第七次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 82 分钟.**

$46\frac{1}{2}$. 逆序数的概念与性质(16分钟)

$46\frac{3}{4}$. 利用逆序数的定义行列式(15分钟)

$46\frac{7}{8}$. 一般项的一些结论(16分钟)

47. 伴随矩阵(14分钟)

48. 矩阵的秩(行列式)(11分钟)

49. 克莱姆法则(10分钟)

微信扫描二维码看视频 $46\frac{1}{2} - 46\frac{7}{8}$.

- **看视频的同时记好笔记.**

- **看线性代数教材 P114-P124 的内容.**

- **课堂上将分组讨论 3.21, 3.22, 3.23, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29, 3.30, 3.31.**

- **组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.**

- **每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.**

例 3.20 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 任意给定两个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$, 则乘积

$$\boldsymbol{A}(i_1,j_1)\boldsymbol{A}(i_2,j_2)\cdots\boldsymbol{A}(i_n,j_n)$$

一定出现在 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的定义式中.

例 3.21 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=a$, $|\boldsymbol{B}|=b$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$, 求 $|\boldsymbol{C}|$.

例 3.22 设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$______.

例 3.23 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量, 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$. 如果 $|\boldsymbol{A}|=1$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$______.

例 3.24 判断下列说法是否正确, 并说明理由.

(4) 两个不相等的 n 阶方阵的伴随矩阵也不相等.

(5) 存在 3 阶方阵, 使得其伴随矩阵的秩为 2.

(6) 设线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则该方程组有唯一解 $\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\beta}$.

例 3.25 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=2$. 分别求 $|(\boldsymbol{A}^{-1})^*|$ 和 $|(\boldsymbol{A}^*)^*|$ 的值.

例 3.26 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵且它的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

求齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

例 3.27 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 则矩阵 $\boldsymbol{B}=$ ______.

例 3.28 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^2$. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{B}$.

例 3.29 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\ (n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则下列说法正确的是 (　　)

(A)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.

(B)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D)交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

例 3.30 已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{0}$. 则下列说法正确的是(　　)

(A) $t=6$ 时, $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1.

(B) $t=6$ 时,$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

(C) $t\neq 6$ 时, $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1.

(D) $t\neq 6$ 时, $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

例 3.31 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=0$. 则 $t=$ ______.