq 1$ 且 $k \neq -2$，解为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5k+1}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \\ \frac{3}{k+2} \end{bmatrix}, \quad k \neq 1 且 k \neq -2$$

(3) 存在无穷解：至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (k-1)(k+2) = 0 \\ 3(k-1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

把 $k=1$ 代入阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} -2 - c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

所以 x 的解为 $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_1 \quad c_1, c_2 \in R$。 ◇

2. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$。

(1) 求 A 对应于特征值 1 的特征向量;

(2) 求 A;

(3) 求 A^{2016}。

解：

(1) 由于 A 是实对称矩阵，所以对于 A 的不同特征值的特征向量正交，所以设特征值 1 对应的特征向量是 $\alpha = [x_1, x_2, x_3]$。所以有：

$$\alpha_1^T \alpha = x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_3$$

分别取 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 得 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

α_2, α_3 即为 A 对应于特征值 1 的特征向量。

(2) 由特征值定义：$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$。所以：

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3] \quad \Rightarrow$$

$$A = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\left(\text{式中：} [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$

(3) 由 (2) 得：$A^2 = E_3$（E 表示单位矩阵。）所以 $A^{2016} = (A^2)^{1008} = E_3$。 ◇

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A)=2$, 且二次型 $f(x) = x^TA^TAx$.

(1) 求 a;

(2) 写出二次型 $f(x)$ 的矩阵 $B = A^TA$;

(3) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 $f(x)$ 化为标准型，并写出所用的正交变换。

解：

(1) 由题得：

$$A \xrightarrow[r_4-ar_2]{r_3+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -1-a \end{bmatrix}$$

$r(A)=2$，所以 $1+a=0$ 且 $-1-a=0$ 解得：$a=-1$。

(2)

$$B = A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(3)

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=3$$

$\lambda_1 = 0$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得：$\alpha_1 = [1,1,-1]^T$.

$\lambda_2 = 2$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = 1$ 得：$\alpha_2 = [1,-1,0]^T$.

$\lambda_3 = 6$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 2$ 得：$\alpha_3 = [1,1,2]^T$. 因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},-\dfrac{1}{\sqrt3}\right]^T\\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt2},-\dfrac{1}{\sqrt2},0\right]^T\\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt3}&\dfrac{1}{\sqrt2}&\dfrac{1}{\sqrt6}\\ \dfrac{1}{\sqrt3}&-\dfrac{1}{\sqrt2}&\dfrac{1}{\sqrt6}\\ -\dfrac{1}{\sqrt3}&0&\dfrac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=2y_2^2+6y_3^2$$

◇

四、证明题

1. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^2-3A+2E=0$, 其中 E 为单位矩阵，试证：

(1)$A+2E$ 可逆；

(2)A 为正定矩阵。

证明：

(1) 由题得：$A^2-3A+2E=0$，所以：

$$A^2+2A-2A-3A+2E=0$$
$$A(A+2E)-5A-10E+10E+2E=0$$
$$A(A+2E)-5(A+2E)=(A-5E)(A+2E)=-12E$$
$$-\frac{1}{12}(A-5E)(A+2E)=E$$

所以 $A+2E$ 可逆，$(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{12}(A-5E)$。

(2) 对于 n 阶实对称矩阵，如果 A 为正定矩阵，则 A 的全部特征值大于 0. 设 A 的特征值为 λ。由题得：

$$\lambda^2-3\lambda+2=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=1>0,\lambda_2=2>0$$

所以 A 为正定矩阵。 ◇

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，向量 γ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha$ 线性无关。

证明：

向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即存在一组不全为 0 的 $k_i(1\le i\le3)$, 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\tag{1}$$

反证：假设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha$ 线性相关。则存在一组不全为 0 的 $l_i(1\le i\le3)$ 和 l, 使得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l(\beta+\gamma)=0\tag{2}$$

若 $l=0$, 则 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l(\beta+\gamma)=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$，此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，与题中的条件矛盾，所以 $l\ne0$。所以 (1) 式可变形为

$$\beta+\gamma=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)$$

代入 (1) 式：

$$\gamma=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$$

可以看出此时 γ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，与题目矛盾，所以假设错误，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha$ 线性无关。 ◇

2016-2017 年第一学期

一、填空题

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&1&0\\z&0&0&1\end{vmatrix}=$______。

解：

(注意爪型行列式的做法) 对行列式做如下变换：第一行减去 z 倍的第四行，第一行减去 y 倍的第三行，第一行减去 x 倍的第二行，得到如下行列式：

$$\begin{vmatrix}1-x^2-y^2-z^2&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{vmatrix}=1-x^2-y^2-z^2$$

◇

2. 设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，则 $r(A^2-2A)=$______。

解：

$|A^*|=|A|^{n-1}$ 得：$|A^*|=2^3=|A|^3$. 所以 $|A|=2\neq 0$。即 A 可逆。

所以 $r(A^2-2A)=r(A(A-2))=r(A-2)=r(|A|(A^*)^{-1}-2)=r((A^*)^{-1}-E)=3$.（求逆和秩的过程略） ◇

3. 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\ax_1-x_2-2x_3=-3\end{cases}$ 与线性方程 $ax_2+x_3=1$ 有公共的解，则 a 的取值范围为______。

解：

注意同解与公共解的区别：

对于方程组 (1) 和方程组 (2)，如果 α 既是方程组 (1) 的解，也是方程组 (2) 的解，则称 α 是方程组 (1) 和方程组 (2) 的公共解。

对于方程组 (1) 和方程组 (2)，如果 α 是方程组 (1) 的解，则 α 一定是方程组 (2) 的解，反之如果 α 是方程组 (2) 的解，则 α 一定是方程组 (1) 的解，则称，方程组 (1) 和方程组 (2) 同解。

关于公共解，通常有如下解法：(假设方程组 (1) 有两组不同的基础解系 ξ_1,ξ_2，方程组 (2) 有两组不同的基础解系 η_1,η_2)

方法 1：分别求出方程组 (1) 和 (2) 的通解：即 (1) 得到通解为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2$,(2) 的通解为 $l_1\eta_1=l_2\eta$。令两个方程组的通解相等，找出对应的 k 和 l 的关系。

方法 2：求出其中一个通解，代入到另外一个方程组中，找出相应的系数所满足的关系式进一步求出公共解。

方法 3：联立两个方程组得到一个新的方程组 (3)，求出 (3) 的解即为公共解。

显然，此题用方法 3 更合适：联立两个方程组，得到增广矩阵：

$$[A|B]=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\a&-1&-2&-3\\0&a&1&1\end{bmatrix}$$

讨论：$a=0$ 时：显然 $r(A)=r(A|B)$，即线性方程组有解，即这两个线性方程组有公共解。

$a\neq 0$ 时，对增广矩阵进一步进行高斯消元：

$$\xrightarrow{r_2-ar_1}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&-1-2a&-2-a&-3-2a\\0&a&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&a&1&1\\0&-1-2a&-2-a&-3-2a\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1+2a}{a}r_3}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&a&1&1\\0&0&-\frac{a^2-1}{a}&-\frac{2a^2+a-1}{a}\end{bmatrix}$$

当 $-\frac{a^2-1}{a}=0$ 且 $-\frac{2a^2+a-1}{a}\neq 0$ 时，无解，此时没有公共解，解得 $a=1$. 所以 $a=1$ 时无公共解，所以 $a\neq 1$。 ♢

4. 设 $\alpha_1=(a,1,1)^T,\alpha_2=(1,b,-1)^T,\alpha_3=(1,-2,c)^T$ 是正交向量组，则 $a+b+c=$______。

解：

由题得：

$$\begin{cases}\alpha_1\alpha_2^T=a+b-1=0\\ \alpha_1\alpha_3^T=a-2+c=0\\ \alpha_2\alpha_3^T=1-2b-c=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a+b+c=2$$

♢

5. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3$ 对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,-1,-1)^T,\alpha_3$，则 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量 $\alpha_3=$______。

解：

设 $\alpha_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的，所以：

$$\begin{cases}\alpha_1\alpha_3^T=x_1+x_2+x_3=0\\ \alpha_2\alpha_3^T=2x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-x_3\end{cases}$$

令 $x_3=-1$，有 $\alpha_3=[0,1,-1]$ ♢

6. 设 $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&6\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$, 已知二次型 $f(x)=x^TBx$ 是正定的，则 λ 的取值范围为______。

解：

由题得：

$$f(x)=x^TBx=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&6\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&2x_1+2x_2&4x_1+6x_2+\lambda x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1^2+2x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$$

所以其对应的二次型矩阵为：$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{bmatrix}$,$A$ 为对称矩阵，如果 A 正定，则 $|A|>0$, 所以 $|A|=\lambda-5>0\quad\Rightarrow\quad\lambda>5$. ♢

二、计算题

1. 若行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\0&4&1&2\\0&2&2&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}-2A_{21}+A_{31}-2A_{41}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

$$A_{11}-2A_{21}+A_{31}-2A_{41}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&3&4&6\\1&4&1&2\\-2&2&2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&3&4&6\\1&4&1&2\\-1&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+2r_1\\ r_3-r_1}}4\begin{vmatrix}7&10&14\\1&-1&-1\\3&4&5\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{r_1-7r_2\\ r_3-3r_2}}4\begin{vmatrix}0&17&21\\1&-1&-1\\0&7&8\end{vmatrix}$$

$$=4\times 1\times(-1)^{1+2}(17\times 8-7\times 21)=44$$

♢

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$,$B$ 为三阶矩阵，且满足方程 $A^*BA=I+2A^{-1}B$，求矩阵 B。

解：

由题得：$|A|=1,A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}$. 对题中方程两边同时左乘 A 得：

$$BA=A+2B$$

$$B=A(A-2E)^{-1}=A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&3\\0&-1&3\\0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-4&-18\\0&-1&-6\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

(求逆的过程略。$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-2&-9\\0&-1&-3\\0&0&-1\end{bmatrix}$) ♢

3. 设向量组 $\alpha_1=(3,1,4,3)^T,\alpha_2=(1,1,2,1)^T,\alpha_3=(0,1,1,0)^T,\alpha_4=(2,2,4,2)^T$, 求向量组的所有的极大线性无关组。

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}3&1&0&2\\1&1&1&2\\4&2&1&4\\3&1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&1&0&2\\4&2&1&4\\3&1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&1&0&2\\4&2&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-2&-3&-4\\0&-2&-3&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-2&-3&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以该向量组的秩为 2，极大线性无关组为 $(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_3,\alpha_4)$. ♢

三、解答题

1. 令 $\alpha=(1,1,0)^T$, 实对称矩阵 $A=\alpha\alpha^T$.

(1) 把矩阵 A 相似对角化；

(2) 求 $|6I-A^{2017}|$.

解：

由题得：$A=\alpha\alpha_T=(1,1,0)^T(1,1,0)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。所以

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-1)^2-1]=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=0$$

$\lambda_1=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{高斯消元，步骤略}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

可以看出，$\lambda_1=2$ 时：代数重数等于几何重数。

$\lambda_2=\lambda_3=0$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{高斯消元，步骤略}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

可以看出，$\lambda_2=\lambda_2=0$ 时：代数重数等于几何重数。

所以 A 可以相似对角化：即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{bmatrix}$，其中 $P=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

(2) 由特征值的性质：$6I-A^{2017}$ 的特征值为：$6-\lambda_i^{2017}$，所以

$$|6I-A^{2017}|=\prod_{i=1}^{3}(6-\lambda_i^{2017})=36\times(6-2^{2017})$$

◇

2. 已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&-1&4\\-1&3&b\\4&b&0\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&5\end{bmatrix}$ 相似。

(1) 求矩阵 A；

(2) 求正交线性变换 $x=Qy$，把二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为标准型.

解：

对于对角矩阵，其特征值为对角线上的元素。因为 A 与 B 相似，所以 A 与 B 有相同的特征值。

(1) 由特征值的性质

$$\begin{cases}trace(A)=a+3+0=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=2-4+5=3\\|A|=(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&b\\4&0\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-1&3\\4&b\end{vmatrix}=-8b-48=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=2\times(-4)\times5=-40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$$

(2)

$\lambda_1=2$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&2\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=2x_3\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_1=[1,2,1]^T$。

$\lambda_2=-4$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}$$

取 $x_3=-1$ 得 $\alpha_2=[1,0,-1]^T$。

$\lambda_3=5$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$$

取 $x_3=1$ 得 $\alpha_2=[1,-1,1]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right]^T\\ \gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]^T\\ \gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]^T\end{cases}\Rightarrow\quad Q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}}&0&-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型：

$$f=2y_1^2-4y_2^2+5y_3^2$$

◇

3. 在对观测数据拟合的时候经常遇到线性方程组 $Ax=b$ 是矛盾方程的情形，是没有解的。此时我们转而解 $A^TAx=A^Tb$，我们称 $A^TAx=A^Tb$ 是原线性方程组的正规方程组。称正规方程组的解为原方程组的最小二乘解。设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}$.

(1) 证明 $Ax=b$ 无解；

(2) 求 $Ax=b$ 的最小二乘解。

解：

(1) 由题得：

$$[A|B]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&2\\0&-1&1&7\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

可以看出 $r(A)=3\neq r(A|B)=4$，所以 $Ax=b$ 无解。

(2)

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&2\\3&3&1\\2&1&2\end{bmatrix}$$

$$A^Tb=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\6\\10\end{bmatrix}$$

高斯消元步骤略（考试必须写上）。最后解得：$x_1=8,x_2=-6,x_3=0$ ◇

四、证明题

1. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的向量组，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关，证明 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示并且表示方法唯一。

证明：

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关，则存在一组不全为 0 的 $l_i(1\leq i\leq 3)$ 和 l, 使得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l\beta=0 \tag{1}$$

若 $l=0$, 则 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+l\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$，此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，与题中的条件矛盾，所以 $l\neq 0$。所以 (1) 式可变形为

$$\beta=-\frac{1}{l}(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)$$

即 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，不妨设任意两组不全为 0 的数 $m_i,n_i,(1\leq i\leq 3)$，使得

$$\beta=m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3 \tag{2}$$

$$\beta=n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+n_3\alpha_3 \tag{3}$$

(2) 式减 (3) 式：$0=(m_1-n1)\alpha_1+(m_2-n2)\alpha_2+(m_3-n3)\alpha_3$, 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以有 $m_1-n1=0,m_2-n2=0,m_3-n3=0$, 即 $m_1=n1,m_2=n2,m_3=n3$, 由于 m_i 和 n_i 的任意性，所以可证得表示方法唯一。 ♢

2. 已知 A,B 是同阶实对称矩阵。

(1) 证明如果 $A\sim B$，则 $A\simeq B$, 也就是相似一定合同；

(2) 举例说明反过来不成立。

证明：

(1) 因为 $A\sim B$, 所以 A,B 具有相同的特征值，记为 $\lambda_i,(1\leq i\leq n)$。对于实对称矩阵 A 存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ_1$ 为对角矩阵。即存在正交矩阵 Q_1，使得 $Q_1^{-1}AQ_1=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$，对于正交矩阵 Q_1，有 $Q_1^{-1}=Q_1^T$，即 $Q_1^TAQ_1=\Lambda$，所以 A 合同于 Λ，同理 B 合同于 Λ，所以 A 合同于 B。

(2) 反过来描述：A,B 是同阶实对称矩阵，$A\simeq B$，则 $A\sim B$。

由惯性定理（157 页）知：如果：$A=\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & \\ & 3\end{bmatrix}$，$A$,$B$ 为对角阵, 且 $A\simeq B$, 但 A 和 B 的特征值不同，即 A 与 B 不相似。 ♢

2017-2018 年第一学期

一、填空题

1. 设 A_{ij} 是三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}$ 第 i 行第 j 列元素的代数余子式，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$______。

解：

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}=\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0$$

◇

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$，则 $r(A+AB)=$______。

解：

由题得：$|A|=0$（第一行减第二行然后按第一行展开）

$$B=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$C=A+AB=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&6&9\\2&4&6\\8&16&24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7&10\\2&5&7\\10&19&27\end{bmatrix}$$

$$C\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}2&5&7\\4&7&10\\10&19&27\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}2&5&7\\0&-3&-4\\0&-6&-8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}2&5&7\\0&-3&-4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $r(A+AB)=2$ ◇

3. 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&2&2\end{bmatrix}$，记 A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$______。

解：

$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$，由题得：$|A|=8$ ◇

4. 已知 3 阶方阵 A 的秩为 2，设 $\alpha_1=(2,2,0)^T,\alpha_2=(3,3,1)^T$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则导出 $Ax=0$ 的基础解系为______。

解：

因为 α_1,α_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，所以 $A\alpha_1=b,A\alpha_2=b$，且 α_1,α_2 不相等，所以 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $AX=0$ 的基础解系。（实际上 $k(\alpha_1-\alpha_2)$ 都是导出组的基础解系。） ◇

5. 若 3 阶矩阵 A 相似于 B，矩阵 A 的特征值是 1,2,3 那么行列式 $|2B+I|=$______。(其中 I 是 3 阶单位矩阵)

解：

A 相似于 B，所以 A 与 B 的特征值相等。所以 $2B+I$ 的特征值为 $2\lambda_i+1$，所以 $|2B+I|=\prod\limits_{i=1}^{3}(2\lambda_i+1)=105$ ◇

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 的秩为 2，则 $t=$______。

解：

二次型对应的矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&t\\0&t&1\end{bmatrix}$$

A 的秩为 2，即 $|A|=0$，解得：$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ◇

二、计算题

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$.

解：

$$D\xlongequal[c_4+c_3]{\substack{c_1+3c_3\\c_2+c_3}}\begin{vmatrix}0&0&-1&0\\4&4&3&2\\5&1&1&1\\10&-2&3&3\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&4&2\\5&1&1\\10&-2&3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2&2&1\\5&1&1\\10&-2&3\end{vmatrix}\xlongequal[c_2-2c_3]{c_1-2c_3}-2\begin{vmatrix}0&0&1\\3&-1&1\\4&-8&3\end{vmatrix}$$

$$=-2\times1\times(-1)^{1+3}\times[3\times(-8)-(-1)\times4]=40$$

◇

2. 解矩阵方程 $(2I-B^{-1}A)X^T=B^{-1}$，其中 I 是 3 阶单位矩阵，X^T 是 3 阶矩阵 X 的转置矩阵，$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$.

解：

由题得：$(2I-B^{-1}A)X^T=B^{-1}$，所以：

$$\begin{aligned}X^T&=(2I-B^{-1}A)^{-1}B^{-1}=[B(2I-B^{-1}A)]^{-1}\\&=(2B-A)^{-1}\end{aligned}$$

$$C=2B-A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$C^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ 所以 $X=C^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$ ◇

3. 求线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4\\x_1+x_3-x_4=-3\\3x_1+x_2+x_3=1\\7x_1+7x_3-3x_4=3\end{cases}$ 的通解。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-\frac{7}{2}r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -7 & \frac{15}{2} & 17 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-7r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{4}]{\substack{r_1\times\frac{1}{2}\\ r_2\times 2}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1+\frac{3}{2}r_3]{r_2-r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+\frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$x_1 = 3 - x_3 \quad x_2 = x_3 - 8 \quad x_3 = x_3 \quad x_4 = 6$$

令 $x_3 = C, C \in R$，则

$$x = \begin{bmatrix} 3-C \\ C-8 \\ C \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} C \text{ , } C \in R$$

◇

三、解答题

1. 设 1 为矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ 的特征值，其中 $x > 1$.

(1) 求 x 及 A 的其他特征值。

(2) 判断 A 能否对角化，若能对角化，写出相应的对角矩阵 Λ。

解：

(1) 设 α_1 为特征值 1 对应的特征向量，所以 $\alpha_1 \neq 0$ 由题得：$A\alpha_1 = \alpha_1$，即 $(A-E)\alpha_1 = 0$，即 $(A-E)x = 0$ 有非零解。所以由存在唯一性定理：$|A-E| = 0$，所以

$$|A-E| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)(x-2) = 0$$

由题得：$x > 1$，所以解得 $x = 2$。

(2) 把 $x = 2$ 代入得：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -(\lambda+1) & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-2)-2] = 0$$

解得：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$。

因为 A 为三阶，并且有 3 个不同的特征值，所以可以相似对角化，$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$。（不唯一，只要对角线元素是这三个就可以）

◇

2. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$。

(1) 写出该二次型的矩阵 A;

(2) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^TAQ = Q^{-1}AQ$ 为对角型矩阵；

(3) 给出正交变换，化该二次型为标准型。

解：

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)[(\lambda-2)^2-1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

$\lambda = 3$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 \in R \end{cases}$$

分别取 $[x_2, x_3]^T = [1,0]^T$ 和 $[0,1]^T$ 得 $\alpha_1 = [1,1,0]^T, \alpha_2 = [0,0,1]^T$。

$\lambda = 1$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = -1$ 得 $\alpha_2 = [1,-1,0]^T$。

因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^T \\ \gamma_2 = \dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = [0,0,1]^T \\ \gamma_3 = \dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型：

$$f = 3y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$$

◇

3. 已知 $\alpha_1 = (1,4,0,2)^T, \alpha_2 = (2,7,1,3)^T, \alpha_3 = (0,1,-1,a)^T$ 及 $\beta_4 = (3,10,b,4)^T$.

(1)a, b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合？

(2)a, b 为何值时，β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？并写出该表达式。

解：

记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则

$$[A|\beta] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right]$$

(1) 可以看出 $b \neq 2, a \in R$ 时，$Ax=\beta$ 无解，即 β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

(2)$b=2$ 时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

当 $a \neq 1, r(A)=r(A,\beta)=3$, 此时：$Ax=\beta$ 有唯一解，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{a-1}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-1\\0&-1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

此时 $Ax=\beta$ 的解为 $x_1=-1, x_2=2, x_3=0$，所以 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

$a=1$ 时 $r(A,\beta)=r(A)=2<3$，所以 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的方法唯一。

$$\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&2&-1\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

所以解得 $x_1=-1-2x_3, x_2=x_3+2$，令 $x_3=k, k\in R$, 则 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-(1+2k)\alpha_1+(2+k)\alpha_2+k\alpha_3$ ◇

四、证明题

1. 设 A,B 均为 n 阶方阵，证明：若 A,B 相似则 $|A|=|B|$，举例说明反过来不成立。

证明：

若 A 与 B 相似，则依定义有：存在一个可逆矩阵 P，使得 $A=P^{-1}BP$，两边同时求行列式：$|A|=|P^{-1}BP|=|P^{-1}|\cdot|B|\cdot|P|=|B|\cdot|P^{-1}P|=|B|\cdot|E|=|B|$。

反过来描述：如果 $|A|=|B|$，则 A 和 B 相似。

例如：$A\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, |A|=1, B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, |B|=1$，所以 $|A|=|B|$, 但是：假设存在一个可逆矩阵 P,$P^{-1}AP=P^{-1}EP=E\neq B$，即 $|A|=|B|$，但是 A,B 不相似。 ◇

2. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，证明 $Ax=0$ 与 $(A^TA)x=0$ 是同解方程，进一步得出 $r(A)=r(A^TA)$。

解：

(1) 若 x_0 为 $Ax=0$ 的解，则 $Ax_0=0$，对等式两边同时左乘 A^T：$A^TAx_0=0$，即 x_0 为 $A^TAx=0$ 的解。

若 x_1 为 $A^TAx=0$ 的解：则 $A^TAx_1=0$，等式两边同时左乘 x_1^T：$x_1^TA^TAx_1=(Ax_1)^T(Ax_1)=0$，所以 $Ax_1=0$，所以 x_1 为 $Ax=0$ 的解。(注：这里就认为 x 是一个列向量，所以 Ax 也是列向量，用向量内积的性质。)

综上所述：$Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解。

(2)$Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解，则它们解的空间维数相同。又因为解的空间维数 = 未知量的个数-系数矩阵的秩。两个方程的未知数个数相同，所以系数矩阵相同，即 $r(A)=r(A^TA)$ ◇

2018-2019 年第一学期

一、填空题

1. 设 A 为 5 阶方阵满足 $|A|=2$,A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|2A^{-1}A^*A^T|=$______。

解：

原式 =

$$2^5|A^{-1}|\cdot|A^*|\cdot|A^T|=2^5\cdot|A|^{-1}\cdot|A|^{5-1}\cdot|A|=2^9=512$$

♢

2. 已知向量组 $\alpha_1=(1,3,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,4,k)$ 线性无关，则实数 k 满足的条件是______。

解：

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $|A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\3&1&4\\1&1&k\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\3&1&1\\1&1&k-1\end{vmatrix}=k-2\neq 0\quad\Rightarrow k\neq 2$$

♢

3. 设 A 为 m 阶阵，存在非零的 m 维列向量 B，使 $AB=0$ 的充分必要条件是______。

解：

B 非零，说明 $Ax=0$ 有非零解，由存在唯一性定理：$|A|=0$，或 $r(A)<m$。 ♢

4. 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，其特征值为 $1,-1,2$，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 A^* 的主对角线元素之和即 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$______。

解：

由题得：$|A|=\prod\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=-2$，所以 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_i}$，所以 A^* 的主对角线元素之和为 $trace(A^*)=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{|A|}{\lambda_i}=-1$。 ♢

5. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 t 应满足______。

解：

二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{bmatrix}$，二次型正定，即 A 正定，即 A 的所有顺序主子是大于 0. 即

$$\begin{aligned}&D_1=1\\&D_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}=4-t^2>0\quad\Rightarrow\quad -2<t<2\\&D_3=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}=8-4t-4t^2>0\quad -2<t<1\end{aligned}$$

综上所述：$-2<t<1$. ♢

6. 设 3 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$。则行列式 $|A|=$______。

解：

由题得：$A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 所以

$$A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3)$$

即

$$|A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)| = |A|\cdot|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3| = |-\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_2+\alpha_3|$$

$$|-\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_2+\alpha_3| \xlongequal{c_3-c_2} |-\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3| = -|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|$$

$$|A| = -1$$

◇

二、计算题

1. 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 5 & 27 \end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：

-48.

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 27 \end{vmatrix}$$

可以看出该式为范德蒙行列式，其中 $x_1=-1, x_2=2, x_3=1, x_4=3$, 所以上式 $=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_2)(x_2-x_1)=-48$ ◇

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 且 X 满足 $AX = X + A$，求 X。

解：

由题得：$AX = X + A$, 所以 $(A-E)X = A$，所以 $X = (A-E)^{-1}A$

$$B = A - E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B|E] \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \Leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-3r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

所以 $(A-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$,$X = (A-E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ◇

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，求 $r(A), r(A^*)$ 和 A 的列向量组的极大线性无关组。

解：

$$A \xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-\frac{1}{2}r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, \ r(A)=n; \\ 1, \ r(A)=n-1 \\ 0, \ r(A)<n-1. \end{cases}$$

上式中：n 为 A 的阶数。

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

(1)$a=1$ 且 $b=1$ 时：$r(A)=2<4-1=3$,$r(A^*)=0$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_3,\alpha_4)$.

(2)$a=1$ 且 $b\neq1$ 时：$r(A)=3=4-1$,$r(A^*)=1$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

(3)$a\neq1$ 且 $b=1$ 时：$r(A)=3=4-1$,$r(A^*)=1$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

(4)$a\neq1$ 且 $b\neq1$ 时：$r(A)=4$,$r(A^*)=4$。极大线性无关组：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. ◇

三、解答题

1. 设 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=2 \end{cases}$ ，λ 为何值时，该方程组无解、唯一解、无穷解？并且在有唯一解时求出解；有无穷多解时，求出全部解并用向量表示。

解：

（系数矩阵是方阵，也可以用行列式来做这个题。具体看 14-15 年期末试题的第四题，推荐这种方法）

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-\lambda r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \Leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & -\lambda-2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-(\lambda+1)r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(-2-\lambda) & -\lambda-2 \end{array}\right]$$

讨论：

(1) 解不存在：即存在矛盾方程（增广矩阵主元列在最右列）。即对于 r_3

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda)=0 \\ -\lambda-2\neq0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda=1$$

(2) 存在唯一解：主元列三个元素都不为 0. 即

$$\begin{cases} 1\neq0 \\ 1-\lambda\neq0 \\ (\lambda-1)(-2-\lambda)\neq0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda\neq1 且 \lambda\neq-2$$

$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$，继续对阶梯矩阵进行初等行变换

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{(\lambda-1)(-2-\lambda)}]{r_2\times\frac{1}{1-\lambda}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & \frac{2\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-\lambda r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \end{array}\right]$$

所以方程组存在唯一解时：$\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$，解为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{1}{\lambda-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 1 且 \lambda \neq -2$$

(3) 存在无穷解：至少存在一个自由变量。由阶梯矩阵可以看出

$$\begin{cases} (\lambda-1)(-2-\lambda) = 0 \\ -2-\lambda = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$

把 $\lambda = -2$ 代入阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+2r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

由最简阶梯型矩阵可以看出：

$$x_1 = 2 + x_3 \quad x_2 = x_3 \quad x_3 = x_3$$

令 $x_3 = C, C \in R$，则

$$x = \begin{bmatrix} 2+C \\ C \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} C \ , \ C \in R$$

◇

2. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$。

(1) 写出该二次型的矩阵 A;

(2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵；

(3) 给出正交变换，将该二次型化为标准型；

(4) 写出二次型的秩，正惯性指标和负惯性指标。

解：

(1) 由题得：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-36) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$$

$\lambda_1 = 1$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_1 = [-2, 0, 1]^T$。

$\lambda_2 = 6$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 = \dfrac{5}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得 $\alpha_2=[1,5,2]^T$。

$\lambda_3=-6$ 时：

$$[\lambda E-A]=\begin{bmatrix}-6&-2&2\\-2&-10&-4\\2&-4&-3\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3\\x_3=-\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=2$ 得 $\alpha_3=[1,-1,2]^T$。因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left[-\dfrac{2}{\sqrt5},0,-\dfrac{1}{\sqrt5}\right]^T\\\gamma_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{30}},\dfrac{5}{\sqrt{30}},\dfrac{2}{\sqrt{30}}\right]^T\\\gamma_3=\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt6},-\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right]^T\end{cases}\quad\Rightarrow\quad P=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt5}&\dfrac{1}{\sqrt{30}}&\dfrac{1}{\sqrt6}\\0&\dfrac{5}{\sqrt{30}}&-\dfrac{1}{\sqrt6}\\\dfrac{1}{\sqrt5}&\dfrac{2}{\sqrt{30}}&\dfrac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

所以 P 即为所求的正交矩阵，$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&6&\\&&-6\end{bmatrix}$

(3) 由 (2) 得：f 可经正交变换 $x=Py$ 化为标准型：

$$f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$$

(4) 计算得 $|A|=-2\begin{vmatrix}2&-2\\4&-3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&-2\\4&4\end{vmatrix}=-36\neq0$，所以二次型满秩，即 $r(A)=3$。由 (3) 得，正惯性指标为 2，负惯性指标为 1。 ♢

四、证明题

1. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+3A-4I=0$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵。

(1) 证明：$A,A+3I$ 可逆，并求他们的逆；

(2) 当 $A\neq I$ 时，判断 $A+4I$ 是否可逆并说明理由。

解：

(1) 由题得：$A^2+3A-4I=0$，所以 $A(A+3I)=4I$, 所以 $A,A+3I$ 可逆，A 的逆为 $\frac{1}{4}(A+3I)$,$A+3I$ 的逆为 $\frac{1}{4}A$。

(2) 不可逆，理由：

由题得：$A^2+3A-4I=(A+4I)(A-I)=0$, 假设 $A+4I$ 可逆，则等式两端同时左乘 $(A+4I)^{-1}$ 得 $A-I=0$, 即 $A=I$ 与题目中 $A\neq I$ 矛盾，所以假设不成立。即 $A+4I$ 不可逆。 ♢

2. 若同阶矩阵 A 与 B 相似，即 $A\sim B$，证明 $A^2\sim B^2$。反过来结论是否成立并说明理由。

证明：

若 A 与 B 相似，则依定义有：存在一个可逆矩阵 P，使得 $A=P^{-1}BP$，所以：$A^2=P^{-1}BP\cdot P^{-1}BP=P^{-1}B^2P$。所以 $A^2\sim B^2$。

反过来描述：如果 $A^2\sim B^2$，则 A 和 B 相似。

不成立。理由如下：

例如：$A\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},B^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，所以 $A^2=B^2$, 由相似的性质 $A^2\sim B^2$ 但是：假设存在一个可逆矩阵 P,$P^{-1}AP=P^{-1}EP=E\neq B$，即 $A^2\sim B^2$，但是 A,B 不相似。 ♢

3. 设 λ_1,λ_2 是 A 的两个互异的特征值，$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量，$\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，证明：向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 线性无关。

证明：

由题得：$A\alpha_{1i}=\lambda_1\alpha_{1i},(1\leq i\leq s),A\alpha_{2j}=\lambda_1\alpha_{1j},(1\leq j\leq t)$。

设

$$k_1\alpha_{11}+\cdots+k_s\alpha_{1s}+k_{s+1}\alpha_{21}+\cdots+k_{s+t}\alpha_{2t}=0\tag{1}$$

要证明向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 线性无关，只需证明 $k_1=k_2=\cdots=k_s=k_{s+1}=\cdots=k_{s+t}=0$ 即可。

在 (1) 式左边同乘 A:

$$k_1A\alpha_{11}+\cdots+k_sA\alpha_{1s}+k_{s+1}A\alpha_{21}+\cdots+k_{s+t}A\alpha_{2t}=\lambda_1(k_1\alpha_{11}+\cdots+k_s\alpha_{1s})+\lambda_2(k_{s+1}\alpha_{21}+\cdots+k_{s+t}\alpha_{2t})=0 \qquad (2)$$

$(2)-\lambda_2(1)$ 得：$(\lambda_1-\lambda_2)(k_1\alpha_{11}+\cdots+k_s\alpha_{1s})=0$，因为 λ_1,λ_2 是 A 的两个互异的特征值，所以 $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$，所以 $k_1\alpha_{11}+\cdots+k_s\alpha_{1s}=0$，又因为 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s}$ 是对应于 λ_1 的线性无关的特征向量, 所以：$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$。代入到 (1) 式得：

$k_{s+1}\alpha_{21}+\cdots+k_{s+t}\alpha_{2t}=0$，因为 $\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 是对应于 λ_2 的线性无关的特征向量，所以 $k_{s+1}=k_{s+2}=\cdots=k_{s+t}=0$

综上所述：$k_1=k_2=\cdots=k_s=k_{s+1}=k_{s+2}=\cdots=k_{s+t}=0$, 所以向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1s},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2t}$ 线性无关。 ◇

2019-2020 年第一学期

一、填空题

1. 设 A 是 3 阶方阵，E 是 3 阶单位矩阵，已知 A 的特征值为 $1,1,2$, 则 $\left|\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1}-2A^{-1}+E\right|=$______。

解：

由题得：$|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=2, A^*$ 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}$.

由伴随矩阵的性质：$\left(\frac{1}{2}A\right)^*=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}A^*=\frac{A^*}{4}$, 所以 $\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1}-2A^{-1}+E$ 的特征值为

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\lambda_i}\right)^{-1}-2\lambda_i^{-1}+1=2\lambda_i-\frac{2}{\lambda_i}+1$$

所以：

$$\left|\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right)^{-1}-2A^{-1}+E\right|=\prod_{i=1}^{3}\left(2\lambda_i-\frac{2}{\lambda_i}+1\right)=4$$

◇

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 $k=$______。

解：

若 $k=0$，则

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-1&0&-3\\0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&-3\\0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&-3\\0&0&6\end{bmatrix}$$

所以 $r(A)=3\neq 2$，即 $k\neq 0$. 对 A 接着进行化简：

$$A\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2k-2&3k-3\\0&2k-2&3-3k^2\end{bmatrix}=B$$

若 $k=1$，则

$$B=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(A)=1\neq 2$，所以 $k\neq 1$，继续对 A 进行化简：

$$B\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{k-1}]{r_2\times\frac{1}{k-1}}\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2&3\\0&2&-3-3k\end{bmatrix}$$

如果要使 $r(A)=2$，则

$$\frac{2}{2}=\frac{3}{-3-3k}\quad\Rightarrow k=-2$$

也可以使用 $|A|=0$ 来做。

◇

3. 记 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&3\\1&1&0&0\\2&3&0&0\end{bmatrix}$, 则 A^{-1}______。

解：

由题得：$A=\begin{bmatrix}0 & A_{12}\\ A_{21} & 0\end{bmatrix}$，其中 $A_{12}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，设 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，其中 a,b,c,d 为 2 阶方阵，则

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}0 & A_{12}\\ A_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{12}c & A_{12}d\\ A_{21}a & A_{21}b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2 & 0\\ 0 & E_2\end{bmatrix}$$

所以：$c=A_{12}^{-1}, d=0, a=0, b=A_{21}^{-1}$.

$$[A_{12}|E_2]\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times(-1)}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right]$$

$$[A_{21}|E_2]\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & A_{21}^{-1}\\ A_{12}^{-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ◇

4. 若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\ x_2+x_3=a_2\\ x_3+x_4=-a_3\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$ 有解，a_1,a_2,a_3,a_4 应满足的条件是 $\underline{a_1+a_2+a_3+a_4=0}$。

解：

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3\\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4\end{array}\right]\xrightarrow{r_4-r_1}\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3\\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1+a_4\end{array}\right]\xrightarrow{r_4+r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1+a_2+a_4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4\end{array}\right]$$

若方程有解：$a_1+a_2-a_3+a_4=0$ ◇

5. 已知 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $c\alpha$, 其中 c 为非零常数，设 n 阶方阵 P 可逆，则 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为______。

解：

由题得：$A(c\alpha)=\lambda(c\alpha)$ 等式两边同时左乘 P^{-1}:

$$P^{-1}AE(c\alpha)=P^{-1}APP^{-1}(c\alpha)=(P^{-1}AP)(P^{-1}c\alpha)=\lambda(P^{-1}c\alpha)$$

所以 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的全部的特征向量为 $P^{-1}c\alpha=cP^{-1}\alpha$ ◇

6. 已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 1 & 3 & x\end{bmatrix}$ 的正惯性指数为 3，则 x 的取值范围为______。

解：

A 为实对称矩阵，且 A 的正惯性指数为 3，所以 A 正定，所以 A 的所有顺序主子式大于 0. 所以 $|A| = 2(3x-9)-3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3.5$ ♢

二、计算题

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 求满足 $AX = XA$ 的全部的矩阵 X。

解：

设 $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$,

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix}$$

$AX = XA$，即

$$\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} d = 0 & a = e & b = f \\ g = 0 & h = d = 0 & i = e = a \\ 0 = 0 & g = 0 & h = 0 \end{cases}$$

所以 $x = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c 是任意常数。 ♢

2. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系。

解：

由题得：增广矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以 $x_1 = 4x_4, x_2 = -3x_4, x_3 = x_4$，令 $x_4 = 1$，得基础解系：$\xi = [4, -3, 1, 1]^T$。 ♢

3. 记 $2n$ 阶方阵 $A_n = \begin{bmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{bmatrix}$.

(1) 求 $|A_1|, |A_2|$

(2) 求 $|A_n|$。

解：

(1)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - c_1 b_1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \\ c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_2 d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} - b_2 c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = (a_2 d_2 - b_2 c_2)|A_1|$$

$$= (a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_1 d_1 - c_1 b_1)$$

(2) 用数学归纳法：

由 (1) 得：

$$n = 1: \quad |A_1| = a_1 d_1 - c_1 b_1 = \prod_{i=0}^{1} (a_i d_i - c_i b_i)$$

$$n = 2: \quad |A_2| = (a_2 d_2 - c_2 b_2)\,|A_1| = \prod_{i=0}^{2} (a_i d_i - c_i b_i)$$

则 $n = k - 1$ 时，有 $|A_n| = \prod\limits_{i=0}^{k-1} (a_i d_i - c_i b_i)$.

当 $n=k$ 时，按第一列展开，得：

$$
\begin{aligned}
|A_k| &= a_{11}A_{11}+a_{2k1}A_{2k1} \\
&= a_k\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} & \\ 0 & & & & & & d_k \end{bmatrix} + c_k(-1)^{2k+1}\begin{bmatrix} 0 & & & & & & b_k \\ a_{k-1} & & & & & b_{k-1} & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} & \end{bmatrix} \\
&= a_kd_k(-1)^{2k-2+1+2k-2+1}\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} \end{bmatrix} - c_kd_k(-1)^{1+2k-2+1}\begin{bmatrix} a_{k-1} & & & & & b_{k-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{k-1} & & & & & d_{k-1} \end{bmatrix} \\
&= (a_kd_k-c_kd_k)|A_{k-1}| = \prod_{i=1}^{k}(a_id_i-c_ib_i)
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

三、解答题

1. 设向量组 $\alpha_1=(1,-4,-3)^T,\alpha_2=(-3,6,7)^T,\alpha_3=(-4,-2,6)^T,\alpha_4=(3,3\ \ -4)^T$, 求向量组的秩, 并写出一个极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示出。

解：

由题得：

$$
(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\-4&6&-2&3\\-3&7&6&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+4r_1}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&-6&-18&15\\0&-2&-6&5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&-6&-18&15\\0&0&0&0\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{6})}\begin{bmatrix}1&-3&-4&3\\0&1&3&-2.5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{bmatrix}1&0&5&-4.5\\0&1&3&-2.5\\0&0&0&0\end{bmatrix}
$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，极大线性无关组有两个向量：$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_2,\alpha_4),(\alpha_3,\alpha_4)$.(任写一个即可)

以 (α_1,α_2) 为例：$\alpha_3=5\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_4=-4.5\alpha_1-2.5\alpha_2$。 $\diamondsuit$

2. 已知 3 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}-1&a+2&0\\a-2&3&0\\8&-8&-1\end{bmatrix}$ 可以相似对角化且 A 得到特征方程有一个二重根，求 a 的值。其中 $a\le 0$.

解：

由题得：

$$
|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-(a+2)&0\\2-a&\lambda-3&0\\-8&8&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)[(\lambda+1)(\lambda-3)+(2+a)(2-a)]=(\lambda+1)[(\lambda-1)^2-a^2]=0
$$

$$
\Rightarrow\ \lambda_1=-1,\lambda_2=1+a,\lambda_3=1-a.
$$

依题意：有二重根且可以相似对角化且 $a \le 0$.

讨论：

(1)$\lambda_1 = \lambda_2$，即 $-1 = 1 + a, a = -2 \le 0$, 此时 $\lambda_3 = 1 - a = 3$, 代入到 $\lambda E - A$ 得：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根 -1:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于根 3:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可以看出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，即 A 可相似对角化，即 $a = -2$ 符合题意。

(2)$\lambda_1 = \lambda_3$, 即 $-1 = 1 - a, a = 2 > 0$，不符合题意。

(3)$\lambda_2 = \lambda = 3$, 即 $1 + a = 1 - a, a = 0$。此时 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 把 $a = 0$ 代入到 $[\lambda E - A]$ 得：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ -8 & 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

对于重根 1:

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -8 & 8 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于重根 1，其代数重数与几何重数不相等，所以不能相似对角化。

综上所述：$a = -2$. ◇

3. 设三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

(1) 写出该二次型的矩阵 A；

(2) 用正交变换 $x = Qy$ 把该二次型化为标准型。

解：

(1) 由题得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = -2[2(\lambda-4)] + (\lambda-4)[\lambda(\lambda-4) - 1] = (\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda+1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -1$$

$\lambda_1 = 4$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$ 得 $\alpha_1 = [0, 2, 1]^T$。

$\lambda_2 = 5$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = 2$ 得 $\alpha_2 = [1, -1, 2]^T$.

$\lambda_3 = -1$ 时：

$$[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

取 $x_3 = -2$ 得 $\alpha_3 = [5, 1, -2]^T$. 因为对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为正交向量组。

单位化：

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left[0, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right]^T \\ \gamma_2 = \dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right]^T \\ \gamma_3 = \dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left[\dfrac{5}{\sqrt{30}}, \dfrac{1}{\sqrt{30}}, -\dfrac{2}{\sqrt{30}}\right]^T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

所以 f 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型：

$$f = 4y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$$

◇

四. 证明题

1. 设 A 为 m 阶正定矩阵，B 为 $m \times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，试证：$B^T AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = n$。

证明：

必要性：如果 $B^T B$ 正定，则存在任意非零实列向量 $x \neq 0$，使得 $x^T B^T Bx > 0$，即 $(Bx)^T A(Bx) > 0$，所以 $Bx \neq 0$。所以 $Bx = 0$ 只有零解，即 $r(B) = n$。

充分性：如果 B 的秩为 $r(B) = n$，则线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解，所以存在任意非零实列向量 x，使得 $Bx \neq 0$。又因为 A 为正定矩阵，由正定矩阵的定义得：$(Bx)^T ABx > 0$，即 $x^T B^T ABx = x^T (B^T AB)x > 0$。因为 x 为任意非零实列向量，所以依正定矩阵的定义，矩阵 $(B^T AB)$ 正定。 ◇

2. 设 α, β 是 n 维列向量，证明 $r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq 2$。

证明：

由秩的性质：

$$r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq \min(r(\alpha), r(\alpha^T)) + \min(r(\beta), r(\beta^T)) \leq 1 + 1 = 2$$

◇