Zadanie 1b

$$\int_0^\infty 2^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T 2^{-x}\,dx = ...$$

Niech $t=-x, dx=-dt$, wówczas po podstawieniu:

$$... = \lim_{T\to\infty} -\int_0^T 2^t\,dt = \lim_{T\to\infty}[\frac{-2^t}{\ln 2}]_0^T = \lim_{T\to\infty}[\frac{-2^{-x}}{\ln 2}]_0^T = \lim_{T\to\infty}\frac{-\frac{1}{2^T}+1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Zatem badana całka jest zbieżna. (odp.)

Zadanie 2a

$$\int_{10}^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx$$

Dla każdego $x \geqslant 10$, prawdziwym jest, że: $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}-3}$, ponadto:

$$* = \int_{10}^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_{10}^T x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{T\to\infty}[2\sqrt{x}]_{10}^T = \infty$$

Zatem całka (*) jest rozbieżna do ∞. Z kryterium porównawczego wynika rozbieżność do ∞ również badanej całki wejściowej. (odp.)

Zadanie 5e

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{x^4}\,dx$$

Przyjmując w kryterium ilorazowym zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju: $f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^4}$ i $g(x)=\frac{1}{x}$, mamy:

$$k = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^3 x}{x^3} = 1$$
$$0<k<\infty$$

Zbadajmy zbieżność:

$$\int_0^\pi \frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to 0^+}\int_T^\pi \frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to 0^+}[\ln x]_T^\pi = \lim_{T\to 0^+}(\ln\pi - \ln T) = \infty$$

Zatem badana całka wejściowa również jest rozbieżna. (odp.)