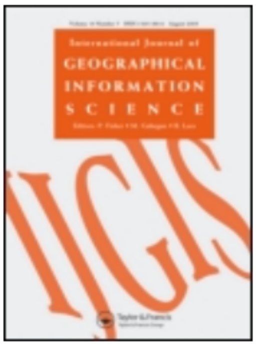

Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

International Journal of Geographical Information System

ISSN: 0269-3798 (Print) (Online) Journal homepage: http://www.tandfonline.com/loi/tgis19

点集拓扑空间关系

马克斯·埃根霍费尔和罗伯特·弗兰佐萨

引用这篇文章:马克思·埃根霍夫和罗伯特·弗兰佐萨(1991)点集拓扑

空间关系，《国际地理信息系统杂志》，5 : 2，161 - 174，DOI :

10.80 / 02 . 19980.133836332117

链接到这篇文章: https://doi.org/10.1080/02693799108927841

在线出版: 2007 年 4 月 5 日。

智力。《地理信息系统》，1991 年，第 5 卷，第 2 期，161 - 174 页

点集拓扑空间关系

马克斯·埃根霍夫

国家地理信息和分析中心

测量工程部，博德曼厅 107 号，

美国缅因州奥诺市缅因大学 04469

罗伯特·弗兰佐萨

数学系，内维尔厅 417 号，

美国缅因州奥诺市缅因大学 04469

摘要。地理信息系统(GIS)的实际需求导致了对描述空间关系的正式和合理方法的研究。在介绍拓扑学的基本思想和概念之后，发展了一种新的集合间拓扑空间关系理论，在这种理论中，集合间的拓扑空间关系定义为两个集合的边界和内部的交点。通过将简单和非空作为交点的值，总共描述了 16 种拓扑空间关系，每种拓扑空间关系都可以在 R 中实现。如果这些集合被限制在空间区域，这个集合将被减少到 9 种关系，空间区域是一个连接拓扑空间的相当广泛的子集类别，在 GIS 中有应用。结果表明，这些关系对应于一些标准集合理论和集合之间的拓扑空间关系，如相等、不相交和内部包含。。

1 .介绍

这里报道的工作是出于对地理信息系统领域空间关系的正式理解的实际需要。为了显示、处理或分析空间信息，用户通过询问从 GIS 中选择数据。几乎任何 GIS 查询都是基于空间概念。许多疑问

明确结合空间关系来描述空间对象的约束，以

被分析或显示。例如，地理信息系统用户可能会询问以下查询，以获取有关有毒废物堆放场对中的学童的潜在风险的信息

一个特定的区域:“回收 10 英里范围内的所有有毒废物堆放场

位于彭诺斯科特县及其邻近的县。信息系统所知的小学数量受到约束条件的限制。特别令人感兴趣的是空间限制

由空间关系表示，例如 10 英里以内、10 英里以内和相邻。

缺乏全面的空间关系理论一直是任何地理信息系统实施的主要障碍。问题不仅在于为这些空间关系选择合适的术语，还在于确定它们的语义。空间关系理论的发展有望提供

以下问题的答案(Aber 1987) :

描述地理对象之间关系所需的基本几何属性是什么?

如何根据基本几何性质正式定义这些关系?

什么是最小的空间关系集?

0269 - 3798 / 91 S300 1991 泰勒弗朗西斯有限公司

M :埃肯霍夫和弗兰佐萨研究中心

除了纯粹的数学方面之外，如果要发展适用于现实世界问题的空间关系理论(NCGIA 1989)，还必须包括认知、语言和心理方面的考虑(Talmy 1983 年，Herskovits 1986 年)。在本文的范围内，将只考虑从点集拓扑中部分提供的形式数学概念。

这种空间关系理论的应用超出了地理信息系统的范围。任何处理空间数据的科学和工程分支都将受益于对空间关系的正式理解。特别是，它对空间逻辑和空间推理的贡献也将有助于测量工程、计算机辅助设计/计算机辅助制造(CAD / CAM)、机器人和超大规模集成(VLSN 设计)等领域。

空间关系的多样性可分为三类: (I)在参考对象的拓扑变换下不变的拓扑关系(Egenhofer 1989，Egenhofer 和 Herring 1990)；(2)距离和方向方面的度量关系(Pequet 和 Ci -香 1987)；和(3)关于空间物体的部分和全部顺序的关系(Kanz 1990)，如介词所描述的，如前面、后面、上面和下面(Freeman 1975，Chang 等人)。1989 年，Hernandez 1991 年)。在本文的范围内，只讨论拓扑空间关系。

迄今为止，关系的形式仅限于一维空间中的简单数据类型，例如整数、实数或它们的组合，例如间隔(Allen 1983)。空间数据，如地理对象或 CAD / CAM 模型，以更高的维度扩展。人们一直认为这样一个空间中的一组原始关系更丰富，但迄今为止还没有尝试系统地探索这一假设。

这篇论文的目标是双重的。首先，表明用点集的拓扑不变性质描述拓扑空间关系是相当简单的。结果，两个点集之间的拓扑空间关系可以用很少的计算工作量来确定。第二，表明存在一个任何拓扑空间关系都属于其中的框架。这并没有说明由这种形式主义确定的一组关系是完整的，即人类可以区分其他关系，但是形式主义提供了完整的覆盖。即任何这样的附加关系将仅仅是所述关系之一的专门化。- -

作为底层数据模型，选择了拓扑空间的子集。点集方法是表示拓扑空间区域的最通用模型。使用不同模型定义拓扑空间关系的其他方法，如区间(Pull 和 Egenhofer，1988 年)或简单复合物(Egenhofer，1989 年)，通过这种点集方法得到推广。

本文的组织如下。下一节回顾以前定义拓扑空间关系的方法。第 3 节总结了点集拓扑的相关概念，并介绍了本文剩余部分中使用的概念。第 4 节介绍了拓扑空间关系的定义，并展示了它们在 RZ 中的实现。第 5 节研究了两个空间区域之间的关系，拓扑空间的子集，特别适用于地理数据处理。在第六节中，对内部关系和罕见关系进行了比较。

2 .以前的工作

空间关系的各种术语集可以在计算机科学和地理文献中找到(Freeman 1975 年，Claire 和 Guptill 1982 年，Chang 等人)。

1989 年，Molenaar 1989 年)。特别是空间查询语言的设计(Frank 1982，Ingram 和 Phillips 1987，Smith 等人。1987 年，Herring 等人。1988 年，Rosopoulos 等人。1988 年)是自然语言中带有口头解释的空间关系的非正式符号的储备库。这些术语的一个主要缺点是缺乏正式的基础，因为它们的定义常常基于其他没有准确定义，但被认为是普遍理解的表达。

大多数空间关系的正式定义将它们描述为二进制点集运算的结果。随后对这些方法的审查将显示它们的优势和不足。显而易见的是，以前的研究都没有系统地进行到足以证明所定义的关系能够完全覆盖两个

空间对象之间的拓扑空间关系。一些定义只考虑“空间对象”的有限子集表示，而另一些定义则应用不足的概念来定义拓扑空间关系的整个范围。

这里不考虑使用图元距离和方向与逻辑连接器 AND、OR 和 NOT (Pequet 1986)相结合的形式主义。假设每个空间都有一个度量，这显然限制太多，因此这种形式不能应用于纯粹的拓扑环境。

集合运算术语中的关系定义使用纯集合论来描述拓扑关系。例如，以下基于点集的定义是根据点集的相等、不相等、内部、外部和相交给出的

运算=。，！；；；和 RV [·吉丁 1988) :

x = y : =点(x) =点(y)×y : =点(x)点(y)

y 内的 x : =点(x)! ；；；点(y)

y 之外的 x : =点(x) f " \点(y) = 0

x 与 y 相交: =点(x) f " \点(y) 0

这些定义的缺点是这组关系既不正交也不完整。例如，相等和内部都包含在相交的定义中。相比之下，点集的模型不允许基于点集的特定部分(如边界和内部)的区别来定义这些关系。例如，这种关系在交叉方面不同于存在公共边界点的关系，但是没有遇到公共内部点。

点集方法已经通过考虑边界和内部而得到扩展，以便能够区分重叠和相邻(Pull 1988) :

x 重叠 y : =边界(x) f " \边界(y) 0 和

内部(x) f " \内部(y) 0

x 邻居 y : =边界(x) f " \边界(y) 0 和

内部(x) f " \内部(y) = 0

在一种更系统的方法中，边界和内部已经被确定为多边形交叉点的关键描述(Wagner 1988)。通过比较边界和内部是否相交，已经确定了四种关系: (I)

边界相交的邻域，但内部不相交；(2)边界和内部都不相交的分离；(3)边界不相交但内部相交的严格包容；以及(4)边界和内部相交的交点。这种方法使用单一的、连贯的方法来描述拓扑空间关系，但是并不是在所有的后果中进行。例如，不能区分交集和等式，因为对于

BotII 关系边界和内部相交。

3 .点集拓扑

这种拓扑空间关系模型基于内部和边界的点集拓扑概念。在本节中，给出了点集拓扑的适当定义和结果。一些结果是在没有证据的情况下陈述的。

这些证据都是定义的直接结果，可以找到

在大多数基本拓扑教科书中，例如 Munkers (1966)和西班牙人(1966)。

让我们来设定。X 上的拓扑是满足

三个条件: (1)空集和 X 在 d 中；(2) d 是在任意结合下关闭的；和(3) d 在有限交点下闭合。拓扑空间是拓扑 d 位于 X 上的集合 X。拓扑中位于 X 上的集合称为开集，它们在 X 上的补集称为闭集。封闭集的集合: (1)包含空集和 X；(2)在任意交叉点下封闭；(3)在有限联盟下封闭。

通过集合 X 上拓扑中的开集，建立了一个集理论上的亲密度概念。如果 U 是一个开放集，XeU，那么据说 U 是 x 的邻域，这个集理论上的亲密度概念概括了度量上的亲密度概念。集合 X 上的度量 d 在 X 上归纳出一个拓扑，称为由 d 定义的度量拓扑。这

拓扑问题是，如果对于每个 xeU，e > 0，则 U . X 是一个开放集，这样

半径为 x 的 d 形球包含在美国。d 形球是一组点，其距离

度量 d 中的 x 小于 s，即{ yeXld (x，y) < e }。

在本文的剩余部分，假设 X 是一个具有拓扑 d 的集合。iFS 是 X 的子集，然后 S 继承了 d 的拓扑。这种拓扑称为子空间拓扑，并且是

定义为，当且仅当某个集合 Ved 的 U = Sn V 时，子空间拓扑中的 U = S 是开放的。在这种情况下，S 被称为 X 的子空间

3.1。内部

给 Yc。X，Y 的内部，用 r 表示，定义为所有开放的并集

Y 中包含的集合，即 Ys 的内部 Y 中包含的最大开放集合位于 Yf 的内部，并且仅当 Y 中包含 Y 的邻域时，即

如果，也只有当，有一个开放的集合 U，使得集合的内部可以

空的，例如空的装置内部是空的。X 的内部是 X 本身。如果你是

打开，然后 U =打开，如果打开，然后再打开

3.2。关闭

Y 的闭包由 Y 表示，定义为

包含 Y，即 Ys 的闭包，是包含 Y 的最小闭包集

当且仅当 Y 的每个邻域与 Y 相交时，即 yeYif 和

仅当每个包含 Y 的开放集合 U 的 Un Y 0 时。空集合是唯一具有的集合

空封闭。X 的闭合是 X 自身的闭合，然后 C = C1fz，C = C1fz，C = Y

3.3。分界线

Y 的边界，用 Ay 表示，是 Yan 的闭包和 Y 的补集的闭包的交集，即 Ay = YI″) XY。边界是封闭集。由此可见，y 在 Yif 的边界内，只有 y 的每个邻域都相交

两者及其补码，即 Yeyif，且仅当 UI) Y # 0 和 UI”) (X Y) # 0 用于

每一个包含 y 的开放集 U 边界可以是空的，例如两者的边界。X 和空集都是空的。

3.4。内部、封闭和边界之间的关系

内部、闭包和边界的概念是即将到来的集合间拓扑空间关系讨论的基础。内部、封闭和边界之间的关系由以下命题描述:

提案 3.1。y“l”) aY = 0。

证据:如果 X 是 Y，那么 X 的每一个邻域 U 都与 X - YSO 相交，从而不能包含在 Y 中。因为在 YT 中不包含 X 的邻域 U，所以 X : Y”和，

因此，Ayi”) Y”= 0。0

提案 3.2。是啊

证据: Y“C : Yc : Yc : Yan，顾名思义，AyC : Y。因为 Y”和 Ay 都是 Yit 的子集，接下来是(Y“UAY”) C : Y。为了表明 Yc : (Y“UAY”)，让 xef 假设 x : Y。它

展示了 xea Y，自从 xe Y 以来，它只需要展示 xeX Y . x : Y”意味着什么

x 的每个邻域不包含在 1 中:因此，x 的每个邻域

X 与 X - Y 相交，意味着 xeX - Y。所以 xeay。因此，如果 xeY 和 x : Y”，那么 xeay，接下来是 Yc : (Y“uaY”)。因此 Y = (Y”UAY)。0

3.5。分离

分离和连通性的概念对于建立集合之间即将到来的拓扑空间关系至关重要。让 Yc : x .一个与一个分开

满足以下三个条件的 X 子集对 A、B : (1) A # 0 和 B # 0； (2)奥布= Y； 和(3) AI”) B = 0，AI”) B = 0。如果存在 Y 的分离，那么是 Ys

据说是断开的，否则 Yis 说是接通的。如果我是两个非

空的不相交的开放的 X 子集，那么接下来 Y 被断开。如果 C 被连接，C : D : C，那么 D 被连接。特别是，iFC 被连接，然后 Cis 被连接；然而，交流电和一氧化碳不需要连接。

命题 3.3 .如果 A，B 形成 Yad 的分离，如果 Z 是 Y 的连通子集，那么 Z c : A 或 Z c : B

证明:根据假设，Z 是 A 和 B 的并集的子集，即 Z c : AuB。是啊

示出了 Z 和 A 或 B 之一之间的交点是空的，即 Z I”) B = 0 或 ZI”) A = 0。假设不是，即假设两个交叉点都不是空的。让

C = ZI”) A 和 D = ZI”) B)。那么 C 和 D 都是非空的，CUD = Z。如 CC : A，DC : B 和 AI”) B = 0 (因为 A，B 是 Y 的分离)，因此

CI”) D = 0。类似地，cl”) 15 = 0；因此，C 和 D 形成 Z 的分离，与 Z 是相连的假设相矛盾。因此，要么 ZI”) B = 0，要么 ZI”) A = 0，

这意味着，不管是丙:甲还是丙:乙: 0

埃亨霍夫和弗兰佐萨博士

166

如果 X Z 断开连接，则 X 的子集 Z 被称为分离 X。下面的分离结果给出了 X 子集的边界分离 X 的简单条件

提案 3.4。假设 Yc : X。如果然后你和 X 形成一个

X - 0Y 的分离，因此 OY 分离 X

证据:假设，yo 和 X Yare 不是空的。显然，它们是不相交的

开放集。提案 3.2 暗示 X - Oy =青奥村(X - Y)。由此可见，你和

X 形成了 X - Oy 的分离。

3.6。拓扑等价

拓扑等价的研究是拓扑理论的核心。如果两个拓扑空间之间有一个产生双射的双射函数，那么它们在拓扑上是等价的(同胚的或相同拓扑类型的)

各个拓扑中的开放集之间的对应关系。这种功能，

这是一个连续的逆过程，被称为同胚。例子

同胚是欧几里得关于平移、旋转、缩放和偏斜的概念。在同胚下保留的拓扑空间的性质称为空间的拓扑不变量。例如，连通性的性质是拓扑不变量。

4 .描述拓扑空间关系的框架这个模型描述了两个子集 A 和 A 之间的拓扑空间关系。拓扑空间 X 的 B 是基于对两组 A 和 B 的边界和内部的四个交点的考虑，即 IjanOb、AONB”、IjanBo 和

敖包。。

定义 4.1。假设 A，B 是拓扑空间 X 的一对子集。A 和 B 之间的拓扑空间关系由拓扑不变量的四元组来描述，这些拓扑不变量分别与四个集合 OainIJb、AONbO、OanbO 和 AONIJb 中的每一个相关联。

。在基础空间 X 的同胚下，两个集合之间的拓扑空间关系得以保持。具体来说，如果: X 是同胚，那么 A、BcX、OaOb、AoB”、IjanBo”和 AoIJB 分别同胚映射到 IjF (A) NijF (B)、F (Atnf) (Bt，IjF (A) nf (Bt)和 F (A) OniJF (B)。由于拓扑空间关系是根据这些交点的拓扑不变量定义的，因此 X 中 A 和 B 之间的拓扑空间关系与 Y 中 f (A)和 f (B)之间的拓扑空间关系是相同的

拓扑空间关系在这里用四元组 L、- > _)表示。这些条目按顺序对应于与四个集合交点相关联的拓扑不变量的值。第一个交叉点称为边界-边界交叉点，第二个交叉点称为内部-内部交叉点，第三个交叉点称为边界-内部交叉点，第四个交叉点称为内部-边界交叉点。

4.1。空/非空集合交点的拓扑空间关系

作为四元组中的条目，考虑在同胚下不变的集合的属性。例如，属性为空和非空

是集合论的，因此在拓扑上不变。本文没有考虑的其他不变量是集合的维数和连通分量的数量(Munkers 1966)。空/非空是最简单和最通用的不变量，因此任何其他不变量都可以被认为是更具限制性的分类器。

在本文的剩余部分，注意力被限制在二元拓扑空间关系上，这种关系是通过给四元组中的条目分配适当的空值(0)和非空值(10)来定义的。表 1 总结了这些组合的 16 种可能性。

集合为空或非空；因此，很明显，这 16 个拓扑空间关系提供了完全的覆盖，也就是说，给定 X 中的任意一对集合 A 和 B，总是存在与 A 和 B 相关联的拓扑空间关系。此外，一个集合不能同时为空和非空，因此，这 16 个拓扑空间关系是互斥的，即，对于 X 中的任意一对集合 A 和 B，正好 16 个拓扑空间关系中的一个成立。

一般来说，16 种空间关系中的每一种都可以发生在两组之间。取决于对集合和底层拓扑空间的各种限制，现有拓扑空间关系的实际集合可以是表 1 中 16 的子集。对于平面 R 中的一般点集，可以实现所有 16 种拓扑空间关系(图 1)。

4.2。拓扑空间对关系的影响

设置，即 A 和 B 所在的拓扑空间 X，在 A 和 B 之间的空间关系中起着重要作用。例如，在图 2 (左面板)中，这两组

A 和 B 具有关系(0.0，0.0，0)作为线的子集。同样的

配置显示了两个集合嵌入平面时的不同关系(图 2，右侧面板)。假设飞机，A 和裸机的边界

分别等于 A 和 B，内部为空，即 OA = A，AO = 0，OB = B，BO = 0。由此可见，在平面上，两组 A 和 B 之间的空间关系

是(即 0，0，0)

表 1。16 种生物关系规范基于边界和内部的空交点和非空交点的标准。

咏叹调

RO 0 0 0 0

r，，0 0 0 0

r，0，0 0 0

r，，0，0 0 0

r0 0，0 0

r，，0 0，0 0

r0，0 ' 0 0

(7，0，0.0 0

(8 0 0 0，0

RG (..0，0 0 ' 0

(. 0 r ' 0 (13，0 0 . 0，0

r，。0，0，0 ' 0

("，0，0 . 0，0

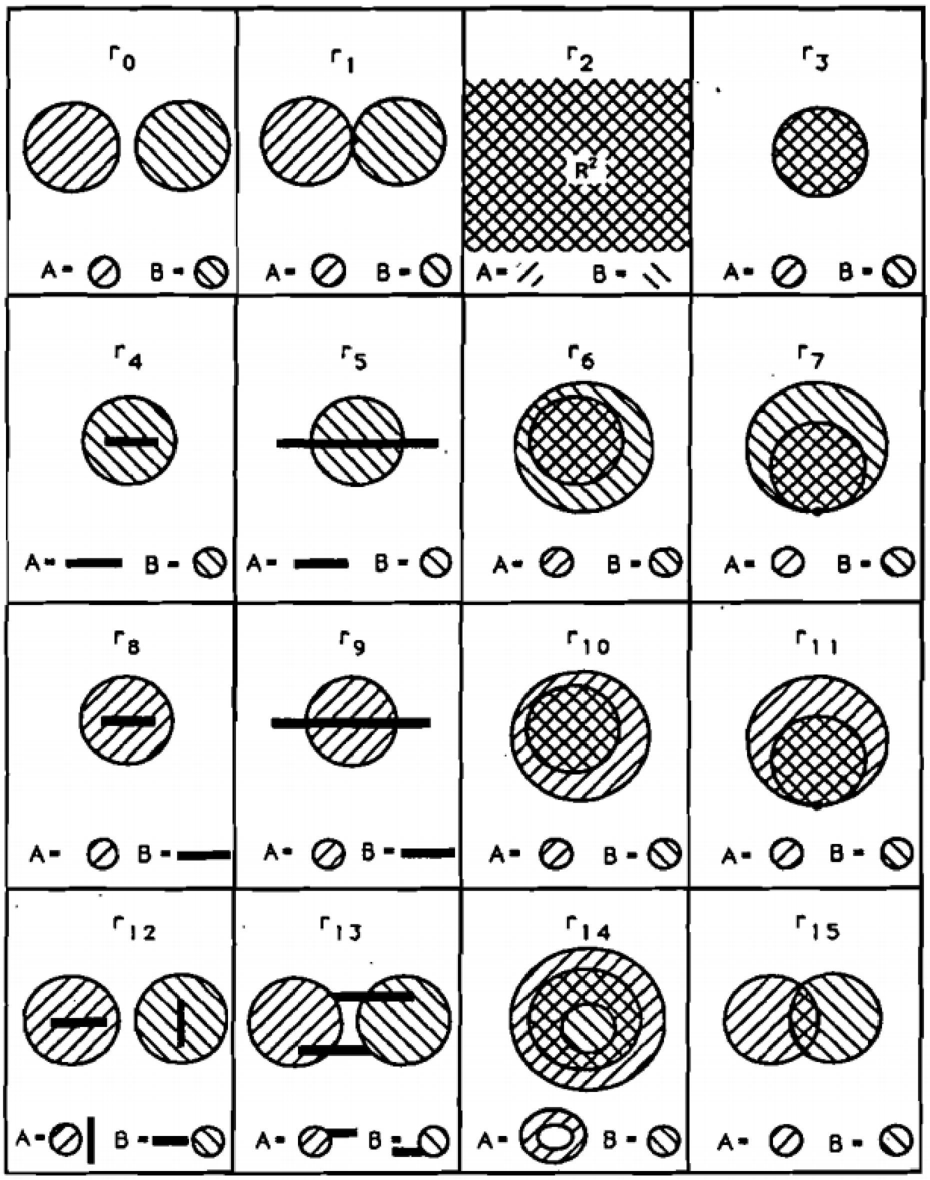

Figure 1. Examples of the 16 binary topological spatial relations based on the comparison of empty and non-empty set-intersections between boundaries and interiors.

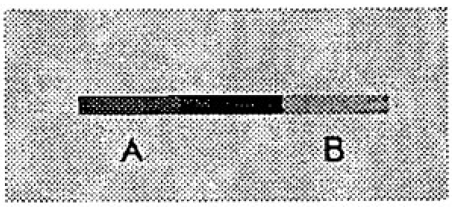

图 2。两组 A 和 B 的配置相同，拓扑空间为(左侧面板)

关系式(0 . 10 . 10 . 10)，当嵌入一条线时，和(右面板) (I0。0。0。0)在一个

飞机。

拓扑关系

5 .空间区域之间的拓扑关系

本文的目的是对平面中多边形区域之间的拓扑空间关系进行建模；因此，拓扑空间 X 和 X 中考虑的集合受到限制。这些限制不太具体，关于拓扑空间 X 的唯一假设是它是连通的。这保证了每组兴趣的边界不是空的。

感兴趣的集合是空间区域，定义如下:

定义 5.1。让 X 成为一个连通的拓扑空间。X 中的空间区域是满足(1) AD 连接和(2) A = A D 的 X 的非空的适当子集 A

根据定义，每个空间区域的内部是非空的。此外，空间区域被封闭和连接，因为它是连接集合的封闭。图 3 描绘了平面中的集合，由于未能满足定义 5.1 中的条件(1)或条件(2)，这些集合不是空间区域。A 和 B 不是空间区域，因为 AD 和 B D 分别不相连。C 和 D 不是空间区域，因为它们不能满足条件(2)，即需要后一组来实现平面中的拓扑空间关系 R2’r5’RS - r9’r’2 和 r13。

以下命题暗示每个空间区域的边界是非空的。

提案 5.2。如果 A 是 X 中的空间区域，那么 OA 0。

证据:公元 0 年。A = - 4，因为 A 是封闭的，根据空间区域的定义，A 是。

从命题 3.4 可以看出，AD 和 X - A 形成了 X - AA 的分离。如果

aA = 0，则这两个集合形成 X 的分离，这是不可能的，因为 X 是

连接；因此，oA 0。0

5.1。区域关系的存在

点集之间空间关系的框架延续到空间区域，然而，任意点集之间的 16 种关系并不都存在于两个空间区域之间。从图 1 中的例子可以得出结论，至少关系式 r0，r″R3，R6′r″r，o，rl1，r，..R’5 存在于两个空间区域之间。以下命题表明，这九种拓扑空间关系是空间区域之间唯一可能出现的关系。

提案 5.3。对于两个空间区域，空间关系 R2’r..r5、s、r9’R12 和 r’3 不能出现。

证明:这从证明如果边界-内部或内部-边界交叉点是非空的开始，那么相同两个区域之间的内部-内部交叉点也是非空的。这意味着六个拓扑空间关系 r..r5、RS、r9’R12 和 rl3’都具有空的内部-内部和非空的边界-内部或内部-边界交叉点，不能出现。

(一)

(二)

(三)

(0)

图 3。在平面中设置点空间区域。

让 A 和 B 成为空间区域，对于这些区域，可以为 1 ' 0。显示了 AONS“10”。

使用命题 3.2，Aouija = A，Aouij (AO) = AO。A = A = AO，所以 AOUIja = AOUIJ (AO)。此外，通过命题 3.1，AoIj { AO) = 0，AoIja = 0。因此，Ij { AO) = Ija。现在让 Xeijans”打开，然后

包含 x，由此得出 aNbO 10。因此，如果边界-内部交点是

非空，则内部-内部交叉点也是非空的。同样，如果内部边界交点不是空的。那么内部-内部交叉点也是非空的。

接下来，证明了如果边界-边界交点是空的，并且内部-内部交点是非空的，那么边界-内部或内部-边界交点都是非空的。这意味着，具有非空的内部-内部交叉点以及边界-边界、边界-内部和内部-边界的空交叉点的空间关系“2”不会出现。这将完成命题的证明。

让 A 和 B 成为空间区域，使得 iJanijb = 0 和 AONbol ' 0。它被展示了

如果 IjanBo = 0，则 AonIJB 1 ' 0。假设 Ijanbo = 0。因为 B = Bouijb。它

接下来 Ijanb = 0，因此 Bex - Ija。命题 3.4 暗示 AO 和

X - A 形成了 X - Ija 的分离，由于 B 是相连的，命题 3.3 暗示了 BeoO 或 Bex - A。由于假设 AOnB 1 ' 0，因此

比厄，因此，我比厄。显然，IjBNAOL ' 0 和结果如下。0

5.2。相关、相关的语义

在图 1 中，描述了空间区域之间拓扑空间关系“0 >‘1’‘3’‘6’‘0’‘11’’14 和”的示例。这九种关系中的每一种都在下面的定义中被考虑，它们的语义使用与 Egenhofer (1989)和 Egenhofer 和 Herring (1990)中相同的符号进行研究。

定义 5.4。表 2 给出了两个区域之间的九种拓扑空间关系的描述性术语。

如果 A 和 B 之间的拓扑空间关系是“0”，那么，在集合论中

意义上，A 和 B 是不相交的，因此，拓扑空间关系不相交与集合论中的不相交概念一致。以下命题和推论证明了表 2 中定义的拓扑空间关系的其他描述性术语的合理性。

表 2。坦尼诺学用于两个空间区域之间的九种关系。从洛杉矶到洛杉矶

0 (0)。0。0。0) A 和 B 不相交

r (10，0，0，0) A 和 B 触摸

3 (10)。10。0。0) A 等于 B

6 (0)。10，' 0，0) A 在 B 的内部，或者 B 包含 A

r (10)。0。10。0L A 由 B 覆盖，或者 B 覆盖 A

“0 (0，10。0，10) A 包含 B 或者 B 在 A 的内部

”(10，10。0。10)甲盖乙或乙由甲盖

“4 (0，' 0，10) A 和 B 与不相交的边界重叠” ..(10)。10。0，- ' 0) A 和 B 与相交边界重叠

提案 5.5。让 A 和 B 是 X 中的空间区域。如果 AONB；LO0 和 AOnAb = 0，然后是 AOnAb 和 ACB。

证明: AO 已连接。命题 3.4 暗示 B”和 X - B 形成 a

由于 AOAb = 0，因此命题 3.1 得出 AO C B“u (XB)”。命题 3.3 暗示 AOCb”或 AOC (X - B)。但是 AONB”；IO0；因此，

AOCBO。由于 AOCb”，因此 AOCb“根据定义 5.1，意味着

ACR 0

从命题 5.5 可以看出，如果甲被乙覆盖，那么甲丙乙；因此，所覆盖的空间关系与集合论中的作为的子集的概念是一致的。

命题 5.5 的以下推论表明，空间关系相等对应于集合论中的相等概念。

推论 5.6。让 A 和 B 成为空间区域。如果 A 和 B 之间的空间关系是 rJ，那么 A = B

证据:一个 Nb；L0 和 AoAb = 0；因此，命题 5.5 暗示了应收帐款

此外，AANbO = 0。再次通过提案 5.5，BCA。因此，A = B0

命题 5.5 的以下推论表明，如果 A 在 B 之内，那么 A 就在 BO 之内；因此，内部的空间关系与内部包含的拓扑概念相一致。相反，contains 对应于内部的 contains。

推论 5.7。让 A 和 B 成为空间区域。如果 A 和 B 之间的空间关系是 R6’，那么 ACbO。

证据:命题 5.5 意味着 AO _ c _ BO 和 A _ C _ R。通过命题 3.2，A = AOUAA 和 B = BoaR _ SO _ AACr，因为 AAaB = 0，所以 AAcO。与 AoCB 一起” 这意味着 AcbO。0

6 .n 维空间中的关系

自然会问“对拓扑空间 X 和 X 中考虑的集合的进一步限制会进一步减少可能发生的拓扑空间关系吗？”本节将通过考虑 X 是欧氏空间的情况来探讨这个问题。

R”表示具有通常欧几里德度量的 n 维欧几里德空间。如果集合中的点对之间的距离存在上限，则 R”的子集是有界的；否则，据说它是无限的。

R”中的单位盘是 R”中的一组点，其距原点的距离小于或等于 1。R”中的单位球是 R”中的一组点，其距原点的距离等于 1。对于 n；1 R”中的单元磁盘已连接。对于 n；2 R”中的单位球是相连的。让 X 成为一个拓扑空间。X 中的 n -盘是与 R”中的单位盘同胚的 X 的子空间。X 中的 n 球是 X 的子空间，与 R " + 1 中的单位球同胚。R”中的 n 个盘是有界的，并且是空间区域；后者是 Brouwer 定理关于域不变性的相对直接的结果(西班牙人 1966 年)。由于 R”中的 n 个磁盘是空间区域，命题 5.3 限制了它们之间可能出现的空间关系的数量。

在命题 6.1 中，证明了 IfA 和 B 是 RNWith n 中的 n 个盘；？ * 2，则 “空间关系与不相交边界重叠的情况不会发生。这个命题的证明基于以下两个事实:

事实 1。让 A 成为一个 n 盘，在 R”中有 n；？ * 2。那么 OA 是 R”中的(n - I) -球体，因此是连通的。

这个事实也是关于域不变性的 Brouwer 定理的结果(西班牙人 1966 年)。

事实 2。让 A 成为一个 n 盘，在 R”中有 n；？ * 2。那么 Rn - Ao 是连通的和无界的。

第二个事实是与 Jordan - Brouwer 分离定理相关的(非)分离定理(西班牙人 1966 年)。

提案 6.1。与不相交边界重叠的拓扑空间关系 R14 不会出现在 R”中的 n 个盘与 n 之间；？ * 2。

证据:让 A 盘和 B 盘放在 R”中，n；？ * 2.1t 表示 IFAF“LOB = 0，那么

A 和 B 不重叠，因此，空间关系不会与不相交的边界重叠。

假设 OAF“LOB = 0，A 和 B 重叠。将会产生矛盾。乙是甲

空间区域；因此，命题 3.4 暗示 B”和 R”B 形成 R”- OB 的分离。当 OAF“LOB = 0”时，接下来是 OACr”- OB。事实 1 表明，OA 是相关的，因此，命题 3.3 意味着 OA Cb”或 OA c (R) - B。从甲和乙开始

重叠后，接下来是 OAF“LbOi”0，因此是 Oa C BO。

OAcO 意味着 OAf“l (R) - BO) = 0。事实上，Rn _ Bo 是相连的。使用命题 3.3 和 3.4，并如上所述，由此得出(R " - B ") CaO 或(Rn - B ") c (Rn - A)。第一种情况产生了矛盾，因为事实上，Rn _ Bo 是无界的，但是 AO 不是无界的。第二种情况暗示了一个碳化硼，因此，

F " LOB = 0，这与 A 和 B 重叠的假设相矛盾。因此，在

在任一情况下，都获得了矛盾，由此得出空间关系 R14 不能

发生在 R”中的 n 个磁盘之间，n；？ * 2。0

“注意，对于 n；？ * 2 拓扑空间关系 r15’与相交边界重叠，确实发生在两个 n 盘之间(图 1)。

相反的情况发生在 RI 中，其中 R14 可以发生在 L 盘之间，而 R15 与相交边界重叠，则不能。很明显，R14 可能出现在 R1 中的两个 I 盘之间(图 2)。命题 6.2 表明 Ri 5 不能出现。它的证明需要一个很容易得到的事实，即 RI 中的一个空间区域对于某个 A，Ber1 来说是一个封闭区间[a，b]，或者对于某个 Aer 来说是一个封闭射线[a，co)或者(- co，a)

提案 6.2。R1 中的空间区域之间不存在拓扑空间关系 R15。“0

证明:假设 A 和 B 是 R 中的空间区域，假设 A 和 Boverlap。是啊

显示 OAF“LOB = 0”。A 和 B 中的每一个都是封闭区间或封闭射线；因此，

有九种不同的情况需要检查。一个被选中；其他的可以被证明是“相应的”。

假设 A = [A，co)和 B = (co，B)。然后 oA = { a }和 oB = { b }。由于 A 和 B 重叠，因此 A < B，这意味着 oAf“loB = 0。0

7。结论

已经提出了定义拓扑空间关系的框架..它基于纯粹的拓扑性质，因此与距离函数的存在无关。拓扑关系由两个点集的边界和内部的四个交点来描述。考虑到这些交叉点的二进制值为空和非空，已经确定了一组 16 个互斥的规范。如果对点集和拓扑空间作出特定的限制，关系就更少了。证明了与平面多边形区域同胚的点集之间只有九种拓扑空间关系。

尽管这项工作的性质相当理论化，但该框架对地理信息系统的设计和实施具有直接影响。以前，对于每个拓扑空间关系，都必须编程一个单独的过程，并且不存在确保完整性的机制。现在，拓扑空间关系可以从一个单一的、一致的模型中导出，不需要为单个关系编程。该框架的原型实现已经被设计和部分改进(Egenhofer 1989)，并且对该框架的各种扩展进行了研究，以提供关于拓扑空间关系的更多细节，例如考虑交叉点的尺寸和交叉点上断开的子部分的数量(Egenhofer 和 Herring 1990)。正在进行的研究集中在这个框架在拓扑空间关系组合的形式推理中的应用。

提出的框架被认为是一个开始，需要进一步的调查来验证其适用性。这里，只考虑了共维度为零的拓扑空间关系，即空间维度和嵌入空间对象维度之间的差异为零，例如在平面中的区域和一维线上的间隔之间，GIS 应用感兴趣的还有共维度大于零的拓扑空间关系，例如在平面中的两条线之间(Herring 1991)。同样，必须测试该框架对不同维度对象之间拓扑空间关系的适用性，例如区域和线。

感谢

这项工作的动机是布鲁斯·帕默提出的。在与约翰·赫林的多次讨论中，这些概念都得到了澄清。安德鲁·弗兰克和雷纳托·巴雷拉对这篇论文的早期版本发表了宝贵的评论。这项工作部分由国家科学基金第 186 - 09123 号资助，数字设备公司根据第 414 号赞助研究协议资助，TP - 765536 号赞助研究协议资助，人口普查局根据联合统计协议资助。感谢国家科学基金根据 SES 88 - 10917 号资助额外资助 NCGIA。

参考

美国国家科学基金会国家图像信息和分析中心，1987 年。国际地理信息系统杂志，I，303 - 326。艾伦，J . F . 1983，保持关于时间间隔的知识。ACM 的来文，26，832 - 843。

张士凯，荣格特，李，Y，1989，基于

符号投影理论。In :在加利福尼亚州圣巴巴拉举行的大型空间数据库设计和实施研讨会记录，由史密斯·T·史密斯·O·Giintet 和王 y 编辑(纽约: Springer - Verlag)，《计算机科学讲义》，第 409 卷，第 303 - 323 页。

CLAIRE 和 GUPTILL，1982，选择数据结构的空间操作符。In :在弗吉尼亚州水晶城举行的反对派-Carto 诉诉讼，第 189 - 200 页。

《二元拓扑关系的正式定义》，M . EGENHOfer，1989。在:第三

在法国巴黎举行的关于数据组织和算法的四次会议；由李温和谢克编辑(纽约:斯普林格-弗拉格)，

《计算机科学讲义》，第 367 卷，第 451 - 472 页。

Egenhofer 和 HERING，J，1990，定义的数学框架

拓扑关系。In :在瑞士苏黎世举行的第四届国际现场数据处理研讨会记录，由 K . Brassel 和 Kishimoto 编辑，第 803 - 813 页。

FRANK，1982，地图查询-电子数据库查询语言。用于检索几何数据及其图形表示。ACM 计算机图形学，16，199 - 201。

弗里曼，J，1915，《空间关系的建模》。计算机图形和图像处理，4，156 - 111。

获得。R，1988，Gee -关系代数:几何数据库的模型和查询语言

系统。In :在意大利威尼斯举行的扩展数据库技术国际会议，由 J . Schmidt、S . Ceri 和 M . Missikolf 编辑(纽约: Springer - Verlag)，《计算机科学讲义》，第 303 卷，第 506 - 521 页。

Hernandez，D，1991，空间知识的相对表示:二维案例。在:认知

《地理空间的语言方面》，由马克和弗兰克编辑(多德雷赫特: Kluwer 学术出版社)，

《空间和非空间信息的数学建模》，1991 年

地理信息系统。《地理空间的认知和语言方面》，由马克和弗兰克编辑(多德雷赫特: Kluwer 学术出版社)。J .海岭，拉森和 Shivakumar，1988，支持 SQL 语言的扩展

拓扑数据库中的空间分析。In : GIS / LIS’SS 会议记录，在德克萨斯州圣安东尼奥举行，第 741 - 15O 页。

Herskowlts，A，1986，语言和空间认知——英语介词的跨学科研究(剑桥:剑桥大学出版社)。INGRAM 和 PHILUI，W，1981，“使用基于 SQL 的地理信息处理”

查询语言。In :《自动制图协会会议录》，第八届国际计算机辅助制图会议，马里兰州巴尔的摩，由克雷斯曼编辑，第 326 - 335 页。

Kanz，W，1990，空间关系-拓扑与顺序。在:第四次会议记录

空间数据处理国际研讨会在瑞士苏黎世举行，由 K . Brassel 和 Kishimoto 编辑，第 814 - 819 页。

MoleNaar，M，1989，单值矢量地图——地理信息系统中的一个概念。地球观测系统。L；18 - 26。

《电子微分拓扑》(新泽西州普林斯顿:普林斯顿大学出版社)，1966 年。

国家地理信息和分析中心，1989 年，该研究

国家地理信息和分析中心的计划。国际地理信息系统杂志，3，117 - 136。

PEQUOT，D，1986，《空间的使用》。帮助空间数据库检索的关系。在:

在华盛顿州西雅图举行的第二届空间数据处理国际研讨会记录，D . Marble 编辑，第 459 - 411 页。

PEQUOT，D 和 CI -翔，Z，1981，一种确定平面中任意形状多边形之间方向关系的算法。鲍恩认可，20，65 - 14。Puller，D，1988，空间数据模型上的数据定义和运算符。年:在密苏里州圣路易斯举行的 ACSM - ASPS 年度会议记录，第 191 - 202 页。《拓扑关系的形式化定义》，北京大学出版社，1988 年

空间物体之间。In :在澳大利亚悉尼举行的第三届空间数据处理国际研讨会记录，由 D . Marble 编辑，第 225 - 242 页。1988 年，一个有效的 PSQL 图形数据库系统。IEEE 软件工程交易，14，63 ( ) - {) 38。

史密斯，T，PEQUOT，MENON，S，和 AGGRWAL，P，1981，KBGIS - II :基于知识的

地理信息系统。国际地理信息系统杂志，1，149 - 112。

西班牙人，E，1966，代数拓扑(纽约: McGraw - Hili)。TALMI，L，1983，语言如何构造空间。在:空间定位:理论、研究和

应用，由 H . Pick 和 L . Acrydolo 编辑(纽约:压力通风出版社)，第 225 - 282 页。WANGER，1988，一种评估多边形覆盖算法的方法。年:在密苏里州圣路易斯举行的 ACSM - ASPS 年度会议记录。第 113 - 183 页。