Algebra 2 - Zestaw 6

Wojciech Szlosek

March 2020

1 Zadanie 2

1.1 a)

$L(x, y) = (4x + 2y, -x + y)$

Wystarczy wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy badanych przekształceń liniowych w wybranych bazach przestrzeni liniowych. Posługujemy sie bazami standardowymi.

Rozwiazujemy równanie charakterystyczne przekształcenia L:

$$det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 3$$

Niech $v = (x, y)$ oraz $t = (x, y)$ beda jej wektorami własnymi. Rozważmy wiec dwie "opcje".

1.1.1 $\lambda_1 = 2$

$v = (x, y)$

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ -x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = -x$$

$$v = (x, -x)$$

$$W_2 = \{(x, -x)\} = \underline{lin\{(1, -1)\}}$$

1.1.2 $\lambda_2 = 3$

$t = (x, y)$

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ -x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = -2y$$
$$v = (-2y, y)$$
$$W_3 = \{(-2y, y)\} = \underline{lin\{(-2, 1)\}}$$

1.2 b)

$L(x, y) = (2x + y, -x + 4y)$

Wystarczy wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy badanych przekształceń liniowych w wybranych bazach przestrzeni liniowych. Posługujemy sie bazami standardowymi.

Rozwiazujemy równanie charakterystyczne przekształcenia L:

$$det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(4 - \lambda) + 1 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

Równanie to ma jedyna wartość własna $\lambda = 3$. Niech $v = (x, y)$ bedzie jej wektorem własnym.

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y \\ -x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stad $v = (y, y)$ (bo $x = y$).
Ponadto przestrzeń wektorów własnych równa sie: $W = (y, y) = lin\{(1, 1)\}$

2 Zadanie 3

2.1 a)

$$L(x, y) = (3x - y, 10x - 3y)$$
$$det(A - I\lambda) = det\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 10 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = -(3 - \lambda)(3 + \lambda) + 10 = \lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda_1 = i, \lambda 2 = -i :< wartosciwlasne >$$

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - i & -1 \\ 10 & -3 - i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow y = x(3 - i)$$

$$(A - I\lambda_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i & -1 \\ 10 & i-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow y = x(i+3)$$

$$W_i = (x, x(3-i)) = lin\{(1, 3-i)\}$$

$$W_{-i} = (x, x(3+i)) = lin\{(1, 3+i)\}$$