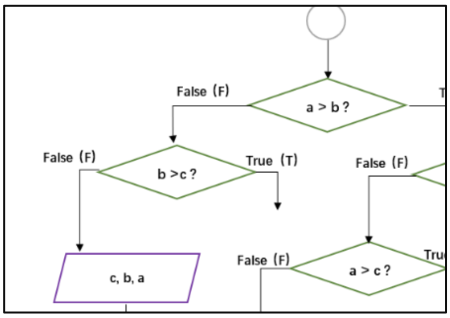
1. Flowchart

[10 points] Write a function Print_values with arguments a, b, and c to reflect the following flowchart. Here the purple parallelogram operator on a list [x, y, z] is to compute and print x+y-10z. Try your output with some random a, b, and c values. Report your output when a = 5, b = 15, c = 10.

Result：

当 a = 5, b = 15, c = 10，不执行运算，输出：none，运行结果如图：




```
test 1 a= 12 b= 8 c= 7
-50
test 2 a= 4 b= 6 c= 9
-25
test 3 a= 20 b= 14 c= 17
-103
a=5, b=15, c=10 reslut:
None
```

2. Continuous celing function

[10 points] Given a list with N positive integers. For every element x of the list, find the value of continuous ceiling function defined as F(x) = F(ceil(x/3)) + 2x, where F(1) = 1.

Result：

首先看到 ceil 考虑使用 math 模块，观察函数为递归，定义边界情况后实现即可（最简单思路，若提高效率可考虑使用哈希表等记忆函数值），运行结果如图：

```
1 1
2 5
3 7
4 13
5 15
6 17
7 21
8 23
9 25
10 33
```

3. Dice rolling

3.1 [15 points] Given 10 dice each with 6 faces, numbered from 1 to 6. Write a function Find_number_of_ways to find the number of ways to get sum x, defined as the sum of values on each face when all the dice are thrown.

Result：

来自于 Leecode 1155 题(https://leetcode.com/problems/number-of-dice-rolls-with-target-sum/description/)，是原题的简版，即设定了 n=10、k=6，最合适算法无疑是 dynamic programming

题库

题目描述 | 题解 | 提交记录

1155. 掷骰子等于目标和的方法数

中等 | 相关标签 | 相关企业 | 提示 | Aa

这里有 n 个一样的骰子，每个骰子上都有 k 个面，分别标号为 1 到 k 。

给定三个整数 n、k 和 target，请返回投掷骰子的所有可能得到的结果（共有 k^n 种方式），使得骰子面朝上的数字总和等于 target。

由于答案可能很大，你需要对 $10^9 + 7$ 取模。

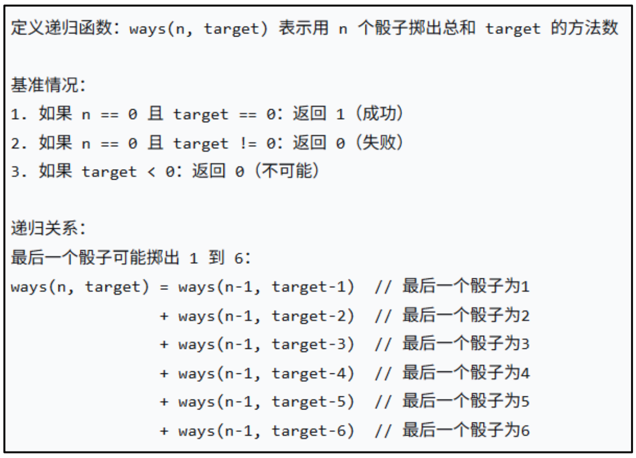
示例 1：

输入： n = 1, k = 6, target = 3
输出： 1
解释： 你掷了一个有 6 个面的骰子。
得到总和为 3 的结果的方式只有一种。

示例 2：

输入： n = 2, k = 6, target = 7
输出： 6
解释： 你掷了两个骰子，每个骰子有 6 个面。
有 6 种方式得到总和为 7 的结果：1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1。

这里尝试更容易理解的递归，即从后往前推当最后一个骰子的值为 1-6 时，前 9 个骰子应该为多少，递归解决剩余问题。基准情况：如果没有骰子(n=0)且目标为 0，说明成功找到一种方法，返回 1,如果没有骰子但目标不为 0，或者目标变成负数，说明这种方法不可行，返回 0。（递归思路：1.https://www.deepseek.com/zh）



```
定义递归函数：ways(n, target) 表示用 n 个骰子掷出总和 target 的方法数

基准情况：
1. 如果 n == 0 且 target == 0：返回 1（成功）
2. 如果 n == 0 且 target != 0：返回 0（失败）
3. 如果 target < 0：返回 0（不可能）

递归关系：
最后一个骰子可能掷出 1 到 6：
ways(n, target) = ways(n-1, target-1)  // 最后一个骰子为1
                + ways(n-1, target-2)  // 最后一个骰子为2
                + ways(n-1, target-3)  // 最后一个骰子为3
                + ways(n-1, target-4)  // 最后一个骰子为4
                + ways(n-1, target-5)  // 最后一个骰子为5
                + ways(n-1, target-6)  // 最后一个骰子为6
```

传统递归会出现重复计算的问题，大量情况被重复计算浪费大量时间，考虑使用记忆化 ，所有值只计算一次。（记忆存储思路：B 站 up 主 flyingchow123 ）

Python 中的 functools.lru_cache 装饰器，functools.lru_cache 是 Python 标准库中 functools 模块的一部分。lru_cache 可以用来为一个函数添加一个缓存系统。它可以帮助我们优化递归函数，避免重复计算已经计算过的值。（@lru_cache 装饰器理解：https://zhuanlan.zhihu.com/p/640954732），运行结果如图：

```
总和10的方法数: 1
总和15的方法数: 2002
总和30的方法数: 2930455
总和45的方法数: 831204
总和60的方法数: 1
```

3.2 [5 points] Count the number of ways for any x from 10 to 60, assign the number of ways to a list called Number_of_ways, so which x yields the maximum of Number_of_ways?

Result:

```
3.2 计算所有可能总和的方式数:
所有方式数: [1, 10, 55, 220, 715, 2002, 4995, 11340, 23760, 46420, 85228, 147940, 243925, 383470, 576565, 831204, 1151370, 1535040, 1972630, 2446300, 2930
455, 3393610, 3801535, 4121260, 4325310, 4395456, 4325310, 4121260, 3801535, 3393610, 2930455, 2446300, 1972630, 1535040, 1151370, 831204, 576565, 38347
0, 243925, 147940, 85228, 46420, 23760, 11340, 4995, 2002, 715, 220, 55, 10, 1]
产生最大方式数的x值: 35
最大方式数: 4395456
```

4. Dynamic programming

4.1 [5 points] Write a function Random_integer to fill an array of N elements by randomly selecting integers from 0 to 10.

Result:

使用 random 模块的 random.randint 生成随机整数，使用 append 添加到列表中。

```python
import random

# 4.1
def Random_integer(N):
    result = []
    for i in range(N):
        num = random.randint(0, 10)
        result.append(num)
    return result

arr = Random_integer(5)
print(arr)
```

```
[4, 5, 9, 5, 10]
```

4.2 [15 points] Write a function Sum_averages to compute the sum of the average of all subsets of the array. For example, given an array of [1, 2, 3], you Sum_averages function should compute the sum of: average of [1], average of [2], average of [3], average of [1, 2], average of [1, 3], average of [2, 3], and average of [1, 2, 3].

Result:

动态规划思路描述：（来源：1.https://chat.deepseek.com/ 2.）

(1)状态定义：

dp_sum[k]：存储所有长度为 k 的子集的和的总和

dp_count[k]：存储所有长度为 k 的子集的个数

(2)初始化：

dp_count[0] = 1 表示空集，这是动态规划的起点

(3)核心动态规划过程：

遍历数组中的每个数字，对于每个数字，从后往前更新状态（避免重复计算）

dp_sum[k] = dp_sum[k] + dp_sum[k-1] + num * dp_count[k-1]：

dp_sum[k]：保持已有的长度为 k 的子集和

dp_sum[k-1]：之前长度为 k-1 的子集和

num * dp_count[k-1]：当前数字添加到所有 k-1 长度子集中产生的新和

dp_count[k] = dp_count[k] + dp_count[k-1]：更新子集数量

(4)计算最终结果：

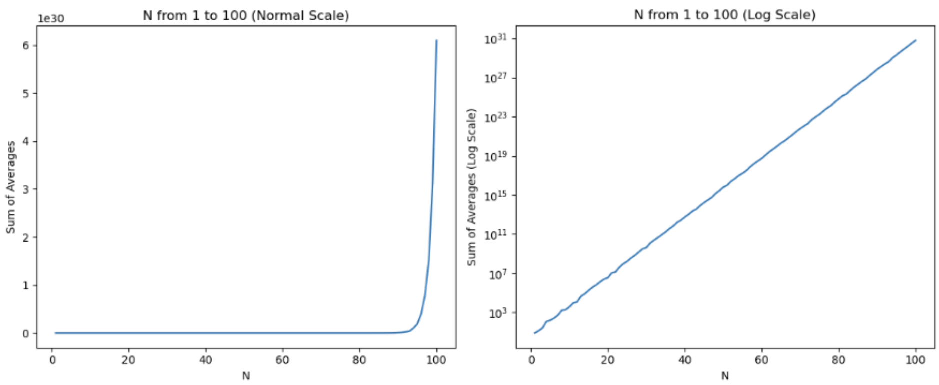
遍历所有可能的子集长度（1 到 n）对于每个长度 k，将 dp_sum[k] / k 加到总和中这样就得到了所有子集平均值的总和。

```
数组 [1, 2, 3] 的结果: 14.0
数组 [1, 2, 3, 4, 5] 的结果: 93.0
```

4.3 [5 points] Call Sum_averages with N increasing from 1 to 100, assign the output to a list called Total_sum_averages. Plot Total_sum_averages, describe what do you see.

Result:

从图中可以观察到，随着数组长度 N 的增大，所有子集平均值之和（Sum of Averages）呈现快速增长的指数趋势(左图为正常图，右图对 y 取了对数以便观察趋势)，子集数量的指数级增长主导了整个求和过程，即使单个子集的平均值很小，但数量庞大的子集使得总和呈现爆炸式增长。



5. Path counting

5.1 [5 points] Create a matrix with N rows and M columns, fill the right-bottom corner and top-left corner cells with 1, and randomly fill the rest of matrix with integer 0 or 1.

Result:

使用 matrix = [[0 for _ in range(M)] for _ in range(N)]的写法来代替传统写法：

[0 for _ in range(M)]：创建一个长度为 M 的列表，每个元素都是 0

for _ in range(M)：循环 M 次，_是约定表示不关心循环变量值的变量名

0：每次循环都放入数字 0

for _ in range(N)：外层循环 N 次

每次循环都创建一个新的长度为 M 的零列表

测试结果如下：

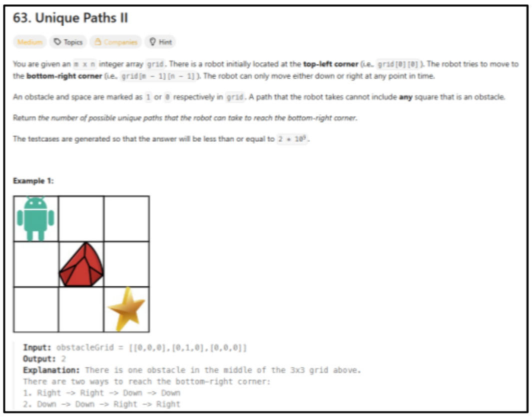
```
# 测试
matrix = create_matrix(3, 4)
for row in matrix:
    print(row)

[1, 0, 1, 0]
[0, 0, 1, 1]
[0, 1, 0, 1]
```

5.2 [25 points] Consider a cell marked with 0 as a blockage or dead-end, and a cell marked with 1 is good to go. Write a function Count_path to count total number of paths to reach the right-bottom corner cell from the top-left corner cell.

Notice: for a given cell, you are **only allowed** to move either rightward or downward.

来自于 Leecode 63 题(https://leetcode.com/problems/unique-paths-ii/)，改动了有无障碍物的状态（0 代表障碍物），也是经典的动态规划问题。



63. Unique Paths II

Medium Topics Companies Hint

You are given an m x n integer array grid. There is a robot initially located at the **top-left corner** (i.e., grid[0][0]). The robot tries to move to the **bottom-right corner** (i.e., grid[m - 1][n - 1]). The robot can only move either down or right at any point in time.

An obstacle and space are marked as 1 or 0 respectively in grid. A path that the robot takes cannot include **any** square that is an obstacle.

Return *the number of possible unique paths that the robot can take to reach the bottom-right corner.*

The testcases are generated so that the answer will be less than or equal to 2 * 10⁹.

Example 1:

```
Input: obstacleGrid = [[0,0,0],[0,1,0],[0,0,0]]
Output: 2
Explanation: There is one obstacle in the middle of the 3x3 grid above.
There are two ways to reach the bottom-right corner:
1. Right -> Right -> Down -> Down
2. Down -> Down -> Right -> Right
```

（算法思路：1.B 站 up 代码随想录 2. https://chat.deepseek.com/）

（1）状态定义

创建 dp[i][j] 表示从起点 (0,0) 到达 (i,j) 的路径数量

（2）初始化

起点 (0,0)：如果可通过，路径数为 1；如果是障碍物，路径数为 0

（3）状态转移

对于每个单元格 (i,j)：

如果是障碍物：dp[i][j] = 0（无法到达）

如果不是障碍物：路径数 = 从上面来的路径数 + 从左边来的路径数

dp[i][j] = dp[i-1][j] + dp[i][j-1]

（4）边界处理

第一行 (i=0)：只能从左边来（不能从上面来）

第一列 (j=0)：只能从上面来（不能从左边来）

时间复杂度：O(N×M)，遍历整个网格一次 空间复杂度：O(N×M)，存储 DP 表格

测试结果如下：

```
测试矩阵:
[1, 1, 0, 0, 1, 1]
[1, 0, 1, 0, 0, 0]
[1, 1, 1, 1, 0, 0]
[1, 1, 1, 0, 1, 1]
[0, 1, 1, 1, 1, 1]
[1, 0, 1, 1, 0, 1]
路径数量: 5
```

```
测试矩阵:
[1, 1, 0]
[1, 1, 1]
[1, 1, 1]
路径数量: 5
```

5.3 [5 points] Let N = 10, M = 8, run Count_path for 1000 times, each time the matrix (except the right-bottom corner and top-left corner cells, which remain being 1) is re-filled with integer 0 or 1 randomly, report the mean of total number of paths from the 1000 runs.

Result：

```
[57]: #5. Path counting
#5.3
def run_simulation():
    N = 10
    M = 8
    total_paths = 0
    runs = 1000

    for i in range(runs):
        matrix = create_matrix(N, M)
        paths = Count_path(matrix)
        total_paths += paths

    mean_paths = total_paths / runs
    return mean_paths

mean_result = run_simulation()
print(f"1000次运行的平均路径数: {mean_result}")

1000次运行的平均路径数: 0.338
```

```
[58]: #5. Path counting
#5.3
def run_simulation():
    N = 10
    M = 8
    total_paths = 0
    runs = 1000

    for i in range(runs):
        matrix = create_matrix(N, M)
        paths = Count_path(matrix)
        total_paths += paths

    mean_paths = total_paths / runs
    return mean_paths

mean_result = run_simulation()
print(f"1000次运行的平均路径数: {mean_result}")

1000次运行的平均路径数: 0.426
```