Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 4

Nom : Trépanier **Prénom :** William

Matricule : 1952594 **Section :** 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus LaTeX	Total
			/10

Question 1

En utilisant la formule et soit D la région située dans le premier octant et bornée par le paraboloïde $z = 2(x^2 + y^2)$ et le plan $z = 2$:

$$\begin{aligned}
A &= \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint\limits_D \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2}\, dA \\
&= \iint\limits_D \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)}\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1 + 16r^2}\, r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1 + 16r^2}\, dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r\sqrt{1 + 16r^2}\, dr d\theta
\end{aligned}$$

En posant $u = 1 + 16r^2$ et en calculant $du = 32r\, dr$:

$$A = \frac{\pi}{64} \int_1^{17} u^{1/2}\, du = \frac{\pi}{96}\, u^{3/2}\Big|_1^{17} = \frac{\pi}{96}\,(17^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\pi}{96}\,(17\sqrt{17} - 1)$$

Question 2

On trouve d'abord $\vec{r_u}$ et $\vec{r_v}$:

$$\vec{r_u} = 2u\vec{i} + v\vec{j}$$
$$\vec{r_v} = u\vec{j} + v\vec{k}$$

On calcule ensuite $\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|$:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & v & 0 \\ 0 & u & v \end{vmatrix} = v^2\vec{i} - 2uv\vec{j} + 2u^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\| &= \sqrt{(v^2)^2 + (-2uv)^2 + (2u^2)^2} = \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 4u^4} \\ &= \sqrt{(v^2 + 2u^2)^2} = v^2 + 2u^2 \end{aligned}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\begin{aligned} \iint\limits_S zx\, dS &= \frac{1}{2}\iint\limits_D (v^2u^2)(v^2 + 2u^2)\, dA = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\int_0^1 (u^2v^4 + 2u^4v^2)\, dvdu \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left[\frac{u^2v^5}{5} + \frac{2u^4v^3}{3}\right]_{v=0}^{v=1} du = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(\frac{u^2}{5} + \frac{2u^4}{3}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{15} + \frac{2u^5}{15}\right]_{u=-2}^{u=2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{144}{15} = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Question 3

Question 4

a)

b)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

Question 7

a)

b)