Zadanie 2b

$$\int\int\int_U z\ln(x^y y^x)\ dxdydz \qquad U = [1, e]x[1, e]x[0, 1]$$

Korzystając, z tego, że: $\ln(x^y y^x) = \ln(x^y) + \ln(y^x) = y\ln(x) + x\ln(y)$, mamy:

$$\int\int\int_U z\ln(x^y y^x)\ dxdydz = \int\int\int_U z(y\ln(x) + x\ln(y)) = \int\int\int_U zy\ln(x) + \int\int\int_U zx\ln(y) =$$

$$= \Big(\int_0^1 z\ dz\Big)\cdot\Big(\int_1^e y\ dy\Big)\cdot\Big(\int_1^e \ln(x)\ dx\Big) + \Big(\int_0^1 z\ dz\Big)\cdot\Big(\int_1^e \ln(y)\ dy\Big)\cdot\Big(\int_1^e x\ dx\Big)$$

Zadanie 3c

$$z = x^2 + y^2 \qquad z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$$

Równania z treści przedstawiają dwie (zwrócone przeciwnie) paraboloidy, nasz obszar U będzie przestrzenią nad $z = x^2 + y^2$ oraz pod paraboloidą $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$. Niech rzut obszaru U na płaszczyznę będzie oznaczony przez D - ma on postać koła wyznaczonego przez przecięcie obu paraboloid, a więc wystarczy rozwiązać równanie $x^2 + y^2 = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$. Rozważmy pomocnicze zmienne a = x^2, b = y^2. Mamy po podniesieniu obustronnie do kwadratu:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 20 - x^2 - y^2$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2 - 20 = 0$$

$$a^2 + b^2 + 2ab + a + b - 20 = 0$$

$$a^2 + a(2b + 1) + b^2 + b - 20 = 0$$

Rozwiązując to równanie kwadratowe (np. za pomocą delty), mamy dwa rozwiązania:

$$a_1 = 4 - b \qquad a_2 = -5 - b$$

A zatem: $x^2 = 4 - y^2$ lub $x^2 = -5 - y^2$ Pamiętając, że $x^2, y^2 \geqslant 0$, eliminujemy jeden przypadek i dostajemy wniosek: $x^2 + y^2 = 4$. Zatem nrozważany rzut obszaru D jest wyznaczony poprzez nierówność koła: $x^2 + y^2 \leqslant 4$ - koło o środku w punkcie (0,0) i promieniu równym 2. Obszar normalny względem osi OX: $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-\sqrt{4 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}$ oraz rozważenie ograniczeń z (z treści zadania): $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

Ostatecznie otrzymujemy więc odpowiedź do zadania:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{20-x^2-y^2}} f(x, y, z)\ dz$$

Zadanie 4a

Od razu widzimy i możemy rozpisać określenie obszaru całkowania U, mamy 'warunki':

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2 - 2x \qquad 0 \leqslant z \leqslant 3 - 3x - \frac{3}{2}y$$

Zauważmy, że w naszym przykładzie mamy 6 możliwości co do kolejności całkowania (wyczerpujemy wszystjie możliwości), tj.:

$$I. \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2 - 2x \qquad 0 \leqslant z \leqslant 3 - 3x - \frac{3}{2}y$$

$$II. \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant z \leqslant 3 - 3x \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2 - 2x - \frac{2}{3}y$$

$$
\begin{aligned}
&III. \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 \quad 0 \leqslant z \leqslant 3 - \frac{3}{2}y \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{3}z - \frac{1}{2}y \\
&IV. \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{2}y \quad 0 \leqslant z \leqslant 3 - 3x - \frac{3}{2}y \\
&V. \quad 0 \leqslant z \leqslant 3 \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{3}z \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 - 2x - \frac{2}{3}z \\
&VI. \quad 0 \leqslant z \leqslant 3 \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 - \frac{2}{3}z \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{3}z - \frac{1}{2}y
\end{aligned}
$$

Skąd wzięły się takie przypadki? Przedstawmy na podstawie ostatniego przypadku: rozważamy $0 \leqslant z \leqslant 3 - \frac{3}{2}y$, z tego mamy $0 \leqslant \frac{3}{2}y \leqslant 3 - z$, a więc ostatecznie $0 \leqslant y \leqslant 2 - \frac{2}{3}z$ - co wstawiamy do naszych warunków w danym przypadku. Resztę możliwości rozważamy całkowicie analogicznie.

Zauważmy ponadto, że przypadek $I.$ to przypadek rozpatrywany w treści zadania. Odpowiedzią do zadania będzie zatem sześć całek, które wypiszę w powyższej kolejności rozważanych przypadków:

$$\int_0^1 \, dx \int_0^{2-2x} \, dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z) \, dz$$

$$\int_0^1 \, dx \int_0^{3-3x} \, dz \int_0^{2-2x-\frac{2}{3}z} f(x,y,z) \, dy$$

$$\int_0^2 \, dy \int_0^{3-\frac{3}{2}y} \, dz \int_0^{1-\frac{1}{3}z-\frac{1}{2}y} f(x,y,z) \, dx$$

$$\int_0^2 \, dy \int_0^{1-\frac{1}{2}y} \, dx \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z) \, dz$$

$$\int_0^3 \, dz \int_0^{1-\frac{1}{3}z} \, dx \int_0^{2-2x-\frac{2}{3}y} f(x,y,z) \, dy$$

$$\int_0^3 \, dz \int_0^{2-\frac{2}{3}z} \, dy \int_0^{1-\frac{1}{3}z-\frac{1}{2}y} f(x,y,z) \, dx$$