Zadanie 1c

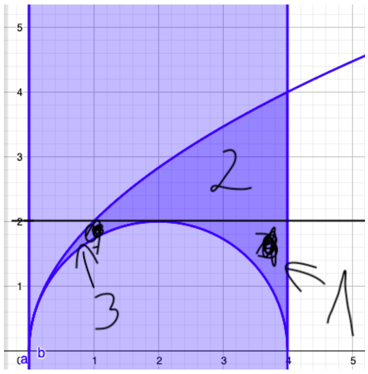
$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\ dy$$

Z tego widzimy:

$$0 \leqslant x \leqslant 3 \qquad \sqrt{4x-x^2} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}$$

Naszkicujmy zatem obszar, który jest ograniczony prostymi $x = 0$, $x = 4$ oraz funkcjami $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{4x-x^2}$. Zauważmy, że ostatnią funkcję y możemy przerobić na $y^2 = 4x-x^2 \implies (x-2)^2+y^2 = 4$, co oznacza okrąg o środku w punkcie (2,0) i promieniu 2.

Poniżej znajduje się rysunek. Dany obszar (zaznaczony ciemniejszym kolorem) podzielono dodatkowo na trzy "podobszary".



Rozważmy z rysunku, zauważając między innymi, że połowa okręgu tworzy parabolę - funkcję o wzorze $y = \frac{1}{4}y^2$ oraz zauważając, że z równości okręgu $(x-2)^2+y^2 = 4$ mamy równanie: $x = \sqrt{4-y^2}+2$:

$$(1) \quad \frac{1}{4}y^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}+2 \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

$$(2) \quad \frac{1}{4}y^2 \leqslant x \leqslant 4 \qquad 2 \leqslant y \leqslant 4$$

$$(3) \quad \sqrt{4-y^2}+2 \leqslant x \leqslant 4 \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Stąd mamy odpowiedź:

$$\int_0^2 \Big(\int_{\frac{1}{4}y^2}^{\sqrt{4-y^2}+2} f(x,y)\ dx \Big)\ dy + \int_2^4 \Big(\int_{\frac{1}{4}y^2}^{4} f(x,y)\ dx \Big)\ dy + \int_0^2 \Big(\int_{\sqrt{4-y^2}+2}^{4} f(x,y)\ dx \Big)\ dy$$

Zadanie 2b

$$\int\int_D (x^2+y^2)\ dx\ dy; \quad D: \ y \geqslant 0,\ y \leqslant x^2+y^2 \leqslant x$$

Poniżej znajduje się rysunek z widocznym obszarem D. Na początek zamieńmy x i y jako współrzędne biegunowe, czyli: $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$. Stąd:

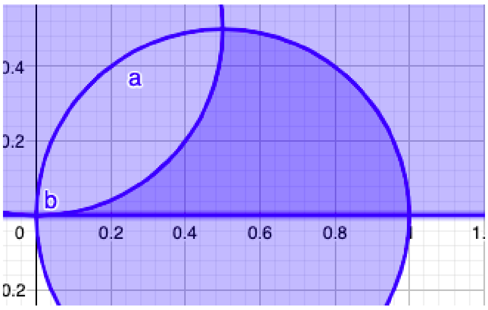
$$x^2+y^2 = r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi = r^2$$

Podstawiając do nierówności określających nasz obszar (analizujemy tylko obszar $[0,\pi]$) D:

$$r\sin\phi \leqslant r^2 \leqslant r\cos\phi \implies \sin\phi \leqslant r \leqslant \cos\phi \implies \sin\phi \leqslant \cos\phi \implies \phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Z nierówności $y \geqslant 0$:

$$r\sin\phi \geqslant 0 \implies \phi \in [0,\pi]$$



Zatem obszar całkowania Δ w nowych zmiennych określony jest nierównościami $0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\sin\phi \leqslant r \leqslant \cos\phi$. Tak więc, wobec wzoru na zamianę zmiennych w całce podwójnej, mamy:

$$\int\int_D (x^2+y^2)\ dx\ dy = \int\int_\Delta r^3 d\phi\ dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_{\sin\phi}^{\cos\phi} r^3\ dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\sin\phi}^{\cos\phi} d\phi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{\cos^4\phi - \sin^4\phi}{4}) d\phi = \frac{1}{4}\cdot\left[\sin\phi\cos^3\phi + \frac{3}{8}(\phi - \frac{\sin 4\phi}{4}) + \frac{\sin^3\phi\cos\phi}{4} - \frac{3}{8}(\phi - \frac{\sin 2\phi}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Zadanie 4b

Zauważmy najpierw, że układ równań z treści zadania możemy przeobrazić równoważnie w:

$$P1 : x^2 + (y-1)^2 = 1 = 1^2\ i\ P2 : x^2 + (y-2)^2 = 4 = 2^2$$

Stąd widzimy już, że mamy równości dwóch okręgów. Okrąg $P1$ o środku w punkcie (0,1) i promieniu długości 1 oraz P2 o środku w punkcie (0,2) i promieniu długości 2. Zatem okręgi te będą do siebie stycznie wewnętrznie. Pole obszaru ograniczonego (poprzez układ równań) to więc różnica pól: $|P1 - P2|$. Mamy:

$$P_{P1} = \pi\cdot 1^2 = \pi \qquad P_{P2} = \pi\cdot 2^2 = 4\pi$$

Stąd nasza odpowiedź to: $|P1 - P2| = 4\pi - \pi = 3\pi$.

Treść zadania nie wymagała używania całek, a powyższy sposób jest szybki i intuicyjny. Poniżej rysunek obrazujący nasze okręgi.