第十一次课

- **在下次课之前完成下列视频. 合计 51 分钟.**

64. 向量的内积与长度(8分钟)
65. 正交向量组与斯密特正交化(19分钟)
66. 正交矩阵(11分钟)
67. 实对称矩阵的特征值和特征向量(13分钟)

- **看视频的同时记好笔记.**
- **看线性代数教材 P140-P152 的内容.**
- **课堂上将分组讨论 5.34, 5.36, 5.37, 5.38, 5.39, 5.40, 5.42, 5.43, 5.44, 5.45.**

- 组长安排组员整理一份课堂讨论题目解答, 写上日期, 下次课交上来.

- 每位同学在课堂讨论完成以后在课下独立完成以下全部作业.

例 5.34 设 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. 求所有与 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 都正交的向量.

例 5.35 设 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}$ 与 n 个线性无关的 n 维向量正交. 证明: $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$.

例 5.36 设 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. 求一个与 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 等价的两两正交的向量组.

例 5.37 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

(1) 设存在 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\xi}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 不可能是正交阵.

(2) 假设 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵. 证明: $2\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 是可逆阵.

例 5.38 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化? 若能对角化, 求一个与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵.

例 5.39 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$. 求正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对角阵, 并写出一个这样的对角阵.

例 5.40 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵且 $\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$. 证明: $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

例 5.41 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵, 且它的特征值都是正数. 证明: 存在 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

例 5.42 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称阵, 满足: 对任意 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}$ 都有 $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}$. 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 5.43 设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是 n 阶正交阵, 且 $|\boldsymbol{P}|=1$, $|\boldsymbol{Q}|=-1$. 证明: $|\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}|=0$.

例 5.44 已知实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有的特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

例 5.45 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一, 试求:

(1) a 的值;

(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵.