王松年　　　　第3次线性代数

例2.15 解:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+(a-2)r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-3 \end{array}\right)$$

若无解,则 $\begin{cases} (a+1)(a-3)=0 \\ a-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow a=-1$

例2.16 解:增广矩阵

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

2.17 解: $X=AX+B$, 即 $(E-A)X=B$, 令 $C=E-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

下边步骤同2.16,略, $X=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

例2.18: 错误,只有在A的列分法等于B的行分法时才可以相乘。

例2.19 解: $A=(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)^T$, B分为一块(B本身)

行: $A\cdot B=(\alpha_1 B\ \ \alpha_2 B \cdots \alpha_n B)^T$

把A分为一块(本身), $B=(\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n)$ 列: $A\cdot B=(A\beta_1\ A\beta_2 \cdots A\beta_n)$

例 2.20 解: 看一下第二次习题课的文件

经观察可将A分块：$A=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}$，其中 $A_{11}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$A_{22}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

分块后，A为对角矩阵，有 $A^n=\begin{bmatrix}A_{11}^n & 0\\ 0 & A_{22}^n\end{bmatrix}$

$A_{11}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=2E_2+B$，其中 $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

则 $B^k=0,\ k\geq 2$

二项式定理：$(a+b)^n=\underbrace{\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}}$，C为组合数

该展开式的系数是"杨辉三角"

$\therefore A_{11}^n = C_n^0 B^0 (2E_2)^n + C_n^1 B^1 (2E_2)^{n-1} + C_n^2 \underset{0}{B^2} (2E_2)^{n-2} + \cdots + C_n^n \underset{0}{B^n} (2E_2)^0$

$= 2^n E_2 + nB\cdot 2^{n-1}$

$= 2^n E_2 + n\cdot 2^{n-1} B$

同理 $A_{22}^n = 3^n E_2 + n3^{n-1} C$，其中 $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

将 $n=10$ 代入可得：

(这一步可以不算，写出前面的次方就行)

$$A^{10}=\begin{bmatrix}2^{10} & 0 & 0 & 0\\ 5\times 2^{10} & 2^{10} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3^{10} & 10\times 3^9\\ 0 & 0 & 0 & 3^{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1024 & 0 & 0 & 0\\ 5120 & 1024 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 59049 & 590490\\ 0 & 0 & 0 & 59049\end{bmatrix}$$

例 2.21 解: B的第1列为 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\cdot(1\ 1\ 1)^T=A\cdot(1\ 1\ 1)^T$

同理：$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=A\cdot(1\ 2\ 3)^T$；$\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3=(1\ 4\ 9)^T$

$$\therefore C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

例2.22

A为3阶，所以可设

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$$

即 $A^T=[\alpha_1^T\ \alpha_2^T\ \alpha_3^T]^T$

所以 $A^T\cdot A=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\cdot\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \alpha_1^T\cdot\alpha^3\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \alpha_2^T\cdot\alpha^3\\ \alpha_3^T\alpha_1 & \alpha_3^T\alpha_2 & \alpha_3^T\alpha_3\end{bmatrix}=I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

可以看出 $i=j$时，$\alpha_i^T\alpha_j=1$，~~而~~ $i\neq j$时，$\alpha_i^T\alpha_j=0$. 证毕。