

## 第二次习题课答案 群文件《期中 & 期末试题》

### 期中试题

2016~2017 二.3.

设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , 若矩阵  $X$  满足方程  $AX + I = A^2 + X$ , 求  $X$ 。

解:

方法一: 视频 25

由题得:  $AX + I = A^2 + X$ , 所以  $(A - I)X = A^2 - I$ .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 9 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 - I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 8 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

增广矩阵

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_3 \times (-1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

所以

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

方法二: 由题得:  $AX + I = A^2 + X$ , 所以  $(A - I)X = A^2 - I = (A + I)(A - I) = (A - I)(A + I)$ . 等式两边同时左乘  $(A - I)^{-1}$ :

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(A - I)(A + I) \Rightarrow X = (A + I)$$

注:

1. 单位矩阵乘任何矩阵都等于该矩阵的本身, 任何矩阵乘单位矩阵都等于该矩阵的本身, 即  $AI = IA = A$ . ( $I$  为单位矩阵)  
所以有

$$A^2 - I = A^2 - I^2$$

$$(A + I)(A - I) = A^2 - AI + IA - I^2 = A^2 - A + A - I^2 = A^2 - I^2$$

$$(A - I)(A + I) = A^2 + AI - IA - I^2 = A^2 + A - A - I^2 = A^2 - I^2$$

2. 可逆矩阵 (方阵): 若  $AB = BA = I$ , 则  $A$  矩阵可逆, 称  $A$  是  $B$  的逆矩阵 (或  $B$  是  $A$  的逆矩阵). 通常把  $A$  的逆矩阵表示为  $A^{-1}$ , 则  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ . ◇

2016~2017 一.4.

设  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $AX + 2B = BA + 2X$ , 求  $X^{2017}$ 。

解:

方法一:

由题得:  $(A - 2I)X = B(A - 2I)$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B(A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

增广矩阵

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \times (-1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_3 \\ r_2 + r_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

解得

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

计算得

$$\begin{aligned} X^2 &= X \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ X^3 &= X^2 \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = X \\ X^3 &= X \cdot X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = X \end{aligned}$$

可以看出: 当  $n$  为奇数时,  $X^n = X$ , 所以  $X^{2017} = X$ 。

方法二:

若存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P^{-1}BP$ , 则称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相似, 记为  $A \sim B$

由题得:  $(A - 2I)X = B(A - 2I)$ , 等式两边同时乘  $(A - 2I)^{-1}$  得:  $X = (A - 2I)^{-1}B(A - 2I)$ , 令  $P = A - 2I$ , 则  $X = P^{-1}BP$ . 所以

$$X^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}BPP^{-1}BP = P^{-1}BIBP = P^{-1}B^2P$$

同理可以推出:  $X^n = P^{-1}B^nP$ . (由此我们可以得出一条结论: 若  $A \sim B$ , 则  $A^n = P^{-1}B^nP$ , 以后做题可直接使用) 对于任意

对角矩阵  $C = \begin{bmatrix} c_{11} & & \\ & c_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & c_{nn} \end{bmatrix}$ , 可以计算得:  $C^2 = \begin{bmatrix} c_{11}^2 & & \\ & c_{22}^2 & \\ & & \ddots \\ & & & c_{nn}^2 \end{bmatrix}$ , 所以  $C^n = \begin{bmatrix} c_{11}^n & & \\ & c_{22}^n & \\ & & \ddots \\ & & & c_{nn}^n \end{bmatrix}$  所以:

$$B^{2017} = \begin{bmatrix} 1^{2017} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2017} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B$$

由于还没学逆矩阵的求法, 这里先直接给结论, 后边学到了逆矩阵的求法后再来计算这个 P 的逆矩阵

$$P = A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以:

$$\begin{aligned} X^{2017} &= P^{-1} B^{2017} P = P^{-1} B P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

## 考研例题

1. 设  $\alpha, \beta$  是 3 维列向量,  $\beta^T$  是  $\beta$  的转置, 如果  $\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ , 则  $\alpha^T\beta = \underline{\quad 9 \quad}$ 。

解:

$\alpha, \beta$  是 3 维列向量, 所以可以设  $\alpha = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T, \beta = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$  由题得:

$$\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

所以:

$$\alpha^T\beta = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 1 + 2 + 6 = 9$$

注:

若  $\alpha, \beta$  是 3 维列向量, 记:  $A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix}$ ,  $l = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ , (可以看出,  $l$  是方阵

$A$  主对角线元素之和) 则

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = \alpha l\beta^T = l\alpha\beta^T = lA$$

所以可以推出  $A^n = l^{n-1}A$ , 我们可以将此结论推广到任意  $n$  维列向量的情况 (即  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量, 记:  $A = \alpha\beta^T, l = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha, A^n = l^{n-1}A$ )。◇

$$2. \text{ 若 } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \underline{\quad 0 \quad}.$$

解:

由矩阵的乘法:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注: 由题我们可以得出如下结论: 如果一个  $n$  阶方阵  $A$  对角线上以及对角线的一侧元素全为 0, 那么必有  $A^k = 0$ , 其中  $k \geq n$ 。即  $A$  是下边的几种形状之一:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ 若 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解:

$$\text{由题得: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I + B$$

二项式定理:  $(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^{n-(n-1)} + C_n^n a^n b^{n-n}$

$$\text{由第 2 题的结论可知: } B^k = 0, k \geq 3. \text{ 计算得: } B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} A^n &= (I+B)^n = C_n^0 I^n B^0 + C_n^1 I^{n-1} B^1 + C_n^2 I^{n-2} B^2 + C_n^3 I^{n-3} B^3 + \cdots + C_n^0 I^0 B^n \\ &= I^n B^0 + n I^{n-1} B^1 + \frac{n(n-1)}{2} I^{n-2} B^2 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2n & 4n^2 - n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

4. 设  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 则  $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解:

经观察, 我们可将矩阵按下列方式进行分块:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$A$  分块后是对角矩阵, 所以:  $A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^n \end{bmatrix}$  (注: 这个结论是在上边期中测试的第二个题里的方法二推导出来的)

对于  $A_{11}$ :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3I + B$$

和上一个题一样了, 此时  $B^k = 0, k \geq 2$ 

$$\begin{aligned} A_{11}^n &= (3I + B)^n = C_n^0 B^0 (3I)^n + C_n^1 B^1 (3I)^{n-1} + C_n^2 B^2 (3I)^{n-2} + \cdots + C_n^n B^n (3I)^0 \\ &= 3^n I + 3^{n-1} n B \\ &= \begin{bmatrix} 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注: 把一个矩阵按高斯消元法化为阶梯型矩阵后, 非零行行数即为矩阵的行秩, 对于一个方阵  $A$ , 行秩等于列秩, 用符号  $r(A)$  来表示秩。

对于  $n$  维方阵  $A$ , 如果  $r(A) = 1$ , 则  $A$  一定可以分解为一个列向量和一个行向量的乘积 (此处只给结论, 不做证明)。然后使用第一题得出的结论来计算  $A^n$

所以对于  $A_{22}$ , 经过高斯消元法变换 ( $r_1 - 3r_2$ ) 后:  $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 可以看出  $r(A_{22}) = 1$ , 符合红色字部分的描述, 所以

$$l = 3 + 3 = 6$$

$$A_{22}^n = l^{n-1} A = 6^{n-1} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

所以:

$$A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 6^{n-1} & 9 \cdot 6^{n-1} \\ 0 & 0 & 6^{n-1} & 3 \cdot 6^{n-1} \end{bmatrix}$$

◇

5. 已知  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 若  $X$  满足  $AX + 2B = BA + 2X$ , 则  $X^4 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解:

步骤同上边期中测试题第二题的方法二, 所以略。自己算一下。这里给出  $P = A - 2I$  的逆矩阵  $P^{-1}$ :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后算出的结果是

$$X^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◇