

Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie
Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 2

Nom : Trépanier

Prénom : William

Matricule : 1952594

Section : 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus L ^A T _E X	Total
			/10

Question 1

Le paraboloïde $z_1 = x^2 + y^2 + 2$ se retrouve au dessus du paraboloïde $z_2 = 2x^2 + 2y^2$. En passant aux coordonnées cylindriques, on obtient : $z_1 = r^2 + 2$ et $z_2 = 2r^2$. Pour trouver les bornes de r sur sa projection dans le plan xy , il faut trouver l'intersection des deux paraboloïdes :

$$2r^2 = r^2 + 2 \Leftrightarrow r^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (r + \sqrt{2})(r - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}, r \geq 0$$

Ainsi, nous obtenons :

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2r^2 \leq z \leq r^2 + 2\}$$

Quant à l'intégrale :

$$\begin{aligned} J_1 &= \iiint_E (x^2 + y^2)^{3/2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{2r^2}^{r^2+2} (r^2)^{3/2} \cdot r dz dr d\theta = \\ &\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{2r^2}^{r^2+2} r^4 dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2r^4 - r^6) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(2^{5/2} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right) \right) d\theta = \\ &2\pi \cdot \frac{16\sqrt{2}}{35} = \frac{32\sqrt{2}\pi}{35} \end{aligned}$$

Question 2

Nous avons deux sphères, soit $S_1 := x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $S_2 := x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dont nous pouvons transformer en coordonnées sphériques : $S_1 := \rho^2 = 2^2$ et $S_2 := \rho^2 = 4^2$. Puisque $x \geq 0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Aussi, considérant $z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Nous avons donc la région E suivante :

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 2 \leq \rho \leq 4, \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Quant à l'intégrale :

$$\begin{aligned} J_2 &= \iiint_E (x + y^2) dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \left[(\rho \sin \phi \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta) \rho^2 \sin \phi \right] d\rho d\theta d\phi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^3 \sin^2 \phi (\cos \theta + \rho \sin \phi \sin^2 \theta) d\rho d\theta d\phi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^3 \sin^2 \phi \cos \theta d\rho d\theta d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^4 \sin^3 \phi \sin^2 \theta d\rho d\theta d\phi = \\ &= 60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi \cos \theta d\theta d\phi + \frac{992}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi = \\ &= 120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi d\phi + \frac{992}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta)) d\theta d\phi = \\ &= 120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\phi)) d\phi + \frac{992\pi}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi d\phi = \\ &= 30\pi + \frac{992\pi}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi (1 - \cos^2 \phi) d\phi = \\ &= 30\pi + \frac{992\pi}{10} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos^2 \phi d\phi \right) \end{aligned}$$

Par changement de variable en posant $u = \cos \phi$ et en calculant $-du = \sin \phi d\phi$:

$$J_2 = 30\pi + \frac{992\pi}{10} \left(1 + \int_1^0 u^2 du \right) = 30\pi + \frac{992\pi}{10} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1442\pi}{15}$$

Question 3

a)

b)

Question 4

a) (i)

(ii)

b)

Question 5

a)

b)