Algebra 2 - Zestaw 12

Wojciech Szlosek

May 2020

1 Zadanie 1, (a)

$\forall x \in R \ 0 \cdot x = 0$ i $x \cdot 0 = 0$

Dowód:

Ponieważ $0 = 0 + 0$, więc (z def. pierścienia): $x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$. Skąd (z prawa skracania w grupach) mamy, że $x \cdot 0 = 0$. Analogicznie, $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ Zatem $0 \cdot x = 0$. Udowodniłem więc wejściowe własności z treści zadania. CND.

2 Zadanie 1, (b), (c)

(b) $\forall x, y \in R \ (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ i $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

Dowód: (wykorzystamy własność z podpunktu (a)

$x \cdot y + (-x) \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0$ [(a)]. Mamy zatem: $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

Analogicznie dowód wygląda dla $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. CND.

(c) $\forall x, y \in R \ (-x) \cdot (-y) = (x \cdot y)$

Dowód:

Użyjemy wniosku z poprzedniego podpunktu. Mamy: $(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(x \cdot y)) = (x \cdot y)$ CND.

3 Zadanie 5, (a)

$$Z_5$$

Możemy sobie wytłumaczyć, że w tym podpunkcie elementami odwracalnymi tutaj będą te liczby dla których największy wspólny dzielnik z 5 wynosi 1. I tak u nas:

Elementy odwracalne: $\{1, 2, 3, 4\}$.

Brak dzielników zera.

Dany pierścień jest ciałem.

4 Zadanie 5, (b)

$$Z_8$$

Analogicznie do podpunktu (a). Zatem elementami odwracalnymi są: $\{1, 3, 5, 7\}$.
Dzielnikami zera są $\{2, 4, 6\}$.
Dany pierścień nie jest ciałem.

5 Zadanie 7

$$x \cdot x^2 - (x^3 - 5) = 5 \in I$$

Niech $J \subseteq R$ będzie ideałem generowanym przez zbiór $\{5, x\}$. $5 \in I$, $x \in I$ - zatem $J \subseteq I$.

Przypuśćmy, że $J = (z)$. Wtedy $z|_{Z(x)}5$. Zatem $z = 1$ lub $z = 5$. Warto zauważyć, że $J = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}... + a_1 x + 5a_0; a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in Z\}$ (!)

Jeżeli $z = 1$, to $J = Z(x)$, co stoi w sprzeczności z (!), ponieważ $1 \notin J$ Czyli sprzeczność.
Jeżeli $z = 5$, to $x \notin J = 5Z(x)$. Sprzeczność.

(Odp.) Zatem nie jest ideałem głównym.