第三次习题课
群文件《期中 & 期末试题》

期中试题

1.期中 2016-2017 一 4.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$,A 为 n 阶方阵，定义 $f(A)=aA^2+bA+cI$，如果 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $f(x)=x^2-x-1$, 则 $f(A)=$______。

解：

由题得：

$$A=E+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=E+B$$

可以看出：$B^2=0$. 所以 $A^2=(E+B)^2=E+B^2+2EB=E+2B$.

所以 $f(A)=A^2-A-E=E+2B-E-B-E=B-E=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\2&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$ ◇

2.期中 2017-2018 二 1. 判断是否成立并给出理由。

设 A,B 为同阶对称方阵，则 AB 一定是对称矩阵；

解：

不成立。理由：

以 2 阶对称矩阵为例：（式中:a,b,c,x,y,z 为任意实数。）

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}x&y\\y&z\end{bmatrix}\quad AB=\begin{bmatrix}ax+by&ay+bz\\bx+cy&by+cz\end{bmatrix}$$

可以看出，由于 a,b,c,x,y,z 取值的任意性，所以 $ay+bz\neq by+cz$。（可以取 $a=1,b=2,c=3,x=3,y=4,z=5$ 实际验证一下。） ◇

3.期中 2017-2018 二 4. 判断是否成立并给出理由。

设 2 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 若 A 与所有的 2 阶矩阵均可以交换，则 $a=d,b=c=0$。

解：

成立，理由如下：

取任意二阶矩阵（x,y,z,w 为任意实数）:$B=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}$, 则

$$AB=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+bz&ay+bw\\cx+dz&cy+dw\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xa+cy&xb+yd\\az+cw&bz+dw\end{bmatrix}$$

若 A 与 B 可交换，则有 $AB = BA$，即：

$$ax + bz = xa + cy \tag{1}$$
$$ay + bw = xb + yd \tag{2}$$
$$cx + dz = az + cw \tag{3}$$
$$cy + dw = bz + dw \tag{4}$$

由 (1) 式和 (4) 式得：$bz = cy$，因为 z 和 y 为任意数，所以 $b = c = 0$，代入 (2) 式和 (3) 式：$ay = dy, az = dz$，所以 $a = d$。◇

4.期中 2018-2019 二 2.

设 A 是 n 阶实对称矩阵，如果 $A^2 = 0$，证明 $A = 0$. 并举例说明，如果 A 不是实对称矩阵，上述命题不正确。

解：

证明：依题意设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，所以 A^2 为：只看 A^2 对角线上的元素，A^2 的第 k 行第 k 列的元素为 A 的第 k 行乘第 k 列：$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \cdots + a_{kk}^2 + a_{kk+1}^2 + a_{kk+2}^2 + \cdots + a_{kn}^2 = 0$，因为平方一定大于等于 0，所以该式的每一项都为 0，即 $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{kk}, a_{kk+1}, a_{kk+2}, \cdots, a_{kn}$ 为 0. 即 A 的第 k 行和第 k 列元素为 0.（这一步看不懂的计算一下 A^2 的第一行第一列，第二行第二列的元素验证一下）

因为 A^2 为 0，即其对角线每个元素都为 0，由上边的步骤可以推出 A 的每行每列元素都为 0，即 $A = 0$。

举例：对于二阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$A^2 = 0$，但 A 不是对称矩阵。 ◇

5.2015-2016 二.5

设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 AB 的秩 $r(AB)$。

解：

知识点：矩阵的性质的应用。总结里的性质 9.

方法一：计算出 AB，然后对 AB 进行高斯消元求出阶梯形矩阵，再求出秩。（步骤略，不讲，自己算）

方法二：

由题得：$r(B) = 2$。

$$A \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{5}]{\substack{r_1 \times \frac{1}{3} \\ r_2 \times \frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + \frac{17}{15} r_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

所以 $r(A) = 3$，即 A 满秩。所以 $r(AB) = r(B) = 2$。

方法三：（行列式还没学，等学到了在来看这个方法）

由题得：

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (3 \times 3 - 1 \times 5) = 8 \neq 0$$

所以 A 可逆，$r(AB) = r(B) = 2$。

用任意一种方法做都可以，用自己最顺手的即可。 ◇

6.2016-2017 一.3.

设方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $k =$ __-1 或 4__。

解：

如果方程组有非零解，则 $r(A) < 3$, 当 $k = 0$ 时，可以得出 $r(A) = 3$; 对系数矩阵进行高斯消元：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{k}{2}r_1]{r_2 - \frac{1}{2}r_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & k + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{k}{2} + 1 & 1 - \frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

要使 $r(A) < 3$，则

$$\frac{k + \frac{1}{2}}{\frac{k}{2} + 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{k}{2}} \quad \Rightarrow k_1 = -1 \; k_2 = 4$$

◇

7.2016-2017　一.6.

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ 3 & 1 & b & -1 \end{bmatrix}$, $r(A) = 2$，则 $a + b =$ __-3__。

解：

由题得：

$$A \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & a - 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & b - 6 & -4 \end{bmatrix}$$

若 $r(A) = 2$，则 $r_2 = kr_3$ 其中 $k \neq 0$.(指的是非零元素成比例) 即：

$$\frac{a-1}{4} = \frac{4}{b-6} = \frac{2}{-4} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

◇

8.2016-2017　二.4（2015-2016 的期末试题一大题第 2，原题）

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $A^2 - 2A$ 的秩 $r(A^2 - 2A)$。

解：

方法一：计算出 $A^2 - 2A$。然后对 $A^2 - 2A$ 进行高斯消元求出阶梯形矩阵再求出秩。(步骤略，不讲，自己算)

方法二：

由题得: $A^2 - 2A = A(A - 2E)$, 可以看出 A 是满秩方阵, 即 A 可逆。满秩方阵一定可逆, 所以 $r(A^2 - 2A) = r(A(A - 2E)) = r(A - 2E)$。

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 r(A-2E)=3，所以 $r(A^2 - 2A) = 3$

◇

9.2017-2018 一.5.

设 $A=\begin{bmatrix}2&4&1&0\\1&0&3&2\\-1&5&-3&1\\0&1&0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&2\\a+1&2&3&4\\1&a&1&a\end{bmatrix}$，若 $r(A)=r(B)$，则 a 应满足什么条件。

解：

由题得

$$A\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&0\\1&0&3&2\\-1&5&-3&1\\0&1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&0\\0&-2&\frac{5}{2}&2\\0&7&-\frac{5}{2}&1\\0&1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&2\\0&7&-\frac{5}{2}&1\\0&-2&\frac{5}{2}&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-7r_2}\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&2\\0&0&-\frac{5}{2}&-13\\0&0&\frac{5}{2}&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&2&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&2\\0&0&-\frac{5}{2}&-13\\0&0&0&-9\end{bmatrix}$$

所以 $r(A)=4$。

$$B\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\a&1&2&3\\0&a-1&1&a\end{bmatrix}=C$$

若 $a=0$, 则

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&2&3\\0&-1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{中间步骤略}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可以看出此时 $r(B)=3\neq r(A)$。所以$a\neq 0$。对 C 继续化简：

$$C\xrightarrow{r_3-ar_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1-a&2-a&3-a\\0&a-1&0&a-1\end{bmatrix}=D$$

若 $1-a=0$，即 $a=1$，则：

$$D=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可以看出此时 $r(A)<4$，所以$a\neq 1$，继续对 D 进行化简 (注意：此时 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$)：

$$D\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1-a&2-a&3-a\\0&0&2-a&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1-a&2-a&3-a\\0&0&1&1\\0&0&2-a&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-(2-a)r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1-a&2-a&3-a\\0&0&1&1\\0&0&0&a\end{bmatrix}$$

因为 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$, 所以此时 $r(B)=4=r(A)$, 所以 a 应满足的条件是 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$。 ◇

10.2018-2019 一.6（1）

设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$。

(1) 问 a 为何值时，矩阵 A 和 B 等价。

(2) 当 A 和 B 等价时，求可逆矩阵 P，使得 $PA=B$。

解：

(1) 由题得：$r(B)=2$，若 A 和和 B 等价，则 $r(A)=2$。

$$A\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&a\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&a+4\end{bmatrix}$$

$a+4=0$ 即 $a=-4$ 时，$r(A)=2$，所以 $a=-4$。

(2) 由 (1) 得：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}=B$$

由初等行变换得：$E(3\ 2(2))E(2\ 1(1))A=B$ 所以

$$P=E(3\ 2(2))E(2\ 1(1))=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{bmatrix}$$

◇

期末试题

11.2014-2015 七

设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2-A-2I=0$。

(1) 证明：$r(A-2I)+r(A+I)=n$.

证明：

由题得：$A^2-A-2I=(A-2I)(A+I)=0$。

所以由矩阵秩的性质有：$r(A+2I)+r(A+I)\le n$。

$r((A-2I)-(A+I))=r(-3I)\le r(A-2I)+r(-(A+I))=r(A-2I)+r((A+I))$, 即 $n\le r(A-2I)+r((A+I))$

所以 $r(A-2I)+r(A+I)=n$.

◇

12.2017-2018 一.2

设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$, 则 $r(A+AB)=$______。

解：

$$A\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$r(A)=3$, 满秩。所以 $r(A+AB)=r(A(E+B))=r(E+B)$

$$B=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$E+B=\begin{bmatrix}2&2&3\\2&5&6\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}2&2&3\\0&3&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以 $r(E+B)=3$，所以 $r(A+AB)=r(E+B)=3$ ◇

13.2019-2020 一.2

已知 $A=\begin{bmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 $k=$_______。

解：

若 $k=0$，则

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-1&0&-3\\0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&-3\\0&-2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&-3\\0&0&6\end{bmatrix}$$

所以 $r(A)=3\neq 2$，即 $k\neq 0$. 对 A 接着进行化简：

$$A\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2k-2&3k-3\\0&2k-2&3-3k^2\end{bmatrix}=B$$

若 $k=1$，则

$$B=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(A)=1\neq 2$，所以 $k\neq 1$，继续对 A 进行化简：

$$B\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{k-1}]{r_2\times\frac{1}{k-1}}\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2&3\\0&2&-3-3k\end{bmatrix}$$

如果要使 $r(A)=2$，则

$$\frac{2}{2}=\frac{3}{-3-3k}\quad\Rightarrow k=-2$$

◇