数学运算大赛

六盘水市三中数学社

内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传
内部资料，请勿外传

1 运算大赛赛题第一轮

1. 已知方程组

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8, \\ y = kx + 4 \end{cases}$$

中，k 为常数，其解有 (x_1, y_1)、(x_2, y_2). 试化简 $\Delta > 0$ 和 $y_1 \cdot y_2$.

1 答案：$\Delta > 0 \Rightarrow k^2 > \dfrac{3}{2}\ (k < -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $k > \dfrac{\sqrt{6}}{2})$.

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{-40k^2}{2k^2+1} + 16 = \frac{16 - 8k^2}{2k^2+1}.$$

2. 在方程组

$$\begin{cases} y = k(x-1), \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$$

中，k 为常数，x_1、x_2 为方程组的两个根.
试求 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 \cdot x_2$.

2 答案：

$$x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2+3} = 2 - \frac{6}{4k^2+3}.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2-12}{4k^2+3} = 1 - \frac{15}{4k^2+3}.$$

3. 在方程组

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y^2 = 8x \end{cases}$$

中 k、b 为常数，x_1、x_2 为方程组的两个根.

(1) 化简 $\Delta > 0$;

(2) 求 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 \cdot x_2$.

3 答案：$\Delta > 0 \Rightarrow kb < 2$.

$$x_1 + x_2 = \frac{8-2kb}{k^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2}{k^2}.$$

4. 关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{m} = n, \\ y = x + m \end{cases}$$

中，$m \neq 4$、$m \neq n \neq 0$，x_1、x_2 为方程组的两个根. 化简 $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$ 的值.

4 答案：

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2}{n - m}.$$

5. 直线 OB 方程为 $y=-\frac{1}{a}x$，直线 BF 方程为 $y=\frac{1}{a}(x-c)$.
求 B 点的坐标.

5 答案：$B(\frac{c}{2},-\frac{c}{2a})$.

2 运算大赛赛题第二轮

1. 关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1. \end{cases}$$

x_1、x_2 为其两个根.

(1) 化简 $\Delta > 0$;

(2) 求 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 \cdot x_2$ 的值.

1. 答案:

$\Delta > 0 \Rightarrow 3k^2 - m^2 + 2 > 0.$

$$x_1 + x_2 = \frac{-6km}{2 + 3k^2}.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m^2 - 2)}{2 + 3k^2}.$$

2. 在方程组

$$\begin{cases} y = -2(x - \sqrt{5}), \\ 15x^2 - 32\sqrt{5}x + 84 = 0 \end{cases}$$

中，(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 为其两组解. 试求 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2).

2 答案:

$$(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}),$$

$$(\frac{14\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}).$$

3. 在方程组

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

中，x_1、x_2 为其两个根.

(1) 化简 $\Delta > 0$;

(2) 求 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 \cdot x_2$ 的值.

3 答案：$\Delta > 0 \Rightarrow 4k^2 - m^2 + 3 > 0$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-8km}{4k^2+3}.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2-12}{4k^2+3}.$$

4. 在方程组

$$\begin{cases} x = my + 4, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

中，y_1、y_2 为其两个根.
求 $y_1 + y_2$ 及 $y_1 \cdot y_2$.

4 答案：

$$y_1 + y_2 = \frac{-24m}{3m^2 + 4}.$$

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{36}{3m^2 + 4}.$$

5. 在方程组

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

中 k，m 为常数. 当 $\Delta = 0$ 时，用 k、m 表示其交点的横坐标.

5. 答案：

$$(-\frac{4k}{m}, \frac{3}{m}).$$

3　积分赛

1. 在方程组

$$\begin{cases} x = my + \dfrac{m^2}{2}, \\ \dfrac{x^2}{m^2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

中，m 为常数，y_1、y_2 为其两个根. 试求 y_1 和 y_2 的值.

1. 答案：

$$y_1 = \frac{-m - \sqrt{8 - m^2}}{4},$$

$$y_2 = \frac{-m + \sqrt{8 - m^2}}{4}.$$

2. 在方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1, \\ my=nkx+n \end{cases}$$

中，m、n 均为常数且 $m\neq 0$，(x_1,y_1)、(x_2,y_2) 为其两组解. 当 $\dfrac{m}{n}=1$ 时，求 x_1 和 x_2 的值.

2. 答案：

$$x_1=\frac{-25k-5\sqrt{375k^2+265}}{25k^2+16},$$

$$x_2=\frac{-25k+5\sqrt{375k^2+265}}{25k^2+16}.$$

3. 在方程组

$$\begin{cases} x = my + \sqrt{3}, \\ \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

中，m 为常数，(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 为其两组解. 试求 y_1 和 y_2 的值.

3. 答案：

$$y_1 = \frac{-\sqrt{3}m - \sqrt{6 + 6m^2}}{m^2 + 2},$$

$$y_2 = \frac{-\sqrt{3}m + \sqrt{6 + 6m^2}}{m^2 + 2}.$$

4. 在方程

$$\frac{a}{m}x^3 + 9x^2 + 6mx + m^2 = 0$$

中，当 $\dfrac{3a^2 - 9a}{\frac{a-3}{m}} = 0$ 有意义时，求 x 的值.

4. 答案：

$$x = -\frac{m}{3}\ (m \neq 0).$$

5. 在关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = -\dfrac{y_0}{2}x + b \end{cases}$$

中，当方程只有一组解时，求 b 与 y_0 的关系.

5. 答案：

$$b = -\frac{2}{y_0}.$$

6. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

其中，a，b，c 为常数.

6. 答案：

$$x_1 = \frac{2a^2 c}{a^2 + c^2}; y_1 = \frac{b(c^2 - a^2)}{a^2 + c^2}.$$

$$x_2 = 0; y_2 = b.$$

7. 在关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

中，$a\neq 0$，$b\neq 0$，(x_1,y_1)、(x_2,y_2) 为其两组解. 求 y_1 和 y_2.

7. 答案：

$$y_1=\frac{-2b^2-ab\sqrt{a^2+4b^2-1}}{a^2+4b^2},$$
$$y_2=\frac{-2b^2+ab\sqrt{a^2+4b^2-1}}{a^2+4b^2}.$$

8. 在方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1, \\ \quad y = kx - 5 \end{cases}$$

中 k 为常数，有两组解 (x_1, y_1)、(x_2, y_2). 求 y_1 和 y_2.

8. 答案:

$$y_1 = \frac{15 - 4k\sqrt{21 - 3k^2}}{4k^2 - 3},$$

$$y_2 = \frac{15 + 4k\sqrt{21 - 3k^2}}{4k^2 - 3}.$$

9. 在方程组

$$\begin{cases} y^2 = 3px, \\ y = x + m \end{cases}$$

中，p、m 为常数，有两组解 (x_1, y_1)、(x_2, y_2). 试求 y_1 和 y_2 的值.

9. 答案:

$$y_1 = \frac{3p - \sqrt{9p^2 - 12pm}}{2},$$
$$y_2 = \frac{3p + \sqrt{9p^2 - 12pm}}{2}.$$

10. 在方程组

$$\begin{cases} x^2+3y^2=6, \\ kx+2y-4=0 \end{cases}$$

中，k 为常数，(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 为其两组解. 求 y_1 和 y_2 的值.

10. 答案：

$$y_1 = \frac{8-k\sqrt{18k^2-24}}{3k^2+4},$$

$$y_2 = \frac{8+k\sqrt{18k^2-24}}{3k^2+4}.$$

11. 在关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases} mx^2 + ny^2 = 2, \\ y = -kx + 1, \end{cases}$$

求 x_1 和 x_2.

11. 答案:

$$x_1 = \frac{-kn - \sqrt{2k^2n - mn + 2m}}{k^2n + m},$$
$$x_2 = \frac{-kn + \sqrt{2k^2n - mn + 2m}}{k^2n + m}.$$

12. 在方程组

$$\begin{cases}3x^2-y^2-3=0,\\ \quad y=-2x+m\end{cases}$$

有两组解 (x_1,y_1)、(x_2,y_2). 求 y_1^2 和 y_2^2.

12. 答案:

$$y_1^2=21m^2-12-12m\sqrt{3m^2-3},$$

$$y_2^2=21m^2-12+12m\sqrt{3m^2-3}.$$

13. 方程组

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1, \\ kx - y + b = 0 \end{cases}$$

中，k、b 为常数，(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 为其两组解. 求 x_1 和 x_2.

13. 答案：

$$y_1 = \frac{kb - 2\sqrt{b^2 - k^2 + 4}}{4 - k^2},$$

$$y_2 = \frac{kb + 2\sqrt{b^2 - k^2 + 4}}{4 - k^2}.$$

14. 关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

有两组解 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)， 求 x_1 和 x_2.

14. 答案：

$$x_1 = \frac{-a^2km - a\sqrt{2a^2k^2m^2 - a^2b^2k^2 + b^2m^2 + b^4}}{a^2k^2 + b^2},$$

$$x_2 = \frac{-a^2km + a\sqrt{2a^2k^2m^2 - a^2b^2k^2 + b^2m^2 + b^4}}{a^2k^2 + b^2}.$$

15. 关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases} x = my + \sqrt{3}, \\ \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

有两组解 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，求 x_1 和 x_2.

15. 答案：

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3} - m\sqrt{6m^2+6}}{m^2+2},$$
$$x_2 = \frac{2\sqrt{3} + m\sqrt{6m^2+6}}{m^2+2}.$$