

## 第十一次习题课 群文件《期中 & 期末试题》

### 期末试题

1. 期末 2014-2015 一 5.

已知实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$  经正交变换  $x = py$  可化为标准形:  $f = 6y^2$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

2. 期末 2014-2015 六.

设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0)$$

的矩阵  $A$  的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12。

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 利用正交变换将二次型  $f$  化为标准型, 并写出所用正交变换。

3. 期末 2015-2016 一 6.

若矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$  正定, 则  $\lambda$  满足的条件为\_\_\_\_\_。

4. 期末 2015-2016 四 1.

设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 且满足  $A^2 - 3A + 2E = 0$ , 其中  $E$  为单位矩阵, 试证:

(2)  $A$  为正定矩阵。

5. 期末 2016-2017 一 6.

设  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ , 已知二次型  $f(x) = x^T B x$  是正定的, 则  $\lambda$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

6. 期末 2016-2017 三 2.

已知实对称矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 4 \\ -1 & 3 & b \\ 4 & b & 0 \end{bmatrix}$  与  $B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$  相似。

(1) 求矩阵  $A$ ;

(2) 求正交线性变换  $x = Qy$ , 把二次型  $f(x) = x^T A x$  化为标准型。

7. 期末 2016-2017 四 2.

已知  $A, B$  是同阶实对称矩阵。

(1) 证明如果  $A \sim B$ , 则  $A \simeq B$ , 也就是相似一定合同;

(2) 举例说明反过来不成立。

8. 期末 2017-2018 一 6.

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$  的秩为 2, 则  $t =$ \_\_\_\_\_。

9.期末 2017-2018 三 2.

设  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$ 。

- (1) 写出该二次型的矩阵  $A$ ;
- (2) 求正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A Q = Q^{-1} A Q$  为对角型矩阵;
- (3) 给出正交变换, 化该二次型为标准型。

10.期末 2018-2019 一 5.

若二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  正定, 则  $t$  应满足\_\_\_\_\_。

11.期末 2018-2019 三 2.

设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$ 。

- (1) 写出该二次型的矩阵  $A$ ;
- (2) 求正交矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1} A P$  为对角型矩阵;
- (3) 给出正交变换, 将该二次型化为标准型;
- (4) 写出二次型的秩, 正惯性指标和负惯性指标。

12.期末 2019-2020 一 6.

已知实对称矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix}$  的正惯性指数为 3, 则  $x$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

13.期末 2019-2020 三 3.

设三元二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 。

- (1) 写出该二次型的矩阵  $A$ ;
- (2) 用正交变换  $x = Qy$  把该二次型化为标准型。

14.期末 2019-2020 四 1.

设  $A$  为  $m$  阶正定矩阵,  $B$  为  $m \times n$  实矩阵,  $B^T$  为  $B$  的转置矩阵, 试证:  $B^T A B$  为正定矩阵的充分必要条件是  $B$  的秩  $r(B) = n$ 。

15.期末 2019-2020 四 2.

设  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量, 证明  $r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq 2$ 。

16.期末 2017-2018 四 2.

设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵, 证明  $Ax = 0$  与  $(A^T A)x = 0$  是同解方程, 进一步得出  $r(A) = r(A^T A)$ 。