# Zadanie 1a

$$\int\int_R \frac{dx\ dy}{(x+y+1)^3}; \quad R = [0,2]\ x\ [0,1]$$

$$\int\int_R \frac{dx\ dy}{(x+y+1)^3} = \int_0^2 dx \int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^3} dy = \int_0^2 [\frac{-1}{2(x+y+1)^2}]_0^1 dx = \int_0^2 [\frac{-1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}] dx =$$
$$= [\frac{-1}{2(x^2+3x+2)}]_0^2 = \frac{5}{24}$$

# Zadanie 3a

$$x^2 + y = 2; \quad y^3 = x^2$$

Rozwiążemy układ równań: $x^2 + y = 2$ i $y^3 = x^2$. Stąd mamy dwa "przypadki": $x = -1, y = 1$ lub $x = 1, y = 1$. Dalej stwierdzamy:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \sqrt[3]{x^2} \leqslant y \leqslant 2 - x^2$$

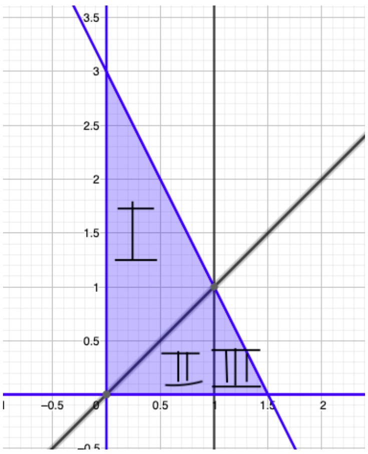
Stąd:

$$\int\int_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2} f(x,y)\ dy$$

# Zadanie 4c

$$\int\int_D |x-y| dx\ dy \qquad D = \{(x,y) \in R^2 : x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 3 - 2x\}$$

Rozważmy poniższy rysunek. Przedstawia on obszar zadany przez $D$. Dodatkowo została dodana funkcja $y = x$ oraz prosta $x = 1$. Dzięki temu podzieliliśmy obszar na trzy "podobszary": I, II, III.




Zauważmy (z wykresu możemy odczytać wszystkie interesujące nas współrzędne), że w obszarze oznaczonym przez I: max X = 1, max Y = 3. Skoro $1 - 3 < 0$, to musimy zmienić znak na przeciwny. Rozważając pozostałe dwa obszary, taka różnica jest nieujemna, stąd zostawiamy znak bez zmiany.

Mamy więc:

$$I: \int_0^1 \Big( \int_x^{-2x+3} (-x+y) dy \Big) dx = \int_0^1 \Big[ \frac{y^2}{2} - xy \Big]_x^{-2x+3} dx = \int_0^1 \frac{9}{2}(x-1)^2 dx = \Big[ \frac{9}{2}(\frac{x^3}{3} - x^2 + x) \Big]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$II: \int_0^1 \Big( \int_0^x (x-y) dy \Big) dx = \int_0^1 \Big[ xy - \frac{y^2}{2} \Big]_0^x dx = \int_0^1 (x^2 - \frac{x^2}{2}) dx = \Big[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} \Big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$III: \int_1^{\frac{3}{2}} \Big( \int_0^{-2x+3} (x-y) dy \Big) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \Big[ xy - \frac{y^2}{2} \Big]_0^{-2x+3} dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (-2x^2 + 3x - \frac{(-2x+3)^2}{2}) dx =$$

$$= \left[\frac{-x^4 + 3x^2}{2} + \frac{(-2x+3)^3}{12}\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{24}$$

Odpowiedź: $I + II + III = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} + \frac{5}{24} = \frac{15}{8}$