

《磁流体力学的数值模拟方法》– 第 1 次作业 *

蓝翔[†]

康樾[‡]

苏镇波[§]

中国科学技术大学核科学技术学院, 合肥 230026

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

中国科学技术大学物理学院天文系, 合肥 230026

摘要

本课程《磁流体力学的数值模拟方法》的主要内容是介绍空间物理中数值计算的一个重要方面 – 磁流体力学 (MHD, Magnetohydrodynamics) 数值计算格式. 而讲授的重点和目的在于让同学们学完这门课程之后, 不仅了解和掌握空间物理和等离子体数值计算的物理知识和数学理论, 而且训练在实际的计算机应用中独立动手和实践的能力. 本文件将提出作业的具体要求和规范, 以及一些文件和版面要求, 并给出第一次作业, 请在 **2022 年 3 月 7 日周一 8:40** 前完成并提交.

1 引言

引言部分介绍本次作业完成的题目, 分别为: 磁流体力学波的相速度图、冷等离子体中的色散关系以及磁流体力学快磁声激波关系; 方法及过程部分将主要说明如何进行化简; 实现, 程序部分将展示我们的代码.

1.1 磁流体力学波的相速度图

磁流体力学中, 快慢磁声波, 横波 (Alfvén) 波的特征速度分别为 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

$$b_n = b |\cos \theta|. \quad (3)$$

其中, a 是声速, $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, p 和 ρ 是流体的压力和密度; b 是 Alfvén 波速, $b^2 = \frac{\mu H^2}{4\pi\rho}$. \mathbf{H} 是磁场, μ 是磁导率; θ 为传播方向和磁场所成夹角.

熟悉所使用的作业工具和相应软件, 将以上公式中 c_f , c_s , b_n 和 θ 的关系用图形表示 (极坐标形式), 比较和分析图形曲线中所含的物理概念和参数的特性. 结果要求能将所有的物理特性或者典型情况涵盖. 可以参考文献 Jeffrey and Taniuti (1964) 中已有的图形.

*2022 春季《磁流体力学的数值模拟方法》

[†]Email: shsxjujishou@163.com, 学号: SA21214038

[‡]Email: kx_0045@mail.ustc.edu.cn, 学号: SA21007083

[§]Email: zbsu@mail.ustc.edu.cn, 学号: SA21022002

1.2 冷等离子体中的色散关系

磁化冷等离子体的色散关系可以表示为 (Diver, 2001)

$$(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) n^4 - [RL \sin^2 \theta + PS (1 + \cos^2 \theta)] n^2 + PRL = 0 \quad (4)$$

这里 $n = kc/\omega$ 是折射率, θ 是波的传播方向和磁场的夹角,

$$\begin{aligned} S &= (R + L)/2 \\ D &= (R - L)/2 \\ R &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \omega_{cs}} \\ L &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \omega_{cs}} \\ P &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

其中 ω_{ps} 和 ω_{cs} 分别是第 s 种类粒子的等离子体频率和回旋频率, ω_p 是整体的等离子体频率. 方程 (4) 还可以写成如下的形式,

$$\tan^2 \theta = -\frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)}.$$

1.3 磁流体力学快磁声激波关系

磁流体力学快磁声激波关系中 (Jeffrey and Taniuti, 1964), 用磁场增量 h_f ($h_f \geq 0$) 来表示激波的强度, 通常分析下面的公式

$$\frac{X_f^\pm}{h_f} = (B \pm \sqrt{R_X})/C \quad (\geq 0) \quad (5)$$

和 h_f 的函数关系. B , C , 和 R_X 由以下表达式给出,

$$B = (\gamma/2)h_f \sin \theta_0 - (1 - s_0), \quad (6)$$

$$C = 2 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h_f, \quad (7)$$

$$R_X = B^2 + C(h_f + 2s_0 \sin \theta_0) \quad (\geq 0). \quad (8)$$

其中 θ_0 为波传播方向和磁场方向的夹角 ($0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$), $\gamma = 5/3$ 是多方指数. 讨论两种情况, 即 B 在 C 的零点

$$\hat{B} \equiv B(\hat{h}_f) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sin^2 \theta_0 - (1 - s_0),$$

大于等于和小于零的情况, 此处 \hat{h}_f 是 $C = 0$ 的根

$$\hat{h}_f = \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \sin \theta_0. \quad (9)$$

具体表现为 s_0 的条件

$$s_0 \geq 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}, \quad (10)$$

和

$$s_0 < 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}. \quad (11)$$

而 \hat{h}_f 是 $R_X = 0$ 的根,

$$\begin{aligned} \hat{h}_f = & \frac{1}{2(\gamma - 1) - \frac{1}{2}\gamma^2 \sin^2 \theta_0} \left\{ \sin \theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0) \right. \\ & \left. + 2 \cos \theta_0 \sqrt{(\gamma - 1)(1 - s_0)^2 + s_0 \gamma^2 \sin^2 \theta_0} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

将关系 (5) 用图形表示 (可取 θ_0 的某个典型值进行分析, 如 $\theta_0 = 15^\circ$), 并参考文献 (Jeffrey and Taniuti, 1964, 第 229 页中的图形), 以进行比较.

2 方法及过程

2.1 磁流体力学波的相速度图

按照题目所给公式可知, $s = \sqrt{a/b}$, 当 $s = 0.5, 1, 2$ 时, 可以取 a, b 的值分别为 $a = \sqrt{1/2}, b = 1$, $a = b = 1$ 以及 $a = \sqrt{2}, b = 1$, 满足对 s 的要求. 接下去的步骤定义 θ 的范围为 $[0, 2\pi]$, 并注意快慢磁声波以及横波函数的定义, 不需要进行额外的化简, 用 Julia 中的极坐标画图即可.

2.2 冷等离子体中的色散关系

按照色散方程极其各项意义, 可以将方程展开写作:

$$R = ((\omega/\omega_c)^2 - (\omega_p/\omega_c)^2 + \omega/\omega_c) / (\omega/\omega_c (\omega/\omega_c + 1)) \quad (13)$$

$$L = \frac{(\frac{\omega}{\omega_c})^2 - (\frac{\omega_p}{\omega_c})^2 - \frac{\omega}{\omega_c}}{\frac{\omega}{\omega_c} (\frac{\omega}{\omega_c} - 1)}; \quad (14)$$

$$P = \frac{(\frac{\omega}{\omega_c})^2 - (\frac{\omega_p}{\omega_c})^2}{(\frac{\omega}{\omega_c})^2}; \quad (15)$$

$$S = \frac{R + L}{2} = \frac{(\frac{\omega}{\omega_c})^2 - (\frac{\omega_p}{\omega_c})^2 - 1}{(\frac{\omega}{\omega_c})^2 - 1}; \quad (16)$$

进而令,

$$y_1 = (\frac{\omega}{\omega_c})^2 - (\frac{\omega_p}{\omega_c})^2, \quad x_1 = (\frac{kc}{\omega_c})^2 \epsilon = (\frac{\omega_p}{\omega_c})^2; \quad (17)$$

则原方程可写为,

$$(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) n^4 = (\frac{y_1 - 1}{y_1 + \epsilon - 1} \sin^2 \theta + \frac{y_1}{y_1 + \epsilon} \cos^2 \theta) \frac{1}{(y_1 + \epsilon)^4} x_1^2; \quad (18)$$

$$(RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta))n^2 = (\frac{y_1^2 - (y_1 + \epsilon)}{y_1 + \epsilon - 1} \sin^2 \theta + \frac{y_1(y_1 - 1)}{y_1 + \epsilon - 1}(1 + \cos^2 \theta))x_1; \quad (19)$$

$$PRL = \frac{y_1(y_1^2 - (y_1 + \epsilon))}{y_1^2(y_1 + \epsilon - 1)}; \quad (20)$$

继续令,

$$A = (\frac{y_1 - 1}{y_1 + \epsilon - 1} \sin^2 \theta + \frac{y_1}{y_1 + \epsilon} \cos^2 \theta) \frac{1}{(y_1 + \epsilon)^4}; \quad (21)$$

$$B = (\frac{y_1^2 - (y_1 + \epsilon)}{y_1 + \epsilon - 1} \sin^2 \theta + \frac{y_1(y_1 - 1)}{y_1 + \epsilon - 1}(1 + \cos^2 \theta)); \quad (22)$$

$$C = \frac{y_1(y_1^2 - (y_1 + \epsilon))}{y_1^2(y_1 + \epsilon - 1)}; \quad (23)$$

方程整体形式变为: $Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0$

即求解方程: $Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0$. 可将 y_1 看作已知, 再按一般二次方程解法求出 x_1 之值. 在不同 y_1 时取其实解即可.

2.3 磁流体力学快磁声激波关系

本题需要求解的是 $\frac{x_f^\pm}{h_f}$ 与 $(B \pm \sqrt{R_X})/C (\geq 0)$ 的关系. 依题意得, 可以分为三种情况.

1. 当 h_f 的范围处于 $[0, \hat{h}_f]$ 时, 方程为 $\frac{x_f^\pm}{h_f} = (B + \sqrt{R_X})/C (\geq 0)$, 此时 $s_0 \geq 1 - \gamma \sin^2 \theta_0 / (\gamma - 1)$.
2. 当 h_f 的范围处于 $[\hat{h}_f, \hat{\hat{h}}_f]$ 时, 方程为 $\frac{x_f^\pm}{h_f} = (B - \sqrt{R_X})/C (\geq 0)$, 此时 $s_0 \leq 1 - \gamma \sin^2 \theta_0 / (\gamma - 1)$.
3. 当 h_f 的范围处于 $[0, \hat{\hat{h}}_f]$ 时, 方程为 $\frac{x_f^\pm}{h_f} = (B + \sqrt{R_X})/C (\geq 0)$, 此时 $s_0 \leq 1 - \gamma \sin^2 \theta_0 / (\gamma - 1)$.

因此需要提前给定 γ 以及 θ 的值, 以给出 s_0 , 本题的求解分别取 $1 - \gamma \sin^2 \theta_0 / (\gamma - 1) \pm 0.5$ 作为 s_0 的两种情况. 同时, 还需计算出 \hat{h}_f 以及 $\hat{\hat{h}}_f$ 的具体值, 以划分区, 随后用 Julia 画图即可.

3 实现, 程序

本次作业由 Matlab 和 Julia 共同完成, 其中, 由于 Julia 代码中支持使用 \LaTeX 语法, 嵌入时部分代码字体不显示 (或乱码), 具体代码详见附件 code.txt 文件.

3.1 磁流体力学波的相速度图, By Julia

```

1 using LaTeXStrings
2 using Plots
3 gr()
4 function FastSlowWave(V :: Float64, C :: Int,    :: Array, mode:: String)
5     if mode == "fast"
6         strength = sqrt.(1/2 .* (V ^2 + C ^2 .+ sqrt.((V ^2 + C ^2) ^2 .-
7             4 * V ^2 .* C ^2 .* (cos.(    )).^2)))
8     end

```

```

8     if mode == "slow"
9         strength = sqrt.(1/2 .* (V ^2 + C ^2 .- sqrt.((V ^2 + C ^2) ^2 .-
10             4 * V ^2 .* C ^2 .* (cos.( )).^2)))
11     end
12     return strength
13 end
14 l = @layout([a b c])
15     = collect(range(0, 2 , length = 1000))
16 p1 = plot( , FastSlowWave(sqrt(1/2), 1, , "fast"), color=:black, proj=:
17     polar, label=L"\rm{Fast}")
18 p1 = plot!( , FastSlowWave(sqrt(1/2), 1, , "slow"), color=:purple, proj
19     =:polar, label=L"\rm{Slow}")
20 p1 = plot!( , 1 * abs.(cos.( )), proj=:polar, color=:royalblue, label=L"\
21     rm{Alfven}")
22 p1 = plot!([0,0],[ -2,2], proj=:polar, arrow=true, color=:black, linewidth=2,
23     label="")
24 p1 = annotate!([(1, -0.1, text(L"H"))])
25 p1 = annotate!([(0.6, -0.1, text(L"1"))])
26
27 p2 = plot( , FastSlowWave(1.0, 1, , "fast"), color=:black, proj=:polar,
28     label=L"\rm{Fast}")
29 p2 = plot!( , FastSlowWave(1.0, 1, , "slow"), color=:purple, proj=:
30     polar, label=L"\rm{Slow}")
31 p2 = plot!( , 1 * abs.(cos.( )), proj=:polar, color=:royalblue, label=L"\
32     rm{Alfven}")
33 p2 = plot!([0,0],[ -2,2], proj=:polar, arrow=true, color=:black, linewidth=2,
34     label="")
35 p2 = annotate!([(1, -0.1, text(L"H"))])
36 p2 = annotate!([(0.6, -0.1, text(L"1"))])
37
38 p3 = plot( , FastSlowWave(sqrt(2), 1, , "fast"), color=:black, proj=:
39     polar, label=L"\rm{Fast}")
40 p3 = plot!( , FastSlowWave(sqrt(2), 1, , "slow"), color=:purple, proj=:
41     polar, label=L"\rm{Slow}")
42 p3 = plot!( , 1 * abs.(cos.( )), proj=:polar, color=:royalblue, label=L
43     "\rm{Alfven}")
44 p3 = plot!([0,0],[ -2,2], proj=:polar, arrow=true, color=:black, linewidth=2,
45     label="")

```

```

34 p3 = annotate!([(1, -0.1, text(L"H"))])
35 p3 = annotate!([(0.6, -0.1, text(L"1"))])
36
37
38 plot(p1, p2, p3, layout=1,lims=(0,2), ticks=:nothing, border=:none,
      legend=:topright, xaxis=false, yaxis=false, framestyle=:none, title=[
        L"(a) s=0.5" L"(b) s=1" L"(c) s=2"])
39 plot!(size=(1000,300))
40
41 savefig("./EX1.pdf")

```

3.2 冷等离子体中的色散关系, By Matlab

```

1 %所用变量定义
2 N=1001; %对 pi/2 角度的细分区间数
3 ep=0.25;
4 c1=0; %绘图颜色参数 1
5 c2=0; %绘图颜色参数 2
6 c3=0; %绘图颜色参数 3
7 %求解方程根以画出关系图
8 for n=1:N
9     theta=pi/2*(n-1)/(N-1);
10    y0=@(y) y^(2)-ep;
11    a=@(y) y0(y)-1;
12    b=@(y) y0(y)+ep-1;
13    c=@(y) b(y)+1;
14    si=(sin(theta))^2;
15    co=(cos(theta))^2;
16    A=@(y) (a(y)/b(y)*si+y0(y)/c(y)*co)/c(y)^2;
17    B=@(y) -((y0(y)^2-c(y))*si+y0(y)*a(y)*(1+co))/c(y)^2/b(y);
18    C=@(y) y0(y)*(y0(y)^2-c(y))/c(y)^2/b(y);
19    root1=@(y) (-B(y)+sqrt(B(y)^2-4*A(y)*C(y)))/(2*A(y));
20    root2=@(y) (-B(y)-sqrt(B(y)^2-4*A(y)*C(y)))/(2*A(y));
21    if n<=333
22        c1=1*(n)/333;
23        c2=0;
24        c3=0;
25    end
26    if n>333&& n<=666

```

```

27         c1=0;
28         c2=1*(n-333)/333;
29         c3=1;
30     end
31     if n>666&& n<=1000
32         c1=1;
33         c2=1;
34         c3=1*(n-666)/334;
35     end
36     fplot(@(y) sqrt(root1(y)), 'ShowPoles', 'off', 'Color', [c1, c2, c3]);
37     hold on;
38     fplot(@(y) sqrt(root2(y)), 'ShowPoles', 'off', 'Color', [c1, c2, c3]);
39     hold on;
40 end
41 %
42 %对所得图像进行处理
43 xlim([0 1.5]);
44 ylim([0 3]);
45 view(90,90);
46 set(gca, 'xdir', 'reverse', 'DataAspectRatio', [1,2,1]);
47 xlabel('\omega/\omega_c');
48 ylabel('k*c/\omega_c');
49 title('\omega_p/\omega_c=0.5');
50 text(1.1,3, '\theta=90\circ');
51 text(0.95,3, '\theta=0\circ');
52 %

```

3.3 磁流体力学快磁声激波关系, By Julia

```

1
2 using Plots
3 using LaTeXStrings
4 gr()
5
6
7 Base.@kwdef struct shock
8     ::Float64 = 5/3
9     ::Float64 = /12
10    s0::Float64 = 1.5 - * sin( )^2 / ( - 1)

```

```

11     s1::Float64 = 0.5 -      * sin( )^2 / (      - 1)
12     h_ = (2* sin( )/(      - 1))
13     hf = collect(range(0, (2* sin( )/(      - 1)), length=1000))
14     hf_ = 1 / (2 * (      -1) - 0.5 *      ^2 * (sin( )^2)) * (sin( )*(2-      )*(1+s0)
15           + 2 * cos( ) * sqrt((      -1) * (1-s0)^2 + s0*      ^2*sin( )^2))
16     hff = collect(range(2*sin( ) / (      -1), hf_, length=1000))
17     hfff = collect(range(0, hf_, length=1000))
18
19
20 u = shock()
21
22
23 function f(h::Array, s::Float64)
24     B = (u. /2) .* h .* sin(u. ) .- (1-s)
25     C = 2 * sin(u. ) .- (u. - 1) .* h
26     Rx = B.^2 .+ C .* (h .+ 2*s*sin(u. ))
27     @fastmath res = (B .+ sqrt.(Rx)) ./ C
28     return res
29 end
30
31 function f1(h::Array, s::Float64)
32     B = (u. /2) .* h .* sin(u. ) .- (1-s)
33     C = 2 * sin(u. ) .- (u. - 1) .* h
34     Rx = B.^2 .+ C .* (h .+ 2*s*sin(u. ))
35     @fastmath res = (B .- sqrt.(Rx)) ./ C
36     return res
37 end
38
39 plot(u.hf, f(u.hf, u.s0), linecolor=:black, label=L"s_0\geq 1-\gamma sin
40     ^2\theta_0/(\gamma-1)", linewidth=2)
41
42
43 plot!(u.hff, f1(u.hff, u.s1), linecolor=:black, linestyle=:dash, label=""
44     , linewidth=2)
45
46
47 plot!(u.hfff, f(u.hfff, u.s1), linecolor=:black, linestyle=:dash,
48     label=L"s_0 < 1-\gamma sin^2\theta_0/(\gamma-1)" , linewidth=2)
49
50 plot!(xlims=(0, 1.2), ylims=(-10, 80))

```



```

47
48 plot!(legend=:topleft)
49
50 plot!([u.hf_], seriestype=:vline, linecolor=:gray, linestyle=:dot, label
    = "")
51 plot!([u.h_], seriestype=:vline, linecolor=:gray, linestyle=:dot, label
    = "")
52
53 plot!([0], seriestype=:hline, linecolor=:gray, linestyle=:dot, label="")
54 annotate!([(0.5, 25, text(L"\frac{X^{+}_{f}}{h_f}", 8))])
55 plot!([0.6, 0.52], [8.7, 20], arrow=true, color=:black, linewidth=1, label="")
56 annotate!([(1, 25, text(L"\frac{X^{-}_{f}}{h_f}", 8))])
57 plot!([0.93, 0.97], [8.7, 19], arrow=true, color=:black, linewidth=1, label
    = "")
58 xticks!([u.h_, u.hf_], ["\hat{h_f}", "\hat{\hat{h_f}}"])
59 xlabel!(L"h_f")
60 ylabel!(L"\frac{X^{\pm}_{f}}{h_f}")
61 annotate!([(0.8, 0, text(L"\frac{X^{+}_{f}}{h_f}", 8))])
62 plot!(size=(500, 400), dpi=300)
63 savefig("./EX3.pdf")

```

4 讨论, 进一步工作

4.1 磁流体力学波的相速度图

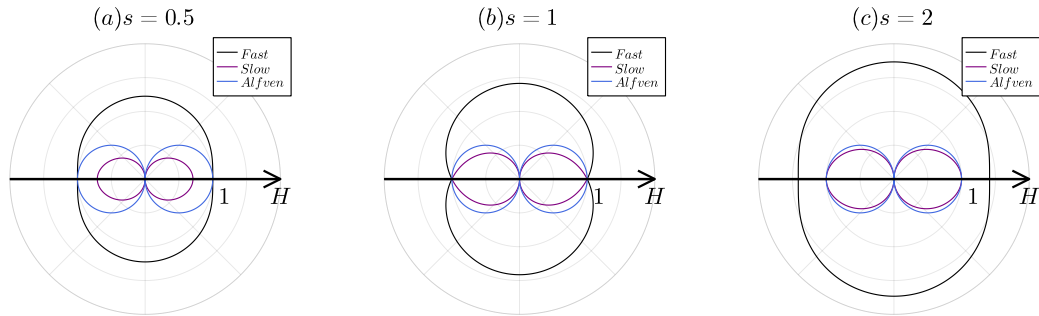


图 1: Illustration of the surface of normal speeds for (a) $s = 0.5$, (b) $s = 1$, and (c) $s = 2$.

4.2 冷等离子体中的色散关系

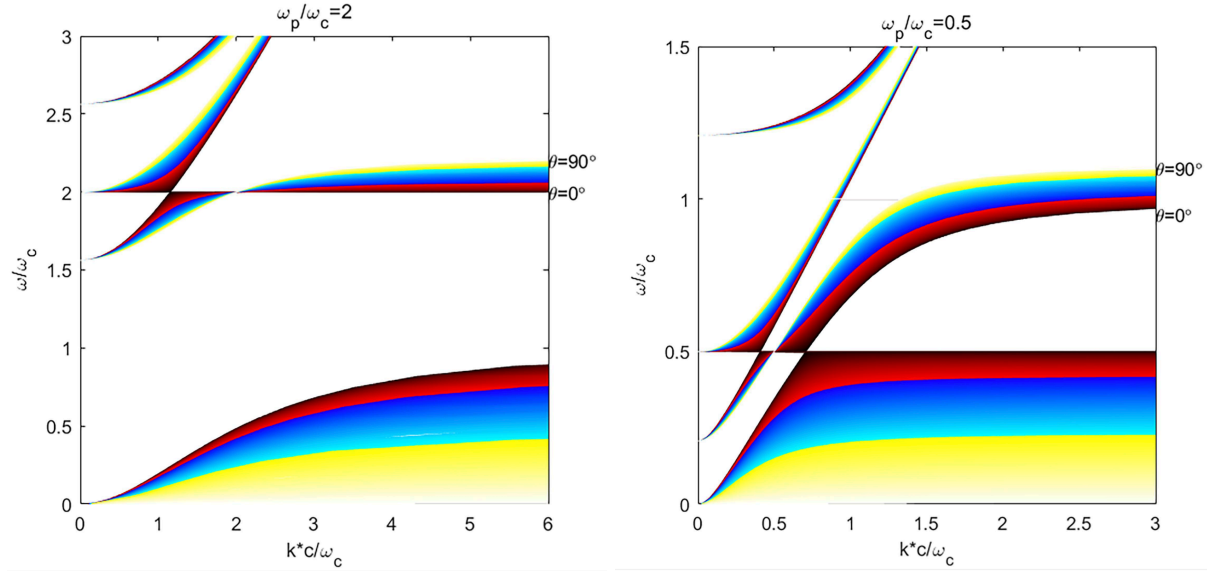


图 2: The general dispersion relation for waves in a uniform, magnetised cold plasma. (a) $\omega_p/\omega_c = 2.0$ and (b) $\omega_p/\omega_c = 0.5$

4.3 磁流体力学快磁声激波关系

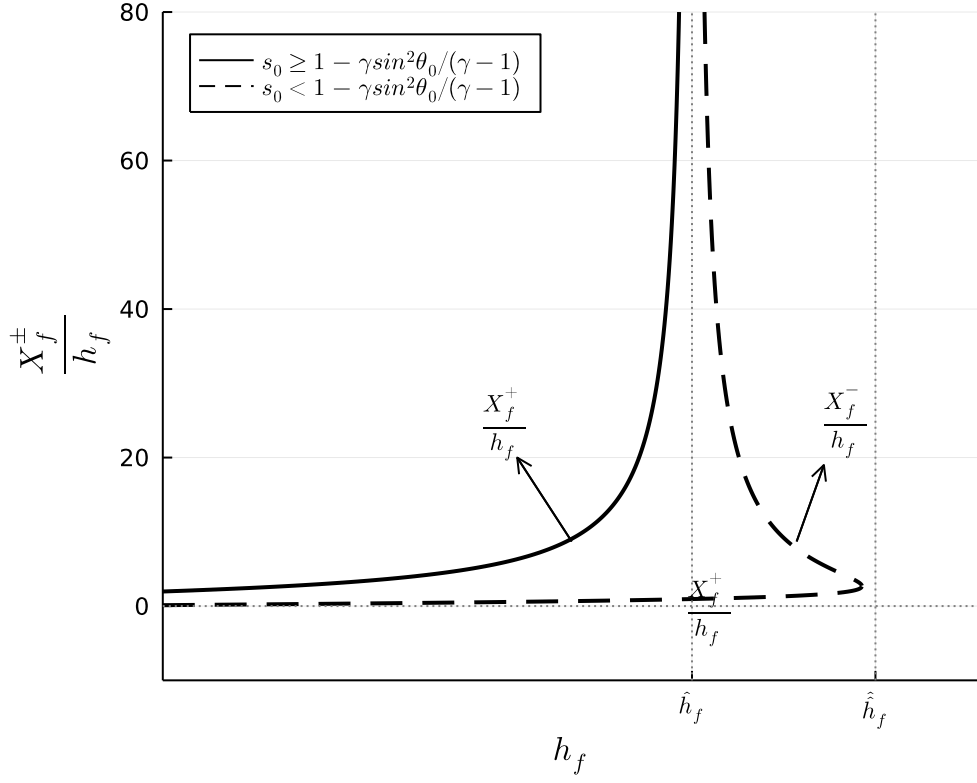


图 3: The general dispersion relation for waves in a uniform, magnetised cold plasma. (a) $\omega_p/\omega_c = 2.0$ and (b) $\omega_p/\omega_c = 0.5$

由图 3 可知, 在 h_f 取值还未逼近 \hat{h}_f 时, 方程函数 $\frac{X_f^\pm}{h_f}$ 已取到临界值. 需要更进一步讨论是否是因为 s_0, γ, θ_0 所导致出现这种情况.

5 分工说明

蓝翔完成了第二题，苏镇波负责第一题和第三题，康樨、苏镇波完成 L^AT_EX 的整理和排版.

6 附件

1. MHD_Group10.tex-本报告 L^AT_EX 文件
2. MHD_Group10.pdf-本报告 PDF 输出文件
3. code.txt-文中图 1, 2, 3 例子所用的 Julia 以及 Matlab 计算和图形绘制程序
4. ex1.pdf-图 1 的 PDF 图形文件, 由 Julia 程序生成
5. ex2_1.pdf, ex2_2.pdf-图 2 的 PDF 图形文件, 由 Matlab 程序生成
6. ex3.pdf-图 3 的 PDF 图形文件, 由 Julia 程序生成
7. References.bib – 文献文件

参考文献

- Diver, D. A. (2001). *A plasma formulary for physics, technology and astrophysics*. Wiley VCH, 1st edition.
- Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.