Algebra 2 - Zestaw 7

Wojciech Szlosek

March 2020

1 Zadanie 1

1.1 (a)

Wartość własna λ rzeczywistej macierzy A stopnia n jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego tej macierzy i wyznaczamy ją z warunku $det(A - I\lambda) = 0$. Wektor własny $v = (x_1, x_2, ...)$ odpowiadający wartości własnej λ jest niezerowym rozwiązaniem jednorodnego układu równań:

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$- -$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$det(A - I\lambda) = det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda = 3$$

Wyznaczmy wektor własny $v = (x, y)$.

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zatem: $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

$$v = (x, -x)$$

$$\underline{W_3 = lin\{(1, -1)\}}$$

1.2 (c)

Wartość własna λ rzeczywistej macierzy A stopnia n jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego tej macierzy i wyznaczamy ją z warunku $det(A - I\lambda) = 0$. Wektor własny $v = (x_1, x_2, ...)$ odpowiadający wartości własnej λ jest niezerowym rozwiązaniem jednorodnego układu równań:

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- -$$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$det(A - I\lambda) = det\begin{bmatrix} \sqrt{3} - \lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4 = 0$$

To równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych ($\Delta < 0$), co oznacza, że macierz A nie ma rzeczywistych wartości własnych.

1.3 (f)

Wartość własna λ rzeczywistej macierzy A stopnia n jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego tej macierzy i wyznaczamy ją z warunku $det(A - I\lambda) = 0$. Wektor własny $v = (x_1, x_2, ...)$ odpowiadający wartości własnej λ jest niezerowym rozwiązaniem jednorodnego układu równań:

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- -$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A - I\lambda) = det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4 - \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)^3 = 0$$

$$\lambda = 2$$

Wyznaczmy wektor własny $v = (x, y, z)$:

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd: $-2x + y = 0 \Rightarrow y = 2x$

$$v = (x, 2x, z)$$

$$\underline{W_2 = lin\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}}$$

2 Zadanie 2

2.1 (e)

$$A = \begin{bmatrix} i & i & i \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A - I\lambda) = det\begin{bmatrix} 1-\lambda & i & i \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(-\lambda + (3 + i)) = 0$$

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 3 + i$$

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & i & i \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$$

$$\underline{v_1 = (x, y, -x - y)}$$

$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & i & i \\ 1 & -2-i & 1 \\ 2 & 2 & -1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = iy, z = 2y$$

$$\underline{v_2 = (iy, y, 2y)}$$

(Odp.)

$$W_0 = lin_c\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

$$W_{3+i} = lin_c\{(i, 1, 2)\}$$