POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102 - Calcul II
Été 2019 Trimestre court - Devoir 4

Résumé des consignes

- Le devoir est à rendre mercredi le **12 juin** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les consignes détaillées pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.
- Vous devez faire tous les calculs à la main et indiquer au minimum les grandes étapes de calcul dans votre rédaction. Il est permis d'utiliser les tables d'intégrales à la fin du livre ; dans ce cas, svp donnez le numéro de la formule employée.

Question 1

Calculez l'aire de la partie S du paraboloïde $z = 2x^2 + 2y^2$ qui est située en dessous du plan $z = 2$ dans le premier octant.

Question 2

Évaluez l'intégrale $J = \iint_S zx\, dS$, où S est la surface paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = u^2\,\vec{i} + uv\,\vec{j} + \frac{v^2}{2}\,\vec{k}$$

avec $-2 \leq u \leq 2$ et $0 \leq v \leq 1$.

Question 3

Calculez le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x^2\,\vec{i} + z\,\vec{j} + (1 - y)\,\vec{k}$ à travers la surface S paramétrée par

$$\vec{R} = v\,\vec{i} + (u^2 - v)\,\vec{j} + (u + v^2)\,\vec{k}$$

avec $-3 \leq u \leq 3$ et $-3 \leq v \leq 3$. La surface S est orientée au point $(2, 2, 2)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \frac{1}{11\sqrt{2}}(15\,\vec{i} - \vec{j} - 4\,\vec{k})$.

Question 4

Soit S une surface orientée dont l'aire est égale à A et dont le vecteur normal unitaire est $\vec{n}$. Que vaut l'intégrale de flux

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

dans le cas où

a) en chaque point $\vec{F}$ est tangent à S ?

b) $\vec{F} = c\,\vec{n}$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante non nulle ?

Justifiez chaque réponse de façon brève mais précise.

Question 5

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = 10\cos(t)\,\vec{i} + 10\sin(t)\,\vec{j} + 100\cos^2(t)\,\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

et $\vec{F}$ le champ vectoriel défini par $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+z^2)\,\vec{i} + \vec{j} + (xy + \sin(z^4))\,\vec{k}$.

a) Montrez que C est une courbe fermée, puis trouvez une surface de la forme $z = f(x,y)$ qui contient C.

b) Expliquez brièvement, en mots et sans faire de calculs, deux façons différentes de calculer la circulation de $\vec{F}$ autour de C.

c) Calculez la circulation de $\vec{F}$ autour de C à l'aide de la méthode de votre choix.

Question 6

Soit S la surface constituée de la partie du cylindre parabolique $z = 2 - y^2$ située dans le premier octant ainsi que par les parties des plans $x = 0$, $y = 0$ et $x = 2$ situées dans le premier octant, sous le cylindre parabolique et au-dessus du plan $z = 0$. La surface S est orientée au point $(1,1,1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2\,\vec{j} + \vec{k})$.

a) La surface S est-elle fermée ?

b) Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = [-x^2 + \ln(1+z^2e^{-y})]\,\vec{i} + [-y^2 + \ln(1+z^2e^{-x})\,\vec{j} + (z+1)\,\vec{k}.$$

Le calcul direct du flux de $\vec{F}$ à travers S est très difficile. Calculez ce flux à l'aide d'une autre méthode.

Question 7

Soit E un solide de densité constante, égale à c, occupant la région de l'espace bornée par une surface fermée S.

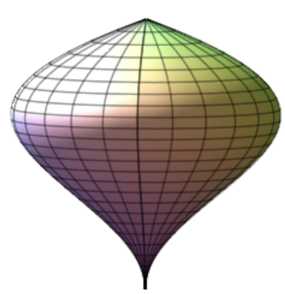
a) Montrez que les premiers moments du solide E peuvent être calculés à l'aide des formules

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \frac{c}{2}\iint_S (x^2\,\vec{i}) \cdot d\vec{S} \\
M_{xz} &= \frac{c}{2}\iint_S (y^2\,\vec{j}) \cdot d\vec{S} \\
M_{xy} &= \frac{c}{2}\iint_S (z^2\,\vec{k}) \cdot d\vec{S}.
\end{aligned}$$

b) Soit E le solide borné par la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = \sin(u)\cos(v)\,\vec{i} + u\,\vec{j} + \sin(u)\sin(v)\,\vec{k}$$

avec $0 \le u \le \pi$ et $0 \le v \le 2\pi$. Le solide est représenté ci-dessous.



Sachant que la masse de E est $m = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)$, déterminez le centre de masse de E en utilisant les formules démontrées en a).