

Analiza porównawcza zużycia prądu w młynach za pomocą programowania liniowego DEA-CCR

Zużycie prądu jest ważnym kosztem zmiennym w procesie produkcji mąki. Różnice w poziomie zużycia prądu pomiędzy identycznymi obiektami przemysłowymi mogą wskazywać na odmienne technologie, ukryte problemy techniczne lub niedoskonałości organizacyjne.

Aby dokonać oceny trzeba określić punkt odniesienia. Najlepsza sytuacja ma miejsce, gdy istnieje kilka zespołów maszyn lub instalacji posiadających zbliżone właściwości techniczne i organizacyjne. W przypadku braku punktów odniesienia w postaci podobnych obiektów mogą nimi być inne okresy dla jednego obiektu. W ten sposób możliwe jest zauważenie istotnych zmiany przebiegu procesu w czasie. Poza zaproponowanym tu czysto technicznym zastosowaniem metody porównawczej, może ona być również użyta w obszarze inwestycyjnym lub zarządczym. W ten sposób możliwa jest wycena dokonanych inwestycji i ulepszeń, a co za tym idzie ocena wartości rynkowej całego przedsiębiorstwa. Analiza porównawcza może przynieść wiele interesujących informacji, takich jak poziom efektywności zakładu lub poziom wykorzystania zasobów ludzkich.

Wskaźniki energochłonności oparte na średnich ważonych

Zużycie energii można prezentować w postaci ilości zużytych kilowatogodzin. Taka informacja niewiele mówi, ponieważ młyny prowadzą różne procesy przetwórcze, które w różnym stopniu potrzebują energii elektrycznej. Należy więc analizować poziom zużycia energii elektrycznej w odniesieniu do konkretnych wielkości produkcji. Trudno jest przeprowadzić analizę efektywności, gdy w kilku instalacjach prowadzone były różne procesy produkcyjne o zróżnicowanym poziomie poboru energii. W takim wypadku najczęściej łączy się wiele średnich w jeden wskaźnik. Do wartości cząstkowych takiego połączanego wskaźnika dodaje się wagi określające poziom zużycia energii przez poszczególne procesy. Wagi pod-

noszą lub obniżają znaczenie poszczególnych kategorii cząstkowych.

Jest to bardzo prosta i względnie czytelną metoda, zrozumiała zarówno dla pracowników, jak i kierownictwa. Niestety podejście to obciążone jest licznymi wadami i nie zawsze daje wiarygodne informacje. Sam pomysł budowania średniego wskaźnika obciążenia jako sumy innych średnich korygowanych wagami może budzić niepokój co do poprawności metodycznej oraz obiektywności. Powstało wiele prac teoretycznych krytykujących metody porównawcze bazujące na średnich ważonych.

Analiza porównawcza metodą Data Envelopment Analysis (DEA-CCR)

Problem wadliwości analiz efektywności, opartych na średnich ważonych był istotną przeszkodą w badaniach nad optymalizacją procesów. Brakowało metody pomiaru, która w sposób wiarygodny i bezstronny wyznaczałaby granice wydajności badanych procesów.

Metoda DEA-CCR została zaprezentowana w roku 1978¹. Jest metodą, która doskonale sprawdza się w badaniu efektywności obiektów o złożonej, wielowymiarowej strukturze. Proste, oparte na średnich ważonych, wskaźniki nie mogą w sposób obiektywny ocenić energochłonności lub wydajności złożonych procesów. Również nowoczesne techniki z obszaru *data science* są w tej sytuacji mało skuteczne. Dzieje się tak, ponieważ w podejściu tradycyjnym zakłada się, że potrafimy ustalić, jak wielki nakład danego rodzaju został bezpośrednio wydat-

kowany na uzyskanie poszczególnych rezultatów (np. ile jednostek energii było potrzebnych do wytworzenia poszczególnych rodzajów produktów). W praktyce, bez bardzo szczegółowej rachunkowości, nie jest to możliwe².

Data envelopment analysis (DEA-CCR) jest metodą nieparametryczną, opartą na programowaniu liniowym. Metoda ta służy głównie do szacowania granic wydajności procesów. Przedmiotem analiz DEA są złożone jednostki organizacyjne posiadające własną, ograniczoną niezależność (tzw. DMU *decision-making units*).

Przykładami DEA są elektrownie, szpitale, oddziały banków, szkoły i inne jednostki mające względną niezależność. DMU są odrębnymi jednostkami organizacyjnymi, które mają swobodę w podejmowaniu niektórych decyzji, lecz które niekoniecznie mają pełną swobodę w odniesieniu do tych decyzji.

Zastosowania DEA w ocenie energochłonności pięciu młynów

Teraz przeprowadzimy analizę pięciu młynów z podobnymi instalacjami przetwórczymi. Naszym zadaniem jest porównanie zużycia prądu w odniesieniu do ilości ton uzyskanej mąki. Należy pamiętać, że produkcja każdego rodzaju mąki ma inne zapotrzebowanie na energię elektryczną. Przeprowadzono pomiar zużycia energii elektrycznej (w ostatniej kolumnie tabeli) w wybranych młynach oraz wypisano ilości mąki w tonach.

Najbardziej energochłonna jest produkcja mąki 550, która pochłania dwa razy więcej energii elektrycznej co pro-

Oddziały	Mąka Rozczatka [t]	Mąka 550 [t]	Mąka 120 [t]	Mąka Krupska [t]	Mąka 350 [t]	Zużyta energia MWh
Młyn Wręga	885	953	1582	1460	314	1100
Młyn Żelechów	1935	622	brak prod.	brak prod.	2347	850
Młyn Pawin	841	715	980	135	291	1180
Młyn Korki	brak prod.	955	2080	2126	brak prod.	780

¹ Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., „Measuring the efficiency of decision making units”, *European Journal of Operational Research*, 1978

² Bogusław Guzik, „Podstawowe możliwości analityczne modelu CCR-DEA”, *Badania Operacyjne i Decyzje* 1/2009

dukcja mąk *Rozczatki* i *Krupskiej*. Produkcja mąki tortowej 550 pochłania również 3 razy więcej energii niż produkcja mąki 350 i aż 4 razy więcej energii niż produkcja mąki razowej 120.

Mamy więc dużą dysproporcję poboru energii elektrycznej, którą należy uwzględnić w analizie porównawczej. Przyjmijmy oznaczenie produktów:

λ_1 – mąka Rozczatka

λ_2 – mąka 550,

λ_3 – mąka 120,

λ_4 – mąka Krupska,

λ_5 – mąka 350.

Dysproporcje w zużyciu energii elektrycznej mogą być opisane w formie matematycznej jako:

$$\lambda_2 - 2\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 - 2\lambda_4 \geq 0$$

$$\lambda_2 - 3\lambda_5 \geq 0$$

$$\lambda_2 - 4\lambda_3 \geq 0$$

1.1 Opisanie sytuacji za pomocą wyrażeń matematycznych

Pierwszym krokiem w analizie DEA jest opisanie zadania w postaci równań i nierówności matematycznych. Analiza DEA bazuje na metodzie programowania liniowego. Do sformułowania równań wystarczy podstawowa znajomość matematyki. Energochłonność jednostkową wylicza się jako sumę ilości poszczególnych produktów dzieloną przez zużytą przy produkcji energię. Można to wyrazić wzorami:

$$y_{Wre\gamma a} = \frac{885\lambda_1 + 953\lambda_2 + 1582\lambda_3 + 1460\lambda_4 + 314\lambda_5}{1100\lambda_6} \quad (1)$$

$$y_{Ze\le ch\acute{o}w} = \frac{1935\lambda_1 + 622\lambda_2 + 2347\lambda_3}{850\lambda_6} \quad (2)$$

$$y_{Pawin} = \frac{841\lambda_1 + 715\lambda_2 + 980\lambda_3 + 135\lambda_4 + 291\lambda_5}{1180\lambda_6} \quad (3)$$

$$y_{Korki} = \frac{955\lambda_2 + 2080\lambda_3 + 2126\lambda_4}{780\lambda_6} \quad (4)$$

Powyższy zestaw równań wydaje się być bardzo skomplikowany, jest jednak prostym odwzorowaniem wskaźników zużycia energii na jednostkę produktu. Liczby znajdujące się we wzorach są odzwierciedleniem liczb znajdujących się w tabeli. Wartości wynikowe y_n opisują poziomy energochłonności poszczególnych młynów. Niestety taki zestaw równań nie nadaje się do zastosowania w algorytmie programowania liniowego. Ponadto zestaw ten reprezentuje de facto tradycyjne podejście do oceny pracochłonności oparte na średnich.

1.2 Przekształcenie równań do postaci nierówności programowania liniowego

Aby wykonać DEA-CCR należy przekształcić równania 1-4 do postaci wyrażeń programowania liniowego.

$$(885\lambda_1 + 953\lambda_2 + 1582\lambda_3 + 1460\lambda_4 + 314\lambda_5) - 1100\lambda_6 \leq 0 \quad (5)$$

$$(1935\lambda_1 + 622\lambda_2 + 2347\lambda_3) - 850\lambda_6 \leq 0 \quad (6)$$

$$(841\lambda_1 + 715\lambda_2 + 980\lambda_3 + 135\lambda_4 + 291\lambda_5) - 1180\lambda_6 \leq 0 \quad (7)$$

$$(955\lambda_2 + 2080\lambda_3 + 2126\lambda_4) - 780\lambda_6 \leq 0 \quad (8)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad (9)$$

$$\lambda_2 \geq 0 \quad (10)$$

$$\lambda_3 \geq 0 \quad (11)$$

$$\lambda_4 \geq 0 \quad (12)$$

$$\lambda_5 \geq 0 \quad (13)$$

$$\lambda_6 \geq 0 \quad (14)$$

Na końcu zapisujemy kryteria zróżnicowania energochłonności poszczególnych produktów. Warunki te możemy zapisać jako:

$$\lambda_3 - 2\lambda_1 \geq 0 \quad (15)$$

$$\lambda_3 - 2\lambda_2 \geq 0 \quad (16)$$

$$\lambda_3 - 4\lambda_4 \geq 0 \quad (17)$$

$$\lambda_3 - 8\lambda_5 \geq 0 \quad (18)$$

Powyższe równania 5-18 reprezentują ograniczenia. Najważniejszym elementem algorytmu programowania liniowego jest funkcja celu. Jej celem, w metodologii DEA, jest maksymalizacja. Chodzi o określenie krańcowej energochłonności procesów produkcyjnych. Dla czterech młynów należy rozwiązać cztery oddzielne zadania programowania liniowego.

1.3 Formułowanie funkcji celu

Funkcja celu stanowi cel, według którego optymalizowane jest całe zadanie.

Funkcją celu dla młynu *Wręga* będzie sformułowanie:

$$\begin{cases} 885\lambda_1 + 953\lambda_2 + 1582\lambda_3 + 1460\lambda_4 + \\ + 314\lambda_5 \rightarrow \max \end{cases} \quad (19)$$

$$1100\lambda_6 = 1 \quad (20)$$

Aby algorytm programowania liniowego dla młyna *Wręga* był kompletny należy zestawić wszystkie wzory od numeru 5 do 18 oraz dodać powyższą funkcję celu 19 i 20. Rozwiązanie takiego układu równań wydaje się przedsięwzięciem beznadziejnym. W rzeczywistości można wykorzystać jeden z wielu internetowych kalkulatorów simplex. Jest też wiele bibliotek w Języku Python, np. Pulp lub Cvxopt, za pomocą których łatwo można obliczyć taki zestaw nierówności. Aby utworzyć zestawienie energochłonności młynów należy sformułować, dla każdej

z młynów, oddzielną funkcję celu z warunkiem dla λ_6 , następnie uruchomić ją wraz z nierównościami z zakresu 5 do 18.

Dla młyna *Żelechów* funkcja celu będzie miała postać:

$$\begin{cases} 1935\lambda_1 + 622\lambda_2 + 2347\lambda_3 \rightarrow \max \end{cases} \quad (22)$$

$$850\lambda_6 = 1 \quad (23)$$

dla młyna Pawin:

$$\begin{cases} 841\lambda_1 + 715\lambda_2 + 980\lambda_3 + 135\lambda_4 \\ + 291\lambda_5 \rightarrow \max \end{cases} \quad (24)$$

$$850\lambda_6 = 1 \quad (25)$$

dla młyna Korki:

$$\begin{cases} 955\lambda_2 + 2080\lambda_3 + 2126\lambda_4 \rightarrow \max \end{cases} \quad (26)$$

$$780\lambda_6 = 1 \quad (27)$$

Poniższe zestawienie jest wynikiem rozwiązania czterech zadań programowania liniowego dla młynów:

Młyn *Wręga*: 0,865

Młyn *Żelechów*: 1,000

Młyn *Pawin*: 0,622

Młyn *Korki*: 1,000

Zestawienie wskazuje, że najwyższą energochłonność względna występuje w młynach *Żelechów* i *Korki*. Z kolei energochłonność młyna *Wręgi* stanowi 86% wymienionych młynów o największej energochłonności. Procesy produkcyjne odbywające się w młynie *Pawin* okazały się najbardziej energooszczędne. Młyn ten produkuje mąkę na poziomie 62% poboru energii młynów najbardziej energochłonnych.

Podsumowanie

Zastosowanie właściwej metody porównawczej pozwala wykryć realny poziom energochłonności jednostek DMU. Jednocześnie informacja o nieefektywności jednostki DMU stanowić może podstawę do weryfikacji zastosowanych technologii produkcyjnych oraz zmian organizacyjnych.

W biznesie najważniejsza jest wiarygodność informacji. Metoda DEA powszechnie zastąpiła proste lecz subiektywne i wadliwe w ocenach metody oparte na średnich ważonych.

Zaprezentowany tu model DEA tworzy jedynie ranking efektywności jednostek DMU. Aby znaleźć przyczyny wysokiej energochłonności niektórych młynów konieczne jest zastosowanie pogłębionych analiz DEA, np. *super-efficiency* Andersena-Petersena³, która jest uogólnieniem głównego modelu DEA.

Wojciech Moszczyński

³ Andersen P., Petersen N.C., „A procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis”, *Management Science*, 1993, 39