Algebra 2 - Zestaw 13

Wojciech Szlosek

May 2020

1 Zadanie 3

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 3 \\ x \equiv 10 \pmod 4 \\ x \equiv 8 \pmod 7 \end{cases}$$

Zmieńmy nieco treść zadania (na wersję równoznaczną), ale lepiej działającą na wyobraźnię.
Na osi liczbowej zaznaczone są liczby całkowite. W punktach $x_A = 4$, $x_B = 10$, $x_C = 8$ znajdują się kolejno pionki A, B, C. Każdy z nich może poruszać się w lewo lub prawo, wykonując kroki o długościach kolejno $n_A = 3$, $n_B = 4$, $n_C = 7$. Wyznacz wszystkie punkty, w których mogą się spotkań wszystkie trzy pionki jednocześnie.

W zbiorze liczb całkowitych zdefiniujmy trzy ideały: $I_1 = 3Z$, $I_2 = 4Z$, $I_3 = 7Z$. 3, 4, 7 są liczbami względnie pierwszymi (NWD(3,4) = NWD(4,7) = NWD(7,3) = 1. Stwierdzamy zatem, że:

$$I_1 + I_2 = Z; I_2 + I_3 = Z; I_1 + I_3 = Z$$

Dochodzimy teraz do następujących wniosków:

$$x - x_A \in 3Z \Leftrightarrow Ek_A \in Z : x = x_A + 3k_A$$

$$x - x_B \in 4Z \Leftrightarrow Ek_B \in Z : x = x_B + 4k_B$$

$$x - x_C \in 7Z \Leftrightarrow Ek_C \in Z : x = x_C + 7k_C$$

Liczba x jest więc numerem pola, do którego pionek A dotrze z pola x_A po wykonaniu k_A kroków o długości 3, analogicznie dla B oraz C. Tym sposobem wszystkie pionki spotkają się na polu o numerze x, wyznaczmy zatem tenże.

$$I_1 \cap I_2 = 3 \cdot 4Z = 12Z$$

$$I_2 \cap I_3 = 4 \cdot 7Z = 28Z$$

$$I_1 \cap I_3 = 3 \cdot 7Z = 21Z$$

$$I_1 + I_2 \cap I_3 = 3Z + 28Z = Z$$
$$I_2 + I_1 \cap I_3 = 4Z + 21Z = Z$$
$$I_3 + I_1 \cap I_2 = 7Z + 12Z = Z$$

Przedstawmy liczby x_A, x_B, x_C w następujących postaciach:

$$x_A = a_1 + b_1; a_1 \in 3Z, b_1 \in 28Z$$
$$x_B = a_2 + b_2; a_2 \in 4Z, b_2 \in 21Z$$
$$x_C = a_3 + b_3; a_3 \in 7Z, b_3 \in 12Z$$

Aby to osiągnąć, zacznijmy od tego, by liczbę 1 przedstawić w takiej postaci. Szukamy więc takich liczb $m_1, k_1, m_2, k_2, m_3, k_3 \in Z$, takich że:

$$\begin{cases} 1 = 3m_1 + 28k_1 \\ 1 = 4m_2 + 21k_2 \\ 1 = 7m_3 + 12k_3 \end{cases}$$

Znalezione rozwiązania to:

$$\begin{cases} 1 = (-93) \cdot 3 + 10 \cdot 28 \\ 1 = (-5) \cdot 4 + 1 \cdot 21 \\ 1 = (-5) \cdot 7 + 3 \cdot 12 \end{cases}$$

Teraz możemy przedstawić x_A, x_B, x_C w postaci:

$$\begin{cases} x_A = 4 = 4 \cdot 1 = 4 \cdot ((-93) \cdot 3 + 10 \cdot 28) = (-372) \cdot 3 + 40 \cdot 28 \\ x_B = 10 \cdot 1 = 10 \cdot ((-5) \cdot 4 + 1 \cdot 21) = (-50) \cdot 4 + 10 \cdot 21 \\ x_C = 8 \cdot 1 = 8 \cdot ((-5) \cdot 7 + 3 \cdot 12) = (-40) \cdot 7 + 24 \cdot 12 \end{cases}$$

$$x = b_1 + b_2 + b_3 = 40 \cdot 28 + 10 \cdot 21 + 24 \cdot 12 = 1618$$

Liczba ta powinna być rozwiązaniem naszego zadania, dla sprawdzenia obliczmy:

$$1618 - 1614 = 3 \cdot 538 \Leftrightarrow x = x_A + 3 \cdot 538$$

, analogicznie:

$$x = x_B + 4 \cdot 402$$
$$x = x_C + 7 \cdot 230$$

Oznacza to, że pionek A dojdzie na pole $x = 1618$ po wykonaniu 538 kroków w prawo (itd. dla B oraz C). Ponadto, jeżeli punkt $y \in Z$ jest innym punktem spotkań wszystkich trzech pionków, to musi spełniać warunek:

$$x - y \in I_1 \equiv I_2 \equiv I_3 = 3 \cdot 4 \cdot 7Z = 84Z$$
$$y = 1618 + 84k, k \in Z$$

(Odp.) Pole na których mogą się spotkać wszystkie trzy pionki równocześnie mają numery postaci $y = 1618 + 84k$, $k \in Z$.

2 Zadanie 4, (a)

Będziemy korzystać z tabelki działań w $Z_4[X]$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3$$
$$g(x) = 3x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 3x^2 + 3x + 3) : (3x^2 + x + 1) = 2x + 3 \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2 + 2x)} \\
\quad x^2 + x + 3 \\
\quad \underline{-(x^2 + 3x + 3)} \\
\qquad r = 2x
\end{array}$$

$$deg(r) = deg(q) = 1$$

$$f(x) = qg + r = (2x + 3)(3x^2 + x + 1) + 2x$$

Nie istnieją jednak wielomiany $q, r \in Z_4[X]$, takie że $deg(r) < deg(q)$ i $f = qg + r$.

3 Zadanie 4, (c)

Będziemy korzystać z tabelki działań w $Z_4[X]$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3$$

$$g(x) = 2x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 + 3x^2 + 3x + 3) : (2x^2 + x + 1) = x + 1 \\
\underline{-(2x^3 + x^2 + x)} \\
\quad\quad 2x^2 + 2x + 3 \\
\quad \underline{-(2x^2 + x + 1)} \\
\quad\quad\quad r = x + 2
\end{array}$$

$$deg(r) = deg(q) = 1$$

$$f(x) = qg + r = (x + 1)(2x^2 + x + 1) + x + 2$$

Nie istnieją jednak wielomiany $q, r \in Z_4[X]$, takie że $deg(r) < deg(q)$ i $f = qg + r$.

4 Zadanie 5

Będziemy korzystać z tabelki działań w $Z_7[X]$.

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

$$f(x) = 6x^3 + 3x^2 + 4x + 1$$

$$g(x) = x^2 + 5x + 1$$

$$\begin{array}{l}
(6x^3 + 3x^2 + 4x + 1) : (x^2 + 5x + 1) = 6x + 1 \\
\underline{-(6x^3 + 2x^2 + 6x)} \\
\quad x^2 + 5x + 1 \\
\underline{-(x^2 + 5x + 1)} \\
\quad r = 0
\end{array}$$

Stąd: $f(x) = (6x + 1)g(x) = (6x + 1)(x^2 + 5x + 1) + 0$.
Zatem $NWD(f, g) = g(x) = x^2 + 5x + 1$