Zadanie 3a

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^2) \quad (x_0,y_0) = (0,0) \quad n = 3$$

Obliczamy. W między-czasie wiele rzeczy liczymy analogicznie do siebie wzajemnie. Następnie otrzymane wyniki wstawimy do wzoru Taylora (podanego np. w podręczniku i zbioru zadań). Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = [\cos(x^2+y^2)\cdot 2x]_{(0,0)} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = [\cos(x^2+y^2)\cdot 2y]_{(0,0)} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = [\frac{\partial}{\partial x}(2x\cdot\cos(x^2+y^2))]_{(0,0)} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = [\frac{\partial}{\partial y}(2y\cdot\cos(x^2+y^2))]_{(0,0)} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$$

Zatem:

$$f(x,y) = 0 + \frac{1}{1!}[0\cdot x + 0\cdot y] + \frac{1}{2!}[2x^2 + 2\cdot 0\cdot xy + 2y^2] + R_3(x,y)$$

Niech $(E,N) = (\theta x, \theta y)$, gdzie $0 < \theta < 1$. Dalej mamy:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(E,N) = -4E[3\sin(E^2+N^2) + 2E^2\cos(E^2+N^2)]$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(E,N) = -4E[\sin(E^2+N^2) + 2N^2\cos(E^2+N^2)]$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(E,N) = -4N[\sin(E^2+N^2) + 2E^2\cos(E^2+N^2)]$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(E,N) = -4N[3\sin(E^2+N^2) + 2N^2\cos(E^2+N^2)]$$

Zatem ostateczny wynik to:

$$f(x,y) = x^2+y^2+\frac{1}{3!}\Bigg[(-4E[3\sin(E^2+N^2)+2E^2\cos(E^2+N^2)])x^3+(-12N[\sin(E^2+N^2)+2E^2\cos(E^2+N^2)])x^2y+$$
$$+(-12E[\sin(E^2+N^2)+2N^2\cos(E^2+N^2)])xy^2+(-4N[3\sin(E^2+N^2)+2N^2\cos(E^2+N^2)])y^3\Bigg]$$

Zadanie 4b

$$f(x,y) = 2x^4 - 3y^7$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad 8x^3 = 0 \quad x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad -21y^6 = 0 \quad y = 0$$

Jednak funkcja nie ma ekstremum lokalnego w punkcie (0,0). Pokażemy, że w otoczeniu tego punktu można znaleźć punkty w których funkcja ma wartość mniejszą of f(0,0) = (0,0) oraz punkty w których ma ona wartość większą of f(0,0) = (0,0).

Rzeczywiście, jakiekolwiek byśmy wybrali otoczenie punktu (0,0), to dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n punkty $(\frac{1}{n},0)$, $(0,\frac{1}{n})$ będą należały do tego otoczenia. Ponadto mamy:

$$f(\frac{1}{n},0) = \frac{2}{n^4} > 0 = f(0,0) \quad i \quad f(0,\frac{1}{n}) = \frac{-3}{n^7} < 0 = f(0,0)$$

Zadanie 5c

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 51 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 24 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies (x = 1, y = 4) \;\; v \;\; (x = -1, y = -4) \;\; v \;\; (x = 4, y = 1) \;\; v \;\; (x = -4, y = -1)$$

Wyznacznik macierzy Hessego (wzór poniżej):

$$g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y))^2$$

$$g(1,4) = 6 \cdot 6 - 24^{24} < 0$$

Zatem brak ekstremum w tym punkcie.

$$g(4,1) = 24 \cdot 24 - 6^2 > 0 \;\; i \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,1) = 24 > 0$$

Zatem mamy tutaj minimum lokalne.

Analogicznie sprawdzamy, dla pozostałych dwóch punktów.

$$g(-1,-4) < 0 \; ; \quad g(-4,-1) > 0 \;\; i \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-4,-1) < 0$$

Zatem w (-1,-4) brak ekstremum, z kolei w drugim rozważanym punkcie maksimum lokalne.