Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 3

Nom : Trépanier **Prénom :** William

Matricule : 1952594 **Section :** 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus LaTeX	Total
			/10

Question 1

Question 2

Il faut déterminer la courbe d'intersection :

$$x = 2 \Rightarrow z = 4 + y^2$$

En posant $t = y$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 4 + t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Pour les deux points :

$$(2, -1, 5) \Leftrightarrow t = -1$$
$$(2, 1, 5) \Leftrightarrow t = 1$$

Ainsi :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{\Big(0\Big)^2 + \Big(1\Big)^2 + \Big(2t\Big)^2}\, dt$$
$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\Big(1\Big)^2 + \Big(2t\Big)^2}\, dt$$

En posant $u = 2t$ et en calculant $du = \frac{1}{2}dt$:

$$L = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{1^2 + u^2}\, du$$

En utilisant la formule de réduction #21 :

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\Big[\frac{u}{2}\sqrt{1^2+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1^2+u^2})\Big]_{u=-2}^{u=2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\Big(\ln(2+\sqrt{5})\Big)-\Big(-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\Big(\ln(\sqrt{5}-2)\Big)\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\big(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\big)\Big)=\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\big(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\big) \\
&\approx 2.9579
\end{aligned}
$$

Question 3

a) Pour trouver la vitesse au point (1,3) :

$$\vec{F}(1,3) = (1 \cdot 3 - 2)\vec{i} + (3^2 - 10)\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$$

Puisque la vitesse correspond à un déplacement par unité de temps :

$$\Delta t = 1.05 - 1 = 0.05$$

On estime ainsi le déplacement en multipliant la vitesse par une unité de temps :

$$\Delta x = 1 \cdot 0.05 = 0.05$$
$$\Delta y = -1 \cdot 0.05 = -0.05$$

Pour trouver la position :

$$x = 1 + 0.05 = 1.05$$
$$y = 3 - 0.05 = 2.95$$

La position approximative à l'instant $t = 1.05$ est (1.05, 2.95).

b) Puisque les vecteurs du champ sont parallèles aux lignes de courant :

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{G}(x(t), y(t)) \Rightarrow$$
$$x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} = \vec{i} + (1 + y^2)\vec{j}$$

Nous avons ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt$$
$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dt$$

On peut isoler x et y en fonction de t en intégrant des deux côtés :

$$\int dx = \int dt \Rightarrow x = t + C_1$$
$$\int \frac{1}{1^2 + y^2}\, dy = \int dt \Rightarrow \arctan y = t + C_2 \Rightarrow y = \tan(t + C_2)$$

On pose $t = 0$ au point (1,1) :

$$\vec{r}\,(0) = C_1\vec{i} + \tan(C_2)\vec{j} = \vec{i} + \vec{j}$$

On choisit ainsi :

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = \frac{\pi}{4}$$
$$\vec{r}(t) = (t+1)\vec{i} + \tan(t + \frac{\pi}{4})$$

Nous avons ainsi la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \tan(t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \backslash \Big\{ \frac{\pi}{4} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \Big\}$$

Question 4

a) Il faut d'abord paramétrer C :

$$\vec{r}\,'(t) = (1-t)(\vec{i}-\vec{j}) + t(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}) = \vec{i}-\vec{j}+3t\vec{j}+3t\vec{k}$$

Nous avons la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3t-1 \qquad t \in [0,1] \\ z = 3t \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} J_1 = \int_C (xy+z)\,ds &= \int_0^1 \Big(1\cdot(3t-1)+3t\Big)\sqrt{(0)^2+(3)^2+(3)^2}\,dt \\ &= 3\sqrt{2}\int_0^1 (6t-1)\,dt = 3\sqrt{2}\Big[3t^2-t\Big]_{t=0}^{t=1} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) En utilisant la même paramétrisation qu'en a), nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{i}+(3t-1)\vec{j}+3t\vec{k} \\ \vec{r}\,'(t) &= 3\vec{j}+3\vec{k} \\ \vec{F}(\vec{r}(t)) &= 3t\vec{i}+\vec{j}+(3t-1)^2\vec{k} \end{aligned}$$

Quant à l'intégrale :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 \Big(3t\vec{i}+\vec{j}+(3t-1)^2\vec{k}\Big)\cdot\Big(3\vec{j}+3\vec{k}\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 (3+3(3t-1)^2)\,dt = \int_0^1 (27t^2-18t+6)\,dt = \left[\frac{27t^3}{3}-\frac{18t^2}{2}+6t\right]_{t=0}^{t=1} = 6 \end{aligned}$$

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

Question 7

a)

b)

c) (i)

(ii)