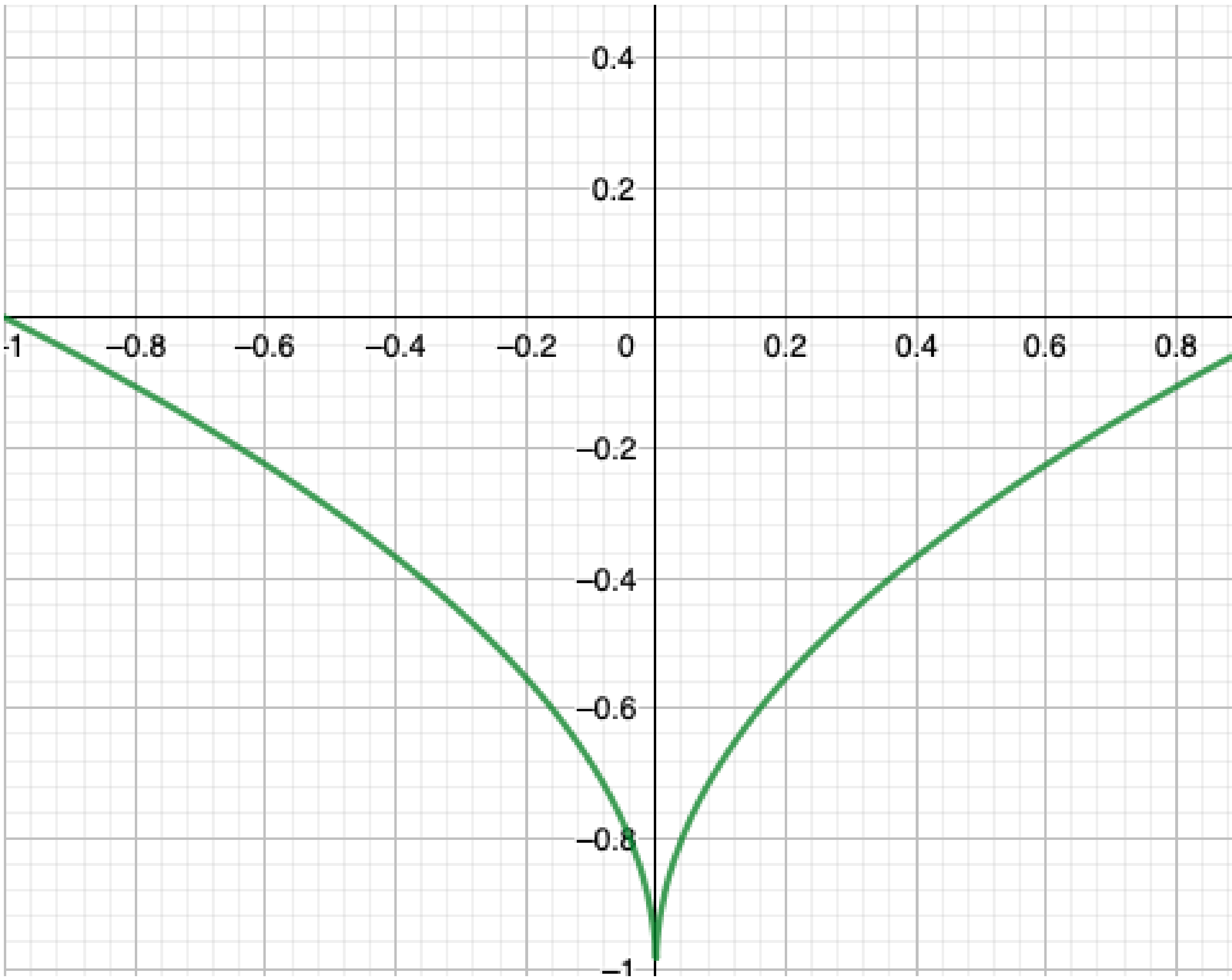

1 FUNKCJA DO ZADANIA 1 (b)

AM1 - Zestaw 7

Wojciech Szlosek

April 2020

2 Zadanie 1 (b)

$$g(x) = \sqrt{|x|} - 1 = \begin{cases} \sqrt{-x} - 1 & \text{dla } x < 0 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Funkcja ta jest ciągła na przedziale $[-1, 1]$. Jednak nie ma pochodnej w przedziale $(-1, 1)$, ponieważ $g^{'}(0)$ nie istnieje:

$$g^{'}_{+}(0) = \infty$$
$$g^{'}_{-}(0) = -\infty$$

Funkcja g nie spełnia założeń twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$

3 Zadanie 9 (a)

$$x_0 = 2; n = 3$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$f^{'}(x) = (x^{-1})^{'} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$
$$f^{''}(x) = -(x^{-2})^{'} = \frac{2}{x^3}$$
$$f^{'''}(x) = 2(x^{-3})^{'} = \frac{-6}{x^4}$$

Stąd $f(2) = \frac{1}{2}$, $f^{'}(2) = \frac{-1}{4}$, $f^{''}(2) = \frac{1}{4}$

Wzór Taylora dla funkcji f przyjmuje postać:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{-1}{4}}{1!}(x-2) + \frac{\frac{1}{4}}{2!}(x-2)^2 + \frac{\frac{-6}{c^4}}{3!}(x-2)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + R_3(x)$$

gdzie $R_3(x) = \frac{-(x-2)^3}{c^4}$, przy czym c jest liczbą zawartą między 2 i x.

4 Zadanie 10 (a)

$f(x) = \cos x,\ f^{'}(x) = -\sin x,\ f^{''}(x) = -\cos x,\ f^{'''}(x) = \sin x,\ f^{''''}(x) = \cos x,$
p - liczba całkowita.

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } k = 4p \\ -\sin x & \text{dla } k = 4p+1 \\ -\cos x & \text{dla } k = 4p+2 \\ \sin x & \text{dla } k = 4p+3 \end{cases}$$

Zatem:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 4p \\ 0 & \text{dla } k = 4p+1 \\ -1 & \text{dla } k = 4p+2 \\ 0 & \text{dla } k = 4p+3 \end{cases}$$

Podstawmy do wzoru Maclaurina:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + R_n(x)$$

gdzie $R_n(x) = +/- \frac{x^n}{n!} \left\{ \begin{array}{c} \sin c \\ \cos c \end{array} \right\}$, przy czym c jest zawarte między 0 i x. Warto dodać, że znak + lub - i funkcję sin/cos dobieramy w zależności od n.