AM1 - Zestaw 12

Wojciech Szlosek

May 2020

1 Zadanie 2, (e)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x})dx = [\frac{e^{2x}(\sin x + 2\cos x)}{5}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\pi}(1+0)}{5} - \frac{1(0+2)}{5} = \frac{e^{\pi}-2}{5}$$

2 Zadanie 3, (a)

W tym zadaniu wykorzystamy wiadomy wzór:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})]$$

Zatem do tego wzoru możemy przyjąć $[a,b] = [0,1]$ oraz $f(x) = x^3$, gdzie f jest funkcją ciągłą i całkowalną na podanym przedziale. Wówczas mamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + ... + n^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^3] = \int_0^1 x^3 dx = [\frac{x^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Co nakazano dowieść.

3 Zadanie 7, (a)

$$\int_0^1 e^x \sqrt[6]{1+x^3}dx$$

Zauważmy, że dla każdego x z przedziału $[0,1]$ prawdziwa jest zależność:

$$e^0\sqrt[6]{1+0} \leqslant e^x\sqrt[6]{1+x^3} \leqslant e^1\sqrt[6]{1+1}$$

Zatem:

$$1 \leqslant \int_0^1 e^x\sqrt[6]{1+x^3} \leqslant e\sqrt[6]{2}$$