

Polytechnique Montréal  
Département de Mathématiques et de Génie  
Industriel

**MTH1102 - Calcul II**  
**Été 2019 - Trimestre court**

**Devoir 1**

**Nom :** Trépanier

**Prénom :** William

**Matricule :** 1952594

**Section :** 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus $\text{\LaTeX}$	Total
4	4	1	9/10

## Question 1

Soit  $R := \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$  :

$$J_1 = \iint_R (y^3 - 2xy) \, dA = \int_0^4 \int_{-1}^2 (y^3 - 2xy) \, dx dy = \int_0^4 (y^3 \cdot x \Big|_{x=-1}^{x=2} - 2y \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-1}^{x=2}) \, dy =$$

$$\int_0^4 (y^3(2 - (-1)) - y(2^2 - (-1)^2)) \, dy = \int_0^4 (3y^3 - 3y) \, dy = \frac{3y^4}{4} - \frac{3y^2}{2} \Big|_0^4 =$$

$$\frac{3(4)^4}{4} - \frac{3(4)^2}{2} - (0 - 0) = 192 - 24 = 168$$



## Question 2

Pour trouver le domaine d'intégration, il faut trouver les points d'intersection entre la parabole  $y = x^2 - 6x + 5$  et la droite  $y = 5$ . La parabole  $y = x^2 - 6x + 5$  se factorise en  $y = (x - 1)(x - 5)$  ainsi ses zéros sont  $x = 1$  et  $x = 5$ . Le sommet de la parabole est obtenue avec l'équation  $\frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$ . Puisque  $3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$ , le sommet de la parabole est le point  $(3, -4)$ . Quant à l'intersection entre la parabole et la droite, on pose :

$$5 = x^2 - 6x + 5 \iff 0 = x^2 - 6x \iff 0 = x(x - 6)$$

En évaluant  $x$ , on obtient les points d'intersection  $(0, 5)$  et  $(6, 5)$ . La zone d'intégration est ainsi la suivante :

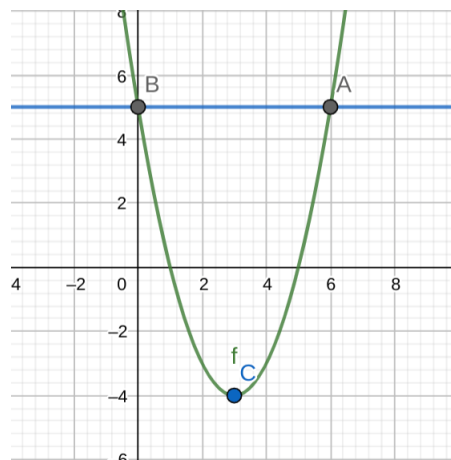


FIGURE 1 – Zone d'intégration

On pose ainsi  $D := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, x^2 - 6x + 5 \leq y \leq 5\}$

$$\begin{aligned} J_2 &= \iint_D (x^2 + y \cos(\pi x)) \, dA = \int_0^6 \int_{x^2-6x+5}^5 (x^2 + y \cos(\pi x)) \, dy dx = \\ &\quad \int_0^6 \left( x^2 \cdot y \Big|_{x^2-6x+5}^5 + \cos(\pi x) \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2-6x+5}^5 \right) dx = \\ &\quad \int_0^6 \left( x^2(5 - x^2 + 6x - 5) + \frac{\cos(\pi x)}{2}(5^2 - (x^2 - 6x + 5)^2) \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^6 \left( -x^4 + 6x^3 - \frac{x^4 \cos(\pi x)}{2} + 6x^3 \cos(\pi x) - 23x^2 \cos(\pi x) + 30x \cos(\pi x) \right) dx = \\
& - \int_0^6 x^4 dx + \int_0^6 6x^3 dx - \int_0^6 \frac{x^4 \cos(\pi x)}{2} dx + \int_0^6 6x^3 \cos(\pi x) dx \\
& - \int_0^6 23x^2 \cos(\pi x) dx + \int_0^6 30x \cos(\pi x) dx = -I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 + I_6
\end{aligned}$$

Pour faciliter la lisibilité, les six intégrales seront évaluées séparément :

$$I_1 = \int_0^6 x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^6 = \frac{6^5}{5} - 0 = \frac{7776}{5}$$

$$I_2 = \int_0^6 6x^3 dx = 6 \int_0^6 x^3 dx = \left. \frac{6x^4}{4} \right|_0^6 = \frac{3 \cdot 6^4}{2} - 0 = 1944$$

$$I_3 = \int_0^6 \frac{x^4 \cos(\pi x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^6 x^4 (\cos(\pi x)) dx$$

En posant  $u = x^4$  et  $dv = \cos(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = 4x^3 dx$  et  $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ .

Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_3 = \left. \frac{x^4 \sin(\pi x)}{2\pi} \right|_0^6 - \frac{2}{\pi} \int_0^6 x^3 (\sin(\pi x)) dx = (0-0) - \frac{2}{\pi} \int_0^6 x^3 (\sin(\pi x)) dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^6 x^3 (\sin(\pi x)) dx$$

En posant  $u = x^3$  et  $dv = \sin(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = 3x^2 dx$  et  $v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$ .

Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_3 = \left. \frac{2x^3 \cos(\pi x)}{\pi^2} \right|_0^6 - \frac{6}{\pi^2} \int_0^6 x^2 \cos(\pi x) dx = \frac{432}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^2} \int_0^6 x^2 \cos(\pi x) dx$$

En posant  $u = x^2$  et  $dv = \cos(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = 2x dx$  et  $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ .

Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_3 = \frac{432}{\pi^2} - \left. \frac{6x^2 \sin(\pi x)}{\pi^3} \right|_0^6 + \frac{12}{\pi^3} \int_0^6 x \sin(\pi x) dx = \frac{432}{\pi^2} + \frac{12}{\pi^3} \int_0^6 x \sin(\pi x) dx$$

En posant  $u = x$  et  $dv = \sin(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = dx$  et  $v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$ .  
Ainsi, par l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{432}{\pi^2} - \frac{12x \cos(\pi x)}{\pi^4} \Big|_0^6 + \frac{12}{\pi^4} \int_0^6 \cos(\pi x) dx = \frac{432}{\pi^2} - \frac{72}{\pi^4} + \frac{12}{\pi^4} \int_0^6 \cos(\pi x) dx \\ &= \frac{432}{\pi^2} - \frac{72}{\pi^4} + \frac{12}{\pi^5} \int_0^{6\pi} \cos(u) du = \frac{432}{\pi^2} - \frac{72}{\pi^4} + \frac{12 \sin(u)}{\pi^5} \Big|_0^{6\pi} = \frac{432}{\pi^2} - \frac{72}{\pi^4} \end{aligned}$$

$$I_4 = \int_0^6 6x^3 \cos(\pi x) dx = 6 \int_0^6 x^3 \cos(\pi x) dx$$

En posant  $u = x^3$  et  $dv = \cos(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = 3x^2 dx$  et  $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ .  
Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_4 = \frac{6x^3 \sin(\pi x)}{\pi} \Big|_0^6 - \frac{18}{\pi} \int_0^6 x^2 \sin(\pi x) dx = -\frac{18}{\pi} \int_0^6 x^2 \sin(\pi x) dx$$

En posant  $u = x^2$  et  $dv = \sin(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = 2x dx$  et  $v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$ .  
Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_4 = \frac{18x^2 \cos(\pi x)}{\pi^2} \Big|_0^6 - \frac{36}{\pi^2} \int_0^6 x \cos(\pi x) dx = \frac{648}{\pi^2} - \frac{36}{\pi^2} \int_0^6 x \cos(\pi x) dx$$

En posant  $u = x$  et  $dv = \cos(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = dx$  et  $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ . Ainsi,  
par l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{648}{\pi^2} - \frac{36x \sin(\pi x)}{\pi^3} \Big|_0^6 + \frac{36}{\pi^3} \int_0^6 \sin(\pi x) dx = \frac{648}{\pi^2} + \frac{36}{\pi^4} \int_0^{6\pi} \sin(u) du \\ &= \frac{648}{\pi^2} - \frac{36 \cos(u)}{\pi^4} \Big|_0^{6\pi} = \frac{648}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$I_5 = \int_0^6 23x^2 \cos(\pi x) dx = 23 \int_0^6 x^2 \cos(\pi x) dx$$

En posant  $u = x^2$  et  $dv = \cos(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = 2x dx$  et  $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ .

Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_5 = \frac{23x^2 \sin(\pi x)}{\pi} \Big|_0^6 - \frac{46}{\pi} \int_0^6 x \sin(\pi x) dx = -\frac{46}{\pi} \int_0^6 x \sin(\pi x) dx$$

En posant  $u = x$  et  $dv = \sin(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = dx$  et  $v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$ .

Ainsi, par l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{46x \cos(\pi x)}{\pi^2} \Big|_0^6 - \frac{46}{\pi^2} \int_0^6 \cos(\pi x) dx = \frac{276}{\pi^2} - \frac{46}{\pi^2} \int_0^6 \cos(\pi x) dx \\ &= \frac{276}{\pi^2} - \frac{46}{\pi^3} \int_0^{6\pi} \cos(u) du = \frac{276}{\pi^2} - \frac{46 \sin(u)}{\pi^3} \Big|_0^{6\pi} = \frac{276}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$I_6 = \int_0^6 30x \cos(\pi x) dx = 30 \int_0^6 x \cos(\pi x) dx$$

En posant  $u = x$  et  $dv = \cos(\pi x) dx$ , on calcule aussi  $du = dx$  et  $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ . Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_6 = \frac{30x \sin(\pi x)}{\pi} \Big|_0^6 - \frac{30}{\pi} \int_0^6 \sin(\pi x) dx = \frac{-30}{\pi^2} \int_0^{6\pi} \sin(u) du = \frac{30 \cos(u)}{\pi^2} \Big|_0^{6\pi} = 0$$

Ainsi :

$$J_2 = -\frac{7776}{5} + 1944 - \frac{432}{\pi^2} + \frac{72}{\pi^4} + \frac{648}{\pi^2} - \frac{276}{\pi^2} + 0 = \frac{1944}{5} - \frac{60}{\pi^2} + \frac{72}{\pi^4}$$

### Question 3

Pour calculer l'intégrale, il est plus simple de passer aux coordonnées polaires. La droite  $y = x$  coupe le premier cadran en deux. Ainsi,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ . Également,  $r = \sqrt{9} = 3$ . On pose  $D := \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$  :

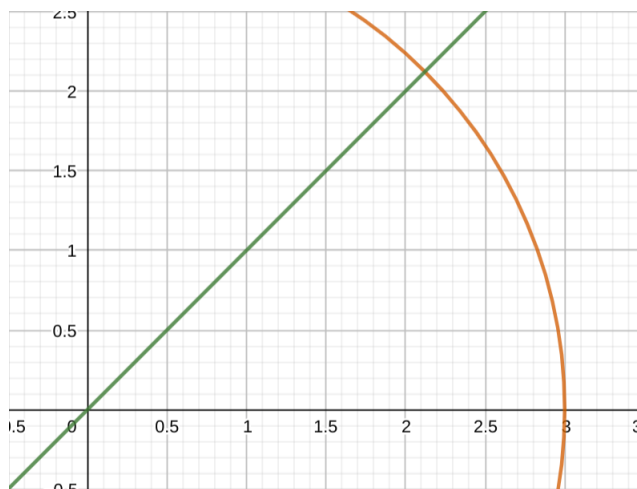


FIGURE 2 – Zone d'intégration

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \iint_D x(x^2+y^2)^{3/2} dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^3 r \cos(\theta) (r^2)^{3/2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^3 r^5 \cos(\theta) dr d\theta = \\
 &\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left. \frac{r^6}{6} \right|_0^3 \cos(\theta) d\theta = \frac{243}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta) d\theta = \frac{243}{2} \cdot \sin(\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{243}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) = \frac{243\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

## Question 4

Il est opportun de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. Le domaine d'intégration est un disque de rayon  $\sqrt{4} = 2$ , ainsi  $r \in [0, 2]$ . Puisqu'on intègre sur le cercle en entier,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .


On pose  $D := \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  :

$$\iint_D 10000 - e^{(12+x^2+y^2)^{3/4}} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (10000 - e^{(12+r^2)^{3/4}}) r dr d\theta$$

Soit  $f(r, \theta) = (10000 - e^{(12+r^2)^{3/4}})r$ , il est possible de borner  $f(r, \theta)$  par  $g(r, \theta) = 7000r$  et  $h(r, \theta) = 10000r$ . Considérant :

$$g(r, \theta) \leq f(r, \theta) \leq h(r, \theta) \quad \forall (r, \theta) \in D$$

Ainsi, par théorème :

$$\begin{aligned} \iint_D g(x, y) dA &\leq \iint_D f(x, y) dA \leq \iint_D h(x, y) dA \\ \int_0^{2\pi} \int_0^2 7000r dr d\theta &\leq \iint_D f(x, y) dA \leq \int_0^{2\pi} \int_0^2 10000r dr d\theta \\ \int_0^{2\pi} \left. \frac{7000r^2}{2} \right|_0^2 d\theta &\leq \iint_D f(x, y) dA \leq \int_0^{2\pi} \left. \frac{10000r^2}{2} \right|_0^2 d\theta \\ 14000\theta \Big|_0^{2\pi} &\leq \iint_D f(x, y) dA \leq 20000\theta \Big|_0^{2\pi} \\ 28000\pi &\leq \iint_D f(x, y) dA \leq 40000\pi \end{aligned}$$




## Question 5

a) Pour répondre à la question, il est plus simple d'inverser les bornes d'intégration.

Soit  $D_1 := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, \sqrt{x} \leq y \leq 2\}$ , est équivalent à

$D_2 := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 2\}$  comme en témoigne la figure :

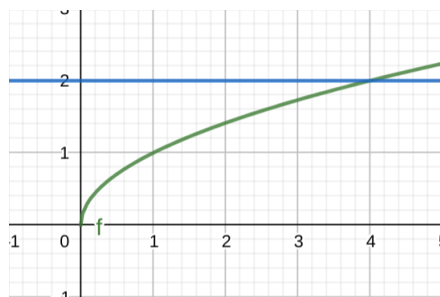


FIGURE 3 – Zone d'intégration

$$J_4 = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 [1 + y^2 \cos(x\sqrt{y})] dy dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} [1 + y^2 \cos(x\sqrt{y})] dx dy =$$

$$\int_0^2 \left[ x \Big|_0^{y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{y}} \sin(x\sqrt{y}) \Big|_{x=0}^{x=y^2} \right] dy = \int_0^2 \left[ y^2 + y^{3/2} \sin(y^{5/2}) \right] dy = \frac{8}{3} + \int_0^2 y^{3/2} \sin(y^{5/2}) dy$$

En posant  $u = y^{5/2}$ , on calcule  $\frac{2}{5} du = y^{3/2} dy$ . Par changement de variables :

$$J_4 = \frac{8}{3} + \int_0^{4\sqrt{2}} \frac{2}{5} \sin(u) du = \frac{8}{3} + \frac{-2}{5} \cos(u) \Big|_0^{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{-2}{5} (\cos(4\sqrt{2}) - \cos(0)) = \frac{46}{15} - \frac{2 \cos(4\sqrt{2})}{5}$$

Pour que l'intégrale représente un volume, il faut que  $f(x, y) = 1 + y^2 \cos(x\sqrt{y}) \geq 0 \forall (x, y) \in D_1$ . Toutefois,  $(\pi, 2) \in D_1$  et  $f(\pi, 2) < 0$ . Ainsi, par contradiction, l'intégrale ne représente pas un volume.

b) Soit  $D := \{(x, y) \mid -(2 - \frac{y}{2}) \leq x \leq 2 - \frac{y}{2}, -4 \leq y \leq 4\}$ , il s'agit d'un domaine

symétrique tant pour  $x$  que pour  $y$  par rapport à 0 :

$$J_5 = \iint_D [x^4 y + y x^4 \sqrt[4]{1 - x^4 y^4}] dA = \int_{-4}^4 \int_{-(2-\frac{y}{2})}^{2-\frac{y}{2}} x^4 y \, dx dy + \int_{-(2-\frac{y}{2})}^{2-\frac{y}{2}} y x^4 \sqrt[4]{1 - x^4 y^4} \, dx dy$$

Puisque  $y x^4 \sqrt[4]{1 - x^4 y^4}$  est impaire en  $y$  (soit  $y^5$ ) et qu'on intègre sur un domaine symétrique par rapport à 0, la seconde partie de l'intégrale est égale à 0 :

$$J_5 = \int_{-4}^4 \int_{-(2-\frac{y}{2})}^{2-\frac{y}{2}} x^4 y \, dx dy + 0 = \int_{-4}^4 y \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{-(2-\frac{y}{2})}^{2-\frac{y}{2}} dy = \frac{2}{5} \int_{-4}^4 y (2 - \frac{y}{2})^5 dy$$

. En posant  $u = 2 - \frac{y}{2}$  et en calculant  $du = -\frac{1}{2} dy$  :

$$J_5 = \frac{8}{5} \int_4^0 (u^6 - 2u^5) du = \frac{8}{5} \cdot \frac{u^7}{7} \Big|_4^0 - \frac{16}{5} \cdot \frac{u^6}{6} \Big|_4^0 = -\frac{32768}{21}$$



## Question 6

Puisque le volume désiré est celui du premier octant, il faut considérer également les plans  $x = 0$  et  $y = 0$ . Nous avons les équations  $x + z = 5 \Leftrightarrow z = 5 - x$  et  $y + 2z = 4 \Leftrightarrow z = 2 - \frac{y}{2}$ . En posant  $5 - x = 2 - \frac{y}{2}$ , nous pouvons trouver l'intersection des deux plans, soit le plan  $y = x - 3$ . Puisque la valeur maximale de  $z$  est dictée par le plan qui se retrouve sous l'autre plan, il est opportun de procéder par deux intégrales, puisqu'une portion du volume est borné par le plan  $z = 5 - x$  alors qu'une seconde est borné par le plan  $z = 2 - \frac{y}{2}$ . Nous avons ainsi  $B_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y + 3, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2 - \frac{y}{2}\}$ . Également,  $B_2 = \{(x, y, z) \mid y + 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 5 - x\}$

$$V = \iiint_{B_1} dV + \iiint_{B_2} dV = \int_0^4 \int_0^{y+3} \int_0^{2-\frac{y}{2}} dz dx dy + \int_0^4 \int_{y+3}^5 \int_0^{5-x} dz dx dy =$$

$$\int_0^4 \left( -\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + 6 \right) dy + \int_0^4 \left( \frac{y^2}{2} - 2y + 2 \right) dy = \frac{52}{3} + \frac{8}{3} = 20$$

$$\frac{40}{6}$$

$$32 - \frac{44}{3} = \frac{52}{3}$$

## Question 7

- a) (i) Considérant que la densité dépend de la distance au sommet du triangle qui joint les deux longs côtés, on place celui-ci à l'origine  $(0, 0)$ . Les deux autres sommets du triangle se retrouvent à  $(-2, 6)$  et  $(2, 6)$ . On peut calculer la distance à l'aide de la formule  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Ainsi,  $\rho(x, y) = \kappa\sqrt{x^2 + y^2}$ . Pour calculer le moment par rapport à l'axe des  $x$  :

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) \, dA = \kappa \iint_D y^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$$

On pose  $D := \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 6 \csc(\theta), \arctan(3) \leq \theta \leq \pi - \arctan(-3)\}$

$$\begin{aligned} I_x &= \kappa \int_{\arctan(3)}^{\pi - \arctan(-3)} \int_0^{6 \csc(\theta)} r^4 \sin^2(\theta) \, dr d\theta = \kappa \int_{\arctan(3)}^{\pi - \arctan(-3)} \sin^2(\theta) \frac{r^5}{5} \Big|_0^{6 \csc(\theta)} d\theta = \\ &= \kappa \frac{7776}{5} \int_{\arctan(3)}^{\pi - \arctan(-3)} \csc^3(\theta) \, d\theta = \kappa \frac{15552}{5} \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \csc^3(\theta) \, d\theta \end{aligned}$$

Par la formule de réduction (#72) :

$$\begin{aligned} I_x &= \kappa \frac{15552}{5} \left[ \frac{-1}{2} \cdot \csc(\theta) \cot(\theta) + \frac{1}{2} \ln |\csc(\theta) - \cot(\theta)| \right]_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \kappa \frac{15552}{5} \left( \frac{\sqrt{10}}{18} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \right) \right) \approx 2111.38\kappa \end{aligned}$$

(ii)

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) \, dA = \kappa \iint_D x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$$

On pose  $D := \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 6 \csc(\theta), \arctan(3) \leq \theta \leq \pi - \arctan(-3)\}$

$$I_y = \kappa \int_{\arctan(3)}^{\pi - \arctan(-3)} \int_0^{6 \csc(\theta)} r^4 \cos^2(\theta) \, dr d\theta = \kappa \frac{7776}{5} \int_{\arctan(3)}^{\pi - \arctan(-3)} \csc^5(\theta) \cos^2(\theta) \, d\theta$$

$$\kappa \frac{15552}{5} \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2(\theta)}{\sin^5(\theta)} d\theta = \kappa \frac{15552}{5} \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \csc^5(\theta) d\theta - \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \csc^3(\theta) d\theta =$$

Par la formule de réduction (#78) et le résultat de l'intégrale précédente :

$$I_y = \kappa \frac{15552}{5} \left( \frac{-1}{4} \cot(\theta) \csc^3(\theta) \Big|_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4} \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \csc^3(\theta) d\theta - \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \csc^3(\theta) d\theta \right) =$$

$$\kappa \frac{3888}{5} \left( \frac{10\sqrt{10}}{81} - \frac{1}{4} \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \csc^3(\theta) d\theta \right) =$$

$$\kappa \frac{3888}{5} \left( \frac{10\sqrt{10}}{81} - \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{10}}{18} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \right) \right) \right) \approx 237.59\kappa$$

- b) Il est plus facile de tourner la plaque autour de l'axe  $A_2$  puisque le moment d'inertie (qui s'oppose à la variation de la vitesse) est plus faible.



## Question 8

### 1. Définition de la fonction de densité

On énonce que la densité est proportionnelle à la distance au plan :

$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{R}, z = 0\}$ . Ainsi, pour tout point de la région, la distance au plan  $z = 0$  est égale à  $z$ . Ainsi :

$$\rho(x, y, z) = \kappa z$$

### 2. Description de la région E

En effectuant une projection de la région E sur le plan  $D := xz$ , nous avons :

$$B := \left\{ (x, y, z) \mid (x, z) \in D, -1 \leq y \leq \frac{z - x^2}{a} \right\}$$

Soit :

$$B := \left\{ (x, y, z) \mid -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}, -1 \leq y \leq \frac{z - x^2}{a}, 0 \leq z \leq 2 \right\}$$

### 3. Calcul de la masse

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-1}^{\frac{z-x^2}{a}} z dy dx dz = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left[ \frac{z(z-x^2)}{a} + z \right] dx dz =$$

$$\kappa \int_0^2 \left( \frac{2z^2}{\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}z}{3} + 2\sqrt{a} \right) dz = \kappa \frac{8(a+2)}{3\sqrt{a}}$$

#### 4. Calcul des moments

$$M_{yx} = \iiint_E x \rho(x, y, z) dV = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-1}^{\frac{z-x^2}{a}} xz dy dx dz = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} xz \left( \frac{z-x^2}{a} + 1 \right) dx dz$$

Puisque  $x$  ici est une fonction impaire intégrée sur un domaine symétrique à 0 :

$$M_{yz} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_E y \rho(x, y, z) dV = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-1}^{\frac{z-x^2}{a}} yz dy dx dz = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left( \frac{z(z-x^2)^2}{2a^2} - \frac{z}{2} \right) dx dz = \\ &\quad \kappa \int_0^2 \frac{15z^3 - 10a^2 - 12a^2z}{15a^{\frac{3}{2}}} dz = \kappa \frac{4(-18a^2 - 20a + 45)}{45a^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_E z \rho(x, y, z) dV = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-1}^{\frac{z-x^2}{a}} z^2 dy dx dz = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{z^2(z-x^2)}{a} + z^2 dx dz = \\ &\quad \kappa \int_0^2 \frac{2z^3}{\sqrt{a}} + \frac{4\sqrt{a}z^2}{3} dz = \kappa \left[ \frac{8}{\sqrt{a}} + \frac{32\sqrt{a}}{9} \right] \end{aligned}$$

#### 5. Coordonnées en x et y du centre de masse

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{0}{\frac{8(a+2)}{3\sqrt{a}}} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \frac{\frac{4(-18a^2 - 20a + 45)}{45a^{\frac{3}{2}}}}{\frac{8(a+2)}{3\sqrt{a}}} = (-18a^2 - 20a + 45)/(30a(a+2))$$

## 6. Coordonnée en z du centre de masse

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{8}{\sqrt{a}} + \frac{32\sqrt{a}}{9}}{\frac{8(a+2)}{3\sqrt{a}}} = \frac{3\left(\frac{32\sqrt{a}}{9} + \frac{8}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a}}{8(a+2)}$$

## 7. Inégalité correspondant à la question

$$\frac{3\left(\frac{32\sqrt{a}}{9} + \frac{8}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a}}{8(a+2)} > 0$$

## 8. Solution de l'inégalité

$$\frac{3\left(\frac{32\sqrt{a}}{9} + \frac{8}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a}}{8(a+2)} > 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ dans } \mathbb{R}$$

## 9. Conclusion

Le centre de masse du solide est situé au dessus de sa base lorsque  $a > 0$ .