AM1 - Zestaw 8

Wojciech Szlosek

April 2020

1 Zadanie 1, (b)

Aby oszacować dokładność podanego wzoru, wykorzystamy wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = cos^2 x$. $f^{'}(x) = -2sinxcosx$; $f^{''}(x) = 4sin^2 x - 2$; $f^{'''}(x) = 8sinxcosx$; $f^{''''}(x) = 16cos^2 x - 8$. Stad: $f(0) = 1$; $f^{'}(0) = 0$; $f^{''}(0) = -2$; $f^{'''}(0) = 0$; $f^{''''}(0) = 8$.
Zatem:

$$cos^2 x \approx 1 + 0 + \frac{-2x^2}{2!} + 0 + \frac{8x^4}{4!} \approx 1 - x^2 + R_3$$

Skoro $|x| \leq \frac{1}{10}$,

$$|R_3| \leq \frac{x^4}{3}$$

$$|R_3| \leq \frac{(0.1)^4}{3} \approx 0.0000333...$$

(Odp.) Bład jest zatem mniejszy od $\frac{1}{30000} \approx 0.0000333...$

2 Zadanie 4, (e)

$q(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$

$q^{'}(x) = \frac{x^3+3x^2-9x-27}{x^3+3x^2+3x+1}$

Ponieważ badana funkcja ma pochodna w każdym punkcie, wiec może mieć ekstrema jedynie w punktach, gdzie $g^{'}(x) = 0$, czyli w x = -3 lub x = 3. Teraz pora na zbadanie znaku pochodnej na konkretnych przedziałach. Łatwo sprawdzić, że funkcja zmienia znak z ujemnego na dodatni w punkcie 3. Dlaczego? Zauważmy, że w przedziale (0,3) funkcja ma wartości ujemne, a w $(3, \infty)$ - dodatnie. Zatem w tymże punkcie 3, funkcja q ma minimum lokalne właściwe, który wynosi $q(3) = 13.5$ (odp.)

3 Zadanie 6, (c)

$h(x) = tgx$, $h^{''}(x) = \frac{2sinx}{cos^3x}$

Niech k bedzie liczba całkowita. Pochodna drugiego stopnia funkcji h jest wieksza od zera dla x należacego do przedziału $(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$. Z kolei jest mniejsza od zera dla x należacego do: $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, 2k\pi)$.
Łatwo zauważyć, że punktem przegiecia tej funkcji jest $x = k\pi$ (odp.)