Zadanie 3b

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$$

Zacznijmy od obliczenia promienia zbieżności, mamy:

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n(x-2)^n}{(n+1)(x-2)^n}| = 1$$

Zatem z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda rozważany szereg jest zbieżny dla każdego $x \in (2-1, 2+1) \implies x \in (1,3)$ oraz ewentualnie na końcach tego przedziału, wcześniej należało oczywiście zauważyć, że $x_0 = 2$.
Zbadajmy teraz jego zbieżność w x=1 i x=3.
Dla x=1 szereg ma postać $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n$. Jest on rozbieżny, co łatwo można uzasadnić sprawdzając np. podciąg z wyrazami parzystymi i nieparzystymmi. Dla parzystych granica przy $n \to \infty$ dąży do ∞, z kolei dla parzystych do $-\infty$. Jest więc rozbieżny.
Sprawdźmy teraz dla x=3 (szereg ma postać $\sum_{n=1}^{\infty} n1^n$) i widzimy, że tenże również jest rozbieżny. Ostatecznie więc przedział (1,3) jest przedziałem zbieżności badanego szeregu. (odp.)

Zadanie 4e

Definiujemy $sh(x)$ jako $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, ponadto rozwinięcie e^x w szereg Maclaurina wynosi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, gdzie $x \in R$. Dalej mamy rozwinięcia:

$$sh(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{x^n}{n!} - \frac{(-1)^n x^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!}$$

Zauważmy, że dla pewnego n-parzystego $(1-(-1)^n) = 0$, z kolei dla nieparzystego (ozn. n-NP, dodatkowo: wiemy, że przyjmuje postać 2k+1, gdzie k-całkowite) = 2.Mamy więc:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n-NP}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x^n}{n!} = \sum_{n-NP}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in R$$

Zadanie 5a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}; |x| = |\frac{1}{2}| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x t^n \right) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n \right) dt = \frac{-1}{x} \left(\int_0^x \left(\frac{t}{t-1} \right) dt \right) = (*)$$

Podstawmy, niech $u = t-1, du = dt$, musimy również zmienić granice całkowania, skoro $u = t-1$, to nowymi granicami będzie -1 oraz x-1, mamy zatem:

$$(*) = \frac{-1}{x}([u + \ln|u|]_{-1}^{x-1}) = \frac{-1}{x} \cdot [x - 1 + \ln|x-1| + 1] = -1 - \frac{\ln|x-1|}{x}$$

Teraz wystarczy podstawić: $x = \frac{1}{2}$. Wtedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = -1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} + 1 = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2$$