Problem nadprodukcji – matematyczna optymalizacja poziomu produkcji cukierni

Odwiecznym problemem piekarzy i cukierników jest ile wyprodukować, żeby potem nie wyrzucać. Wiadomo, że w cukierni liczą się tylko wyroby wyprodukowane dzisiaj. Asortyment wczorajszy jest oddawany na zwroty lub sprzedawany za co najwyżej połowę wcześniejszej wartości. Jeżeli cukiernik jest zbyt zapobiegliwy, wypiecze zbyt małą ilość ciast, nie zarobi tyle, ile mógłby zarobić, gdyby zaryzykował i wypiekł więcej. Dodatkowym kosztem jest poziom niezadowolenia i rozczarowanie klientów. W przyszłości mogą oni znaleźć inną cukiernię, w której ich ulubione ciasto będzie zawsze dostępne.

Z kolei cukiernik ryzykant wypiecze zbyt dużo ciast i będzie musiał je potem wyprzedawać lub utylizować. Taka sytuacja również demoralizuje klientów. Pojawią się tacy, którzy nie kupią ciasta dzisiaj, aby jutro kupić je taniej.

Idealnie by było produkować tyle ciasta, aby starczyło dla wszystkich i nic się nie zmarnowało.

Machine learning przybywa na ratunek

Aby poradzić sobie z problemem, wystarczy zbudować model regresji liniowej oparty na danych pogodowych, dniach tygodnia, porze roku oraz innych zmiennych opisujących. Wynikiem będzie prognoza popytu na ciasta w danym dniu. Zazwyczaj w przypadku stabilnej sprzedaży prognozy regresyjne są wystarczająco skuteczne. Potrafią przewidzieć wielkość przyszłej sprzedaży na poziomie od r^2 = 85 do 95%. Ten tajemniczy r^2 to tzw. współczynnik determinacji, określający poziom dopasowania prognozy do stanu faktycznego. Model na poziomie r^2 = 87% myliby się o 13% w obie strony.

Budowanie takich prognoz to oczywiście praca dla specjalisty, który najczęściej przy takim zleceniu uruchamia wszystkie znane mu i dostępne modele regresji, łącznie z konwolucyjnymi sieciami neuronowymi. Jest to duże przedsięwzięcie, w tym wypadku zupełnie uzasadnione. Przypomina to strzelanie do much z armaty.

Budowanie modeli ma sens, jeżeli jest odpowiednia skala przedsięwzięcia. Taka skala to na przykład poziom sprzedaży we wszystkich dniach następnych dwóch miesięcy dla kilkudziesięciu wyrobów w kilkunastu lokalizacjach. Taki model byłby na stałe „zaszyty" w systemie zarządzania produkcją i generowałby gotowe zlecenia produkcyjne z przyporządkowaniem konkretnych lokalizacji sprzedażowych. Można by go rozbudować o kolejne funkcjonalności, na przykład prognozy dla godzin sprzedaży, co pozwalałoby dostarczać pieczywo w optymalnej ilości na drugą zmianę.

Co ma zrobić cukiernik, który wszystko liczy w zeszycie?

Rozwiązania z zakresu *machine learning* są drogie i w małej skali mogą okazać się nieopłacalne. Stara prawda mówi, że aby przewidzieć coś w przyszłości należy posłużyć się zapiskami z przeszłości.

Wyobraźmy sobie cukiernika, który zapisuje w zeszycie, ile sprzedał ciast każdego dnia. Załóżmy, że jutro jest zwykły czwartek. Cukiernik otwiera swój zeszyt i ogląda poziom sprzedaży z ostatnich 35 zwykłych czwartków. Następnie przepisuje dane do arkusza kalkulacyjnego. Poniżej znajduje się podsumowanie ostatniej sprzedaży. W pierwszej kolumnie jest ilość sprzedanych ciast. W drugiej widzimy, ile razy miała miejsce taka sprzedaż w ciągu analizowanych 35 dni.

Na przykład poziom sprzedaży 51 ciast cukiernik osiągnął w czterech różnych dniach w analizowanym okresie 35 dni.

Tabela 1. Rozkład ilości sprzedaży ciast w okresie 35 dni

Ile sztuk ciasta sprzedano?	Ile razy tak było?
50	3
51	4
52	2
53	3
54	3
55	5
56	3
57	4
58	3
59	3
60	2

Następnie cukiernik rozszerzył swoją tabelkę o dwie kolejne kolumny: „Prawdopodobieństwo" i „Skumulowane prawdopodobieństwo".

Tabela 2. Rozkład prawdopodobieństwa sprzedaży ciast w okresie 35 dni

Ile sztuk ciasta sprzedano?	Ile razy tak było?	Prawdopodobieństwo	Skumulowane prawdopodobieństwo
50	3	0.086	0.086
51	4	0.114	0.2
52	2	0.057	0.257
53	3	0.086	0.343
54	3	0.086	0.429
55	5	0.143	0.571
56	3	0.086	0.657
57	4	0.114	0.771
58	3	0.086	0.857
59	3	0.086	0.943
60	2	0.057	1.0

Obliczenia do tych kolumn są bardzo proste. Jeżeli cukiernik sprzedał 3 razy w ciągu 35 dni 50 sztuk ciast (pierwszy wiersz w tabeli) to prawdopodobieństwo takiego poziomu sprzedaży oblicza się jako: 3/35 = 0,086.

Z kolei „Skumulowane prawdopodobieństwo" to tylko suma kolejnych prawdopodobieństw, czyli dla sprzedaży 52 sztuk ciasta będzie to: 0,086 + 0,114 + 0,057 = 0,257.

Cukiernik zajrzał również do zapisanych w zeszycie kosztów produkcji i cen sprzedaży.

jednostkowy koszt produkcji ciastka: c_1 = 14 zł
jednostkowa cena sprzedaży ciastka: c_2 = 25 zł
jednostkowa cena sprzedaży ciastka po terminie: c_3 = 9 zł

Łatwo policzyć, że zysk z dziennej sprzedaży wyrobów to przychody ze sprzedaży wyrobów pełnowartościowych oraz niepełnowartościowych pomniejszony o koszty produkcji sprzedanych wyrobów.

Jeśli więc cukiernik wyprodukował 60 ciast, a sprzedał 50, to uzyskał zysk 500 zł.

$$500 = (50 \times 25) + (10 \times 9) - (60 \times 14)$$

A gdyby wyprodukował 50 ciast mniej, zarobiłby o 50 zł więcej.

$$550 = (50 \times 25) - (50 \times 14)$$

Aby zoptymalizować poziom produkcji, należy najpierw zapisać najprostsze zasady w postaci nierówności.

$$\begin{cases} c_3 > c_1 > c_2 \\ (c_2 - c_1) = z, & \text{zysk ze sprzedaży} \\ (c_1 - c_3) = s, & \text{strata z tytułu wyprzedaży} \end{cases} \tag{1}$$

c_1 jednostkowy koszt produkcji
c_2 jednostkowa cena sprzedaży
c_3 jednostkowa cena sprzedaży wyprzedażowej

W naszym przykładzie zysk ze sprzedaży ciasta to różnica między kosztem produkcji a ceną sprzedaży: 25 zł – 14 zł = 11 zł.

Stratę jednostkową można natomiast zapisać w postaci: 14 zł – 9 zł = 5 zł

Wszystko więc zależy od tego, czy cukiernik wyprodukował więcej ciast (ilość wyprodukowana k) niż był na nie popyt (ilość sprzedana p).

Gdy cukiernik wyprodukował za mało ciast k, zabrakłoby ich dla wszystkich klientów p, czyli p>k.

Relacje pomiędzy popytem a podażą można zapisać prostym wzorem, gdzie „z" to zysk jednostkowy, „s" – strata jednostkowa opisana we wzorze (1).

$$g(k, p) = \begin{cases} (z \times p) - (s \times (k - p)), & \text{if } p < k \\ z \times k, & \text{if } p \geqslant k \end{cases} \tag{2}$$

Następny wzór jest tylko iloczynem wszystkich możliwych zysków z wielkości produkcji i wielkości sprzedaży oraz ich prawdopodobieństwa. Aby podjąć optymalną decyzję, należy wybrać największą wartość wektora d(k) opisanego wzorem (3).

$$d(k) = \sum_{p=n}^{N} g(k, p) \times p(x) \tag{3}$$

Nasz cukiernik przepisał wzór (2) w formie funkcji arkusza kalkulacyjnego. Skopiował ją i wkleił do komórek poniższej tabeli.

W główce tabeli (kolumny tabeli) wpisane są ilości sprzedanych ciast od 50 do 60 sztuk, w boczku tabeli (wiersze tabeli) wpisane są ilości produkcji ciast od 50 do 60 sztuk.

Tabela 3. Tabela zysku według wariantów produkcji i sprzedaży

	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	d(k)
50	550	550	550	550	550	550	550	550	550	550	550	550
51	545	561	561	561	561	561	561	561	561	561	561	559.629
52	540	556	572	572	572	572	572	572	572	572	572	567.429
53	535	551	567	583	583	583	583	583	583	583	583	574.314
54	530	546	562	578	594	594	594	594	594	594	594	579.829
55	525	541	557	573	589	605	605	605	605	605	605	583.971
56	520	536	552	568	584	600	616	616	616	616	616	585.829
57	515	531	547	563	579	595	611	627	627	627	627	586.314
58	510	526	542	558	574	590	606	622	638	638	638	584.971
59	505	521	537	553	569	585	601	617	633	649	649	582.257
60	500	516	532	548	564	580	596	612	628	644	660	578.171

Wnętrze tabeli wypełnione jest obliczeniami zysku na sprzedaży. Tak więc zgodnie z wzorem (2), gdy wyprodukowano 54 ciasta (piąty wiersz) i udało się sprzedać 50 ciast (pierwsza kolumna) zysk z działalności wyniósł 530 zł. Jak zostało to policzone?

$$530 = (50 \times 25) + (4 \times 9) - (54 \times 14)$$

W powyższym wzorze jak pamiętamy 25 zł to cena sprzedaży ciasta, 9 zł to cena przecenionego ciasta, a 14 zł to techniczny koszt wytworzenia ciasta. Cukiernik wyprodukował 54 ciasta, z czego sprzedał 50 a 4 musiał przecenić.

Ile należy wyprodukować ciast, aby zarobić jak najwięcej?

Nie trudno zauważyć, że zarobimy tym więcej, im więcej sprzedamy. Z drugiej strony nadprodukcja powoduje spadek zysku. Innymi słowy, każde nadmiarowo wyprodukowane ciasto obniża nasz dzienny zysk.

Aby znaleźć optymalny poziom produkcji należy wykorzystać rozkład prawdopodobieństwa zawarty w tabeli 2. Jeżeli więc pomnożymy prawdopodobieństwo wielkości sprzedaży przez zysk z każdego wariantu produkcji i sprzedaży z tabeli 3 otrzymamy poniższą tabelę.

Tabela 4. Zysk skorygowany o prawdopodobieństwo sprzedaży

	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	d(k)
50	47.14	62.86	31.43	47.14	47.14	78.57	47.14	62.86	47.14	47.14	31.43	550
51	46.71	64.11	32.06	48.09	48.09	80.14	48.09	64.11	48.09	48.09	32.06	559.629
52	46.29	63.54	32.69	49.03	49.03	81.71	49.03	65.37	49.03	49.03	32.69	567.429
53	45.86	62.97	32.4	49.97	49.97	83.29	49.97	66.63	49.97	49.97	33.31	574.314
54	45.43	62.4	32.11	49.54	50.91	84.86	50.91	67.89	50.91	50.91	33.94	579.829
55	45	61.83	31.83	49.11	50.49	86.43	51.86	69.14	51.86	51.86	34.57	583.971
56	44.57	61.26	31.54	48.69	50.06	85.71	52.8	70.4	52.8	52.8	35.2	585.829
57	44.14	60.69	31.26	48.26	49.63	85	52.37	71.66	53.74	53.74	35.83	586.314
58	43.71	60.11	30.97	47.83	49.2	84.29	51.94	71.09	54.69	54.69	36.46	584.971
59	43.29	59.54	30.69	47.4	48.77	83.57	51.51	70.51	54.26	55.63	37.09	582.257
60	42.86	58.97	30.4	46.97	48.34	82.86	51.09	69.94	53.83	55.2	37.71	578.171

Tak więc używając wzoru (3), gdy udało się sprzedać 50 ciast (pierwsza kolumna) a wyprodukowano 54 ciasta (piąty wiersz), zysk z działalności wynosi 530 zł.

Wartość tę mnożymy przez wartość prawdopodobieństwa sprzedaży 50 ciast, którą znajdziemy w tabeli 2.

$$45.428573 = 530 \times 0.08571429$$

Suma wszystkich prawdopodobieństw wiersza daje nam wartość w ostatniej kolumnie tabeli 4 oznaczonej jako d(k). Wartość tę opisuje również wzór (3).

Naszym zadaniem jest teraz znalezienie najwyższej wartości w kolumnie d(k). Okazuje się, że biorąc pod uwagę zysk ze sprzedaży i stratę z nadprodukcji oraz prawdopodobieństwo tej konfiguracji, najbardziej opłaca się produkować 57 ciast. Wartość sumy prawdopodobnego zysku wyniesie wtedy 586,31 zł.

Czy warto?

Przedstawiona metoda jest chyba najprostszą możliwą do przeprowadzenia optymalizacją matematyczną. Każdy kto chce zmaksymalizować swój zysk musi prędzej czy później spotkać się z koniecznością kalkulacji strat i zysków w zestawieniu z ich prawdopodobieństwem.

Przedstawiony sposób może być bardzo łatwo wprowadzony do arkusza kalkulacyjnego, dzięki czemu może służyć do optymalizacji wielkości produkcji dla wielu różnych produktów.

Wojciech Moszczyński