siatki z wzorami bardzo rozmyte – złożyłam proszę o spr.

Ocena efektywności piekarni za pomocą modelu CCR-DEA

Model DEA CCR służy do ustalania poziomu sprawności określonej organizacji w porównaniu z innymi podobnymi organizacjami. Jest to więc narzędzie służące do benchmarking, czyli porównywania, tworzenia rankingów i znajdowania różnic pomiędzy podobnymi do siebie obiektami. Benchmarking jest łatwy gdy porównujemy obiekty pod kontem jednej cech, np. przychodów czy zysków.

Niestety w życiu gospodarczym mamy obiekty różnej wielkości, gdzie często zmuszeni jesteśmy porównywać jednocześnie kilkadziesiąt różnych cech. Najczęściej nie porównuje się dwóch obiektów lecz cały ich szereg. Porównanie takiego zestawu obiektów wielowymiarowych bez użycia specjalistycznych narzędzi drastycznie przekracza możliwości ludzkiej percepcji.

Aby ułatwić sobie zadanie porównania wielu obiektów o podobnych cechach i funkcjach analitycy wymyślili wskaźniki. Takim wskaźnikiem jest np. przychód na jednego zatrudnionego lub poziom zysk na wielkość przychodów.

Wskaźniki skutecznie redukują różnice wielkości obiektów nie rozwiązują jednak problemu wielkiej ilości cech do porównania. Proces porównawczy staje się żmudny, gdy niezbędne jest porównanie wielkiej ilości wskaźników. Powstaje problem obiektywizmu analiz, w których analityk według uznania decyduje o budowie wskaźników oraz wskazuje, które wskaźniki są ważniejsze, a które mniej ważne.

Nowoczesną metodą porównywania efektywności obiektów gospodarczych jest algorytm programowania liniowego DEA (*Data Envelopment Analysis*) zaproponowana przez Charnesa, Coopera i Rhodesa w 1978 roku. W niniejszym artykule omówimy pierwszą wersje tego algorytmu, nazwaną CCR od pierwszych liter nazwisk jego twórców.

Model CCR w szczególności rozwiązuje problem porównania efektywności technologii docelowych, struktury technologii optymalnych oraz analizy raportów metodologii programowania liniowego simplex.

Metoda DEA jest stosowana w analizach porównawczych efektywności obiektów, gdzie proces opisywany jest przez więcej niż jeden nakład oraz więcej niż jednym rezultatem.

W porównaniach multiwymiarowych zarówno użycie wskaźników jak i modeli ekonometrycznych jest nieefektywne. Metody te zawodzą, ponieważ mając ograniczone informacje nie jesteśmy w stanie określić jak wielki nakład danego rodzaju został bezpośrednio wydatkowany na uzyskanie poszczególnych rezultatów.

Przykład zastosowania modelu DEA CCR

Grupa inwestorów zamierza kupić piekarnię. Zaoferowano im 5 zakładów. Analitycy pracujący dla inwestorów muszą wskazać, które piekarnie są najlepsze pod względem efektywności technologiczno-organizacyjnej. Informacja ta jest kluczowa do podjęcia decyzji, którą piekarnię kupić. Aby uniknąć subiektywnej oceny zdecydowano się skorzystać z algorytmu DEA CCR.

Analitycy dysponują następującymi danymi:

Piekarnia	Bobry	Łopata	Lipniki	Nowa	Bartniki
Wartość infrastruktury w tys	939.0	466	88.83	314.6	1503.7
Wartość maszyn w tys.	3493.5	976	619.2	564.2	5871.8
Zatrudnienie na produkcji	57.0	23	11.7	79.3	44.0
Koszty w tys.	796.5	283	67.95	278.2	2312.2
Wielkość produkcji w tonach	9471	5859	2239.2	2478.0	10205.4
Zysk brutto w tys.	28	12	44.4	12.6	22.8

W metodzie DEA zakłada się, że optymalna, z punktu widzenia efektywności, technologia obiektu o-tego (1 ≤o≤J) jest liniową kombinacją technologii empirycznych poszczególnych obiektów.

Opisem technologii każdego obiektu jest jego wektor nakładów oraz wektor rezultatów.

Na podstawie tabeli możemy przyjąć, że wektor nakładów dla piekarni Bobry to:

Nakłady = [939; 3493,5; 57; 796,5]

Rezultaty = [9471, 28]

Aby porównać sprawność technologiczną piekarni Bobry należy rozwiązać poniższy zespół nierówności programowania liniowego.

$$
\left\{
\begin{array}{rl}
939x_1 + 466x_2 + 88.83x_3 + 314.6x_4 + 1503.7x_5 \leqslant 939\theta_1 & (1) \\
3493.5x_1 + 976x_2 + 619.2x_3 + 564.2x_4 + 5871x_5 \leqslant 3493.5\theta_1 & (2) \\
57x_1 + 23x_2 + 11.7x_3 + 79.3x_4 + 44.0x_5 \leqslant 57\theta_1 & (3) \\
796.5x_1 + 283x_2 + 67.95x_3 + 278.2x_4 + 2312.2x_5 \leqslant 796.5\theta_1 & (4) \\
9471x_1 + 5859x_2 + 2239.2x_3 + 2478.0x_4 + 10205.4x_5 \geqslant 9471 & (5) \\
28x_1 + 12x_2 + 44.4x_3 + 12.6x_4 + 22.8x_5 \geqslant 28 & (6) \\
\theta_2 \leqslant 0 &
\end{array}
\right.
$$

Łatwo zauważyć, że wartości z powyższego zespołu nierówności pochodzą ze tabeli danych jaką otrzymali analitycy.

Wektor nakładów i rezultatów piekarni Bobry znajduje się również po prawej stronie nierówności.

Podobnie postępujemy z pozostałymi piekarniami.

Piekarnia Łopata

$$\begin{cases} 939x_1 + 466x_2 + 88.83x_3 + 314.6x_4 + 1503.7x_5 \leqslant 446\theta_2 & (1) \\ 3493.5x_1 + 976x_2 + 619.2x_3 + 564.2x_4 + 5871x_5 \leqslant 976\theta_2 & (2) \\ 57x_1 + 23x_2 + 11.7x_3 + 79.3x_4 + 44.0x_5 \leqslant 23\theta_2 & (3) \\ 796.5x_1 + 283x_2 + 67.95x_3 + 278.2x_4 + 2312.2x_5 \leqslant 283\theta_2 & (4) \\ 9471x_1 + 5859x_2 + 2239.2x_3 + 2478.0x_4 + 10205.4x_5 \geqslant 5859 & (5) \\ 28x_1 + 12x_2 + 44.4x_3 + 12.6x_4 + 22.8x_5 \geqslant 12 & (6) \\ \theta_2 \leqslant 0 & \end{cases}$$

Piekarnia Lipniki

$$\begin{cases} 939x_1 + 466x_2 + 88.83x_3 + 314.6x_4 + 1503.7x_5 \leqslant 88.83\theta_3 & (1) \\ 3493.5x_1 + 976x_2 + 619.2x_3 + 564.2x_4 + 5871x_5 \leqslant 619.2\theta_3 & (2) \\ 57x_1 + 23x_2 + 11.7x_3 + 79.3x_4 + 44.0x_5 \leqslant 11.7\theta_2 & (3) \\ 796.5x_1 + 283x_2 + 67.95x_3 + 278.2x_4 + 2312.2x_5 \leqslant 67.95\theta_3 & (4) \\ 9471x_1 + 5859x_2 + 2239.2x_3 + 2478.0x_4 + 10205.4x_5 \geqslant 2239.2 & (5) \\ 28x_1 + 12x_2 + 44.4x_3 + 12.6x_4 + 22.8x_5 \geqslant 44.4 & (6) \\ \theta_2 \leqslant 0 & \end{cases}$$

Piekarnia Nowa

$$\begin{cases} 939x_1 + 466x_2 + 88.83x_3 + 314.6x_4 + 1503.7x_5 \leqslant 314.6\theta_4 & (1) \\ 3493.5x_1 + 976x_2 + 619.2x_3 + 564.2x_4 + 5871x_5 \leqslant 564.2\theta_4 & (2) \\ 57x_1 + 23x_2 + 11.7x_3 + 79.3x_4 + 44.0x_5 \leqslant 79.3\theta_4 & (3) \\ 796.5x_1 + 283x_2 + 67.95x_3 + 278.2x_4 + 2312.2x_5 \leqslant 278.2\theta_4 & (4) \\ 9471x_1 + 5859x_2 + 2239.2x_3 + 2478.0x_4 + 10205.4x_5 \geqslant 2478.0 & (5) \\ 28x_1 + 12x_2 + 44.4x_3 + 12.6x_4 + 22.8x_5 \geqslant 12.6 & (6) \\ \theta_2 \leqslant 0 & \end{cases}$$

Piekarnia Bartniki

$$\begin{cases} 939x_1 + 466x_2 + 88.83x_3 + 314.6x_4 + 1503.7x_5 \leqslant 1503.7\theta_5 & (1) \\ 3493.5x_1 + 976x_2 + 619.2x_3 + 564.2x_4 + 5871x_5 \leqslant 5871.8\theta_5 & (2) \\ 57x_1 + 23x_2 + 11.7x_3 + 79.3x_4 + 44.0x_5 \leqslant 44.0\theta_5 & (3) \\ 796.5x_1 + 283x_2 + 67.95x_3 + 278.2x_4 + 2312.2x_5 \leqslant 2312.2\theta_5 & (4) \\ 9471x_1 + 5859x_2 + 2239.2x_3 + 2478.0x_4 + 10205.4x_5 \geqslant 10205.4 & (5) \\ 28x_1 + 12x_2 + 44.4x_3 + 12.6x_4 + 22.8x_5 \geqslant 22.8 & (6) \\ \theta_2 \leqslant 0 & \end{cases}$$

Istnieje wiele metod rozwiązanie powyższych nierówności programowania liniowego bez użycia komputerów. Warto jednak skorzystać z programów komputerowych lub kalkulatorów simplex dostępnych online. Ja skorzystałem z dwóch bezpłatnej bibliotek języka Python o nazwie Pulp i Fractions.

Najlepsze technologicznie okazały się piekarnie: Łopata i Lipniki. Są to tak zwane obiekty peletonowe. Przy zastosowaniu modelu CCR najczęściej nie jest wskazywany jedne najlepszy obiekt lecz grupa obiektów, które są na względnie podobnym poziomie. Najgorszą piekarnia okazały się Bobry, które są gorsze od piekarni peletonowych o 30%.

Młyn	Ocena
Bobry	0.705
Łopata	1
Lipniki	1
Nowa	0.814
Bartniki	0.914

Wojciech Moszczyński