Algebra 2 - Zestaw 5

Wojciech Szlosek

March 2020

1 Zadanie 1

1.1 a)

$$det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 99 \\ -0.5 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 522 \cdot (\sum_{n=1}^{inf} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}) - 3523 \cdot \lim_{n \to inf} (3n^2 + n)^{\frac{1}{n}}$$

1.2 b)

Jak wiadomo, przekształcenie liniowe $L : U \to V$, gdzie U i V sa przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi, jest odwracalne wtw. gdy macierz A jest nieosobliwa. Macierz przekształcenia odwrotnego L^{-1} jest zaś równa macierzy A^{-1}.

$$L(x, y, z) = (y + 2z, x + y + z, 2x + 3y + 2z)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \; detA = 2$$

Skoro jest różny od zera, to przekształcenie rozważane w tym przykładzie jest odwracalne.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(Odp.) L^{-1}(x, y, z) = (-\frac{1}{2}x + 2y - \frac{1}{2}z, -2y + z, \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z)$$

2 Zadanie 6

2.1 a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$L^3(u_1 - 2u_2 + u_3)$

Macierz przekształcenia L^3 jest równa A^3.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 21 \\ 0 & 8 & 0 \\ 14 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -16 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Wiec: $L^3(u_1 - 2u_2 + u_3) = 28u_1 - 16u_2 + 7u_3$ (odp.)