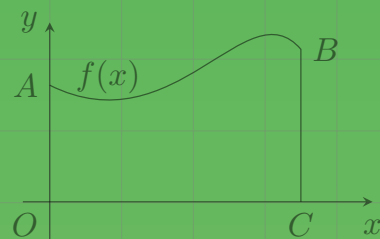


$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



信号与系统

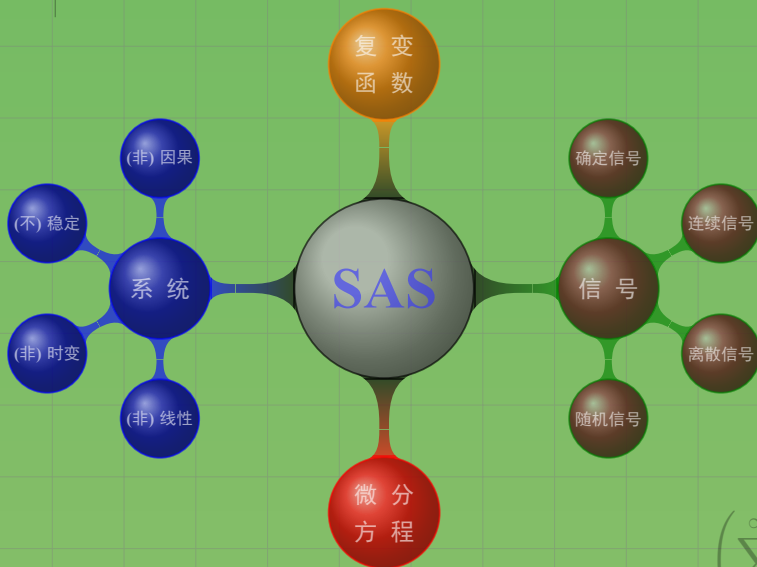
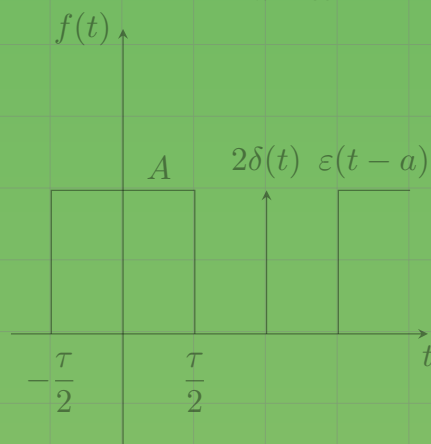
——葵花宝典

王胜鹏◎整理

$$F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\Omega t}$$



$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right)^2$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$



无名出版社
PUBLISHING HOUSE OF NONAME

Signal And System



Elegant \LaTeX

作者：王胜鹏

公众号：whut 数学

时间：March 31, 2020

联系方式：694848081@qq.com

Victory won't come to us unless we go to it.

目 录

| | |
|-----------------------|-----------|
| 1 信号分类与系统分析 | 1 |
| 1.1 信号的分类 | 1 |
| 1.2 连续时间信号的基本运算 | 2 |
| 1.3 系统的描述 | 3 |
| 2 连续时间系统的时域分析 | 4 |
| 2.1 常见信号 | 4 |
| 2.2 单位冲激偶信号 | 5 |
| 2.3 卷积 | 6 |
| 2.4 零输入响应 | 7 |
| 2.5 零状态响应 | 8 |
| 2.6 连续时间系统的时域分析 | 11 |
| 3 连续时间系统的频域分析 | 14 |
| 3.1 正交分解 | 14 |
| 3.2 信号的时频特性与谐波关系 | 18 |
| 3.3 频谱图 | 19 |
| 3.4 三角级数谱 | 19 |
| 3.5 指数级数谱 | 20 |
| 3.6 非周期信号的傅里叶变换 | 20 |
| 3.7 非周期信号能量密度谱 | 21 |
| 3.8 常用信号的傅里叶变换 | 22 |
| 3.9 一般周期信号的傅里叶变换 | 23 |
| 3.10 傅里叶变换性质 | 24 |
| 3.11 连续时间系统的频域分析 | 26 |
| 3.12 系统无失真传输 | 26 |
| 3.13 离散时间周期信号的傅里叶级数 | 28 |
| 3.14 FFT 和 DFT 算法 | 28 |
| 4 连续时间系统的复频域分析 | 30 |
| 4.1 傅里叶变换 | 30 |
| 4.2 拉普拉斯反变换 | 33 |
| 4.3 复频域分析 | 33 |
| 4.4 系统函数 | 34 |
| 4.5 时频域特性 | 35 |

| | | |
|----------|-----------------------|-----------|
| 4.6 | 双边拉普拉斯变换 | 36 |
| 4.7 | 线性系统模拟框图 | 37 |
| 4.8 | 系统的稳定性 | 37 |
| 5 | 离散时间信号与系统的时域分析 | 39 |
| 5.1 | 抽样定理 | 39 |
| 5.2 | 常用典型序列 | 40 |
| 5.3 | 序列的基本运算 | 41 |
| 5.4 | 离散时间系统的响应 | 41 |
| 5.5 | 卷积和 | 42 |
| 5.6 | 零状态响应 | 42 |
| 6 | Z 域分析 | 43 |
| 6.1 | Z 变换 | 43 |
| 6.2 | 常用序列 Z 变换 | 44 |
| 6.3 | Z 变换的性质 | 44 |
| 6.4 | 反 Z 变换 | 44 |
| 6.5 | 三大变换的关系 | 45 |
| 6.6 | 离散时间系统的 z 域分析 | 46 |
| 6.7 | 其他信号下的稳态响应 | 47 |
| 7 | 结构图 | 48 |
| 7.1 | 结构图 | 48 |
| 7.2 | 关于 LaTeX | 49 |
| 8 | 参考文献 | 50 |
| A | 常用公式表 | 51 |
| B | MATLAB 实验 | 54 |

第1章 信号分类与系统分析

内容提要

□ 信号分类

□ 系统描述

□ 信号运算

□ 系统分析

1.1 信号的分类

1.1.1 连续与离散

定义 1.1. 连续与离散

连续时间信号：在任何时刻 (除了有限个不连续点外) 都有确定的函数值，对函数值的连续性没有特殊要求。特别的，时间和幅值都连续的信号称为模拟信号。

离散时间信号：只在不连续的时刻有函数值，其它时刻无定义。根据函数值是否连续，离散时间信号系统分两类。

1. 抽样信号：时间离散而幅值连续；
2. 数字信号：时间离散且幅值经过量化也是离散。

1.1.2 周期性

1.1.3 能量信号和功率信号

定义 1.2. 能量信号和功率信号

能量信号：

对于连续信号，满足

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f^2(t) dt < \infty$$

对于离散信号，满足

$$0 < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^2(k) < \infty$$

则称为能量信号，即能量有限。

功率信号：

对于连续信号，满足

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T f^2(t) dt}{2T} < \infty$$

对于离散信号，满足

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=-N}^N f^2(k)}{2N} < \infty$$

则称为功率信号，即功率有限。

注意

从定义上知：

- 能量信号的功率为 0，功率信号的能量为无穷
- 一个信号可以既不是能量信号，也不是功率信号。
- 信号不可能既是能量信号，也是功率信号。
- 一般来说，周期信号都是功率信号 ($f(t) = 0$ 除外)

最后一条很容易理解，对于周期信号，我们设它的周期为 T_f ，并且 $nT_f \leq T \leq (n+1)T_f$ ，根据高数知识：

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T f^2(t) dt}{2T} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-nT_f}^{nT_f} f^2(t) dt}{2T} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^{-nT_f} f^2(t) dt}{2T} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{nT_f}^T f^2(t) dt}{2T} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-nT_f}^{nT_f} f^2(t) dt}{2nT_f} + 0 + 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \int_0^{T_f} f^2(t) dt}{2nT_f} \\ &= \frac{\int_0^{T_f} f^2(t) dt}{T_f} \end{aligned}$$

由此我们得出一个很重要很重要的公式，即除零的〈周期信号〉为功率函数，并且其功率为 $f^2(x)$ 在一个周期内的均值。

其实我们归结起来看，可以重新理解功率信号这个概念，对于周期信号而言，它的信号功率就是信号的平方在一个周期内的均值，而对于非周期信号而言，我们把它的理解为周期为“无穷大的周期信号”，它的信号功率就是信号 $f^2(x)$ 在周期 $T(T \rightarrow \infty)$ 的均值，功率信号描述的信号相对时间平均量，而信号能量描述的是信号相对时间的积累量。

当然大前提还是这个周期信号在一个周期内只有有限个第一类间断点，来保证在周期内可积，事实上 $f(x)$ 条件可弱化为在区间内有界且间断点全体构成的集合测度为零

1.2 连续时间信号的基本运算

信号相加：即同一时刻函数值的相加，运用于去噪原理

信号相乘：即同一时刻函数值相乘，运用于高频载波

信号微分：用于描述信号的变化

信号积分：使信号突变部分变得平滑

信号反褶、信号时移、尺度变换：运用于卷积的几何计算

尺度变换：图像灰度拉伸和语音的压缩。



注意 上述描述的是连续时间系统，离散时间系统与其稍有不同，离散时间系统是用序列描述信号，在尺度变换上有点区别。

1.3 系统的描述

1.3.1 系统的描述

定义 1.3. 系统描述

齐次性:

$$T[k e(t)] = k T[e(t)]$$

叠加性:

$$T[e_1(t) + e_2(t)] = T[e_1(t)] + T[e_2(t)]$$

同时满足齐次性和叠加性的系统是线性系统

时不变性: 若 $e(t) \Rightarrow T(e(t))$, 则 $e(t - t_0) \Rightarrow T(e(t - t_0))$ 这样的系统为时不变系统。

否则为时变系统。

时不变系统描述的是: 激励延时 t_0 , 响应也延时 t_0 , 但波形不变。在同样条件下, 系统响应与激励无输入时刻无关。



注意

在判断时变性时, 我们是对激励延时发送, 不管系统是什么样的函数。这点也困扰我, 其实根源在于数学思维太深刻, 它不是数学上复合函数的复合, 从而没有按顺序考虑信号的变换过程。

对于 $T(e(t - t_0))$, 我们先进行输入信号 $e(t)$ 的时移, 再相对时间 t 而言 进行信号“T”作用。

例如对于 $r(t) = 3e(2t)$ 是时变系统。 $T(e(t - t_0))$ 表示先激励延时, 再进行 T 作用。得到 $3e(2t - t_0) \neq 3e(2(t - t_0))$, 因此是时变系统。

因果系统: 系统在 t_0 时刻的响应只取决于 $t = t_0$ 和 $t < t_0$ 时的输入, 与 $t > t_0$ 时的输入无关。

一般而言, 任何物理可实现系统都具有因果性; 理想系统, 例如各类理想滤波器, 往往具有非因果性。

因果信号: 从 $t=0$ 时刻开始的信号 (即信号定义在 $t \geq 0$)

稳定系统: 满足:

$$\forall t \in R, \text{ when } |e(t)| \leq M_e < \infty, |r(t)| \leq M_r < \infty$$

称为稳定系统, 否则为不稳定系统。



注意 注意, 判断系统稳定性时, t 任意取, 可以取到 ∞ 。

第2章 连续时间系统的时域分析

内容提要

- 卷积的介绍
- 零输入响应
- 零状态响应
- 连续时间系统的时域分析

线性时不变系统的输入输出方程一般形式:

- 是一个常系数微分方程;
- 其右边是输入信号 $e(t)$ 及其各阶导数的线性组合;
- 左边是输出信号 $i(t)$ 或 $U(t)$ 及其各阶导数的线性组合;
- 描述输入信号和输出信号之间的关系;

《信号与系统》采用的思想,使将系统的响应也及微分方程的解,分成零输入响应和零状态响应两部分。

时域分析:

根据信号或者系统的不同特征,系统分析可以在时域分析过程中输入和输出信号已知都是关于时间 t 的函数,此时系统分析为时域分析

频域分析:

而在其他变换域进行系统分析,比如通过傅里叶变换,将时间变量换位频率变量,此时称系统的频域分析

2.1 常见信号

定义 2.1. 常见信号

- 实指数信号:

$$f(t) = Ae^{at}$$

- 复指数信号:

$$f(t) = Ae^{at + jw_0t}$$

- 抽样信号

$$f(t) = S_a(t) = \frac{\sin}{t}$$

重要性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} S_a(t) dt = \pi$

- 单位阶跃信号 ε 常用来表示一些特殊信号如:

- 矩形脉冲信号: $G_\tau(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$
- 符号函数信号: $Sgn(t) = 2\varepsilon(t) - 1$

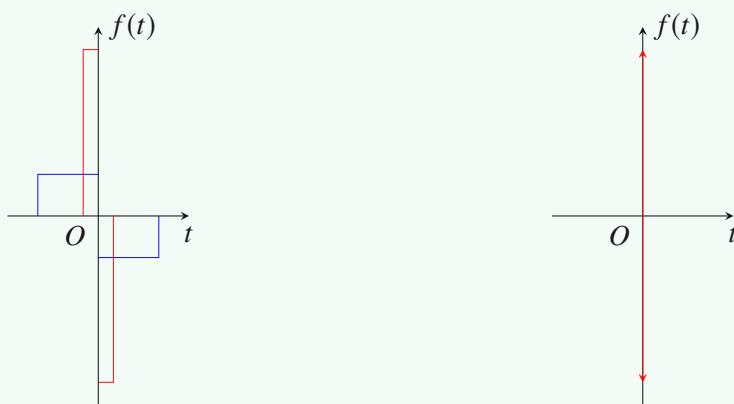
$$\bullet \text{ 斜函数信号: } R(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau = t\varepsilon(t)$$

2.2 单位冲激偶信号

鉴于电分复变已经学习了一些特殊信号，这里就简单介绍一下新的信号——单位冲激偶信号。¹之前学习我们知道阶跃信号的导数是冲激信号，那么冲激信号的导数是怎么样的呢？

定义 2.2. 单位冲激偶信号

三角波的极限形式表示冲激信号则导数对应图形如图所示：



单位冲激信号：当 t 从负值趋近零时，它是强度为无穷大的正冲激，当 t 从正值趋近零时，它是强度为无穷大的负冲激。我们用 $\delta'(t)$ 表示。

主要性质：

- $\delta'(t)$ 为奇函数，从图解就可以看出来。由此我们知道：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) dt = 0$$

- 筛选性质： $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0)$

证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) d\delta(t) = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f'(t) dt = -f'(0)$

- 乘积性质： $f(t) \delta'(t) = f(0) \delta'(t) - f'(0) \delta(t)$

证明 $(f(t) \delta(t))' = f'(t) \delta(t) + f(t) \delta'(t)$

$$\Rightarrow (f(0) \delta(t))' = f'(0) \delta(t) + f(t) \delta'(t)$$

$$\Rightarrow f(t) \delta'(t) = f(0) \delta'(t) - f'(0) \delta(t)$$


¹虽然对信号与系统后面内容并没啥帮助，后面基本没用到，不过了解为好。

2.3 卷积

2.3.1 卷积定义

定义 2.3. 卷积

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

 **注意** 平滑窗口积分 $f(t) = \int_{t-\frac{w_0}{2}}^{t+\frac{w_0}{2}} f_0(\tau) \cdot f_2(\tau - t) d\tau$ 与卷积形式类似，但是两个完全不同的概念，卷积先对其中一个函数反褶再与另一个函数相乘后的积分，切勿不要记错

2.3.2 常见函数卷积

$$e^{\lambda_1 t} \varepsilon(t) * e^{\lambda_2 t} \varepsilon(t) = \frac{(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \varepsilon(t)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t \varepsilon(t)$$

$$e^{\lambda t} \varepsilon(t) * e^{\lambda t} \varepsilon(t) = t e^{\lambda t} \varepsilon(t)$$

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

2.3.3 卷积的性质

2.3.3.1 交换律

定义 2.4. 交换律

$$u(t) * [v(t) + w(t)] = u(t) * v(t) + u(t) * w(t)$$

交换律解释了系统串连和子系统次序无关。

2.3.3.2 分配律

定义 2.5. 交换律

$$u(t) * v(t) = v(t) * u(t)$$

2.3.3.3 结合律

定义 2.6. 交换律

$$u(t) * v(t) * w(t) = u(t) * [u(t) * w(t)]$$

2.3.3.4 微分特性

定义 2.7. 微分特性

$$\frac{d^m}{dt^m} u(t) * \frac{d^n}{dt^n} v(t) = \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} [u(t) * v(t)]$$

2.3.3.5 积分特性

定义 2.8. 积分特性

$$\int_{-\infty}^t [u(x) * v(x)] dx = \left[\int_{-\infty}^t u(x) dx \right] * v(x) = u(x) * \int_{-\infty}^t v(x) dx$$

2.3.3.6 延时特性

定义 2.9. 延时特性

$$f_1(t) * f_2(t) = f(t) \Rightarrow f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f(t - t_1 - t_2)$$



注意 由 $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$ 可知:

不同位置单位冲激函数可以起到信号搬运的作用

对于连续时间系统而言, 进行系统分析, 本质上是求解微分方程, 它的解主要取决于两方面, 一是激励信号, 即函数形式; 二是初始条件, 即边界条件。

在信号与系统中我们需要求解全响应, 可以求出零输入状态响应 $r_{zi}(t)$ 和零状态响应 $r_{zs}(t)$, 两者之和即为全响应

2.4 零输入响应

定义 2.10. 零输入响应

无输入激励, 仅由初始条件引起, 用 $r_{zi}(t)$ 表示

求解步骤:

1. 数学建模转化为 n 阶齐次方程: $(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n)r(t) = 0$, 其中 p 为微分算子
2. 求解特征方程: $D(p) = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n) = 0$;
3. 得到特征根也就是自然频率: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$4. r_{zi}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t), \text{ 系数由边界条件待定}$$

 **注意** 求解过程中可能出现重根和虚根两种情况

- 重根情况: $(p - \lambda)^k r(t) = 0 \Rightarrow r_{zi}(t) = (C_0 + C_1(t) + \dots + C_{k-1}t^{k-1})e^{\lambda t} \varepsilon(t)$
- 虚根情况: $(p - (\alpha + i\beta))(p - (\alpha - i\beta))r(t) \Rightarrow r_{zi}(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$

列出表格:

表 2.1: 常系数齐次微分方程解

| 特征方程的根 | 通解中的对应项 |
|----------------------------------|--|
| λ 为单根 | $Ce^{\lambda t}$ |
| λ 是 k 重根 | $(C_0 + C_1(t) + \dots + C_{k-1}t^{k-1})e^{\lambda t} \varepsilon(t)$ |
| $\alpha \pm \beta i$ 是 k 重共轭复根 | $[(C_0 + C_1(t) + \dots + C_{k-1}t^{k-1})\cos \beta t + (D_0 + D_1(t) + \dots + D_{k-1}t^{k-1})\sin \beta t]e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ |

2.5 零状态响应

定义 2.11. 零状态响应

无初始储能, 仅由外加激励引起, 用 $r_{zs}(t)$ 表示

由于激励的千变万化, 我们想要研究一般性求解方法, 单纯用高等数学知识是很难解决问题, 好在对于线性时不变系统而言, 其齐次性和可加性让我们想到利用特殊好求的函数作为单元信号来表达其他一般信号。

而〈单位冲激函数〉是一个很好的选择, 它满足:

1. 有特殊的筛选性质, 自身激励系统引起的零状态响应很好求
2. 一般信号都可以用它线性表示

当然这里冲激函数不是唯一可选基本函数, 其他某些特殊函数也可以被选择, 比如阶跃函数

2.5.1 单位冲激响应

定义 2.12. 零状态响应

连续时间系统的单位冲激响应是建立在零状态基础上, 输入激励为单位冲激函数的系统响应, 用 $H(p)$ 表示转移算子, 用 $h(t)$ 表示响应

根据高等数学知识易求最简单的一阶系统单位冲激响应:

$$H(p) = \frac{k}{p - \lambda} \Rightarrow h(t) = ke^{\lambda t} \varepsilon(t)$$

对于 n 阶系统单位冲激响应, 设转移算子为:

$$\frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

我们不难得出:

 **注意** 在部分分式展开过程中, 我们可能会出现重根现象我们只需要:

$$H(p) = \frac{k}{(p - \lambda)^m} \Rightarrow h(t) = k \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda t} \varepsilon(t)$$

表 2.2: 系统单位冲激响应

| 阶数比较 | 转移算子 | 单位冲激响应 |
|---------|---|--|
| $m < n$ | $H(p) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p - \lambda_i}$ | $h(t) = h(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t)$ |
| $m = n$ | $H(p) = b_m + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p - \lambda_i}$ | $h(t) = h(t) = b_m \delta(t) + \sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t)$ |
| $m > n$ | $H(p) = (s_{m-n} p^{m-n} + \dots + s_1 p + s_0) + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p - \lambda_i}$ | $h(t) = h(t) = \sum_{i=0}^{m-n} s_i \delta^{(i)}(t) + \sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t)$ |

下面给一个简单的例子:

命题 2.1. 单位冲激响应

已知系统 $H(p) = \frac{2p^2 + 9p + 11}{p^2 + 4p + 4}$, 求单位冲激响应 $h(t)$

解

1. 写出系统转移算子

$$H(p) = \frac{2p^2 + 9p + 11}{p^2 + 4p + 4}$$

2. 部分分式展开

$$H(p) = 2 + \frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{(p+2)^2}$$

3. 配比系数

$$H(p) = 2 + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{(p+2)^2}$$

4. 写出单位冲激响应

$$h(t) = 2\delta(t) + e^{-2t}\varepsilon(t) + te^{-2t}\varepsilon(t)$$

2.5.2 信号的分解

命题 2.2. 分解为冲激信号

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

证明

我们考虑任意信号的分解, 绘制如下图像

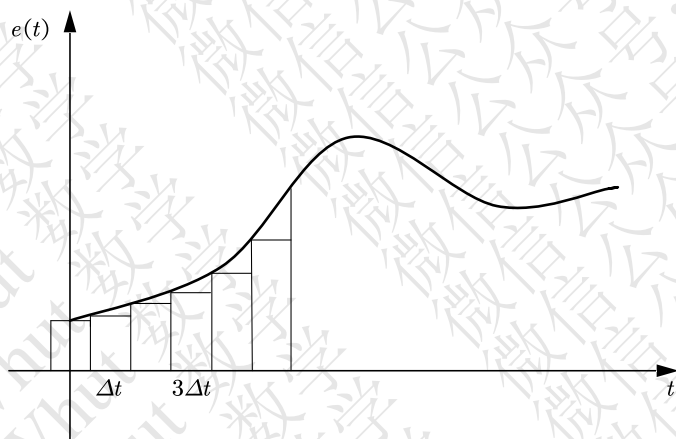


图 2.1: 信号分解

在 t 附近 Δt 内, 根据微积分定义和门函数:

$$\begin{aligned}
 e(t) &= \sum e(k\Delta t) \left(\varepsilon\left(t - k\Delta t - \frac{\Delta t}{2}\right) - \varepsilon\left(t - k\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) \right) \\
 &= \sum e(k\Delta t) \left(\frac{\varepsilon\left(t - k\Delta t - \frac{\Delta t}{2}\right) - \varepsilon\left(t - k\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \right) \Delta t \\
 &= \sum e(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \Delta t \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\
 &= e(t) * \delta(t)
 \end{aligned}$$

由此我们看出, 任何激励信号可以分解为冲激信号之和, 为后面零状态响应的求解做准备。

命题 2.3. 分解为阶跃信号

$$e(t) = f(0) \varepsilon(t) + \int_0^{+\infty} f'(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau$$

证明

我们仍然考虑任意信号的分解, 绘制如下图像:

在 t 附近 Δt 内, 根据微积分定义和门函数:

$$\begin{aligned}
 e(t) &= e(0) \varepsilon(t) + \sum [e(k\Delta t) - e(k\Delta t - \Delta t)] \varepsilon(t - k\Delta t) \\
 &= e(0) \varepsilon(t) + \sum \left[\frac{e(k\Delta t) - e(k\Delta t - \Delta t)}{\Delta t} \right] \varepsilon(t - k\Delta t) \Delta t \\
 &= e(0) \varepsilon(t) + \sum \left[\frac{e(k\Delta t) - e(k\Delta t - \Delta t)}{\Delta t} \right] \varepsilon(t - k\Delta t) \Delta t \\
 &= e(0) \varepsilon(t) + \sum e'(k\Delta t) \varepsilon(t - k\Delta t) \Delta t \\
 &= e(0) \varepsilon(t) + \int_0^{+\infty} e'(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau
 \end{aligned}$$



注意 实际上, 出现两种方式的分解时显然的, 我们可以通过数学推导证明两者之间的等价的关系:

$$\begin{aligned} e(0)\varepsilon(t) + \int_0^{+\infty} e'(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau &= e(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \varepsilon(t-\tau)de(\tau) \\ &= e(0)\varepsilon(t) - e(0)\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{d\varepsilon(t-\tau)}{d\tau}de(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

由此可见, 两种分解方式其实是等价的, 但是由于 $\delta(t)$ 对应的单位冲激响应更好求, 我们选择利用这种方式就行分解信号以便求出零状态响应。

2.5.3 零状态响应

命题 2.4. 零状态响应

$$r_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau = e(t) * h(t)$$

证明

由于 $\delta(t) \Rightarrow h(t)$, 而我们知道 $e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$, 因为积分是一种求和的结果, 所以我们可以易得:

$$r_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau = e(t) * h(t)$$

由此, 系统的零状态响应求解可以分为两步:

1. 求出系统的单位冲激响应 $h(t)$
2. 输入信号 $e(t)$ 与单位冲激响应 $h(t)$ 卷积

2.6 连续时间系统的时域分析

全响应 $r(t)$ = 零输入响应 $r_{zi}(t)$ + 零状态响应 $r_{zs}(t)$

2.6.1 自然响应与受迫响应

- 系统响应的分解, 除零输入和零状态以外, 还可以分成自然响应和受迫响应。自然响应包含系统特征根即自然频率, 受迫响应包含外加激励频率。
- 一般来说, 系统零输入响应必然是自然响应的一部分; 零状态响应中可分为自然响应和受迫响应

第 2 章 习题

1. 根据冲激函数性质求解积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t^2 - 4)dt$$

解 设 $f(t) = t^2 - 4$ 给出下面三种解法。

(1)

$$\text{在 } t=2, f(t) = f(2) + f'(2)(t-2) + \frac{f''(\xi_1)(t-2)^2}{2} \approx 0 + 4(t-2)$$

$$\text{在 } t=-2, f(t) = f(-2) + f'(-2)(t+2) + \frac{f''(\xi_1)(t+2)^2}{2} \approx 0 - 4(t+2)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t^2-4)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(4(t-2)) + \delta(-4(t+2))dt = \frac{1}{4}(1+1) = 2$$

$$(2) \therefore \frac{d\varepsilon(f(t))}{dt} = f'(t)\delta(f(t))$$

$$\therefore \delta(f(t)) = \frac{d\varepsilon(f(t))}{f'(t)dt}$$

$$\therefore \delta(t^2-4) = \frac{1}{2t} \cdot \frac{d\varepsilon(t^2-4)}{dt} = \frac{1}{2t} \cdot \frac{d(1-\varepsilon(t+2) + \varepsilon(t-2))}{dt}$$

$$= \frac{1}{2t} \cdot (\delta(t-2) - \delta(t+2))$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t^2-4)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2t} \cdot (\delta(t-2) - \delta(t+2))dt = \frac{1}{2}$$

(3) 直接换元积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t^2-4)dt = 2 \int_0^{+\infty} \delta(t^2-4)dt$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \delta(x-4)d\sqrt{x}$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\delta(x-4)}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{结论: } \delta[f(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t-t_i)$$

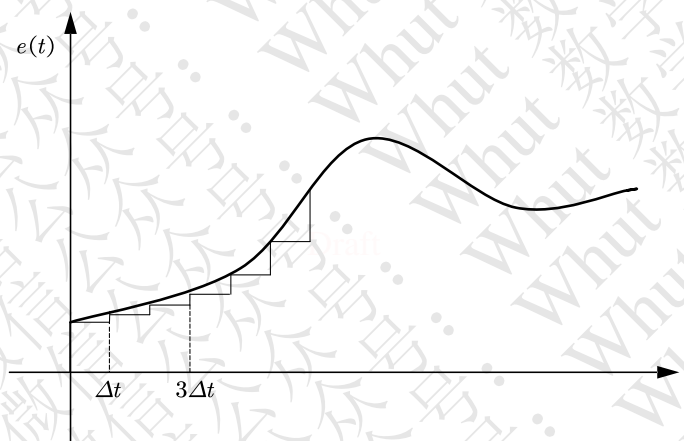


图 2.2: 信号分解

第3章 连续时间系统的频域分析

内容提要

□ 正交分解

□ 复指数级数

□ 三角级数

□ 迪利克雷条件

3.1 正交分解

定理 3.1. 正交分解

设 $g_i(t)$ 完备 (即正交), 则 $f(t)$ 正交分解为: $f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_n g_n(t) + \dots$,
且信号 $f_1(t)$ 在 $f_2(t)$ 的分量系数:

$f_2(t)$ 为实函数时:

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt}$$

$f_2(t)$ 为复变函数时:

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt}$$

由数值分析我们得知许多函数可以进行正交集分解, 从而展开成级数的形式用于近似估计, 对于信号与系统, 我们常用的完备正交集通常是三角级数和复指数级数, 对他们的研究会有利于对信号与系统的进一步了解。当然也就有了后续的频谱啥的。

3.1.1 三角级数

我们选择 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$ 作为完备正交集, 可得到三角级数的傅里叶级数:

定理 3.2. 傅里叶级数

设 $f(t)$ 是周期为 T 的周期函数, 可展开为:


$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

其中:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\Omega t dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\Omega t dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

由此可见系数 $\frac{a_0}{2}$ 为一个周期的均值, 即一个周期所围成的面积。

 **注意** 为了方便, 我们经常用辅助角公式进行公式整理:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

其中:

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \\ a_n = A_n \cos \varphi_n \\ b_n = -A_n \sin \varphi_n \end{cases}$$

并且 A_n 和 a_n 是 $n\Omega$ 的偶函数, φ_n 和 b_n 是 $n\Omega$ 的奇函数。

3.1.2 复指数傅里叶级数

我们选择 $e^{jn\Omega t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$ 作为完备正交集, 根据周期信号 $f(t)$ 在复指数完备正交集 $g_i(t)$ 上的分量系数:

$$c_i = \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g_i^*(t) dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_i(t) g_i^*(t) dt}$$

可得到复指数的傅里叶级数:

定理 3.3. 复指数傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{F}_n e^{jn\Omega t}$$

其中:

$$\dot{F}_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

 **注意** 由于三角级数和复指数级数展开应该是一致的, 两者存在如下关系:

$$\dot{F}_n = \frac{\dot{A}_n}{2} = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

其中:

$$\dot{A}_n = A_n e^{j\varphi_n}$$

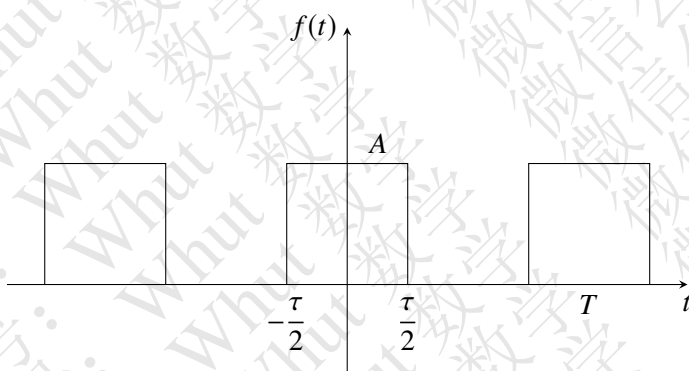
3.1.3 周期矩形脉冲

定理 3.4. 三角级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

其中:

$$a_n = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right), b_n = 0$$



定理 3.5. 复指数

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) e^{jn\Omega t}$$

3.1.4 吉布斯现象

吉布斯现象（又叫吉布斯效应）¹：将具有不连续点的周期函数（如矩形脉冲）进行傅立叶级数展开后，选取有限项进行合成。当选取的项数越多，在所合成的波形中出现的峰起越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时，该峰起值趋于一个常数，大约等于总跳变值的 9%。

基于图像傅里叶变换运用较成熟的（快速算法），性能接近于最佳，获得较早的也比较广泛的研究。

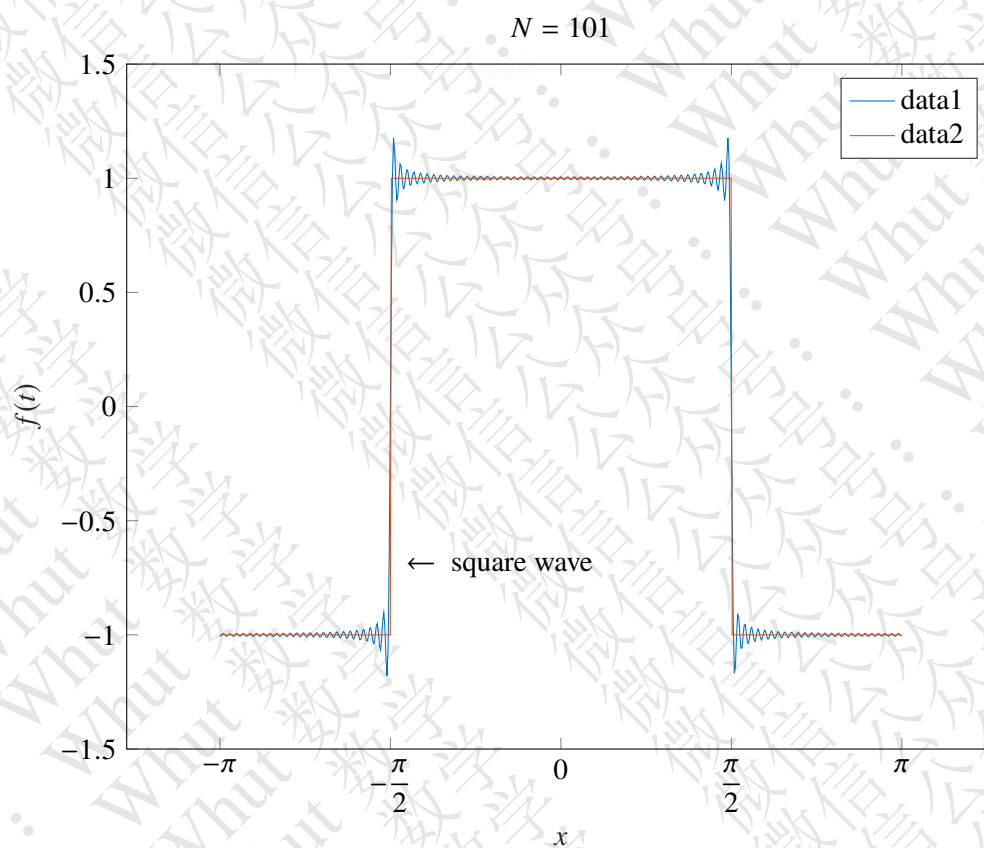
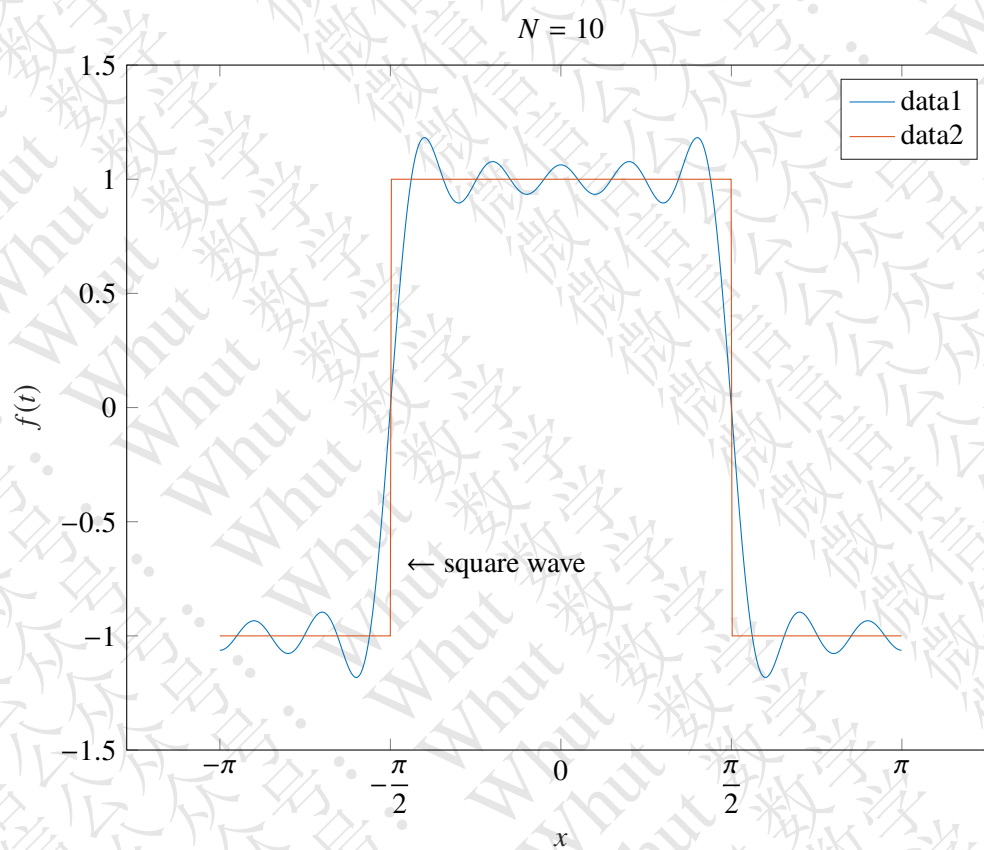
它的不足之处在于：相邻子图像数据在各个边界不连续造成的所谓 Gibbs 现象。这是由于图像数据的二维傅里叶变换实质上是一个二维图像的傅立叶展开式。这个二维图像应被认为是周期性的。由于子图像的变换系数在边界不连续，而将造成复原的子图像在其边界也不连续。于是由复原子图像构成的整幅复原图像将呈现隐约可见的以子图像尺寸为单位的方块状结构，影响整个图像质量。当子图像尺寸较小时更为严重。

后面会介绍
DFT 算法以及
FFT 算法

注意

解决这个 Gibbs 现象的方法是后来研究出来的二维余弦变换（DCT）代替二维傅立叶变换。基本思路为：用一个对称的 $2N \times 2N$ 像素的子图像代替原来 $N \times N$ 子图像。由于对称性，子图像作二维傅立叶变换，其变换系数将只剩下实数的余弦项。这样，即可消除 Gibbs 现象。

¹源于百度百科



3.1.5 迪利克雷条件

定理 3.6. 迪利克雷条件

任意周期信号只要满足迪利克雷条件，可展开为正交函数线性组合的无穷级数：

- 在一个周期内只有有限个间断点；
- 在一个周期内有有限个极值点；
- 在一个周期内函数绝对可积， $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty$



注意 级数收敛意味着信号在另一个域能量进行了压缩，为信号的压缩提供了可能。

3.2 信号的时频特性与谐波关系

3.2.1 偶函数

定理 3.7. 偶函数

有 a_n 项， $b_n = 0$ ；如矩形脉冲波



3.2.2 奇函数

定理 3.8. 奇函数

只要 b_n 项，如锯齿波



3.2.3 奇谐函数

定理 3.9. 奇谐函数

$$f(t) = -f(t+T)$$

不含直流分量和偶次谐波分量，只含奇次谐波分量



3.2.4 偶谐函数

定理 3.10. 偶谐函数

$$f(t) = f(t+T)$$

不含奇次谐波分量，只含偶次谐波分量



3.3 频谱图

内容提要

基本级数谱

时域变化与频谱关系

- 幅度谱的物理意义：展现信号中各分量的大小；
- 相位谱的物理意义：展现了信号各频率分量的相对位置。

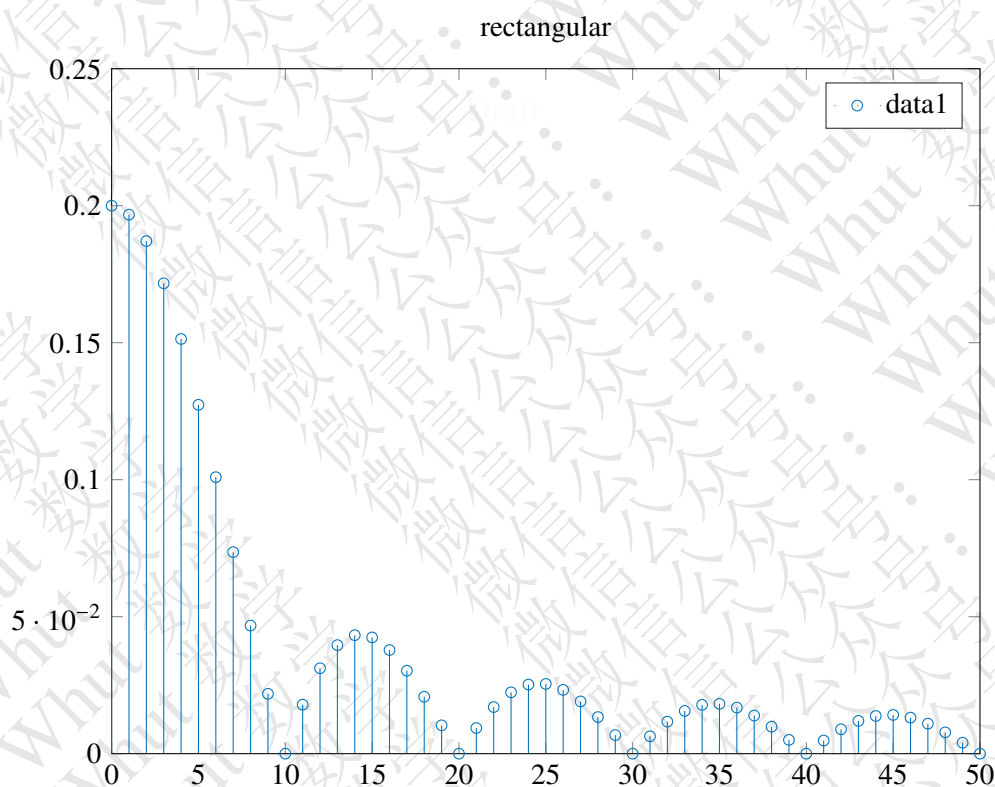
从周期频谱中可以总结周期频谱特点：

- 离散性：由不连续的线条组成；
- 谐波性：只出现在基波频率的整数倍上；
- 收敛性：信号幅度谱随谐波次数增加而总体减小。

我们以矩形脉冲为例来说明三角级数和复指数级数谱线的特点：

3.4 三角级数谱

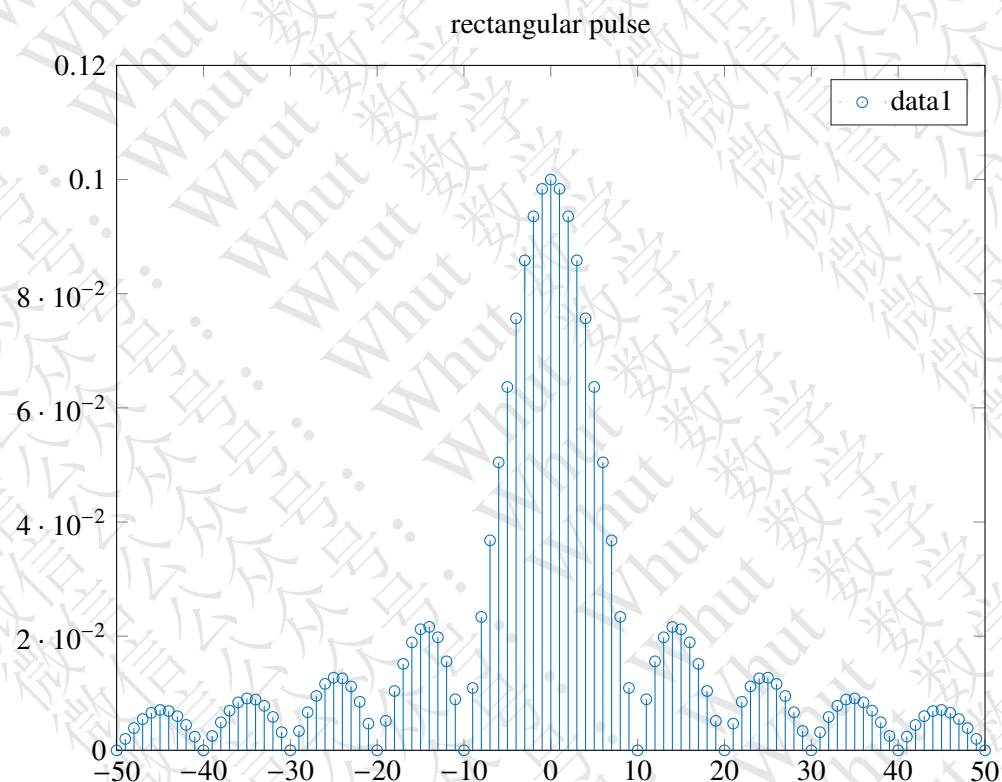
3.4.1 矩形脉冲



3.5 指数级数谱

3.5.1 矩形脉冲

由此我们可以看出三角级数谱每个分量的幅度一分为二恰好分在复指数振动频谱正负频率对应的位置上。



3.5.2 时域与频谱

当信号时域变化较缓时：

信号的高频分量较少；频谱收敛速度较快，频带较窄。

3.6 非周期信号的傅里叶变换

3.6.1 非周期信号的傅里叶变换

对于频谱图，当 T 趋近于无穷大时，频谱的变化：

- 幅度趋近于零
- 频谱线越来越稠密，离散谱变连续谱
- 频谱包络线形状没有发生变化，频带宽度也没有变化

正是由于这些变化，我们想要研究非周期信号的频谱及其特性，就必须进行幅度放大进行研究。由此定义一个新的量——频谱密度函数 $F(j\omega)$

定义 3.1. 频谱密度函数

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \dot{F}_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

由 $f(t)$ 到 $F(j\omega)$ 的过程叫做傅里叶正变换, $\frac{F(j\omega)}{\Omega}$ 为频谱密度。


 **注意** 考虑到:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\Omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

我们把由 $F(j\omega)$ 到 $f(t)$ 的过程叫做傅里叶反变换, 傅里叶正变换和反变换合称为非周期信号的傅里叶变换。

3.6.2 傅里叶变换存在条件**定理 3.11. 傅里叶变换存在条件**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \text{ 即绝对可积}$$

 **注意** 绝对可积只是充分条件, 像直流信号, 阶跃信号, 符合函数信号等虽然不满足绝对可积, 但仍然可以进行傅里叶变换。

3.7 非周期信号能量密度谱**定理 3.12. 能量恒等式**

根据傅里叶变换定义式, 和积分交换次序易得:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{+\infty} G(\omega) d\omega$$

左边表示时域能量, 右边表示频域能量。这表明时域能量与频域能量相等。其中:
 $G(\omega) = \frac{|F(\omega)|^2}{\pi}$ 为能量密度。

注 同样我们可以得到一个周期内的平均功率恒等式:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

其实我们在电分中学过, 时域的功率等于频域各个分量的功率之和, 也就是电流的有效值的平方等于各次谐波的电流有效值平方和。利用这个式子很容易得到巴塞尔问题的解答, 也就是 ZeTa 函数的偶数次解。

3.8 常用信号的傅里叶变换

3.8.1 单边指数衰减信号

定理 3.13. 单边指数衰减信号

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, 对应频谱函数:

$$F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

幅频特性:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$$



3.8.2 双边指数衰减信号

定理 3.14. 双边指数衰减信号

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, 对应频谱函数:

$$F(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

幅频特性:

$$|F(j\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = 0$$



3.8.3 矩形脉冲信号

定理 3.15. 双边指数衰减信号

$$f(t) = \begin{cases} E & t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

对应频谱函数:

$$F(j\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

幅频特性:

$$|F(j\omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{4(n+1)\pi}{\tau} \end{cases}$$

3.8.4 其他重要变换公式

定理 3.16. 重要傅里叶变换公式

1. 冲激信号: $\delta(t) \longleftrightarrow 1$
2. 直流信号: $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$
3. 符号函数信号: $\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$
4. 阶跃信号: $\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ (利用 $\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{\text{sgn}(t)}{2}$)
5. 余弦信号: $\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
6. 正弦信号: $\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi j[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

3.9 一般周期信号的傅里叶变换

利用频移性质 $e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 可得:

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{F}_n \delta(\omega - n\Omega)$$

我们又根据定义知道:

$$\dot{F}_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$F_0(j\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

由此得到:

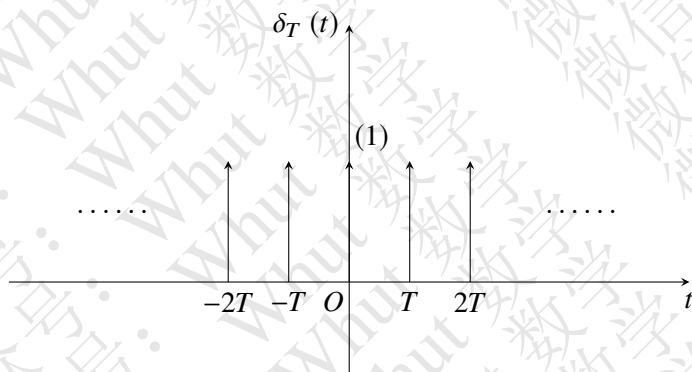
$$\dot{F}_n = \frac{1}{T} F_0(\omega) |_{\omega=n\Omega} \quad (3.1)$$

由 (2.1) 式可知: 周期脉冲序列的傅里叶变换等于单脉冲的傅里叶变换 $F_0(j\omega)$ 在 $n\Omega$ 频率点的值乘以 $\frac{1}{T}$ 。利用此结论可方便求出傅里叶系数。

命题 3.1. 周期单位冲激序列

求周期单位冲激序列的傅里叶变换与傅里叶级数：

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



解

$$\begin{aligned} \therefore \dot{F}_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \\ \therefore \delta_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\Omega t} \quad \text{且} \quad \mathcal{F}[\delta_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{F}_n \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{F}_n \delta(\omega - n\Omega) \end{aligned}$$

3.10 傅里叶变换性质

3.10.1 傅里叶变换性质

定理 3.17. 傅里叶变换性质

1. 线性性质: $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$
2. 时移性质: $f(t \pm t_0) \longleftrightarrow F(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
3. 频移性质: $f(t) e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)]$
4. 尺度变换: $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
5. 对称性质: $F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$
6. 时域微分: $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$
7. 频域微分: $(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$
8. 时域积分: $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$
9. 频域积分: $-\frac{f(t)}{jt} + \pi f(0) \delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) d\Omega$
10. 卷积定理 (时域):

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

11. 卷积定理 (频域):

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

 **注意** 根据频移性质:

$$f(t) e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)]$$

以及欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 可知:

$$\mathcal{F}[f(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [F(j(\omega + \omega_0)) + F(j(\omega - \omega_0))]$$

$$\mathcal{F}[f(t) \sin(\omega_0 t)] = \frac{j}{2} [F(j(\omega + \omega_0)) - F(j(\omega - \omega_0))]$$

由此可见时间信号 $f(t)$ 乘以 $\cos(\omega_0 t)$ 或 $\sin(\omega_0 t)$, 等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 一分为二, 沿频率轴向两边个移动 ω_0 , 这个性质运用于高频载波, 通常将 $\cos(\omega_0 t)$ 或 $\sin(\omega_0 t)$ 作为载体传输信号。

根据对称特性, 我们知道当 $f(t)$ 为偶函数时, 形状为 $F(\omega)$ 的波形, 其频谱必为 $f(\omega)$, 由此我们推出 $Sa(t)$ 形信号的频谱必为矩形函数。

命题 3.2. 对称性质

求信号 $f(t) = \frac{2}{1+t^2}$ 的频谱函数

解

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right] &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \therefore \mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right] &= \frac{2}{1 + \omega^2} \\ \therefore F(j\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{2}{1+t^2}\right] = 2\pi e^{-|\omega|} \end{aligned}$$

3.10.2 奇偶性

定理 3.18. 奇偶性

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

由此我们很容易得出：

- 函数傅里叶变换的幅度谱为偶函数，相位谱为奇函数。
- 实偶函数的频谱密度函数为实偶函数。
- 实奇函数的频谱密度函数为虚奇函数。



3.11 连续时间系统的频域分析

我们知道零状态响应等于输入信号与系统单位冲激响应的卷积积分：

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

在傅里叶变换存在的前提下两边同时傅里叶变换：

$$R_{zs}(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

从而有系统函数：

$$H(j\omega) = \frac{R_{zs}(j\omega)}{E(j\omega)}$$

3.11.1 频响函数

定义 3.2. 频率响应函数

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$



引入频域系统函数，归纳出求解系统零状态响应的步骤为：

- 求出 $E(j\omega)$ 。
- 确定系统函数 $H(j\omega)$ 。
- 求出零状态响应的傅里叶变换 $R_{zs}(j\omega)$ 。
- 对 $R_{zs}(j\omega)$ 求傅里叶反变换即得 $r_{zs}(j\omega)$

3.12 系统无失真传输

内容提要

- ☐ 系统无失真传输条件
- ☐ 理想低通滤波器

- ☐ 佩利——维纳准则
- ☐ 调制与解调

3.12.1 系统无失真传输条件

要想信号在通过线性系统时不产生任何失真，要求系统频率响应的幅度特性是一常数，相位特性是一通过原点直线。

定义 3.3. 系统无失真传输条件

$$H(j\omega) = Ke^{j\varphi(\omega)}$$

3.12.2 理想低通滤波器

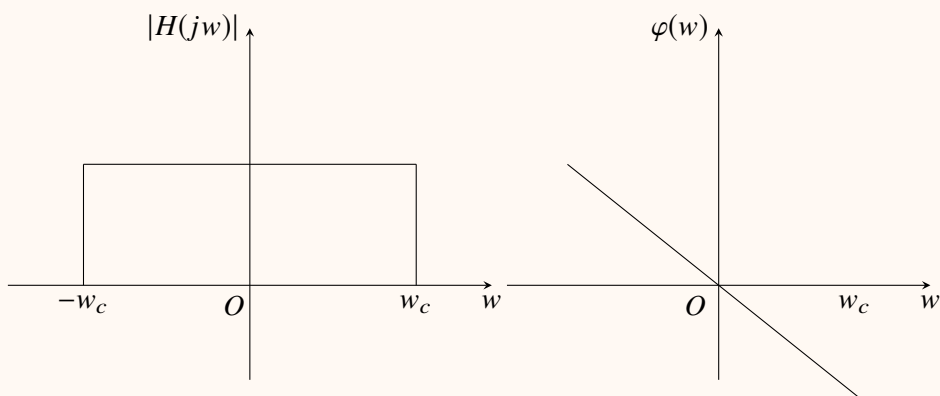
定理 3.19. 理想低通滤波器

理想低通滤波器系统函数：

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

冲激响应：

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$$



频带宽度： $\frac{2\pi}{w_c}$

阶跃响应：

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)] \quad t_\tau = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c}$$

3.12.3 佩利——维纳准则

定理 3.20. 因果条件

物理可实现系统(因果系统)满足：

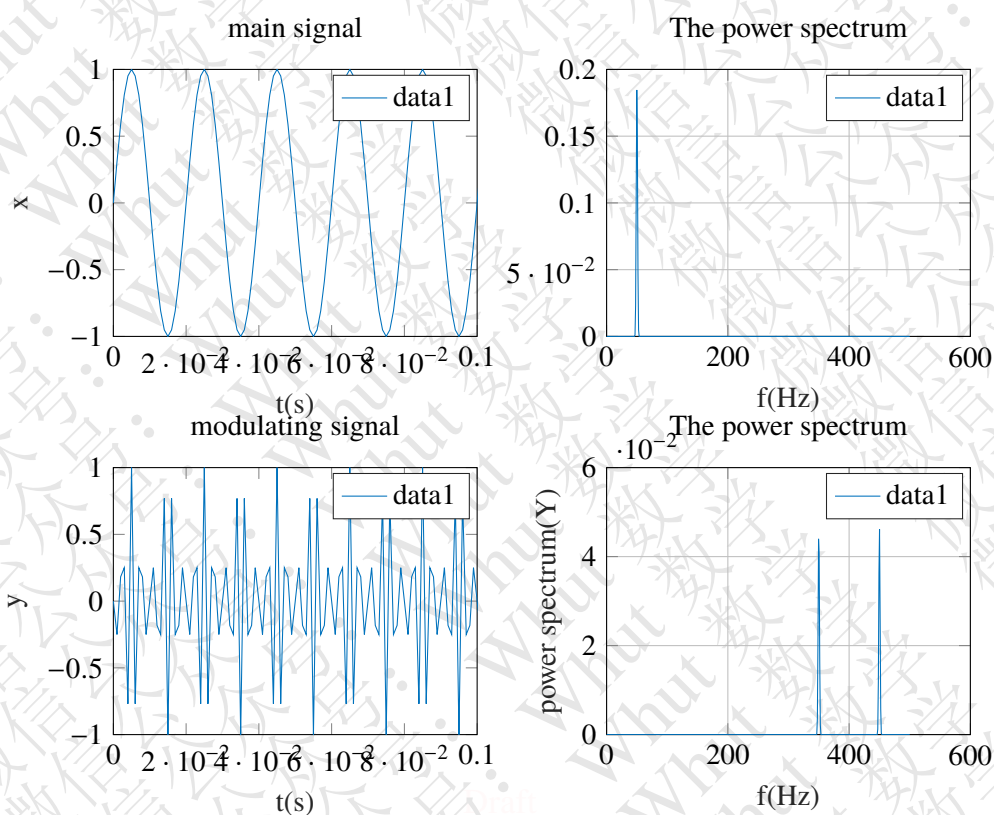
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$



注意 佩利——维纳准则仅仅是物理可实现系统的必要条件。

3.12.4 调制与解调

太累了，不想画了。就把调制与解调图片发出去吧



3.13 离散时间周期信号的傅里叶级数

一个离散时间周期信号 $x[n]$ ，若有

$$x[n] = x[n + N]$$

其中使上式成立的最小正整数 N 为基波周期， $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ 为基波频率。我们引进最简单的周期复指数序列

$$\phi_k(n) = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

我们设法将一个离散时间周期信号 $x[n]$ 表示成复指数信号线性组合：

$$x[n] = \sum_{<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

上式即为离散时间傅里叶级数， a_k 为离散时间傅里叶级数系数

3.14 FFT 和 DFT 算法

考虑到，我们在实际计算机中，处理函数都是进行取样，不是理想的连续型傅里叶变换，我们从插值的角度去考虑：

定理 3.21. DFT

若 $f(x)$ 在 N 个点 $x_j = \frac{2\pi}{N}j, j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 上插值函数:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx}$$

其中:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ikj\frac{2\pi}{N}}$$

由于插值定义我们知:

$$f(x) = f_j$$

由 f_j 求 c_k 称离散傅里叶变换 (或 DFT)



第 3 章 习题

1. 一因果 LTI 系统输入输出满足方程:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) z(t-\tau) d\tau - x(t)$$

其中: $z(t) = e^{-t}\varepsilon(t) + 3\delta(t)$

(a) 求该系统的频率响应 $H(jw)$

(b) 求该系统的单位冲激响应

2. 利用傅里叶变换的性质证明:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} \varepsilon(t) \quad (a > 0) \longleftrightarrow \frac{1}{(a + jw)^n}$$

3. 设 $x(t) \longleftrightarrow X(jw), y(t) \longleftrightarrow Y(jw), g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} |X(jw) * Y(jw)|$

(a) 证明:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j(w-\theta)) e^{jw t} dw \right] d\theta$$

(b) 证明:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j(w-\theta)) e^{jw t} dw = e^{j\theta t} y(t)$$

第4章 连续时间系统的复频域分析

内容提要

- (单) 拉普拉斯变换
- 拉式变换的性质
- 复频域分析
- 时频域特性
- 系统函数
- 双边拉式变换
- 模拟框图
- 系统稳定性

4.1 傅里叶变换

由于迪利克雷条件的苛刻性, 为了使更多函数存在变换, 我们引进一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 与信号 $f(t)$ 相乘。因此只要 σ 取适当正值时, 可使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积, 这种方法在数学上运用很多, 比如高数中的含参变量积分, 在处理迪利克雷积分时, 引入衰减因子使其绝对可积。

4.1.1 拉普拉斯变换

定义 4.1. 双边拉普拉斯变换

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

其中: $s = \sigma + j\omega$



注意

- 根据傅里叶反变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{st} d\omega$$

进行换元整理得:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

由此看出, 如果直接求拉普拉斯反变换, 可能不太好求, 好在复变函数留数理论为求解提供便捷的方法, 我会在后面的内容中具体介绍¹。

- 在实际运用中, 我们所接触的信号大部分是有起始时刻的, 将起始时刻设为时间零点, 考虑 $t=0$ 时刻可能包含冲激函数及其导数, 取积分下限为 0_- , 由此双边拉普拉斯反变换演变为单边拉普拉斯变换²:

$$F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

¹其实电路分析和复变函数对其有具体讲解, 在这里不再展开讲解部分分式展开, 重点介绍数学模型

²后面 z 变换也是一样的, 由于码字代码码辛苦, 后面不再累赘

- 通常我们可用阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 乘信号函数对应的拉式变换表示单边拉普拉斯变换。
- 无特别说明均指单边拉普拉斯变换。

4.1.2 拉普拉斯反变换收敛域

定义 4.2. 存在条件

拉普拉斯变换存在的充要条件：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\sigma t} = 0$$

满足上式的 σ 取值范围即为收敛域。

4.1.3 常用拉普拉斯变换

定理 4.1. 常用拉式变换

1. 单位冲激函数： $\delta(t) \longleftrightarrow 1$
2. 单位阶跃函数： $\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$
3. 指数衰减函数： $e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}$
4. 高频载波函数：

$$\cos(w_0 t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + w^2}$$

$$\sin(w_0 t) \longleftrightarrow \frac{w_0}{s^2 + w^2}$$

5. 幂函数信号： $t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$

4.1.4 拉普拉斯变换性质

定理 4.2. 常用性质

1. 线性性质： $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
2. 时移性质： $f(t \pm t_0) \varepsilon(t \pm t_0) \longleftrightarrow F(s) e^{\pm s t_0}$
3. 频移性质： $f(t) e^{\pm s_0 t} \longleftrightarrow F[s \mp s_0]$
4. 尺度变换： $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
5. 时域微分： $\frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow sF(s) - f(0_-)$

一般地：

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} f'(0_-) \dots - f^{(n-1)}(0_-)$$

6. 时域积分： $\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s}$

一般地：

$$\mathbb{L} \left\{ \int_{0_-}^t \dots \int_{0_-}^{\tau} f(\lambda) d\lambda d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s^n}$$

7. 复频域微分: $(-t)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
8. 复频域积分: $\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^\infty F(\eta) d\eta$
9. 初值定理^a: $f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
10. 终值定理^b: $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
11. 时域卷积: $f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$
12. 复频域卷积: $f_1(t) \cdot f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi} F_1(s) * F_2(s)$

^a初值定理只适合原点处没有冲激的函数且 $f(t)$ 及 $f'(t)$ 存在, 并有拉氏变换

^b终值定理只适合所有极点都在左半平面 (包括原点处的单极点)



注意 我们需要注意一下几点:

- 对于延时性质, 易混淆四个函数: $f(t-t_0)$, $f(t-t_0)\varepsilon(t)$, $f(t)\varepsilon(t-t_0)$, $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$, 只有第四个函数才能用时移性质。
- 根据延时性质我们可以得出: 若 $f(t)$ 以 T 为周期的信号, 设 $f_1(t)$ 对应第一周期函数, 它的拉氏变换为 $F_1(s)$, 则有:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s)$$

- 如果有 $f^{(n-1)}(0_-) = f^{(n-2)}(0_-) = \dots = f(0_-) = 0$ 那么微分性质可化简为:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n F(s)$$

- 对于非物理可实现系统的时域积分, 我们利用分部积分也容易得到:

$$\int_{-\infty}^t f(x) dx \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0_-)$$

推广到一般情况:

$$\left(\int_{-\infty}^t \right)^n f(x) dx \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{s^{n-m+1}} f^{(-m)}(0_-)$$

命题 4.1. 复频域积分

求 $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的拉氏变换

解

$$\begin{aligned} \because \sin t \varepsilon(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1} \\ \therefore \mathbb{L} \left[\frac{\sin t}{t} \varepsilon(t) \right] &= \int_s^{+\infty} \frac{1}{\eta^2 + 1} d\eta = \arctan \frac{1}{s} \end{aligned}$$

命题 4.2. 时域积分

求 $Si(x)$ 的拉氏变换

解

$$\therefore \mathbb{L} \left[\frac{\sin t}{t} \varepsilon(t) \right] = \arctan \frac{1}{s}$$

$$\therefore \mathbb{L}[Si] = \frac{\arctan \frac{1}{s}}{s}$$

4.2 拉普拉斯反变换

由复变函数留数定理:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C F(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_i]$$

因此, 拉普拉斯反变换为:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(s) e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_L F(s) e^{st} ds \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_i] \end{aligned}$$

啊啊啊, 码字码公式太累了, 而且这些知识在复变和电分下都是送分内容, 所以在这里我偷个懒, 部分分式展开以及留数的运用在这里就不再累述了。

4.3 复频域分析

4.3.1 拉普拉斯变换求解线性常系数微分方程

命题 4.3. 拉氏变换

描述线性时不变系统的微分方程:

$$r''(t) + 3r'(t) + 2r(t) = 2e'(t) + 6e(t)$$

并且输入信号 $e(t) = \varepsilon(t)$, 边界条件: $r(0_-) = 2, r'(0_-) = 1$, 求零状态, 零输入, 以及全响应。

解 两边同时拉普拉斯变换:

$$(s^2 R(s) - sr(0) - r'(0)) + 3(sR(s) - r(0)) + 2R(s) = 2sE(s) + 6E(s)$$

解出一元一次方程得:

$$R(s) = \frac{2s+7}{s^2+3s+2} + \frac{2(s+3)}{s^2+3s+2} E(s)$$

$$\therefore r_{zi}(t) = \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{2s+7}{s^2+3s+2} \right] = (5e^{-t} - 3e^{-2t}) \varepsilon(t)$$

$$\therefore r_{zs}(t) = \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{2(s+3)}{s^2+3s+2} \cdot \frac{1}{s} \right] = (3 - 4e^{-t} + e^{-2t}) \varepsilon(t)$$

$$\therefore r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = (3 + e^{-t} - 2e^{-2t}) \varepsilon(t)$$

4.3.2 电路的 s 域模型

电路的 s 域模型用于建立拉普拉斯变换的基础上分析电路，常见的基本电路元件模型如下：

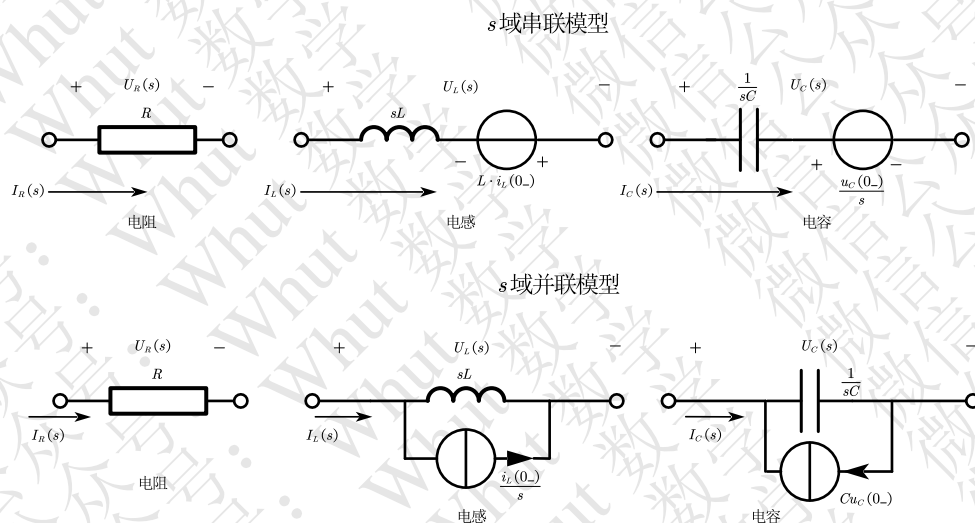


图 4.1: 元件数学模型

利用元件得 s 域模型，我们可以总结出用拉普拉斯变换分析电路得步骤：

- 建立电路得 s 域模型，利用元件参数以及初值状态建立数学模型。
- 依据元件的特性、函数关系、KCL、KVL，VCR 方程写出 s 域下的方程。
- 解出象函数，取拉普拉斯反变换，即求得时间函数。

4.4 系统函数

仍然考虑零状态响应将方程写成：

$$R_{zs}(s) = H(s) E(s)$$

其中：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

我们将 $H(s)$ 定义为系统函数。

定义 4.3. 系统函数

$$H(s) = \frac{R_{zs}}{E(s)}$$

系统函数与系统的激励和响应的形式无关，只取决于系统本身特性。系统的拓扑结构确定，则 $H(j\omega)$ 确定可求出。它可由零状态下的系统模型求出，也可以由系统冲激响应 $h(t)$ 取拉普拉斯变换求得。

4.5 时频域特性

定义 4.4. 零极点

由系统函数定义可知：

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

定义 $D(s) = 0$ 得 n 个根 p_1, p_2, \dots, p_n 为 $H(s)$ 的极点； $N(s) = 0$ 得 n 个根 z_1, z_2, \dots, z_n 为 $H(s)$ 的零点；从而得出：

$$H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

在 s 域平面中，圆表示零点，叉表示极点。

4.5.1 零极点与时域特性

我感觉不是重点，以后补上.....

4.5.2 零极点与频域特性

定理 4.3. 频域特性

令 $s = j\omega$ 得到：

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^m B_j}{\prod_{i=1}^n A_i} e^{j\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j - \sum_{i=1}^n \theta_i\right)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

其中：

$$|H(j\omega)| = K \frac{\prod_{j=1}^m B_j}{\prod_{i=1}^n A_i}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{j=1}^m \varphi_j - \sum_{i=1}^n \theta_i$$

这个作图麻烦，后面补上....

4.6 双边拉普拉斯变换

在某些情况下，需要讨论双边时间函数，这时引进双边时间函数：

$$f(t) = f_a(t)\varepsilon(t) + f_b\varepsilon(-t)$$

4.6.1 双边拉普拉斯变换


定义 4.5. 双边拉普拉斯变换

$$F_d(s) = \mathbb{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = F_b(s) + F_a(s)$$

由于之前都是建立在单边拉氏变换的基础上，因此求解双边的重点就是求解左边函数的拉式变换 F_b 。

由双边拉式变换定义可以推出求解双边拉式变换步骤：

1. 令 $t = -\tau$ 构造 $f_b(-\tau)$ 。
2. 对 $f_b(-\tau)$ 求单边拉氏变换得到 $F_b(p)$ 。
3. 对 $p = -s$ ，求出 $F_b(s)$ 。

 **注意** 求出 $F_a(s)$ 和 $F_b(s)$ 后要看看它们室友有公共收敛域，只有拥有公共收敛域，才有 $F_d(s)$

命题 4.4. 双边拉式变换

求函数 $f(t) = e^{\alpha t}\varepsilon(t) + e^{-\alpha t}\varepsilon(-t)$, ($\alpha < 0$) 双边拉氏变换。

解

$$\begin{aligned} \therefore F_a(s) &= \frac{1}{s - \alpha}, \sigma_a > \alpha \\ \therefore f_b(-\tau) &= e^{\alpha\tau} (\tau > 0) \\ \therefore F_b(p) &= \frac{1}{p - \alpha} (p > -\alpha) \\ \therefore f_b(s) &= -\frac{1}{s + \alpha} (\sigma_b < -\alpha) \\ \therefore \frac{2\alpha}{s^2 - \alpha^2} & (\alpha < \sigma < -\alpha) \end{aligned}$$

4.6.2 双边拉式反变换

定理 4.4. 求解步骤

1. 根据收敛域判断是左边函数还是右边函数，右边函数直接用单边反变换，左边函数进行下面操作。
2. 令 $s = -p$ 求出 $F(p)$ 。
3. 对 $F(p)$ 求单边拉氏反变换得到 $f_b(\tau)$
4. 对 $\tau = -t$ ，求出 $f_b(t)$ 。

4.7 线性系统模拟框图

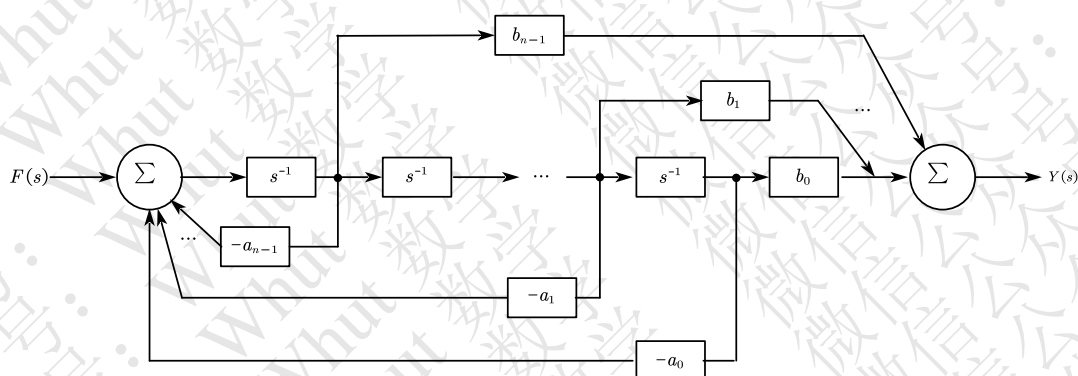


图 4.2: n 阶系统模拟

上图表示系统函数

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

的 n 阶模拟。

看懂图就行。

4.8 系统的稳定性

4.8.1 系统的稳定性

定义 4.6. 系统的稳定性

对于所有的

$$|e(t)| \leq M_e$$

有

$$r_{zs}(t) \leq M_r$$

则系统稳定。

定理 4.5. 因果稳定条件

系统的稳定条件:

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt \leq \infty$$



注意

由于绝对可积有时较难判断，因此我们常采用研究 $H(s)$ 的方法：

- 稳定： $H(s)$ 全部极点位于左半轴
- 临界稳定： $H(s)$ 在原点或虚轴上有单级点其余极点都在左半平面

- 不稳定：\$H(s)\$ 只要有一个极点位于右半平面或虚轴上和原点处有二阶或以上的重极点

4.8.2 罗斯——霍尔维茨准则

由于解系统的全部极点有时可能不太好求，罗斯——霍尔维茨提供一个方便的准则。

定理 4.6. 罗斯——霍尔维茨准则

设特征方程：

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

代入

$$\begin{cases} A_n = a_n \\ A_{n-1} = a_{n-1} \\ B_n = a_{n-2} \\ B_{n-1} = a_{n-3} \\ \dots \end{cases}$$

求解出罗斯——霍尔维茨阵列，其中：

$$\begin{cases} A_{i-1} = -\frac{\begin{vmatrix} A_{i+1} & B_{i+1} \\ A_i & B_i \end{vmatrix}}{A_i} \\ B_{i-1} = -\frac{\begin{vmatrix} A_i & C_i \\ A_{i+1} & C_{i+1} \end{vmatrix}}{A_i} \\ C_{i-1} = -\frac{\begin{vmatrix} A_i & D_i \\ A_{i+1} & D_{i+1} \end{vmatrix}}{A_i} \end{cases}$$

顺次出现的符号变化次数等于系统特征方程所具有实部为正的根的个数，所以：

- 稳定：无符号变化
- 不稳定：有符号变化



表 4.1: 罗斯——霍尔维茨阵列

| A_n | B_n | C_n | $D_n \dots$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------------|
| A_{n-1} | B_{n-1} | C_{n-1} | $D_{n-1} \dots$ |
| \dots | \dots | \dots | \dots |
| A_2 | B_2 | 0 | |
| A_1 | 0 | 0 | |
| A_0 | 0 | 0 | |

第5章 离散时间信号与系统的时域分析

内容提要

□ 抽样定理

□ 离散序列

□ 序列的基本运算

□ 离散时间系统响应

5.1 抽样定理

定义 5.1. 抽样信号

利用抽样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中抽取一系列离散样值，获取的信号称为抽样信号 $f_s(t)$ 。

根据定义，我们可以用一个门函数序列 (抽样脉冲序列) 表示抽样结果，就有：

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$$

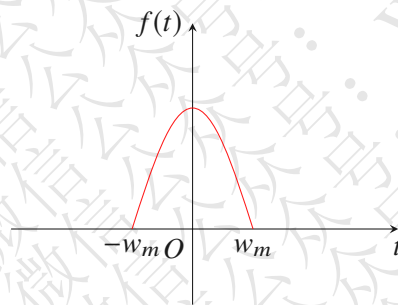
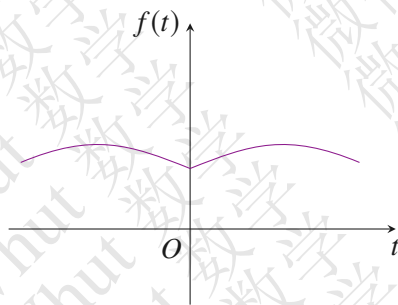
理想抽样下的脉宽 τ 趋近于 0，此时，门函数序列缩为冲激序列：

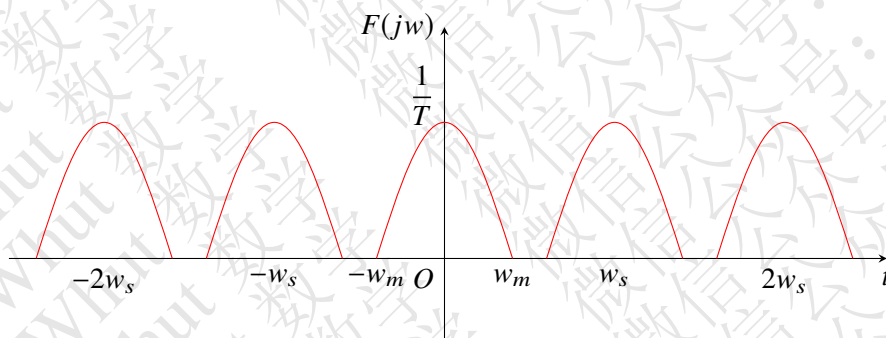
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

对上面两个式子进行傅里叶变换联立整理得到：

$$F_s(j\omega) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

此时表明：信号在时域被理想抽样后，抽样信号的频谱 $F_s(j\omega)$ 是原连续时间信号频谱 $F(j\omega)$ 以抽样频谱 ω_s 为周期延拓得到的，形状不变，只是幅度相差 $1/T$ 。



**定义 5.2. 抽样定理**

香农抽样定理：对于一个有限频宽信号进行理想抽样，当抽样频率 $w_s \geq 2w_m$ 抽样值唯一确定。将此抽样信号通过截止频率 $w_c (w_m \leq w_c \leq w_s - w_m)$ 的理想低通滤波器后，原信号完全重建。

最低允许抽样频率 $2f_m$ 称为奈奎斯特频率，最大允许抽样间隔 $\frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特间隔。

5.2 常用典型序列**定义 5.3. 典型序列**

单位冲激序列：

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

单位阶跃序列：

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

正弦序列： $f(k) = A_k \sin(wk + \varphi)$

复指数序列： $f(k) = e^{jwk}$



注意 单位冲激序列抽样性质：

$$\delta(k-i) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

$$f(k) \delta(k-i) = f(i)$$

单位冲激序列与单位阶跃序列关系：

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(k-i)$$

对于复指数与正弦序列，不同于连续时间系统信号，它们的周期性取决于 $\frac{2\pi}{w}$ 是否为有理数。

5.3 序列的基本运算

定义 5.4. 信号的差分

- 前向差分：

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$$

- 后向差分：

$$\Delta f(k) = f(k) - f(k-1)$$



注意 对于信号的反褶，序列的累加，序列的相乘，序列的移位都很容易理解，重点序列的尺度变换与连续信号的尺度变换不同，因为采样时间 t 是整数离散的。

5.4 离散时间系统的响应

描述连续时间系统，我们得到的是微分方程，描述离散时间系统，显然得到的是差分方程。因此重点在差分方程的解上。

定理 5.1. 离散时间系统响应

一般 n 阶差分方程的完全解由其次解 $y_h(k)$ 和特解 $y_p(k)$ 组成：

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

定理 5.2. 齐次解

设齐次方程：

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \dots + a_0y(k-n) = 0$$

那么解的形式为：

$$y_h(k) = \sum_{i=1}^r C_i k^{r-i+1} \lambda_1^k + \sum_{j=r+1}^n C_j \lambda_j^k$$

其中： λ_1 为 r 阶重根



注意

- 差分方程与微分方程通解形式相似，但特解大大不同。
 - 有时可能出现共轭复数根的情况，由于现代求解差分方程用 Z 变换更方便，所有书本上没有讲，但是这个知识点在经济数学上应该还是有一定作用，我就码一下吧。
- 当解为共轭复数 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 时：

$$y(k) = (C_1 \cos \theta k + C_2 \sin \theta k) r^k$$

其中：

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \tan \theta = \frac{\beta}{\alpha}$$


定理 5.3. 特解

设差分方程：

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \dots + a_0y(k-n) = f(k)$$

那么特解的形式为：

- $f(k) = k^m$ 时，特解： $y_p = p_mk^m + p_{m-1}k^{m-1} + \dots + p_1k + p_0$
- $f(k) = \lambda^k$ 时
 - λ 不是特征根，特解： $y_p = p\lambda^k$
 - λ 是一个特征根，特解： $y_p = p_1k\lambda^k + p_0\lambda^k$
 - λ 是 r 重特征根，特解： $y_p = p_rk^r\lambda^k + p_{r-1}k^{r-1}\lambda^k + \dots + p_1k\lambda^k + p_0\lambda^k$ ♥


 **注意** 离散时间系统的强迫响应，自由响应与通解和特解的关系与连续时间系统一样。即有下面这个式子成立：

$$y(k) = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^k}_{\text{自由响应}} + \underbrace{y_p(k)}_{\text{迫响应}} = \underbrace{\sum_{j=1}^n C_{zi,j} \lambda_j^k}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{l=1}^n C_{zs,l} \lambda_l^k + y_p(k)}_{\text{零状态响应}}$$

5.5 卷积和

定义 5.5. 卷积和

$$f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) \cdot f_2(k-i)$$

 **注意** 求解卷积和我们采用图解法和解析法，其中图解法与连续时间系统卷积求法类似，对其中一个序列反褶，平移，求积..... 解析法附表中给出。

5.6 零状态响应

同连续时间系统的时域分析法类似，我们同样容易得出：

$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k)$$

对于有始信号激励的因果系统，我们有：

$$y_{zs}(k) = \sum_{i=0}^k e(i) \cdot h(k-i)$$

第 6 章 Z 域分析

内容提要

- Z 变换的引入
- 反 Z 变换
- 单边序列与双边序列
- Z 域分析

6.1 Z 变换

定义 6.1. Z 变换

我们在拉式变换的基础上考虑换元： $z = e^{sT}$ ，并且取 $T = 1$ ，对引用冲激序列的抽样信号进行拉普拉斯变换，交换求和和积分次序整理得到：

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) z^{-k}$$

我们把这个过程叫做 Z 变换，并且记做：

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

同样，工程上单边信号比较广泛，因此引入单边 z 变换：

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k}$$

 **注意** 同样，为了进一步研究，引进反变换：

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$$


根据复变理论：

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz$$

同样拿到一个级数，我们关心能不能级数求和，所以判断收敛性很重要，我们将 $F(z)$ 满足绝对可积条件：

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f(k) z^{-k}| < \infty$$

所以 z 的取值叫做收敛域。我们可以运用高数中学的比值根值审敛法求出收敛域。

 **注意** 对于单边序列，类似于泰勒级数，它的收敛域为圆环，对于双边序列，类似于洛朗级数，它的收敛域通常时圆环。

6.2 常用序列 Z 变换

定理 6.1. 常用 Z 变换

- 单位冲激序列: $\delta(k) \longleftrightarrow 1$
- 单位阶跃序列: $\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$
- 单边指数序列: $a^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}$



6.3 Z 变换的性质

定理 6.2. 常用性质

- 线性性质: $a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) \longleftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$
- 移序性质:

- 若 $f(z)$ 单边变换为 $F(z)$, 则:

$$f(k+m)\varepsilon(k) \longleftrightarrow z^m \left[F(z) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n)z^{-n} \right]$$

$$f(k-m)\varepsilon(k) \longleftrightarrow z^{-m} \left[F(z) + \sum_{n=-m}^{-1} f(n)z^{-n} \right]$$

- 若 $f(z)$ 双边变换为 $F(z)$, 则:

$$f(k+m) \longleftrightarrow z^m F(z)$$

$$f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m} F(z)$$

- 尺度变换性质: $a^k f(k) \longleftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$
- z 域微分性质: $k f(k) \longleftrightarrow -z \frac{dF(z)}{dz}$
- 卷积性质: $f_1(k) * f_2(k) \longleftrightarrow F_1(z) \cdot F_2(z)$
- 初值性质: 设 $f(k)$ 有始, 则: $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
- 终值性质: 设 $f(k)$ 有始, 则: $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$



6.4 反 Z 变换

6.4.1 幂级数展开法

可以借助高数和复变学的幂级数展开来做, 也可以用多项式除法即初中讲的长除法来做。

6.4.2 部分分式展开法

由于保证得到分解后出现 $\frac{z}{z-r}$ 的基本形式，我们把求解反 Z 变换的部分展开法¹进行程序化处理：

1. 首先对整个 $F(z) = \frac{N(z)}{D}$ 处理，使其分子阶数不大于分母阶数。
2. 计算 $\frac{F(z)}{z}$ 的展开式
3. 得到 $F(z)$ 的基本分解形式，直接写出反变换。

6.5 三大变换的关系

当然，我们在电分和复变上已经知道了拉氏变换与傅里叶变换的关系，拉式变换是为了让更多的函数存在变换而引进的，所以 $s = \sigma + j\omega$ ，傅里叶变换知识 $\sigma = 0$ 的特例。

下面来看看 Z 变换和两者之间的关系：

定义 6.2. Z 与傅氏变换

考虑 $\sigma = 0$ ，即 $z = e^{j\omega}$ ，因此：

$$F(z) = F(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-j\omega k}$$

表明离散序列 $f(k)$ 在单位圆上的 z 变换等于与此序列对应的连续时间函数 $f(t)$ 进行理想抽样后的函数的傅里叶变换。

回归到最初 z 变换的定义，我们知道 z 变换是由拉普拉斯变换经过 $z = e^{sT}$, $T = 1$ 进行数学处理得到的故两者关系是：

定义 6.3. Z 与拉氏变换

z 变换时由连续时间函数 $f(t)$ 进行理想抽样后的函数的拉普拉斯变换。对应关系是：

$$\begin{cases} |z| = e^{\sigma} \\ \theta = \omega T \end{cases}$$



注意 s 平面和 z 平面的映射关系并不是一一对应的单值映射，从数学表达式上看， s 平面上每平移一个角频率，映射为整个 z 平面一次。

类似于连续时间系统，离散时间系统也有类似系统函数，零点极点的存在，对于离散时间系统的频率响应，由于作者精力有限，不做叙述，方法类似。后面给几个例题来理解。

定理 6.3. 离散时间系统的稳定性

于 $h(k)$ 的变化规律完全取决于系统函数 $H(z)$ 极点分布，我们可以总结出：

- 若 $H(z)$ 全部极点在单位圆内 (即 $\sigma < 0$)，系统稳定。
- 若系统函数有一阶极点 (实极点或共轭极点) 在单位圆上，单位圆外无极点，

¹由于这个知识点高数复变电分经常用就不累述，简单介绍一下就行了

则该系统是临界稳定。

- 只要系统函数的极点有一个位于单位圆上，或在单位圆上有重极点，则系统一定不稳定。

6.6 离散时间系统的 z 域分析

命题 6.1. z 变换

离散系统差分方程：

$$y(k) + \frac{1}{2}y(k-1) - \frac{1}{2}y(k-2) = e(k)$$

其中： $e(k) = 2^k \varepsilon(k)$, $y(-1) = 1$, $y(-2) = 0$ ，求系统零输入，零状态，全响应。

解 两边同时取单边 z 变换：

$$Y(z) + \frac{1}{2}[z^{-1}Y(z) + y(-1)] - \frac{1}{2}[z^{-2}Y(z) + y(-2)z^{-1} + y(-2)] = E(z)$$

整理：

$$Y(z) = \frac{-\frac{2}{3}z}{z+1} + \frac{\frac{1}{6}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}} \cdot E(z) = \frac{-\frac{2}{3}z}{z+1} + \frac{\frac{1}{6}z}{z-\frac{1}{2}} + \left(\frac{\frac{2}{9}z}{z+1} - \frac{\frac{1}{9}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{8}{9}z}{z-2} \right)$$

所以：

$$\begin{cases} Y_{zi}(z) = \frac{-\frac{2}{3}z}{z+1} + \frac{\frac{1}{6}z}{z-\frac{1}{2}} \\ Y_{zs}(z) = \frac{\frac{2}{9}z}{z+1} - \frac{\frac{1}{9}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{8}{9}z}{z-2} \end{cases}$$

因此：

$$\begin{aligned} y_{zi}(k) &= \left[-\frac{2}{3}(-1)^k + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k \right] \varepsilon(k) \\ y_{zs}(k) &= \left[\frac{2}{9}(-1)^k - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{8}{9}(2)^k \right] \varepsilon(k) \\ y(k) &= \left[-\frac{4}{9}(-1)^k + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{8}{9}(2)^k \right] \varepsilon(k) \end{aligned}$$



注意 我们经常见到的都是向后差分方程，所以根据变换的移位性质：

$$y(k-i) \longleftrightarrow z^{-i}Y(z) + \sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-k}$$

这个是我们经常用的。

同理在求解系统函数时也是一样的处理方法，只不过系统函数是建立在零状态的基础之上，下面来理解一下：

命题 6.2. 系统函数法

求某系统：

$$y(k) - \frac{1}{6}y(k-1) - \frac{1}{6}y(k-2) = e(k) + 2e(k-1)$$

对应的单位样值响应。

解 在零状态的基础上 Z 变换：

$$Y(z) - \frac{1}{6}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{6}z^{-2}Y(z) = E(z) + 2z^{-1}E(z)$$

则：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{3z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-2z}{z + \frac{1}{3}}$$

因此得到：

$$h(t) = \left[3 \left(\frac{1}{2} \right)^k - 2 \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right] \varepsilon(k)$$

6.7 其他信号下的稳态响应

之前接触的大部分是激励为阶跃，冲击序列，下面看看指数信号和正弦信号下的稳态响应：

定理 6.4. 稳态响应

单边指数信号下的稳态响应：

$$y_{zs} = H(e^{jw})e^{jkw}$$

即系统对离散指数序列的稳态响应依旧是离散指数序列。

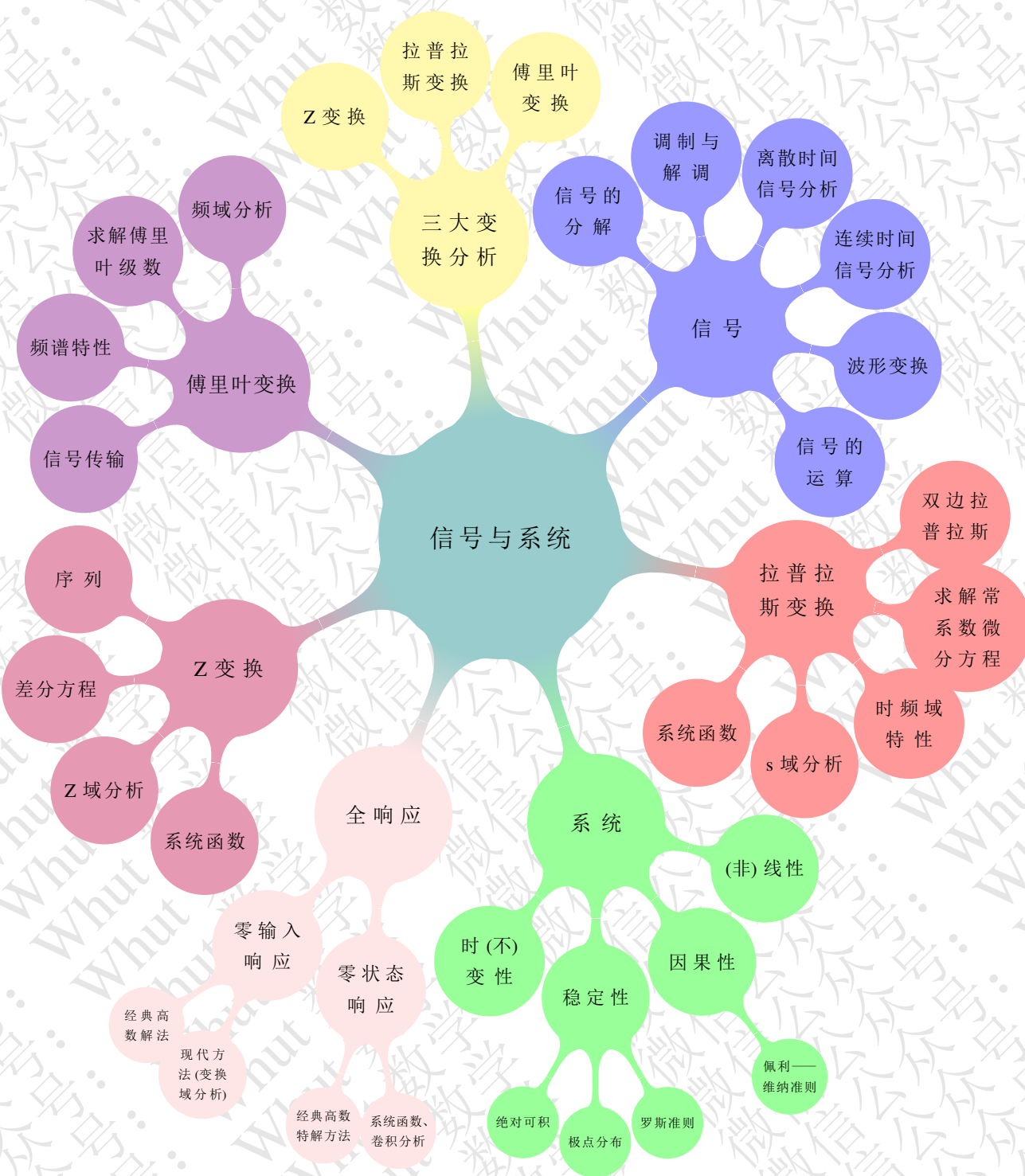
正弦信号下的稳态响应：

$$y_{zs} = |H(e^{jw})| \sin(kw + \varphi) \varepsilon(k)$$

即系统对离散正弦序列的稳态响应依旧是离散正弦序列。

第7章 结构图

7.1 结构图



7.2 关于 LaTeX

整篇文章我用的排版都是 LaTeX，优点是排版好看，缺点是门槛相对较高，效率低(花了我蛮长时间，我哭辽)，作为科学论文利器，我认为对于工科生有必要这项技能，点击[这里](#)进行下载设置环境：[LaTeX 安装](#)。网上有许多资源可以学习，入门还是蛮快的。当然我也是初学者有许多地方不太会。如果你也对 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 或者课程学习感兴趣，可以加我 QQ 一起讨论学习，由于全篇都是我预习整理的笔记，难免有不恰当或者错误之处，欢迎纠正指出；如果你喜欢这份葵花宝典，觉得有用的话可以打赏一下，你的资助是问我继续创作的动力，谢谢！



 微信支付

图 7.1: 微信



图 7.2: 支付宝

第 8 章 参考文献

- [1] 刘泉, 江雪梅.《信号与系统》. 北京: 高等教育出版社
- [2] 奥本海姆.《信号与系统》
- [3] [百度百科](#)
- [4] 东南大学《信号与系统》
- [5] 李庆扬.《数值分析》. 北京: 清华大学出版社
- [6] [LaTeXwenda](#)
- [7] [LaTeX 支持符号大全](#)
- [8] [向老师封面设计](#)
- [9] [ElegantNote](#)

附录 常用公式表



表A.1: 常见序列的 Z 变换

| 序号 | 序列 $f(k)$ | Z 变换 $F(z)$ |
|----|--------------------------------|---|
| 1 | $\delta(k)$ | 1 |
| 2 | $\varepsilon(k)$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 3 | $a^k \varepsilon(k)$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| 4 | $k \varepsilon(k)$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| 5 | $k^2 \varepsilon(k)$ | $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| 6 | $ka^k \varepsilon(k)$ | $\frac{az}{(z-a)^2}$ |
| 7 | $\sin(\beta k) \varepsilon(k)$ | $\frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}$ |
| 8 | $\cos(\beta k) \varepsilon(k)$ | $\frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}$ |

表 A.2: 常见函数的频谱函数

| 序号 | 时间函数 $f(x)$ | 频谱函数 $F(jw)$ |
|----|---|--|
| 1 | $\delta(t)$ | 1 |
| 2 | $\varepsilon(t)$ | $\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$ |
| 3 | $\text{sgn}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(-t)$ | $\frac{2}{jw}$ |
| 4 | 1 | $2\pi\delta(w)$ |
| 5 | $e^{\alpha t}\varepsilon(t)$ | $\frac{1}{\alpha + jw}$ |
| 6 | $e^{\alpha t }\varepsilon(t)$ | $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + w^2}$ |
| 7 | $te^{\alpha t}\varepsilon(t)$ | $\frac{1}{(\alpha + jw)^2}$ |
| 8 | $\cos(w_0 t)$ | $\pi[\delta(w + w_0) + \delta(w - w_0)]$ |
| 9 | $\sin(w_0 t)$ | $j\pi[\delta(w + w_0) - \delta(w - w_0)]$ |
| 10 | $e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) \varepsilon(t)$ | $\frac{w_0}{(\alpha + jw)^2 + w_0^2}$ |
| 11 | $\cos(w_0 t)\varepsilon(t)$ | $\frac{\pi}{2}[\delta(w + w_0) + \delta(w - w_0)] + \frac{jw}{w_0^2 - w^2}$ |
| 12 | $\sin(w_0 t)\varepsilon(t)$ | $\frac{\pi}{2j}[\delta(w - w_0) - \delta(w + w_0)] + \frac{w_0}{w_0^2 - w^2}$ |
| 13 | $g_\tau(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ | $\tau \text{Sa}\left(\frac{w\tau}{2}\right)$ |
| 14 | $\text{Sa}\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$ | $G_\Omega(w) = \frac{2\pi}{\Omega} \left[\varepsilon\left(w + \frac{\Omega}{2}\right) - \varepsilon\left(w - \frac{\Omega}{2}\right) \right]$ |
| 15 | $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ | $\Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(w - n\Omega), \Omega = \frac{2\pi}{T}$ |

附录 MATLAB 实验

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%矩形脉冲频谱
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%三角级数谱%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
echo off    %关闭所有命令文件的显示方式
a=-5;
b=5;
n=50;
tol=1e-6; %设置积分精度
T0=b-a;    %设置周期
xsqual=@(x)1.*(x>-1/2&x<1/2);%%定义脉冲波形
out(1)=1/T0.*quad(xsqual,a,b,tol);
xfun=@(x,k,T)xsqual(x).*exp(-1i*2*pi*x*k/T);
for i=1:n
out(i+1)=1/T0.*quad(xfun,a,b,tol,[],i,T0);
end
out1=out(n+1:-1:2);
out1=[conj(out1),out1];
absout=abs(out1);
n1=[-n:n];
stem(n1(1:2*n+1),absout(1:2*n+1));
title('rectangular');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%复指数谱%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
echo off    %关闭所有命令文件的显示方式
a=-5;
b=5;
n=50;
tol=1e-6; %设置积分精度
T0=b-a;    %设置周期
xsqual=@(x)1.*(x>-1/2&x<1/2);%%定义脉冲波形
out(1)=1/T0.*quad(xsqual,a,b,tol);
xfun=@(x,k,T)xsqual(x).*exp(-1i*2*pi*x*k/T);
for i=1:n
out(i+1)=1/T0.*quad(xfun,a,b,tol,[],i,T0);
end
out1=out(n+1:-1:2);
out1=[conj(out1),out1];
absout=abs(out1);
n1=[-n:n];
stem(n1(n+1:2*n+1),2*absout(n+1:2*n+1));
title('rectangular');
```

```

%%%%%%%%lsim(b,a,x,t)连续时间系统仿真
a=[1 2 1];%%%微分算子系数
b=[1 2];%%%激励对应微分算子
p=0.01;%%%%%%%%%设置时间间隔
t=0:p:5;
x=exp(-2*t);%%%%%%%%激励形式
lsim(b,a,x,t)
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%非周期信号傅里叶变换
syms t
x=exp(-2*abs(t));
F=fourier(x);
f=ifourier(F);
subplot(121);
fplot(F);
subplot(122);
fplot(f);
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%modulate(x,Fc,Fs,'method')信号调制
Fs=1000;
Fc=400;
N=1000;
n=0:N-2;
t=n/Fs;
x=sin(2*pi*50*t);
subplot(221)
plot(t,x);
xlabel('t(s)');
ylabel('x');
title('被调信号');
axis([0 0.1 -1 1])
Nfft=1024;
window=hamming(512);
noverlap=256;
dflag='none';
[Pxx,f]=pwelch(x>window,noverlap,Nfft,Fs);
subplot(222);
plot(f,Pxx);
xlabel('f(Hz)');
ylabel('功率谱(X)');
title('被调信号的功率谱');
grid;

```



```
y=modulate(x,Fc,Fs,'am');
```

```
subplot(223);  
plot(t,y);  
xlabel('t(s)');  
ylabel('y');  
axis([0 0.1 -1 1]);  
title('已调信号')  
[Pxx,f]=pwelch(y>window,noverlap,1024,Fs);  
subplot(224);  
plot(f,Pxx)  
xlabel('f(Hz)');  
ylabel('功率谱(Y)');  
title('已调信号的功率谱');  
grid
```