Zadanie 1c

Mamy spółczynniki kierunkowe prostych - $k : (a1, a2, a3) = (1, 1, 0)$ x $(0, 1, 1) = (1, -1, 0)$, $l : (b1, b2, b3) = (1, -1, 0)$ x $(0, 0, 1) = (-1, -1, 0)$. Zauważmy, że np. punkt $P(0, 1, -1)$ należy do prostek k, a $R(0, 3, 2)$ do prostej l. Wyznaczmy równania kierunkowe prostych:

$$k : \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0} \qquad l : \frac{x-0}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$$

Wektor normalny płaszczyzn: $(1, -1, 0)$ x $(-1, -1, 0) = (0, 0, -2)$ Równania płaszczyzn zawierające dane proste:

$$\pi_k = 0(x-0) + 0(y-1) - 2(z+1) = 0 \implies z = -1$$
$$\pi_l = 0(x-0) + 0(y-3) - 2(z-2) = 0 \implies z = 2$$

Stąd odległość wynosi:

$$d = \frac{|-2-4|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2}} = 3$$

Zadanie 1d

Dziedzina (D): $a, b, c > 0$. Wiemy, że $V = abc = 216$, stąd $c = \frac{V}{ab} = \frac{216}{ab}$. Koszt budowy określmy pewną funkcją f.

$$f = 30 \cdot 2(a+b) \cdot c + 40ab + 20ab = 60V \cdot \frac{a+b}{ab} + 60ab$$
$$f_a^{'} = \frac{-60V}{a^2} + 60b \qquad f_b^{'} = \frac{-60V}{b^2} + 60a$$

Przyrównując pochodne przy odpowiednich zmiennych do zera, mamy:

$$\frac{-60V}{a^2} + 60b = 0 \implies V = a^2 b$$
$$\frac{-60V}{b^2} + 60a = 0 \implies V = ab^2$$

Stąd mamy, że $a = b = 216^{\frac{1}{3}} = 6$ m.
Obliczając drugie pochodne, a następnie podkładając te do wiadomego wyznacznika, mamy, że $W(6, 6) = 120 \cdot 120 - (60 \cdot 60) > 0$. A zatem rzeczywiście jest tam ekstremum (powiem więcej: minimum lokalne) Pora na krótkie uzasadnienie globalności. Zbadajmy zachowanie się funkcji kiedyż punkt $(x, y) \in D$ dąży do brzegu obszaru D. Mamy więc dwie (analogiczne) granice, które (jak się okazuje, podstawiając do nich nasze dane) dążą do nieskończoności. Stąd uzasadnienie globalności.

Ze wzoru na c, mamy, że również i $c = 6$ m.
Odpowiedź: a = b = c = 6 m.

Zadanie 2a

$$f(x, y) = x^3 + x - y^3 - y = 0, \qquad (2, 2)$$

Równanie stycznej do krzywej w punkcie (x_0, y_0) ma postać:

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

Obliczamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = 13$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 - 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = -13$$

Zatem, podstawiając do wzoru, mamy odpowiedź, że równanie ma postać:

$$y - 2 = -\frac{13}{-13}(x - 2) \implies y = x$$