Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

# MTH1102 - Calcul II
# Été 2019 - Trimestre court

# Devoir 3

**Nom :** Trépanier **Prénom :** William

**Matricule :** 1952594 **Section :** 1

| Question corrigée | Autres questions | Bonus LaTeX | Total |
|---|---|---|---|
| | | | /10 |

# Question 1

Il suffit de calculer le gradient et de le diviser par sa norme, au point $(2, \frac{\pi}{4}, 4)$ qui correspond en coordonnées cartésiennes au point $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ :

$$\frac{\nabla(x,y)}{\|\nabla(x,y)\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\nabla(\sqrt{2},\sqrt{2})}{\left\|\nabla(\sqrt{2},\sqrt{2})\right\|} = \frac{2\sqrt{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j}}{2\sqrt{2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(\theta)\vec{e_r} + \cos(\theta)\vec{e_\theta}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_r} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_\theta}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_r} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_\theta}) \\ &= \vec{e_r} \end{aligned}$$

# Question 2

Il faut déterminer la courbe d'intersection :

$$x = 2 \Rightarrow z = 4 + y^2$$

En posant $t = y$ :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 4 + t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Pour les deux points :

$$(2, -1, 5) \Leftrightarrow t = -1$$
$$(2, 1, 5) \Leftrightarrow t = 1$$

Ainsi :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(0\right)^2 + \left(1\right)^2 + \left(2t\right)^2}\, dt$$
$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(1\right)^2 + \left(2t\right)^2}\, dt$$

En posant $u = 2t$ et en calculant $du = \frac{1}{2}dt$ :

$$L = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{1^2 + u^2}\, du$$

En utilisant la formule de réduction #21 :

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\Big[\frac{u}{2}\sqrt{1^2+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1^2+u^2})\Big]_{u=-2}^{u=2}\\
&= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\Big(\ln(2+\sqrt{5})\Big)-\Big(-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\Big(\ln(\sqrt{5}-2)\Big)\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\Big)\Big)=\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\Big(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\Big)\\
&\approx 2.9579
\end{aligned}
$$

# Question 3

a) Pour trouver la vitesse au point (1,3) :

$$\vec{F}(1,3) = (1 \cdot 3 - 2)\vec{i} + (3^2 - 10)\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$$

Puisque la vitesse correspond à un déplacement par unité de temps :

$$\Delta t = 1.05 - 1 = 0.05$$

On estime ainsi le déplacement en multipliant la vitesse par une unité de temps :

$$\Delta x = 1 \cdot 0.05 = 0.05$$
$$\Delta y = -1 \cdot 0.05 = -0.05$$

Pour trouver la position :

$$x = 1 + 0.05 = 1.05$$
$$y = 3 - 0.05 = 2.95$$

La position approximative à l'instant $t = 1.05$ est (1.05, 2.95).

b) Puisque les vecteurs du champ sont parallèles aux lignes de courant :

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{G}(x(t), y(t)) \Rightarrow$$
$$x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} = \vec{i} + (1 + y^2)\vec{j}$$

Nous avons ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt$$
$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dt$$

On peut isoler x et y en fonction de t en intégrant des deux côtés :

$$\int dx = \int dt \Rightarrow x = t + C_1$$
$$\int \frac{1}{1^2+y^2}\, dy = \int dt \Rightarrow \arctan y = t + C_2 \Rightarrow y = \tan(t + C_2)$$

On pose $t = 0$ au point (1,1) :

$$\vec{r}\,(0) = C_1\vec{i} + \tan(C_2)\vec{j} = \vec{i} + \vec{j}$$

On choisit ainsi :

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = \frac{\pi}{4}$$
$$\vec{r}(t) = (t+1)\vec{i} + \tan(t + \frac{\pi}{4})$$

Nous avons ainsi la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \tan(t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \backslash \Big\{ \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Big\}$$

# Question 4

a) Il faut d'abord paramétrer $C$ :

$$\vec{r}\,'(t) = (1-t)(\vec{i}-\vec{j}) + t(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}) = \vec{i}-\vec{j}+3t\vec{j}+3t\vec{k}$$

Nous avons la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3t-1 \qquad t \in [0,1] \\ z = 3t \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} J_1 = \int_C (xy+z)\,ds &= \int_0^1 \Big(1\cdot(3t-1)+3t\Big)\sqrt{(0)^2+(3)^2+(3)^2}\,dt \\ &= 3\sqrt{2}\int_0^1 (6t-1)\,dt = 3\sqrt{2}\Big[3t^2-t\Big]_{t=0}^{t=1} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) En utilisant la même paramétrisation qu'en a), nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{i}+(3t-1)\vec{j}+3t\vec{k} \\ \vec{r}\,'(t) &= 3\vec{j}+3\vec{k} \\ \vec{F}(\vec{r}(t)) &= 3t\vec{i}+\vec{j}+(3t-1)^2\vec{k} \end{aligned}$$

Quant à l'intégrale :

$$\begin{aligned} J_2 = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 \Big(3t\vec{i}+\vec{j}+(3t-1)^2\vec{k}\Big)\cdot\Big(3\vec{j}+3\vec{k}\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 (3+3(3t-1)^2)\,dt = \int_0^1 (27t^2-18t+6)\,dt = \left[\frac{27t^3}{3}-\frac{18t^2}{2}+6t\right]_{t=0}^{t=1} = 6 \end{aligned}$$

## Question 5

a) On cherche $f$ tel que $\vec{F} = \nabla f$ :

$$f_x = yze^{xy} - 2xy \Rightarrow f = ze^{xy} - x^2 y$$
$$f_y = xze^{xy} - x^2 \Rightarrow f = ze^{xy} - x^2 y$$
$$f_z = e^{xy} + 1 \Rightarrow f = ze^{xy} + z$$

Ainsi :

$$f = ze^{xy} - x^2 y + z$$

b) Soit l'arc de cercle C. Selon le théorème fondamental des intégrales curvilignes et considérantque le travail est une force conservative :

$$W = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(0,2,1) - f(1,2,3)$$
$$= (1 \cdot e^0 - 0 + 1) - (3 \cdot e^2 - 2 + 3) = 2 - 3e^2 - 1 = 1 - 3e^2$$

c) Soit $C$, le cercle situé dans le plan $z = 1 - x - y$ et $\{\vec{r}(a), \vec{r}(b) \,|\, \vec{r}(a) = \vec{r}(b)\} \in C$. Selon le théorème fondamental des intégrales curvilignes et considérant que le travail est une force conservative :

$$W = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(b) - f(a) = f(b) - f(b) = 0$$

# Question 6

Soit $C$ la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ où $a \leq t \leq b$. Posons $\vec{r}(b) = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ et $\vec{r}(a) = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ :

$$
\begin{aligned}
\int\limits_C \vec{x} \cdot d\vec{r} &= \int\limits_C x\,dx + y\,dy + z\,dz \\
&= \int_l^p x\,dx + \int_m^q y\,dy + \int_n^r z\,dz \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_l^p + \left.\frac{y^2}{2}\right|_m^q + \left.\frac{z^2}{2}\right|_n^r \\
&= \frac{1}{2}\left[p^2 - l^2 + q^2 - m^2 + r^2 - n^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(p^2 + q^2 + r^2) - (l^2 + m^2 + n^2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\,\|\vec{r}(b)\|^2 - \|\vec{r}(a)\|^2\,\right]
\end{aligned}
$$

# Question 7

a) L'intersection entre les deux boucles correspond au point où $\cos(t) - \sin(t) = 0$. Ainsi :

$$\cos(t) - \sin(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = \sin(t) \Rightarrow t = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}\ t \in [0, 2\pi]$$

Pour obtenir la boucle de gauche, on pose $a = \frac{\pi}{4}$ et $c = \frac{5\pi}{4}$. Pour la boucle de droite, $b = c + \pi = \frac{9\pi}{4}$. Ainsi, l'intervalle est $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ dont le point milieu est $\frac{5\pi}{4}$.

b) Pour calculer l'aire en utilisant le théorème de Green, il faut utiliser deux intégrales, car la boucle de droite est d'orientation négative alors que la boucle de droite est orientée positivement :

$$\begin{aligned} A = -\oint_C y\,dx = -\oint(\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t))(-\sin(t)\cos(t))\,dt \\ = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin^3(t) + 2\sin^2(t)\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t))\,dt - \\ \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} (\sin^3(t) + 2\sin^2(t)\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t))\,dt \\ = I_1 - I_2 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin^3(t) + 2\sin^2(t)\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t))\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin(t)(1-\cos^2(t)) + 2\sin^2(t)\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t))\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin(t) + 2\sin^2(t)\cos(t))\,dt$$

En posant $u = \sin(t)$ et $du = \cos(t)dt$

$$= -\cos(t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} u^2$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{3}\cdot u^3\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$I_2 = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} (\sin^3(t) + 2\sin^2(t)\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t))\,dt$$

En appliquant la même démarche, mais avec les bornes particulières de $I_2$, on obtient :

$$I_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} = -I_1$$

Ainsi, pour l'aire :

$$A = I_1 - I_2 = I_1 + I_1 = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

c) (i) En appliquant le théorème de Green où D est le domaine borné par la bouche gauche de la courbe C, on pose :

$$Q = 5x + e^y$$
$$P = 2x + y$$
$$J_1 = \oint_{B_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$
$$= \iint_D (5-1)\, dA = 4 \iint_D \, dA = 4 \cdot A(D)$$
$$= 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

(ii) En appliquant le théorème de Green où E est le domaine borné par la bouche gauche et la boucle droite de la courbe C, on pose :

$$Q = 5x + e^y$$
$$P = 2x + y$$
$$J_2 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_E \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$
$$= \iint_E (5-1)\, dA = 4 \iint_E \, dA = 4 \cdot A(E)$$
$$= 4 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$