Zadanie 1b

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (x_0,y_0) = (0,0)$$

Obliczamy z definicji:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = 0$$

Oznaczmy: niech $w = \Delta x, k = \Delta y$. Zgodnie z podręcznikiem, sprawdźmy czy podana niżej granica będzie równa 0, ten warunek pozwoli nam stwierdzić, że funkcja jest różniczkowalna.

$$\lim_{(w,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+w, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)w - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{w^2+k^2}} = \lim_{(w,k)\to(0,0)} \frac{(w^2+k^2)\sin\frac{1}{w^2+k^2}}{\sqrt{w^2+k^2}}$$

Zajmijmy się oszacowaniem z modułem, mianowicie zauważmy:

$$\left|\frac{(w^2+k^2)\sin\frac{1}{w^2+k^2}}{\sqrt{w^2+k^2}}\right| \leqslant \frac{w^2+k^2}{\sqrt{w^2+k^2}} = \sqrt{w^2+k^2} \to 0$$

Skoro wyeażenie po prawej stronie dąży do zzera, to wyrażenie w module również dąży do 0 przy oszacowaniu sinusa przez 1.

Zatem granica wynosi 0, a więc funkcja jest różniczkowalna. (odp.)

Zadanie 3b

Przyjmijmy: $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+y^3+z^3)^2}} \cdot (x^3+y^3+z^3)'_x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3+z^3)^2}}$$

Analogicznie:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3+z^3)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3+z^3)^2}}$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

Niech $x = 3, y = 4, z = 5; \Delta x = -0.07, \Delta y = 0.05, \Delta z = -0.01$. Mamy wtedy:

$$f(3,4,5) = \sqrt[3]{3^3+4^3+5^3} = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,4,5) = \frac{3^2}{\sqrt[3]{(3^3+4^3+5^3)^2}}$$

Podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4,5) = \frac{16}{36}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(3,4,5) = \frac{25}{36}$.

$$\Delta f = \frac{9}{36} * (-0.07) + \frac{16}{36}\cdot 0.05 + \frac{25}{36}\cdot(-0.01) = \frac{-1}{450}$$

Ostatecznie mamy:

$$\sqrt[3]{(2.93)^3+(4.05)^3+(4.99)^3} = f(3,4,5) - \Delta f = 6 - \frac{1}{450} = 5\frac{449}{450}$$

Zadanie 5b

$$z = f(u,v,w) = \arcsin\frac{u}{v+w} (: u = e^{\frac{x}{y}}, v = x^2+y^2, w = 2xy)$$

Obliczamy:

$$z_x^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{v+w})^2}} \cdot \frac{u^{'}(v+w) - u(v+w)^{'}}{(v+w)^2}$$

$$z_y^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{v+w})^2}} \cdot \frac{u^{'}(v+w) - u(v+w)^{'}}{(v+w)^2}$$

$$u_x^{'} = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}; u_y^{'} = \frac{-xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}; (v+w)_x^{'} = 2x+2y = (v+w)_y^{'}$$

A zatem (po drodze wykorzystamy m.in. wzór na pochodną iloczynu):

$$z_x^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{e^{\frac{2x}{y}}}{(x+y)^4}}} \cdot \frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}(x+y)^2 - \frac{y\cdot e^{\frac{x}{y}}(2x+2y)}{y}}{(x+y)^4} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{e^{\frac{2x}{y}}}{(x+y)^4}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{y}}(x^2+2xy+y^2-2xy-2y^2)}{y(x+4)^4} =$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)(x-y)}{\sqrt{y^2(x+y)\cdot(1-\frac{e^{\frac{2x}{y}}}{(x+y)^4})}} = \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)(x-y)}{y(x+y)^2\cdot\sqrt{(x+y)^4 - e^{\frac{2x}{y}}}} = \frac{e^{\frac{x}{y}}(x-y)}{y(x+y)\cdot\sqrt{(x+y)^4 - e^{\frac{2x}{y}}}}$$

$$z_y^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{e^{\frac{2x}{y}}}{(x+y)^4}}} \cdot \frac{\frac{-e^{\frac{x}{y}}}{y^2}(x+y)^2 - \frac{y^2(2x+2y)\cdot e^{\frac{x}{y}}}{y^2}}{(x+y)^4} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{e^{\frac{2x}{y}}}{(x+y)^4}}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{y}}\cdot(-x^2-2xy-y^2+2xy^2+2y^3)}{y^2(x+y)^4} =$$

$$= \frac{-e^{\frac{x}{y}}(x^2+2xy+y^2-2xy^2-2y^3)}{\sqrt{y^4(x+y)^8[1-\frac{e^{\frac{2x}{y}}}{(x+y)^4}]}} = \frac{-e^{\frac{x}{y}}(x^2+2xy+y^2-2xy^2-2y^3)}{y^2(x+y)^2\sqrt{(x+y)^4 - e^{\frac{2x}{y}}}} = \frac{-e^{\frac{x}{y}}(x+y-2y^2)}{y^2(x+y)\sqrt{(x+y)^4 - e^{\frac{2x}{y}}}}$$