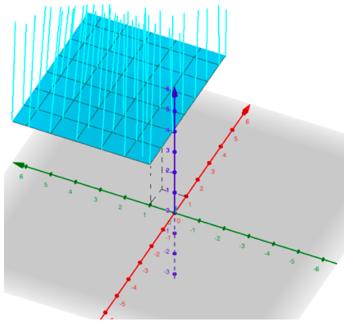
Zadanie 2c

$$h(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2}$$

Z łatwością sprawdzamy, że dziedzina funkcji h jest następująca:

$$D_h = \{(x,y,z) \in R^3 : x \geqslant 0, y \geqslant 1, z \geqslant 2\}$$



Zadanie 5g

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y}$$

Rozważmy dwa ciągi $(x_n^{'}, y_n^{'}), (x_n^{''}, y_n^{''})$ zbieżne do (0,0), takie, że wartości funkcji $f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y}$ odpowiadające wyrazom tych ciągów są zbieżne do różnych granic. Niech więc $(x_n^{'}, y_n^{'}) = (0, \frac{1}{n})$ i $(x_n^{''}, y_n^{''}) = (\frac{\sqrt{n+1}}{n}, \frac{-1}{n})$. Wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n^{'})^4 + (y_n^{'})^4}{(x_n^{'})^2 + y_n^{'}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 + \frac{1}{n^4}}{0 + \frac{1}{n}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n^{''})^4 + (y_n^{''})^4}{(x_n^{''})^2 + y_n^{''}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{n^4} + \frac{1}{n^4}}{\frac{n+1}{n^2} - \frac{n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2} = 1$$

Zaiste, otrzymaliśmy różne granice, więc granica rozważana w zadaniu nie istnieje.

Zadanie 6a

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{dla } x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Oczywistym jest ciągłość funkcji poza przypadkiem granicznym (jako złożenie funkcji ciągłych), budzącym wątpliwości. Z definicji (podręcznik, 3.4.1), mamy, że funkcja jest ciągła w punkcie $(x_0, y_0)[(x_0, y_0) \in R^2$ i funkcja określona na otoczeniu $O(x_0, y_0)]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$. Określmy dwa "przypadki", dwie półpłaszczyzny: gdy $x^2+y^2 \leqslant 1 (ozn.\pi_-)$, gdy $x^2+y^2 > 1 (ozn.\pi_+)$.

$$\lim_{(x,y)[\in\pi_-]\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \sqrt{1-(x_0)^2-(y_0)^2} = f(x_0,y_0)$$

$$\lim_{(x,y)[\in\pi_+]\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,y_0)$$

Zatem, wraz z wnioskiem o ciągłości reszty punktów, można stwierdzić, że funkcja jest ciągła.
Odp.: R^2