Algebra 2 - Zestaw 4

Wojciech Szlosek

March 2020

1 Zadanie 2

1.1 a)

W tym zadaniu skorzystamy z twierdzenia, które mówi, że suma wymiarów jadra i obrazu przekształcenia liniowego $L : U \to V$ przestrzeni skończenie wymiarowych jest równa wymiarowi przestrzeni U.

$$L(x, y, z, t) = (x + y + z - t, 2x + y - z + t, y + 3z - 3t)$$

$ImL = lin\{(1, 2, 0), (1, 1, 1), (1, -1, 3), (-1, 1, -3)\}$

$$dim(ImL) = rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} = rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$dim(KerL) = 4 - dim(ImL) = 4 - 2 = 2$

$$(odp.)$$
$$dim(ImL) = dim(KerL) = 2$$

1.2 b)

W tym zadaniu skorzystamy z twierdzenia, które mówi, że suma wymiarów jadra i obrazu przekształcenia liniowego $L : U \to V$ przestrzeni skończenie wymiarowych jest równa wymiarowi przestrzeni U.

$$L(x, y, z, s, t) = (x + y + z, y + z + s, z + s + t)$$

$ImL = lin\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

$$dim(ImL) = rz \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3, \text{ ponieważ } det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$dim(KerL) = 5 - dim(ImL) = 5 - 3 = 2$

$$(odp.)$$
$$dim(ImL) = 3$$
$$dim(KerL) = 2$$

2 Zadanie 3

2.1 a)

$$L(x, y, z) = (x + y, x + z, y - z, y + 2z)$$

Obrazy kolejnych wektorów bazy standardowej (e_1, e_2, e_3) sa nastepujace:

$L(e_1) = (1, 1, 0, 0)$
$L(e_2) = (1, 0, 1, 1)$
$L(e_3) = (0, 1, -1, 2)$

Wynika stad, że:

(odp.) $A_l = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

2.2 b)

$$L(x, y, z) = (4x + 3y, x - 2y, 3x + 5y)$$

Obrazy kolejnych wektorów bazy standardowej (e_1, e_2) sa nastepujace:

$L(e_1) = (4, 1, 3)$
$L(e_2) = (3, -2, 5)$

Wynika stad, że:

(odp.) $A_l = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

3 Zadanie 4 z zestawu 3

$$L(2,1,1) = (4,5)$$
$$L(1,-3,2) = (-6,1)$$

$L(5,6,1) = L(3\cdot(2,1,1) - (1,-3,2)) = 3L(2,1,1) - L(1,-3,2) = 3\cdot(4,5) - (-6,1) = \underline{(18,4)}$

$$L(4,1,5) = a(2,1,1) + b(1,-3,2)$$
$$2a + b = 4 \wedge a - 3b = 1 \wedge a + 2b = 5$$

Zatem $a = 1 + 3b \wedge b = \frac{2}{7} \wedge b = \frac{4}{5}$, co jest sprzecznościa. Odp.: Nie można.