1一般正态分布转换01分布 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则有 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。

第
3
12
13

1.（15 分）假设某饮料罐装生产线罐装后饮料重量服从正态分布，均值为 10，标准差为 4。现随机从该生产线抽取一瓶测量重量，请计算该瓶重量小于 8 的概率。

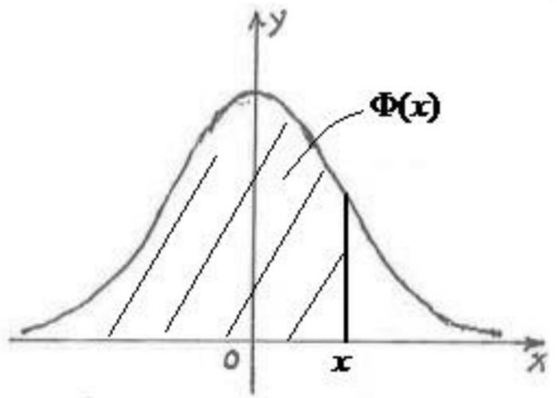
可供使用的部分正态分布表数值：

$\Phi(0.0)=0.5000, \Phi(0.5)=0.6915, \Phi(1.0)=0.8413,$
$\Phi(1.5)=0.9332, \Phi(2.0)=0.9772, \Phi(2.5)=0.9938,$
$\Phi(3.0)=0.9987$

解　饮料重量 $X \sim N(10,4^2)$，由于 $Y=\dfrac{X-10}{4} \sim N(0,1)$，所求概率为

$$P(X<8)=P\left(Y=\frac{X-10}{4}<\frac{8-10}{4}\right)=P(Y<-0.5)$$

$$=1-\Phi(0.5)=1-0.6915=0.3085$$



1一般正态分布转换01分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则有 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。

例 2. 已知某种电池的寿命 X（单位：小时）服从正态分布 $N(300,30^2)$，求：

（1）电池寿命在 250 小时以上的概率；

（2）电池寿命在 350 小时以下的概率；

（3）电池寿命在 240～360 小时之间的概率。

解　（3）$X \sim N(300,30^2)$，由于 $Y=\dfrac{X-300}{30} \sim N(0,1)$，则有

$$P(240<X<360)=P\left(\frac{240-300}{30}<Y=\frac{X-300}{30}<\frac{360-300}{30}\right)$$

$$=P(-2<Y<2)=1-2(1-\Phi(2))=2\Phi(2)-1=0.9544$$

1一般正态分布转换01分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则有 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。

例 3．已知一批产品的长度指标 $X\sim N(\mu,0.5^2)$，问至少应取多大的样本容量，才能使样本均值与总体均值的绝对误差，在置信度为 95%的条件下小于 1/10？

解 $\boxed{\bar{X}\sim N(\mu,\dfrac{0.5^2}{n})}$，由于 $Y=\dfrac{\bar{X}-\mu}{0.5/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，则有

$$95\%=P\left(\left|\bar{X}-\mu\right|<1/10\right)=P\left(\left|Y=\frac{\bar{X}-\mu}{0.5/\sqrt{n}}\right|<\frac{1/10}{0.5/\sqrt{n}}\right)=P\left(\left|Y\right|<0.2\sqrt{n}\right)$$

于是

$$0.2\sqrt{n}=z_{0.025}=1.96，\quad n=\left(\frac{1.96}{0.2}\right)^2=96.04$$

至少应取容量为 97 的样本。

区间估计公式

区间估计一览表

	待估	情形	置信区间	单侧置信限
单正态	μ	σ^2已知	$\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\overline{\mu} = \bar{X} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\underline{\mu} = \bar{X} - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	μ	σ^2未知	$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\overline{\mu} = \bar{X} + t_{\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\underline{\mu} = \bar{X} - t_{\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$
	σ^2		$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$	
双正态	$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2已知	$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	
	$\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$未知	$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ $S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	

	待估	情形	置信区间	单侧置信限
单比率	p	n很大	$\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$	$\overline{p} = \bar{X} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$ $\underline{p} = \bar{X} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$
双比率	$p_1 - p_2$	n,m很大	$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}$	
一般总体	μ	n很大	$\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$	
	$\mu_1 - \mu_2$	n_1, n_2很大	$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	

2置信区间

	待估	情形	置信区间	单侧置信限
	μ	σ^2已知	速记n>30 Z分布 $\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{\mu} = \bar{X} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\underline{\mu} = \bar{X} - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
单正态	μ	σ^2未知	速记n<30 T分布 $\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{\mu} = \bar{X} + t_{\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\underline{\mu} = \bar{X} - t_{\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$

1.（15 分）某生产过程所生产零件的尺寸服从正态分布。现采 10 个样本，具体数值如下：

9.5，8.5，10.8，12.0，8.8，8.4，10.1，9.0，10.5，10.1

请基于上述数据，计算该尺寸变量的双侧 95%置信区间。

可供使用的部分正态分布和 t 分布表数值：

$$z_{0.025} = 1.960,\quad z_{0.05} = 1.645$$

$$t_{0.025,10} = 2.228,\quad t_{0.05,10} = 1.812$$

$$t_{0.025,9} = 2.262,\quad t_{0.05,9} = 1.833$$

解　该尺寸变量的置信度$1-\alpha$的双侧置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

利用数据，计算可得（$\alpha = 0.05$）

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 9.77,\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = 1.32,\quad S = \sqrt{S^2} = 1.1489$$

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 9.77 \pm 2.262 \times \frac{1.1489}{\sqrt{10}} = 9.77 \pm 0.8218$$

即该尺寸变量的双侧 95%置信区间为$(8.9482,\ 10.5918)$。

2置信区间

	待估	情形	置信区间	单侧置信限
	μ	σ^2已知	速记n>30 Z分布 $\bar{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{\mu}=\bar{X}+z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\underline{\mu}=\bar{X}-z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
单正态	μ	σ^2未知	速记n<30 T分布 $\bar{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{\mu}=\bar{X}+t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ $\underline{\mu}=\bar{X}-t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

1.（15 分）在对出租车乘客乘车里程的调查中，抽查了容量为 256 的随机样本，得到样本均值为 5.32 km，样本标准差为 1.56 km，请确定乘车里程均值的 95%置信区间（计算结果保留 2 位小数即可）；在前面估计中，用到了统计学中的哪一个重要定理？（$Z_{0.025}=1.96$）

解　乘车里程均值的置信度$1-\alpha$的置信区间为$\left(\bar{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$。

代入数据，计算可得（$\alpha=0.05$）

$$\bar{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}=5.32\pm1.96\times\frac{1.56}{\sqrt{256}}=5.32\pm0.1911$$

即乘车里程均值的 95%置信区间为$(5.13,\ 5.51)$。

理论依据是中心极限定理，它说明：对于一般总体，在大样本下，$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$近似服从标准正态$N(0,1)$分布。

假设校验3步：1).提出假设；2).（被校验）校验统计量；3).（校验准则）拒绝域

3假设检验

假设检验一览表

	备择假设	情形	统计量	拒绝域
单正态	$\mu \neq \mu_0$	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert Z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu > \mu_0$			$Z > z_\alpha$
	$\mu < \mu_0$			$Z < -z_\alpha$
	同上	σ^2 未知	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert T\rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
				$T > t_\alpha(n-1)$
				$T < -t_\alpha(n-1)$
	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，$\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$\sigma^2 > \sigma_0^2$			$\chi^2 > \chi^2_\alpha(n-1)$
	$\sigma^2 < \sigma_0^2$			$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
双正态	$\mu_1-\mu_2 \neq a$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-a}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert Z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu_1-\mu_2 > a$			$Z > z_\alpha$
	$\mu_1-\mu_2 < a$			$Z < -z_\alpha$
	同上	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知	$T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-a}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\lvert T\rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
				$T > t_\alpha(n_1+n_2-2)$
				$T < -t_\alpha(n_1+n_2-2)$

（15 分）为了测定甲、乙两台灌装机器灌装的重量是否相同，并对两台机器灌装重量误差的差异做出估计，从甲机器抽取灌装好的 25 个样品，乙机器抽取 16 个样品，测试结果表明，甲机器灌装平均重量 22kg，乙机器灌装平均重量 20kg，根据过去的经验，两机器的方差均为 10kg，试求：(1)对两台机器的灌装平均重量之差构造置信度为 95% 的置信区间；(2）检验甲乙两台机器灌装的平均重量有无显著差异（α =0.05，$Z_{\frac{0.05}{2}}=1.96$）。

$\mu_1-\mu_2$ $\quad (\bar{x}-\bar{y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

解 $H_0: \mu_1=\mu_2 \longleftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

拒绝域为 $C: \lvert Z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$

$n_1=25$，$n_2=16$，$\bar{X}=22$，$\bar{Y}=20$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=10$，$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$

计算可得

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{22-20}{\sqrt{\dfrac{10}{25}+\dfrac{10}{16}}}=1.975$$

由于 $\lvert Z\rvert=1.975>z_{0.025}=1.96$，拒绝 H_0，即认为甲乙两台机器灌装的平均重量有显著差异。

3假设检验公式

	备择假设	情形	统计量	拒绝域
单比率	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	n很大	$Z = \dfrac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}}$	$\lvert Z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z > z_\alpha$ $Z < -z_\alpha$
双比率	$p_1 \neq p_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 < p_2$	n,m很大	$Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \dfrac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}}$	同上
一般总体	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	n很大	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert T\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$ $T > z_\alpha$ $T < -z_\alpha$
	$\mu_1 - \mu_2 \neq a$ $\mu_1 - \mu_2 > a$ $\mu_1 - \mu_2 < a$	n_1,n_2很大	$T = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - a}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$	同上

假设检验一览表

	备择假设	情形	统计量	拒绝域
单正态	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	σ^2已知	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert Z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z > z_\alpha$ $Z < -z_\alpha$
	同上	σ^2未知	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert T\rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $T > t_\alpha(n-1)$ $T < -t_\alpha(n-1)$
	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，$\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\chi^2 > \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
双正态	$\mu_1 - \mu_2 \neq a$ $\mu_1 - \mu_2 > a$ $\mu_1 - \mu_2 < a$	σ_1^2,σ_2^2已知	$Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - a}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert Z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z > z_\alpha$ $Z < -z_\alpha$
	同上	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$未知	$T = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - a}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\lvert T\rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ $T > t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $T < -t_\alpha(n_1+n_2-2)$

3假设检验

假设检验一览表

	备择假设	情形	统计量	拒绝域
	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	σ^2已知	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert Z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z > z_\alpha$ $Z < -z_\alpha$
单正态	同上	σ^2未知	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert T\rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $T > t_\alpha(n-1)$

1.（15 分）某种户型住宅销售价格的全国均值为 181,900 元。在由西部地区 40 套该户型住宅的销售价格组成样本中，样本均值为 166,400 元。总体标准差σ =33,500 元。

a. 提出原假设和备择假设，用于确定是否西部地区该户型住宅销售价格的总体均值小于全国均值 181,900 元。

b. 检验统计量的值是多少？

c. 在α =0.05 时，你的结论是什么？（$Z_{0.05}$=1.645）

解 a. 原假设 $H_0: \mu=181900$，备择假设 $H_0: \mu<181900$

b. 检验统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-181900}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，其值为

$$U=\frac{\bar{X}-181900}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{166400-181900}{33500/\sqrt{40}}=-2.926$$

c. 拒绝域为 $C: U<-z_\alpha$

由于 $U=-2.926<-z_{0.05}=-1.645$，拒绝 H_0，即认为西部地区该户型住宅销售价格的总体均值小于全国均值 181900 元。

3假设检验

例 3．按照规定，每 100g 的罐头番茄汁维生素 C 的含量不得少于 21mg。现从某厂生产的一批罐头中抽取 10 个，测得维生素 C 含量（单位：mg）如下：

17， 22， 21， 23， 26， 21， 19， 16， 22， 19

已知维生素 C 含量服从正态分布，试检验该批罐头的维生素 C 含量是否合格（$\alpha=0.05$）。

一般总体	$\mu\neq\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	n很大	$\boxed{T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}}$	$\lvert T\rvert>z_{\frac{\alpha}{2}}$ $T>z_\alpha$ $T<-z_\alpha$

解 $H_0:\mu\geq 21\longleftrightarrow H_1:\mu<21$

$$T=\frac{\bar{X}-21}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

拒绝域为 $C:T<-t_\alpha(n-1)$

$n=10$，$\alpha=0.05$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，计算可得

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=20.6,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=8.711,\quad S=\sqrt{S^2}=2.951$$

$$T=\frac{\bar{X}-21}{S/\sqrt{n}}=\frac{20.6-21}{2.951/\sqrt{10}}=-0.429$$

由于$T=-0.429>-t_{0.05}(9)=-1.8331$，接受$H_0$，即认为该批罐头的维生素 C 含量合格。

3假设检验

	待估	情形	置信区间	单侧置信限
单比率	p	n很大	$\bar{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$	$\bar{p}=\bar{X}+z_{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$ $\underline{p}=\bar{X}-z_{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$

例 4．针对一种新发的流行性传染性疾病，在某地进行了流调，统计发现患者的病死率为 5%，其中 198 名老年患者中死亡人数为 27 人。

（1）求老年人病死率的置信度 95%的置信区间。

（2）检验老年人的病死率是否明显偏高（$\alpha=0.05$）？

	备择假设	情形	统计量	拒绝域
单比率	$p\neq p_0$ $p>p_0$ $p<p_0$	n很大	$Z=\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}}$	$\|Z\|>z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z>z_{\alpha}$ $Z<-z_{\alpha}$

解　（1）老年人病死率的置信度$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$$

$n=198$，$\bar{X}=\frac{27}{198}=0.136$，$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$，计算可得

$$\bar{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}=0.136\pm1.96\times\sqrt{\frac{0.136(1-0.136)}{198}}=0.136\pm0.048$$

即老年人病死率的置信度 95%的置信区间为$(0.088,\ 0.184)$。

（2）$H_0: p=5\%\longleftrightarrow H_1: p>5\%$

$$Z=\frac{\bar{X}-5\%}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}}\sim N(0,1)$$

拒绝域为　$C: Z>z_{\alpha}$

$n=10$，$\bar{X}=0.136$，$\alpha=0.05$，$z_{0.05}=1.64$，计算可得

$$Z=\frac{\bar{X}-5\%}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}}=\frac{0.136-5\%}{\sqrt{\frac{0.136(1-0.136)}{198}}}=3.53$$

由于$Z=3.53>z_{0.05}=1.64$，拒绝H_0，即认为老年人的病死率明显偏高。

4回归

例 1．利用某公司的年销售额Y（单位：万元）与个人可支配收入 X_1（单位：百元），商品价格 X_2（单位：百元），广告费 X_3（单位：千元）的历年统计数据，建立它们之间的回归方程为

$$\underset{(1981.741)}{Y = 3573.879} + \underset{(1.192)}{6.687X_1} - \underset{(24.515)}{25.051X_2} + \underset{(2.737)}{9.316X_3}$$

$$R^2 = 0.839,\ F = 13.847,\ MS_E = 54852.259,\ n = 12$$

（1）说明回归方程中各回归系数的含义。

（2）判断线性回归效果是否显著（$\alpha = 0.05$）。

（3）求各回归系数的置信度 95%的置信区间，

（4）检验各回归系数的显著性（$\alpha = 0.05$）。

（ $F_{0.05}(3,8) = 4.07$， $t_{0.025}(8) = 2.306$， $t_{0.025}(12) = 2.179$ ）

解 （1）$\hat{b}_1 = 6.687$，个人可支配收入每增加或减少 1 百元，年销售额增加或减少 6.687 万元；

$\hat{b}_2 = -25.051$，商品价格每增加或减少 1 百元，年销售额减少或增加 25.051 万元；

$\hat{b}_3 = 9.316$，广告费每增加或减少 1 千元，年销售额增加或减少 9.316 万元。

（2）$n = 12$，$p = 3$，$\alpha = 0.05$，$F_{0.05}(3,8) = 4.07$，由于 $F = 13.847 > F_{0.05}(3,8) = 4.07$，线性回归效果显著。

（3）回归系数的置信度 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\boxed{\left(\hat{b}_i \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)\cdot s\{\hat{b}_i\}\right),\quad i = 1,\cdots,p}$$

计算可得

b_1： $6.687 \pm 2.306 \times 1.192 = 6.687 \pm 2.749$， 即$(3.938,\ 9.436)$

b_2： $-25.051 \pm 2.306 \times 24.515 = -25.051 \pm 56.532$， 即$(-81.583,\ 31.481)$

b_3： $9.316 \pm 2.306 \times 2.737 = 9.316 \pm 6.312$， 即$(3.004,\ 15.628)$

（4）
$$\boxed{\begin{gathered} T = \frac{\hat{b}_i}{s\{\hat{b}_i\}} \sim t(n-p-1) \\ C: |T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p-1) \end{gathered}}$$

计算可得

$$T_1 = \frac{6.687}{1.192} = 5.61,\quad T_2 = \frac{-25.051}{24.515} = -1.022,\quad T_3 = \frac{9.316}{2.737} = 3.404$$

由于 $t_{0.025}(8) = 2.306$，$|T_1| > t_{0.025}(8)$，$|T_2| < t_{0.025}(8)$，$|T_3| > t_{0.025}(8)$，$\hat{b}_1, \hat{b}_3$显著，$\hat{b}_2$不显著。

5矩估计 点估计

1．平均值 EX 的矩估计为样本均值 $\bar{X}$，方差 DX 的矩估计为样本未修正方差 S_0^2，即

$$\widehat{EX}=\bar{X},\quad \widehat{DX}=S_0^2$$

$$S_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x;\theta)dx=\bar{X}\quad\Rightarrow\quad\hat{\theta}=T(\bar{X})$$

例 2．一种仪器的首次故障时间 X（单位：千小时）的密度函数为

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

现测试了 8 台该种仪器，首次故障时间分别为

0.38，　1.42，　2.20，　3.46，　4.28，　5.11，　6.87，　8.04

（1）试利用矩估计法，估计 X 的期望与标准差。

（2）求参数 λ 的矩估计。

解　（1）期望 EX 的矩估计为 $\bar{X}$，标准差 $\sqrt{DX}$ 的矩估计为 S_0，

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=3.97,$$

$$S_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=6.144,\quad S_0=\sqrt{S_0^2}=2.479,$$

即 X 的期望与标准差的矩估计分别为 3.97, 2.479。

（2）$EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}=\bar{X}$，　$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}=\frac{1}{3.97}=0.252$

6时间回归分析

(14分)下表是某股份公司3年间的每股收益

季度 年	1	2	3	4
1	0.362	0.370	0.620	0.384
2	0.422	0.448	0.412	0.584
3	0.620	0.620	0.891	0.570

1）说明公司的每股收益存在明显的长期趋势和循环波动
2）利用滑动平均剔除法，求出季节指数

（1）时序图如下：

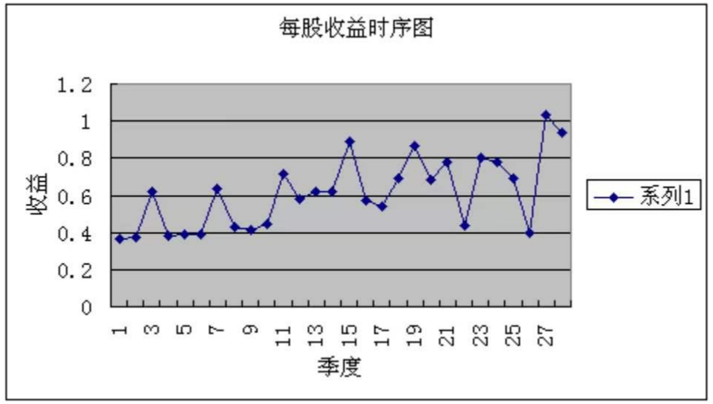


图　时序图

从图中明显看出收益呈周期性波动，周期为4，即存在季节性。

6时间回归分析

(14分)下表是某股份公司3年间的每股收益

年＼季度	1	2	3	4
1	0.362	0.370	0.620	0.384
2	0.422	0.448	0.412	0.584
3	0.620	0.620	0.891	0.570

2）利用滑动平均剔除法，求出季节指数

按照 4 步移动平均法计算

移动平均值$\bar{X}_1$=(0.362+0.37+0.62+0.384)/4=0.434

$\bar{X}_2$=(0.37+0.62+0.384+0.422)/4=0.449

以此类推，得$\bar{X}_3$=0.469, $\bar{X}_4$=0.417, $\bar{X}_5$=0.467, $\bar{X}_6$=0.516, $\bar{X}_7$=0.559, $\bar{X}_8$=0.679, $\bar{X}_9$=0.675

X_1的滑动百分比=X_1收益/移动平均值$\bar{X}_1$=0.62/0.434=1.429

以此类推，得X_2的滑动百分比=0.855, X_3的滑动百分比=0.9, X_4的滑动百分比=1.074, X_5的滑动百分比=0.882, X_6的滑动百分比=1.132, X_7的滑动百分比=1.109, X_8的滑动百分比=0.913, X_9的滑动百分比=1.32

季度	收益	4 步移动平均	滑动百分比
1	0.362	-	
2	0.37	-	
3	0.62	0.434	1.429
4	0.384	0.449	0.855
1	0.422	0.469	0.9
2	0.448	0.417	1.074
3	0.412	0.467	0.882
4	0.584	0.516	1.132
1	0.62	0.559	1.109
2	0.62	0.679	0.913
3	0.891	0.675	1.32
4	0.57	-	

第一季的季平均$\bar{S}_1$=(0.9+1.109)/2=1.005

第二季的季平均S_2=(1.074+ 0.913)/2= 0.994

第三季的季平均S_3=(1.429 + 0.882+ 1.32)/3= 1.21

第四季的季平均S_4=(0.855+ 1.132)/2= 0.994

总平均数=(1.429+ 0.855 + 0.9 + 1.074 + 0.882 + 1.132 + 1.109 + 0.913 + 1.32)/9=1.068

第一季的季节指数S_1=第一季的季平均数/总平均数=$\bar{S}_1$ / 1.068=1.005/ 1.068=0.941

以此类推，第二季的季节指数S_2=0.931,第三季的季节指数S_3=1.133,第四季的季节指数S_4=0.931

季度＼年度	1	2	3	季平均	季节指数
1		0.9	1.109	1.005	0.941
2		1.074	0.913	0.994	0.931
3	1.429	0.882	1.32	1.21	1.133
4	0.855	1.132		0.994	0.931