Zadanie 2d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

Niech $f(x) = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. Funkcja f jest malejąca na przedziale $[1, +\infty)$!zauważmy, że przy stałym liczniku, wraz z n rośnie mianownik! oraz funkcja ta przyjmuje na tym przedziale wartości dodatnie. Zbadajmy zbieżność całki $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. Mamy więc z definicji:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = (*)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \left| t = \sqrt{x+1}, t^2 = x+1, 2tdt = dx \right| = \int \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$$

$$(*) = \lim_{T\to\infty} \Big[\ln\Big|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\Big|\Big]_1^T = \lim_{T\to\infty} \Big[\ln\Big|\frac{\sqrt{T+1}-1}{\sqrt{T+1}+1}\Big| - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\Big] = (**)$$

$$\lim_{T\to\infty} \ln\Big|\frac{\sqrt{T+1}-1}{\sqrt{T+1}+1}\Big| = \ln(\lim_{T\to\infty} \frac{\sqrt{T+1}-1}{\sqrt{T+1}+1}) \overset{H.}{=} \ln\left(\lim_{T\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{T+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{T+1}}}\right) = \ln 1 = 0$$

$$(**) = 0 - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = -\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

Oznacza to, że rozważana całka jest zbieżna, więc z kryterium całkowego wynika, że badany szereg jest zbieżny.

Zadanie 3d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$$

Wiemy, że $\operatorname{tg} x \geqslant x$, dla każdego $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Mamy więc również dla dowolnego n naturalnego:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} \geqslant \frac{\pi}{4n}$$

Szereg (*) $= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{4n})$ jest rozbieżny (uzasadnienie poniżej) i ma nieujemne wyrazy, więc także badany szereg jest rozbieżny do ∞.

Uzasadnienie rozbieżności szeregu (*):
Zbadajmy z definicji zbieżność całki $\int_1^{\infty} \frac{\pi dx}{4x}$:

$$= \lim_{T\to\infty} \int_1^T (\frac{\pi}{4}\cdot\frac{dx}{x}) = \lim_{T\to\infty} \Big[\frac{\pi}{4}\cdot\ln|x|\Big]_1^T = \lim_{T\to\infty} \Big(\frac{\pi\ln|T|}{4} - 0\Big) = \infty$$

Zadanie 4d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$$

Ponieważ:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n\cdot n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{3^n\cdot 3\cdot(n+1)\cdot n!}}{\frac{n^n}{3^n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \frac{e}{3} < 1$$

Zatem z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest zbieżny.