Proszę o spr. wzorów. Składałam

Problem przydziału – przypadek specjalizacji produkcji metodą programowania liniowego

Można wyodrębnić kilka grup problemów, których zadaniem jest alokacja szeroko pojętych zasobów. Specjalnym przypadkiem problemu alokacji zasobów jest rozdział zadań produkcyjnych pomiędzy różnymi obiektami produkcyjnymi przy założeniu ich specjalizacji. W alokacji zasobów postępuje się zgodnie z kryterium optymalizacji, czyli maksymalizacji lub minimalizacji interesującego nas parametru. Wybór parametru optymalizacji jest dowolny, zgodny z potrzebami ekonomicznymi, technicznymi lub organizacyjnymi.

Najczęściej maksymalizuje się zdolności produkcyjne, zysk lub przychody. Często minimalizuje się też ryzyko, koszty lub odpady produkcyjne.

W praktyce gospodarczej istotne jest właściwe zdefiniowanie celów optymalizacji. Zazwyczaj dąży się do jednoczesnej optymalizacji wielu czynników. Przedsiębiorcy będą starali się minimalizować ryzyko jednocześnie maksymalizując zysk i wydajność produkcji. Zasada programowania liniowego w swojej klasycznej postaci pozwala jedynie na optymalizację tylko jednego wybranego parametru. Możliwe jest połączenie wielu parametrów w jednym kierunku, czyli maksymalizacji lub ich minimalizacji pod warunkiem utworzenia jednego wspólnego parametru, który będzie występował w zadaniu programowania liniowego.

Problem podziału produkcji mąki

Przedsiębiorstwo składa się z pięciu młynów. Każdy z nich może produkować pięć rodzajów mąki. Kierownictwo przedsiębiorstwa dopięło decyzję o wprowadzeniu specjalizacji produkcji. Każdy młyn ma w przyszłości produkować jeden rodzaj mąki. Młyny wytwarzają produkt podobnej jakości, niektóre nie osiągają pełnej zdolności wytwórczej, nie są w stanie produkować niektórych produktów. Kierownictwo przedsiębiorstwa przyjęło kryterium maksymalizacji wydajności produkcji. Ponieważ młyny wykorzystują różne technologie, ich wydajność dla poszczególnych produktów jest zróżnicowana. W tabeli poniżej znajdują się wydajności produkcji mąki w tonach na godzinę.

	Mąka Rozczatka	Mąka 550	Mąka 120	Mąka Krupska	Mąka 350
Młyn Wręgi	14	8	15	13	10
Młyn Żelechów	11	6	17	12	8
Młyn Jeżewo	15	brak	17	19	8
Młyn Pawin	14	7	15	16	10
Młyn Korki	brak	9	12	13	brak

Na podstawie informacji zawartej w tabeli należy przydzielić produkcję mąki, aby zmaksymalizować sumę produkcji wszystkich zakładów. Każdy zakład ma prowadzić produkcję tylko jednego produktu. Decyzja o przydziale będzie miała wartość jeden, zaś decyzja o braku przydziału będzie miała wartość zero.

Aby rozwiązać zadanie, należy treść zadania zapisać w postaci wzorów matematycznych.

Aby tego dokonać, musimy odpowiednio oznaczyć wszystkie zdarzenia wynikające z kombinatoryki. Na przykład zmienna δ_{23} dotyczy produkcji mąki 120 (kolumna 3) w młynie Żelechów. Przyjęliśmy więc oznaczenie, które mówi, że zmienna $\delta_{(w,k)}$ dotyczy decyzji o przydziale młyna znajdującego się w wierszu i produkt znajdujący się w kolumnie k. Decyzja może przyjąć wartości z zakresu 1 lub 0.

Całe zadanie można więc opisać w postaci następujących równań.

Ograniczenia dotyczące przydziału młynów:

$$\begin{cases} \delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{13}+\delta_{13}+\delta_{13}=1(1)_{Wręgi} \\ \delta_{21}+\delta_{22}+\delta_{23}+\delta_{24}+\delta_{25}=1(2)_{Żelechów} \\ \delta_{31}+\delta_{33}+\delta_{34}+\delta_{35}=1(3)_{Jerzewo} \\ \delta_{41}+\delta_{42}+\delta_{43}+\delta_{44}+\delta_{45}=1(4)_{Pawin} \\ \delta_{52}+\delta_{53}+\delta_{54}=1(5)_{Korki} \end{cases}$$

Ograniczenia dotyczące przydziału produktów:

$$\begin{cases} \delta_{11}+\delta_{21}+\delta_{31}+\delta_{41}=1(6)_{Rozczatka} \\ \delta_{12}+\delta_{22}+\delta_{42}+\delta_{52}=1(7)_{550} \\ \delta_{13}+\delta_{23}+\delta_{33}+\delta_{43}+\delta_{53}=1(8)_{120} \\ \delta_{14}+\delta_{24}+\delta_{34}+\delta_{44}+\delta_{54}=1(9)_{Krupska} \\ \delta_{15}+\delta_{25}+\delta_{35}+\delta_{45}=1(10)_{350} \end{cases}$$

Należy również zadeklarować ograniczenia znakowe, która mówią, że δ nie może być mniejsze od zera:

$$\delta_{(w,k)} \geq 0 \ldots \forall w \in \mathrm{W},\ k \in K \qquad (11)$$

$$\delta_{(w,k)} \in G w \in \mathrm{W},\ \mathrm{k} \in \mathrm{K}, \\ \gamma = 0 \vee \Gamma = 1 \qquad (12)$$

Co można zapisać jako:

$$\begin{cases} \delta_{11} \geq 0 \\ \delta_{12} \geq 0 \\ \delta_{13} \geq 0 \\ \ldots \\ \delta_{55} \geq 0 \end{cases}$$

Powyższe równania matematyczne spełniają rolę warunków ograniczających dla zadania programowania liniowego. Teraz należy sformułować najważniejszy element zadania, jakim jest funkcja celu.

Celem optymalizacji jest maksymalizacja produkcji. W tabeli powyżej zostały pokazane wydajności każdego młyna w odniesieniu do poszczególnych produktów. Znajdujemy więc jednostkowe decyzje przydziału $\delta_{w,k}$ (gdzie w oznacza młyn, a k oznacza produkt) w celu znalezienia konfiguracji maksymalizującej sumę wydajności produkcji.

Funkcja celu przyjmie postać:

$$\sum_{w \in W, k \in K} x_{(w,k)} c_{(w,k)} \rightarrow \max \qquad (13)$$

Co w bardziej przystępny sposób można zapisać jako:

$$F(\delta_{w,k}) \\ = 14\delta_{11} + 8\delta_{12} + 15\delta_{13} + 13\delta_{14} + 10\delta_{15} \\ + 11\delta_{21} + 6\delta_{22} + 17\delta_{23} + 12\delta_{24} + 8\delta_{25} \\ + 15\delta_{31} + 17\delta_{33} + 19\delta_{34} + 8\delta_{35} + \\ + 14\delta_{41} + 7\delta_{42} + 15\delta_{43} + 16\delta_{44} + 10\delta_{45} \\ + 9\delta_{52} + 12\delta_{53} + 13\delta_{54} \rightarrow max$$

Aby rozwiązać problem przydziału, należy wszystkie równania z zakresu od 1 do 13 podstawić do jednego z kalkulatorów smplex, które można znaleźć w Internecie. Możliwe jest również wykorzystanie bibliotek języka Python, które zaprojektowane są do rozwiązywania takich zadań.

Wynikiem wyliczenia zadania programowania liniowego jest optymalny przydział zadań do środków produkcji. Tabela poniżej przedstawia młyny, gdzie będą produkowane poszczególne produkty.

	Mąka Rozczatka	Mąka 550	Mąka 120	Mąka Krupska	Mąka 350
Młyn Wręgi	1	0	0	0	0
Młyn Żelechów	0	0	1	0	0
Młyn Jeżewo	0	brak	0	1	0
Młyn Pawin	0	0	0	0	1
Młyn Korki	brak	1	0	0	brak

Produkcja została przydzielona z uwzględnieniem celu optymalizacji. Oznacza to, że powyższa konfiguracja gwarantuje najwyższy poziom możliwy do osiągnięcia wydajności, przy uwzględnieniu założeń początkowych.

Aby obliczyć poziom wydajności zespołu młynów, wystarczy podstawić wartości wynikowe $\delta_{w,k} = 1$ do funkcji celu.

Specjalizacja produkcji mająca na celu maksymalizację efektywności zespołu młynów spowodowała wzrost wydajności zakładu do poziomu 69 ton mąki na godzinę.

Podsumowanie

Problem przydziału jest podstawowym problemem optymalizacji kombinatorycznej. W podstawowej postaci rozwiązanie tego problemu polega na sformułowaniu funkcji celu oraz warunków ograniczających.

W ten sposób sformułowane zadanie ma wiele zmiennych niewiadomych. Każda zmienna może zostać przydzielona lub nie przydzielona do określonego celu, co wiąże się z uzyskaniem pewnego rezultatu (kosztu, zysku lub innej wartości optymalizowanej). Rezultat zmienia się w zależności od konfiguracji przydziałów. Wymagane jest wykonanie jak największej liczby zadań poprzez przypisanie co najwyżej jednej zmiennej do każdego celu i co najwyżej jednego celu do każdej zmiennej w taki sposób, aby zoptymalizować całkowity rezultat.

Metoda ta jest bardzo prosta, czytelna i ma szerokie zastosowanie w gospodarce.

Wojciech Moszczyński