AM1 - Zestaw 6

Wojciech Szlosek

March 2020

1 Zadanie 2

1.1 (c)

$$f(x) = e^{ax}$$
$$g(x) = e^{-x}$$

Najpierw poszukajmy punktu, w którym przecinaja sie wykresy powyższych funkcji: $e^{ax} = e^{-x} \Rightarrow x(a+1) = 0$. Zatem $\underline{x=0}$ lub $a = -1$, jednakże w tym drugim przypadku otrzymamy dwie funkcje przystajace. Ażeby funkcje przecinały sie pod katem prostym, musi zachodzić (x_0 jest odcieta punktu przeciecia wykresów):

$$1 + f^{'}(x_0)g^{'}(x_0) = 0$$

$$f^{'}(x_0) = (e^{ax})^{'}_{x=0} = a \cdot e^{ax}_{x=0} = a$$
$$g^{'}(x_0) = e^{-x}_{x=0} = -1$$

$$1 + f^{'}(x_0)g^{'}(x_0) = 0$$
$$1 - a = 0 \Rightarrow \underline{a = 1}$$

2 Zadanie 3

2.1 (c)

$$\arcsin 0.51 = ?$$

Niech $f(x) = \arcsin x$; $x_0 = 0.50$; $\Delta x = 0.01$.
Wiemy ponadto, że zachodzi wzór: $(\arcsin x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Wówczas:

$$\arcsin 0.51 \approx \arcsin 0.50 + [\arcsin x]^{'}_{x=0.50} \cdot 0.01 = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1}{100} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{150} = \frac{25\pi + \sqrt{3}}{150} \approx \underline{0.53515}$$

3 Zadanie 6

3.1 (a) Zbadać czy istnieje $f^{''}(0)$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0 \\ x^3 & \text{dla } x = 0 \\ x^3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

$$(-x^2)^{'} = -2x$$

$$(x^3)^{'} = 3x^2$$

$$f_{-}^{'}(0) = \lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{-x^2 - 0}{x} = 0$$

$$f_{+}^{'}(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x^3 - 0}{x} = 0$$

Stad $f^{'}(0) = 0$. Mamy zatem:

$$f^{'}(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 3x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

$$f_{-}^{''}(0) = \lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{-2x}{x} = -2$$

$$f_{+}^{''}(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{3x^2}{x} = 0$$

$$-2 \neq 0$$

(odp.) Zatem nie istnieje $f^{''}(0)$.