Given

$$\sigma xx = Q11(\theta)\cdot\varepsilon xx + Q12(\theta)\cdot\varepsilon yy + Q16(\theta)\cdot\varepsilon xy$$

$$0 = Q12(\theta)\cdot\varepsilon xx + Q22(\theta)\cdot\varepsilon yy + Q26(\theta)\cdot\varepsilon xy$$

$$0 = Q16(\theta)\cdot\varepsilon xx + Q26(\theta)\cdot\varepsilon yy + Q66(\theta)\cdot\varepsilon xy$$

$$\mathrm{Find}(\varepsilon xx, \varepsilon yy, \varepsilon xy) \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma xx\cdot Q26(\theta)^2 - \sigma xx\cdot Q22(\theta)\cdot Q66(\theta)}{Q66(\theta)\cdot Q12(\theta)^2 - 2\cdot Q12(\theta)\cdot Q16(\theta)\cdot Q26(\theta) + Q22(\theta)\cdot Q16(\theta)^2 + Q11(\theta)\cdot Q26(\theta)^2 - Q11(\theta)\cdot Q22(\theta)\cdot Q66(\theta)} \\ \dfrac{\sigma xx\cdot Q12(\theta)\cdot Q66(\theta) - \sigma xx\cdot Q16(\theta)\cdot Q26(\theta)}{Q66(\theta)\cdot Q12(\theta)^2 - 2\cdot Q12(\theta)\cdot Q16(\theta)\cdot Q26(\theta) + Q22(\theta)\cdot Q16(\theta)^2 + Q11(\theta)\cdot Q26(\theta)^2 - Q11(\theta)\cdot Q22(\theta)\cdot Q66(\theta)} \\ -\dfrac{\sigma xx\cdot Q12(\theta)\cdot Q26(\theta) - \sigma xx\cdot Q22(\theta)\cdot Q16(\theta)}{Q66(\theta)\cdot Q12(\theta)^2 - 2\cdot Q12(\theta)\cdot Q16(\theta)\cdot Q26(\theta) + Q22(\theta)\cdot Q16(\theta)^2 + Q11(\theta)\cdot Q26(\theta)^2 - Q11(\theta)\cdot Q22(\theta)\cdot Q66(\theta)} \end{pmatrix}$$

$\sigma xx := 115\cdot GPa$

material 7

włókno Bor

zywica epoksydowa

rodzaj włókien 1-W

$\mathrm{gramatura} := 1040\cdot\dfrac{g}{m^2}$

$\mathrm{gestosc} := 2.76\cdot\dfrac{g}{cm^3}$

$E_1 := 204\cdot GPa$

$\rho := 2\cdot\dfrac{g}{cm^3}$

$E_2 := 18.5\cdot GPa$

$G_{12} := 5.59\cdot GPa$

$\mathrm{min\_war} := 0.125\cdot mm$

$v_{12} := 0.23$

$$v_{21} := E_2\cdot\frac{v_{12}}{E_1} = 0.021$$

$$q_{11} := \frac{E_1}{1 - v_{12}\cdot v_{21}} = 2.05\times 10^{11}\,Pa$$

$$q_{12} := v_{12} \cdot \frac{E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} = 4.276 \times 10^{9}\,\text{Pa}$$

$$q_{22} := \frac{E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} = 1.859 \times 10^{10}\,\text{Pa}$$

$$q_{66} := G_{12} = 5.59 \times 10^{9}\,\text{Pa}$$

$$Q11(\theta) := q_{11} \cdot \cos(\theta)^4 + 2\left(q_{12} + 2 \cdot q_{66}\right) \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\theta)^2 + q_{22} \cdot \sin(\theta)^4$$

$b := 20 \cdot \text{mm}$

$X_t := 1260 \cdot \text{MPa}$

$X_c := 2500 \cdot \text{MPa}$

$t := 2 \cdot \text{mm}$

$L := 100 \cdot \text{mm}$

$Y_t := 61 \cdot \text{MPa}$

$P := 470 \cdot \text{N}$

$Y_c := 202 \cdot \text{MPa}$

$\theta_1 := 30 \cdot \text{deg}$

$\text{Ścin} := 67 \cdot \text{MPa}$

$\theta_2 := 75 \cdot \text{deg}$

$E_6 := G_{12}$

$$\varepsilon_{lc} := \frac{-X_c}{E_1} = -0.012 \qquad \varepsilon_{2c} := \frac{-Y_c}{E_2} = -0.011$$

$$\varepsilon_{lt} := \frac{X_t}{E_1} = 6.176 \times 10^{-3} \qquad \varepsilon_{2t} := \frac{Y_t}{E_2} = 3.297 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{6S} := \frac{\text{Ścin}}{E_6} = 0.012$$

$$\theta_3 := \theta_2 \qquad \theta_4 := \theta_1$$

$$z_0 := \frac{-t}{2} = -1 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

$$z_1 := z_0 + \frac{t}{4} = -5 \times 10^{-4}\,\text{m}$$

$$z_2 := z_1 + \frac{t}{4} = 0\,\text{m}$$

$$z_3 := z_2 + \frac{t}{4} = 5 \times 10^{-4}\,\text{m}$$

$$z_4 := z_3 + \frac{t}{4} = 1 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

$$D_{11} := \frac{1}{3} \cdot \left[Q11\left(\theta_1\right) \cdot \left(z_1^{\,3} - z_0^{\,3}\right) + Q11\left(\theta_2\right) \cdot \left(z_2^{\,3} - z_1^{\,3}\right) + Q11\left(\theta_3\right) \cdot \left(z_3^{\,3} - z_2^{\,3}\right) + Q11\left(\theta_4\right) \cdot \left(z_4^{\,3} - z_3^{\,3}\right)\right]$$

$D_{11} = 72.905\,J$

$x := \frac{L}{2} = 0.05\,m$

$\varepsilon_{xx}(z) := -z \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{x}{b \cdot D_{11}}$

$\varepsilon_{11}(\theta, z) := \cos(\theta)^2 \cdot \varepsilon_{xx}(z)$

$\varepsilon_{22}(\theta, z) := \sin(\theta)^2 \cdot \varepsilon_{xx}(z)$

$\varepsilon_{66}(\theta, z) := -\sin(2 \cdot \theta) \cdot \varepsilon_{xx}(z)$

kryterium maksymalnych odkształceń

warstwa 1 θ_1

pow. dolna z_0

$\varepsilon_{lc} \le \varepsilon_{11}(\theta_1, z_0) = 1$ $\varepsilon_{11}(\theta_1, z_0) \le \varepsilon_{lt} = 1$

$\varepsilon_{2c} \le \varepsilon_{22}(\theta_1, z_0) = 1$ $\varepsilon_{22}(\theta_1, z_0) \le \varepsilon_{2t} = 1$

$\left|\varepsilon_{66}(\theta_1, z_0)\right| \le \varepsilon_{6S} = 1$

pow. górna z_1

$\varepsilon_{lc} \le \varepsilon_{11}(\theta_1, z_1) = 1$ $\varepsilon_{11}(\theta_1, z_1) \le \varepsilon_{lt} = 1$

$\varepsilon_{2c} \le \varepsilon_{22}(\theta_1, z_1) = 1$ $\varepsilon_{22}(\theta_1, z_1) \le \varepsilon_{2t} = 1$

$\left|\varepsilon_{66}(\theta_1, z_1)\right| \le \varepsilon_{6S} = 1$

wszędzie 1, nie nastąpi zerwanie

warstwa 2 θ_2

pow. dolna z_1

$\varepsilon_{lc} \le \varepsilon_{11}(\theta_2, z_1) = 1$ $\varepsilon_{11}(\theta_2, z_1) \le \varepsilon_{lt} = 1$

$\varepsilon_{2c} \le \varepsilon_{22}(\theta_2, z_1) = 1$ $\varepsilon_{22}(\theta_2, z_1) \le \varepsilon_{2t} = 0$

$$\left|\varepsilon_{66}(\theta_2, z_1)\right| \le \varepsilon_{6S} = 1$$

pow. górna z_2

$\varepsilon_{lc} \le \varepsilon_{11}(\theta_2, z_2) = 1$ $\varepsilon_{11}(\theta_2, z_2) \le \varepsilon_{lt} = 1$

$\varepsilon_{2c} \le \varepsilon_{22}(\theta_2, z_2) = 1$ $\varepsilon_{22}(\theta_2, z_2) \le \varepsilon_{2t} = 1$

$$\left|\varepsilon_{66}(\theta_2, z_2)\right| \le \varepsilon_{6S} = 1$$

dla ε22 powierzchni dolnej wystąpiło 0, jest możliwe zerwanie

warstwa 3 θ_3

pow. dolna z_2

$\varepsilon_{lc} \le \varepsilon_{11}(\theta_3, z_2) = 1$ $\varepsilon_{11}(\theta_3, z_2) \le \varepsilon_{lt} = 1$

$\varepsilon_{2c} \le \varepsilon_{22}(\theta_3, z_2) = 1$ $\varepsilon_{22}(\theta_3, z_2) \le \varepsilon_{2t} = 1$

$$\left|\varepsilon_{66}(\theta_3, z_2)\right| \le \varepsilon_{6S} = 1$$

pow. górna z_3

$\varepsilon_{lc} \le \varepsilon_{11}(\theta_3, z_3) = 1$ $\varepsilon_{11}(\theta_3, z_3) \le \varepsilon_{lt} = 1$

$\varepsilon_{2c} \le \varepsilon_{22}(\theta_3, z_3) = 1$ $\varepsilon_{22}(\theta_3, z_3) \le \varepsilon_{2t} = 1$

$$\left|\varepsilon_{66}(\theta_3, z_3)\right| \le \varepsilon_{6S} = 1$$

wszędzie 1, nie nastąpi zerwanie

warstwa 4 θ_4

pow. dolna z_3

$\varepsilon_{lc} \le \varepsilon_{11}(\theta_4, z_3) = 1$ $\varepsilon_{11}(\theta_4, z_3) \le \varepsilon_{lt} = 1$

$\varepsilon_{2c} \le \varepsilon_{22}(\theta_4, z_3) = 1$ $\varepsilon_{22}(\theta_4, z_3) \le \varepsilon_{2t} = 1$

$$\left|\varepsilon_{66}(\theta_4, z_3)\right| \le \varepsilon_{6S} = 1$$

pow. górna z_4

$\varepsilon_{lc} \le \varepsilon_{11}(\theta_4, z_4) = 1$ $\varepsilon_{11}(\theta_4, z_4) \le \varepsilon_{lt} = 1$

$\varepsilon_{2c} \le \varepsilon_{22}(\theta_4, z_4) = 1$ $\varepsilon_{22}(\theta_4, z_4) \le \varepsilon_{2t} = 1$

$$\left|\varepsilon_{66}(\theta_4, z_4)\right| \le \varepsilon_{6S} = 1$$

wszędzie 1, nie nastąpi zerwanie

zniszczyła się warstwa 2, powierzchnia dolna z1, kąt θ2, dla odkształcenia $\varepsilon_{22}(\theta_2, z_1) \le \varepsilon_{2t}$

kryterium maksymalne naprężeń

$$\sigma_1(\theta, z) := q_{11} \cdot \varepsilon_{11}(\theta, z) + q_{12} \cdot \varepsilon_{22}(\theta, z)$$

$$\sigma_2(\theta, z) := q_{12} \cdot \varepsilon_{11}(\theta, z) + q_{22} \cdot \varepsilon_{22}(\theta, z)$$

$$\sigma_6(\theta, z) := q_{66} \cdot \varepsilon_{66}(\theta, z)$$

warstwa 1 θ_1

pow. dolna z_0

$-X_c \le \sigma_1(\theta_1, z_0) = 1$ $\quad \sigma_1(\theta_1, z_0) \le X_t = 1$

$-Y_c \le \sigma_2(\theta_1, z_0) = 1$ $\quad \sigma_2(\theta_1, z_0) \le Y_t = 0$

$\left|\sigma_6(\theta_1, z_0)\right| \le \text{Ścin} = 1$

pow. górna z_1

$-X_c \le \sigma_1(\theta_1, z_1) = 1$ $\quad \sigma_1(\theta_1, z_1) \le X_t = 1$

$-Y_c \le \sigma_2(\theta_1, z_1) = 1$ $\quad \sigma_2(\theta_1, z_1) \le Y_t = 1$

$\left|\sigma_6(\theta_1, z_1)\right| \le \text{Ścin} = 1$

dla σ2 powierzchni dolnej wystąpiło 0, jest możliwe zerwanie

warstwa 2 θ_2

pow. dolna z_1

$-X_c \le \sigma_1(\theta_2, z_1) = 1$ $\quad \sigma_1(\theta_2, z_1) \le X_t = 1$

$-Y_c \le \sigma_2(\theta_2, z_1) = 1$ $\quad \sigma_2(\theta_2, z_1) \le Y_t = 0$

$\left|\sigma_6(\theta_2, z_1)\right| \le \text{Ścin} = 1$

pow. górna z_2

$-X_c \le \sigma_1(\theta_2, z_2) = 1$ $\quad \sigma_1(\theta_2, z_2) \le X_t = 1$

$-Y_c \le \sigma_2(\theta_2, z_2) = 1$ $\quad \sigma_2(\theta_2, z_2) \le Y_t = 1$

$$\left|\sigma_6(\theta_2, z_2)\right| \le Ścin = 1$$

dla σ2 powierzchni dolnej wystąpiło 0, jest możliwe zerwanie

warstwa 3 θ_3

pow. dolna z_2

$$-X_c \le \sigma_1(\theta_3, z_2) = 1 \qquad \sigma_1(\theta_3, z_2) \le X_t = 1$$

$$-Y_c \le \sigma_2(\theta_3, z_2) = 1 \qquad \sigma_2(\theta_3, z_2) \le Y_t = 1$$

$$\left|\sigma_6(\theta_3, z_2)\right| \le Ścin = 1$$

pow. górna z_3

$$-X_c \le \sigma_1(\theta_3, z_3) = 1 \qquad \sigma_1(\theta_3, z_3) \le X_t = 1$$

$$-Y_c \le \sigma_2(\theta_3, z_3) = 1 \qquad \sigma_2(\theta_3, z_3) \le Y_t = 1$$

$$\left|\sigma_6(\theta_3, z_3)\right| \le Ścin = 1$$

wszędzie 1, nie nastąpi zerwanie

warstwa 4 θ_4

pow dolna z_3

$$-X_c \le \sigma_1(\theta_4, z_3) = 1 \qquad \sigma_1(\theta_4, z_3) \le X_t = 1$$

$$-Y_c \le \sigma_2(\theta_4, z_3) = 1 \qquad \sigma_2(\theta_4, z_3) \le Y_t = 1$$

$$\left|\sigma_6(\theta_4, z_3)\right| \le Ścin = 1$$

pow górna z_4

$$-X_c \le \sigma_1(\theta_4, z_4) = 1 \qquad \sigma_1(\theta_4, z_4) \le X_t = 1$$

$$-Y_c \le \sigma_2(\theta_4, z_4) = 1 \qquad \sigma_2(\theta_4, z_4) \le Y_t = 1$$

$$\left|\sigma_6(\theta_4, z_4)\right| \le Ścin = 1$$

wszędzie 1, nie nastąpi zerwanie

zniszczyła się warstwa 1 i 2 na powierzchniach odpowiednio z0 i z1, kąty θ1 i θ2, w obu przypadkach dla odkształcenia $\sigma_2(\theta, z) \le Y_t$

kryterium kwadratowe hoffmanna

$$F_{xx} := \frac{1}{X_t \cdot X_c} \qquad F_{yy} := \frac{1}{Y_t \cdot Y_c} \qquad F_{ss} := \frac{1}{Ścin^2} \qquad F_x := \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}$$

$$F_y := \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \qquad F_{xy} := \frac{-1}{X_t \cdot X_c}$$

warstwa 1 θ_1

pow. dolna z_0

$$F_{xx} \cdot \sigma_1(\theta_1, z_0)^2 + 2 \cdot F_{xy} \cdot \sigma_1(\theta_1, z_0) \cdot \sigma_2(\theta_1, z_0) + F_{yy} \cdot \sigma_2(\theta_1, z_0)^2 + F_{ss} \cdot \sigma_6(\theta_1, z_0)^2 + F_x \cdot \sigma_1(\theta_1, z_0) + F_y \sigma_2(\theta_1, z_0) \le 1 = 0$$

pow. górna z_1

$$F_{xx} \cdot \sigma_1(\theta_1, z_1)^2 + 2 \cdot F_{xy} \cdot \sigma_1(\theta_1, z_1) \cdot \sigma_2(\theta_1, z_1) + F_{yy} \cdot \sigma_2(\theta_1, z_1)^2 + F_{ss} \cdot \sigma_6(\theta_1, z_1)^2 + F_x \cdot \sigma_1(\theta_1, z_1) + F_y \sigma_2(\theta_1, z_1) \le 1 = 1$$

możliwe zniszczenie dla pow. dolnej

warstwa 2 θ_2

pow. dolna z_1

$$F_{xx} \cdot \sigma_1(\theta_2, z_1)^2 + 2 \cdot F_{xy} \cdot \sigma_1(\theta_2, z_1) \cdot \sigma_2(\theta_2, z_1) + F_{yy} \cdot \sigma_2(\theta_2, z_1)^2 + F_{ss} \cdot \sigma_6(\theta_2, z_1)^2 + F_x \cdot \sigma_1(\theta_2, z_1) + F_y \sigma_2(\theta_2, z_1) \le 1 = 0$$

pow. górna z_2

$$F_{xx} \cdot \sigma_1(\theta_2, z_2)^2 + 2 \cdot F_{xy} \cdot \sigma_1(\theta_2, z_2) \cdot \sigma_2(\theta_2, z_2) + F_{yy} \cdot \sigma_2(\theta_2, z_2)^2 + F_{ss} \cdot \sigma_6(\theta_2, z_2)^2 + F_x \cdot \sigma_1(\theta_2, z_2) + F_y \sigma_2(\theta_2, z_2) \le 1 = 1$$

możliwe zniszczenie dla pow. dolnej

warstwa 3 θ_3

pow. dolna z_2

$$F_{xx} \cdot \sigma_1(\theta_3, z_2)^2 + 2 \cdot F_{xy} \cdot \sigma_1(\theta_3, z_2) \cdot \sigma_2(\theta_3, z_2) + F_{yy} \cdot \sigma_2(\theta_3, z_2)^2 + F_{ss} \cdot \sigma_6(\theta_3, z_2)^2 + F_x \cdot \sigma_1(\theta_3, z_2) + F_y \sigma_2(\theta_3, z_2) \le 1 = 1$$

pow. górna z_3

$$F_{xx} \cdot \sigma_1(\theta_3, z_3)^2 + 2 \cdot F_{xy} \cdot \sigma_1(\theta_3, z_3) \cdot \sigma_2(\theta_3, z_3) + F_{yy} \cdot \sigma_2(\theta_3, z_3)^2 + F_{ss} \cdot \sigma_6(\theta_3, z_3)^2 + F_x \cdot \sigma_1(\theta_3, z_3) + F_y \sigma_2(\theta_3, z_3) \le 1 = 1$$

wszędzie 1, nie nastąpi zerwanie

warstwa 4 θ_4

pow. dolna z_3

$$F_{xx} \cdot \sigma_1(\theta_4, z_3)^2 + 2 \cdot F_{xy} \cdot \sigma_1(\theta_4, z_3) \cdot \sigma_2(\theta_4, z_3) + F_{yy} \cdot \sigma_2(\theta_4, z_3)^2 + F_{ss} \cdot \sigma_6(\theta_4, z_3)^2 + F_x \cdot \sigma_1(\theta_4, z_3) + F_y \sigma_2(\theta_4, z_3) \le 1 = 1$$

pow górna z_4

$$F_{xx} \cdot \sigma_1(\theta_4, z_4)^2 + 2 \cdot F_{xy} \cdot \sigma_1(\theta_4, z_4) \cdot \sigma_2(\theta_4, z_4) + F_{yy} \cdot \sigma_2(\theta_4, z_4)^2 + F_{ss} \cdot \sigma_6(\theta_4, z_4)^2 + F_x \cdot \sigma_1(\theta_4, z_4) + F_y \sigma_2(\theta_4, z_4) \le 1 = 1$$

wszędzie 1, nie nastąpi zerwanie

zniszczyła się warstwa 1 i 2 na powierzchniach dolnych odpowiednio z0 i z1, kąty θ1 i θ2

dla kryterium maksymalnych odkształceń zniszczyła się warstwa 2, powierzchnia dolna z1, kąt θ2, dla odkształcenia $\varepsilon_{22}\left(\theta_2, z_1\right) \le \varepsilon_{2t}$

dla kryterium maksymalnych naprężeń zniszczyła się warstwa 1 i 2 na powierzchniach dolnych odpowiednio z0 i z1, kąty θ1 i θ2, w obu przypadkach dla odkształcenia $\sigma_2(\theta, z) \le Y_t$

dla kryterium kwadratowego hoffmanna zniszczyła się warstwa 1 i 2 na powierzchniach dolnych odpowiednio z0 i z1, kąty θ1 i θ2

podsumowując najbardziej podatne na rozerwania są powierzchnie dolne warstw 1 i 2, warstwa druga jest nieco bardziej podatna niż warstwa pierwsza, na co wskazuje kryterium maksymalnych odkształceń