AM1 - Zestaw 10

Wojciech Szlosek

April 2020

1 Zadanie 2, (d)

$f(x) = x$, $f^{'}(x) = 1$
$g^{'}(x) = \frac{1}{cos^2 x}$, $g(x) = tgx$

$$\int \frac{xdx}{cos^2 x} = xtgx + \int -tgxdx = xtgx + \int \frac{sinx}{cosx}dx = xtgx + ln|cosx| + C$$

2 Zadanie 3, (j)

$$w = \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-2)^2 + 4}}dx$$

Niech $t = x - 2$, wówczas:

$$w = \int \frac{1}{-t^2 + 4}dx = arcsin(\frac{t}{2}) = arcsin(\frac{x-2}{2}) + C$$

3 Zadanie 4, (b)

$$\int e^{|x|}dx$$

Zauważmy najpierw, że funkcja $e^{|x|}$ jest ciągła na zbiorze liczb rzeczywistych, zatem istnieje na nim całka nieoznaczona. Obliczymy ją na każdym z przedziałów: $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty$.

Dla $x \leqslant 0$ mamy:

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C_1$$

Dla $0 \leqslant x$ mamy:

$$\int e^x dx = e^x + C_2$$

Całka nieoznaczona jest funkcją ciągła na zbiorze rzeczywistym. Stałe C_1 i C_2 należy dobrać w ten sposób, by funkcja F była ciągła w punkcie $x = 0$, gdzie:

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + C_1 & \text{dla x} \leqslant 0 \\ e^{x} + C_2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że z jednej strony $F(0) = -1 + C_1$, a z drugiej $F(0) = 1 + C_2$, z tego zaś wychodzi, że $C_2 = C_1 - 2$. Ponadto niech $C_1 = C$. Ostatecznie mamy więc:

$$\int e^{|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + C & \text{dla x} \leqslant 0 \\ e^{x} - 2 + C & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$