Zadanie 1b

$$f(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

To dziedziny należą wszystkie x, y, z, poza przypadkiem, gdzie $x^2+y^2+z^2=0$.

Idea: oblicz pochodną danej zmiennej (wskazuje ją postać symboliczna mianownika), a pozostałe literki traktuj jako stałe. Obliczamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+y^2+z^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{0 - x\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{0 - x\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Zadanie 2a

$$f(x) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{gdy } xy=0 \\ 1 & \text{gdy } xy\neq 0 \end{cases} \quad --(x_0,y_0)=(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y} = 0$$

Zadanie 3c

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Dziedzina oczywiście obejmuje wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z poza przypadkiem, gdzie $x^2+y^2+z^2 = 0$. Obliczamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{0-(\sqrt{x^2+y^2+z^2)'})}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Obliczając całkowicie analogicznie, mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Następnie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{-(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}+3x^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{[(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}]^2} =$$

$$= -\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = -y\cdot\frac{\partial}{\partial x}(((x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}))^{-1}) =$$

$$= y\cdot\frac{1}{[(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}]^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}) =$$

$$\frac{y}{[(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}]^2} \cdot 3x\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Mając za sobą toporne obliczenia, następne zależności możemy ustalać już całkiem analogicznie do poprzednich. I tak, mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = ... = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = ... = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = ... = -\frac{-2yz+x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = ... = \frac{3zy}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = ... = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = ... = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = ... = -\frac{-2z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Odp.: Zatem ostatecznie, jak widać, mamy: $\frac{\partial^2 f}{x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{y \partial x}$; $\frac{\partial^2 f}{x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{z \partial x}$; $\frac{\partial^2 f}{y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{z \partial y}$.