AM1 - Zestaw 4

Wojciech Szlosek

March 2020

1 Zadanie 3

1.1 a)

$f(x) = \begin{cases} bx & \text{dla } x < \pi \\ \frac{sinx}{ax} & \text{dla } x \geq \pi \end{cases} \quad \mathrm{x}_0 = \pi$

Funkcja f jest ciagła lewostronnie w punkcie x_0 (funkcja liniowa w przedziale $(-\infty, \pi)$. Mamy:

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \frac{1}{a},$$

gdzie $a \neq 0$. Ponadto $f(\pi) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = 0 = b$

(odp.) $b = 0$, $a \neq 0$

2 Zadanie 5

2.1 a)

$$f(x) = sqn[x(x-1)], x_0 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \wedge x > 1 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \vee x = 1 \\ 1 & \text{dla } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$(odp.) Jesttonieciagłośćpierwszegorodzajutypu"skok".$

3 Zadanie 7

3.1 b)

Niech bok podstawy tego graniastosłupa ma dodatnia długość a, z kolei jego wysokość ma długość H.
Z twierdzenia Pitagorasa dla granistosłupa prawidłowego sześciokatnego wpisanego w kule o promieniu R mamy: $(2a)^2 + H^2 = (2R)^2$ Z czego dalej po przekształceniu mamy, że: $H = 2\sqrt{R^2 - a^2}$, gdzie $0 < a < R$.
Wzór na objetość tego graniastosłupa to: $V(a) = \frac{3Ha^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\sqrt{3R^2 - 3a^2}$
Zauważmy, że $V(0) = V(R) = 0$. Otrzymaliśmy wiec funkcje ciagła na przedziale $[0, R]$.

Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że w pewnym punkcie przedziału domkni-etego $[0, R]$ funkcja V osiaga wartość najwieksza. Ponieważ na krańcach tegoż przedziału przyjmuje wartość 0, a w jego wnetrzu wartości dodatnie, to jej wartość najwieksza jest osiagana w punkcie przedziału $(0, R)$.
Co nakazano dowieść.