

《磁流体力学的数值模拟方法》-第 3 次作业*

苏镇波[†]

康樾[‡]

蓝翔[§]

中国科学技术大学物理学院天文系, 合肥 230026

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

中国科学技术大学核科学技术学院, 合肥 230026

摘要

针对一维激波管问题在一定初值条件下对其中的密度、质量流及能量的空间分布随时间的演化过程进行了数值模拟和解析求解。我们讨论了解析解的物理特性及数值解的数值特性并比较了解析解和数值解的差异。

1 引言

一维激波管问题是典型的一维可压缩无粘气体动力学问题。激波管是一根两端封闭、内部充满气体的直管。在直管中由一薄膜隔开两部分密度、压力不同的气体。在初始时刻薄膜破裂, 气体从高压段冲向低压端, 同时在管内形成激波、稀疏波及接触间断等复杂波系。

我们对这个问题主要采取了 Roe、Upwind 守恒型及非守恒型格式进行数值求解同时也求得了理论解进行对比, 以分析理论解所代表的实际物理特性和数值解代表的数值格式特性并对比理论解与数值解的差异。

2 方程及数值方法

粒子数守恒方程、动量守恒方程及能量守恒方程可统一写成如下形式:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$w(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < 0 \\ W_R, & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

*2022 春季《磁流体力学的数值模拟方法》

[†]Email: zbsu@mail.ustc.edu.cn, 学号: SA21022002

[‡]Email: kx_0045@mail.ustc.edu.cn, 学号: SA21007083

[§]Email: shsxjujishou@163.com, 学号: SA21214038

其中

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$f(w) = uw + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1)E + \frac{3-\gamma}{2} \frac{m^2}{\rho} \\ (\gamma E - \frac{\gamma-1}{2} \frac{m^2}{\rho}) \frac{m}{\rho} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$m = \rho u, \quad (5)$$

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2} \rho u^2). \quad (6)$$

这里, ρ , u , p 和 E 分别是密度, 速度, 压力和总能量.

2.1 Roe 格式

对于 Roe 格式, 式 (1) 可写为:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A_{j+1/2} \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

根据Danaila et al. (2007) 书中第 10 章 (10.60) 式, 有:

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Phi(W_j^n, W_{j+1}^n) - \Phi(W_j^n, W_{j-1}^n)) \quad (8)$$

其中, $\Phi(W_j^n, W_{j+1}^n) = \frac{1}{2} \{F(W_j^n) + F(W_{j+1}^n) - |A|_{j+1/2} [W_{j+1}^n - W_j^n]\}$.

其中 $A = \frac{\partial F}{\partial w}$, A 的表达式如下

$$A = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & -(\gamma - 3)u & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)u^3 - \gamma \frac{u}{\rho} E & \gamma \frac{1}{\rho} E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的特征值为: $\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + c$, 对应的特征向量为:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, H 为总比焓:

$$H = \frac{H + p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2 \quad (10)$$

因此, 我们得到了关于 Roe 格式平均的计算方式:

$$\bar{\rho} = [(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})/2]^2 \quad (11)$$

$$\bar{u} = (\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R)/(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}) \quad (12)$$

$$\bar{H} = (\sqrt{\rho_R}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R)/(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}) \quad (13)$$

其中, 下标 L, R 分别为激波管区域的左区和右区, 激波管区域划分详见Danaila et al. (2007) 第十章图 10.1。

2.2 Upwind 格式

对应的 Upwind 非守恒型: 式 (1) 可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

其中

$$U = [u_j] = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \quad A = A_{ij} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix} \quad (15)$$

矩阵 A 的特征值为 $u - a, u, u + a$ ($a^2 = \gamma p / \rho$), 对应的左右特征向量矩阵为 L 和 R 写为

$$L = [L_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\rho a & 1 \\ a^2 & 0 & -1 \\ 0 & \rho a & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$R = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ -\frac{1}{2\rho a} & 0 & \frac{1}{2\rho a} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

更进一步可写为:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_i \sum_j \left\{ R_{ki} \lambda_i L_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right\} = 0 \quad (18)$$

对应的 Upwind 守恒型: 矩阵 A 的表达式变为

$$A = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & -(\gamma - 3)u & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)u^3 - \gamma \frac{u}{\rho} E & \gamma \frac{1}{\rho} E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

可求得此时矩阵 A 对应的左右特征向量矩阵。

3 解析、数值结果及讨论

3.1 Roe 格式

我们选取了初值条件:

$$W_L = \begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.311 \\ 8.928 \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4275 \end{bmatrix} \quad (19)$$

空间范围位于 $-1 \leq x \leq 1$ 内、时间位于 $t=0.14$ 时的结果作分析 ($\gamma = 1.4$)。对于解析求解的结果 (见图1灰色虚线结果), 可以清楚地看到存在三种不同相速度的波模。其中 $x=0.347$ 处存在代表了激波的间断, 该间断两侧密度、速度及压力均发生突变, 其相速度 $v_\phi = u+a=2.480$; $x=0.214$ 处存在接触间断, 该间断两侧密度发生突变而速度、压力均连续, 相速度 $v_\phi = u-a=1.529$; 在 $x=-0.229$ 和 -0.369 处存在弱间断特征, 在两点附近密度、速度及压力数值连续但一阶导数不连续, 两处相速度 $v_\phi = u$ 分别为 -1.636 和 -2.633 。

对于 Roe 格式下的数值计算, 我们取网格数 256, Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 系数 0.5, 根据 Danaila et al. (2007) 一书中 10.2.2 节的解析解的描述, 以及 10.3.2 节对 Roe 格式数值解的描述, 可得到如下图示结果:

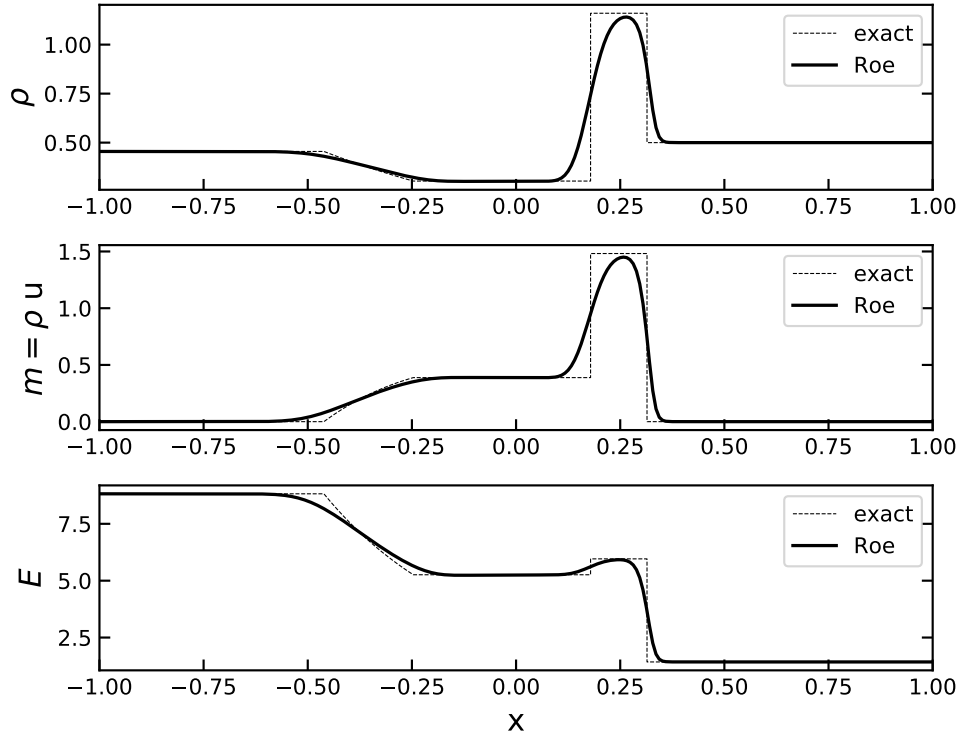


图 1: 从上到下: 第一幅图为密度; 第二幅图为质量流 m 的空间分布; 第三幅图为能量的空间分布。其中灰色虚线是 $t=0.14$ 时刻的精确解, 黑色实线是 $t=0.14$ 时 Roe 格式的空间分布。

对 Roe 格式的数值计算分析: 由于 Roe 格式的缺陷, 其在拐点处 (间断点) 处会震荡得厉害, 但是由于耗散比较厉害, 粘性过大, 间断处的数值格式表现出了连续的性质。对于 $x=0.347$ 处, 波传播速度为 2.1552 (速度值为正代表波自左向右传播, 为负代表波自右向左传播); 对于 $x=0.214$ 处, 波的传播速度为 1.5018; 对于 $x=-0.229$ 和 -0.369 处, 波传播速度分别为 -1.9122 和 -2.4781 。

后续的工作中, 可进行分析不同网格、不同 CFL 系数时, Roe 数值格式解的变化。

3.2 Upwind 格式

对于 Upwind 的守恒型格式下的数值计算, 我们取网格数 263, Courant 系数 0.0875, 在时刻 $t=0.14$ 时, 得到如图2 所示各物理量的空间分布结果:

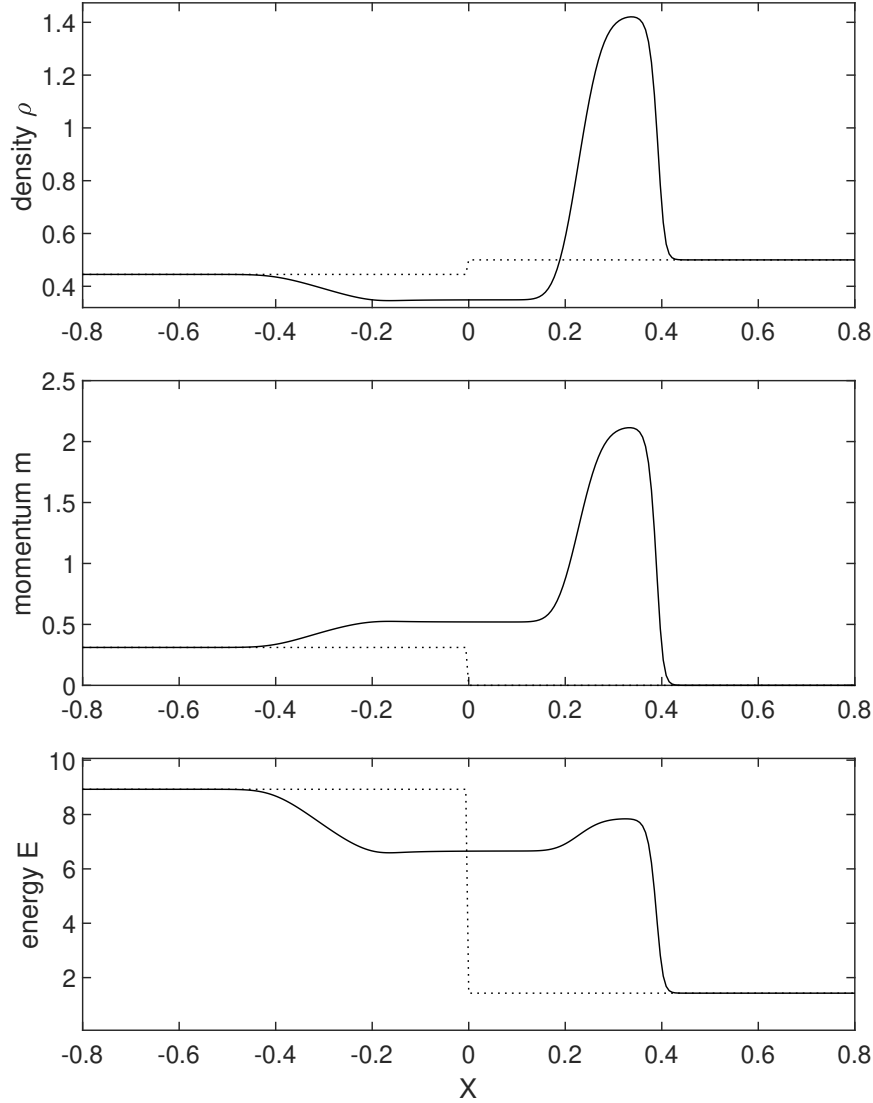


图 2: 从上到下: 第一幅图为密度; 第二幅图为质量流 m 的空间分布; 第三幅图为能量的空间分布。其中虚线是初始时刻的分布, 实线是 $t=0.14$ 时 Upwind 的守恒型格式的数值计算的空间分布。

对 Upwind 的守恒型格式的数值计算分析: 数值解中在一定区域内也有类似间断的现象产生, 但由于耗散等原因, 间断表现出了连续的性质。对于 $x=0.347$ 处, 波传播速度为 2.1540 (速度值为正代表波自左向右传播, 为负代表波自右向左传播); 对于 $x=0.214$ 处, 波的传播速度为 1.4988; 对于 $x=-0.229$ 和 -0.369 处, 波传播速度分别为 -1.8066 和 -2.4637。

对于 Upwind 的非守恒型格式下的数值计算, 我们取网格数 263, Courant 系数 0.0875, 在时刻 $t=0.14$ 时, 得到如图3所示各物理量的空间分布结果:

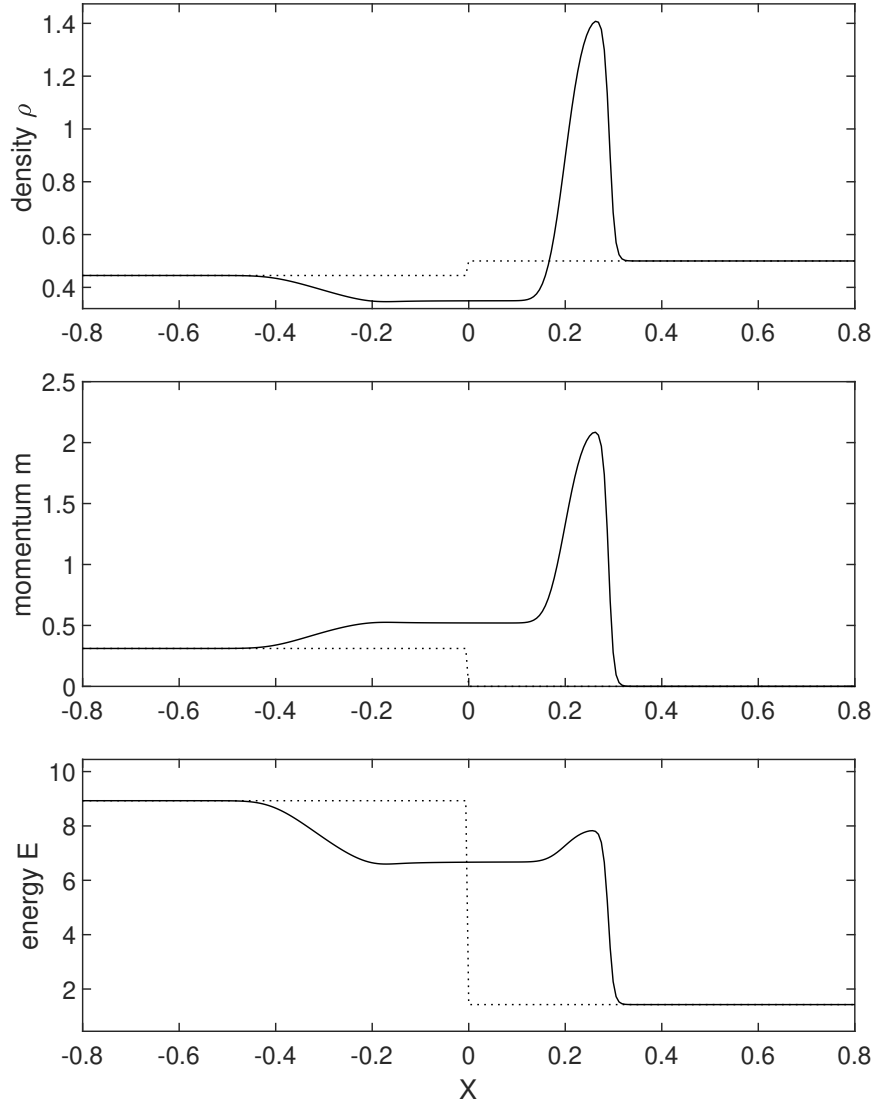


图 3: 从上到下: 第一幅图为密度; 第二幅图为质量流 m 的空间分布; 第三幅图为能量的空间分布。其中虚线是初始时刻的分布, 实线是 $t=0.14$ 时 Upwind 的非守恒型格式的数值计算的空间分布。

对 Upwind 的非守恒型格式的数值计算分析: 对于 $x=0.347$ 处, 波传播速度为 1.2667 远低于解析解, 这也带来非守恒型格式的峰处半高宽长度要低于解析解的激波——接触间断间的平台长度。该结果是非守恒型格式的固有缺陷, 即便加密时空网格也无法改观; 对于 $x=0.214$ 处, 波的传播速度为 1.4792; 对于 $x=-0.229$ 和 -0.369 处, 波传播速度分别为 -1.7946 和 -2.4517。

4 分工说明

苏镇波负责了 Roe 格式的数值计算及分析, 蓝翔负责了 Upwind 格式的数值计算及分析, 苏镇波、康樾、蓝翔负责了 L^AT_EX 的整理与排版。

5 附件

1. MHD_Group10_hw3.tex-本报告 L^AT_EX 文件
2. MHD_Group10_hw3.pdf-本报告 PDF 输出文件
3. code_combination.txt-图1,2和3对应的 Python,Matlab 计算和绘制代码
4. Roe.pdf-图1的 pdf 文件, 由 Python 绘制
5. Upwind_con_d.eps-图2的 eps 文件, 由 Matlab 绘制
6. Upwind_con_m.eps-图2的 eps 文件, 由 Matlab 绘制
7. Upwind_con_e.eps-图2的 eps 文件, 由 Matlab 绘制
8. Upwind_non_con_d.eps-图3的 eps 文件, 由 Matlab 绘制
9. Upwind_non_con_m.eps-图3的 eps 文件, 由 Matlab 绘制
10. Upwind_non_con_e.eps-图3的 eps 文件, 由 Matlab 绘制
11. References.bib-本报告的参考文献

参考文献

Danaila, I., Joly, P., Kaber, S. M., and Postel, M. (2007). *An introduction to scientific computing: Twelve computational projects solved with MATLAB*. Springer.