

Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie
Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 4

Nom : Trépanier

Prénom : William

Matricule : 1952594

Section : 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus \LaTeX	Total
			/10

Question 1

En utilisant la formule et soit D la région située dans le premier octant et bornée par le paraboloïde $z = 2(x^2 + y^2)$ et le plan $z = 2$:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1 + 16r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1 + 16r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r \sqrt{1 + 16r^2} dr d\theta \end{aligned}$$

En posant $u = 1 + 16r^2$ et en calculant $du = 32r dr$:

$$A = \frac{\pi}{64} \int_1^{17} u^{1/2} du = \frac{\pi}{96} u^{3/2} \Big|_1^{17} = \frac{\pi}{96} (17^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\pi}{96} (17\sqrt{17} - 1)$$

Question 2

On trouve d'abord \vec{r}_u et \vec{r}_v :

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= 2u\vec{i} + v\vec{j} \\ \vec{r}_v &= u\vec{j} + v\vec{k}\end{aligned}$$

On calcule ensuite $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & v & 0 \\ 0 & u & v \end{vmatrix} = v^2\vec{i} - 2uv\vec{j} + 2u^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| &= \sqrt{(v^2)^2 + (-2uv)^2 + (2u^2)^2} = \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 4u^4} \\ &= \sqrt{(v^2 + 2u^2)^2} = v^2 + 2u^2\end{aligned}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\begin{aligned}\iint_S zx \, dS &= \frac{1}{2} \iint_D (v^2u^2)(v^2 + 2u^2) \, dA = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \int_0^1 (u^2v^4 + 2u^4v^2) \, dvdu \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left[\frac{u^2v^5}{5} + \frac{2u^4v^3}{3} \right]_{v=0}^{v=1} du = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left(\frac{u^2}{5} + \frac{2u^4}{3} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{15} + \frac{2u^5}{15} \right]_{u=-2}^{u=2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{144}{15} = \frac{25}{4}\end{aligned}$$

Question 3

On trouve d'abord \vec{r}_u et \vec{r}_v :

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2u & 1 \\ 1 & -1 & 2v \end{vmatrix} = (4uv + 1)\vec{i} + \vec{j} - 2u\vec{k}$$

On vérifie ensuite l'orientation avec le vecteur normal au point $(2, 2, 2)$:

$$x = v \Rightarrow v = 2$$

$$z = u + 2v \Rightarrow 2 = u + 4 \Rightarrow u = -2$$

$$y = 4 - 2 = 2$$

$$\vec{n}(-2, 2) = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(-2, 2)}{\|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(-2, 2)\|} = \frac{-15\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{15^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{1}{11\sqrt{2}}(-15\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$$

Ainsi :

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = -(4uv + 1)\vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dA \\ &= \iint_D (v^2\vec{i} + (u + v^2)\vec{j} + (1 - (u^2 - v))\vec{k}) \cdot (-(4uv + 1)\vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k}) dA \\ &= \int_{-3}^3 \int_{-3}^3 (-4uv^3 - 2v^2 - 3u + 2u^3 + 2uv) dudv \\ &= \int_{-3}^3 \left[-2u^2v^3 - 2uv^2 - \frac{3u^2}{2} + \frac{u^4}{2} + u^2v \right]_{u=-3}^{u=3} dv = \int_{-3}^3 -12v^2 dv \\ &= -4 \cdot v^3 \Big|_{-3}^3 = -216 \end{aligned}$$

Question 4

- a) Puisque pour tout point appartenant à S , \vec{F} est tangent à S et considérant que \vec{n} est orthogonal à S :

$$\angle(\vec{F}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi et en chaque point :

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \|\vec{F}\| \|\vec{n}\| \cos(\angle(\vec{F}, \vec{n})) dS = \iint_S 0 dS = 0$$

- b) Puisque $\|\vec{n}\| = 1$:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = c \iint_S \vec{n} \cdot \vec{n} dS = c \iint_S \|\vec{n}\|^2 dS \\ &= c \iint_S 1^2 dS = cA \end{aligned}$$

Question 5

a) D'une part, il suffit de démontrer que $\vec{r}'(0) = \vec{r}'(2\pi)$:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(0) &= 10 \cos(0)\vec{i} + 10 \sin(0)\vec{j} + 100 \cos^2(0)\vec{k} = 10\vec{i} + 100\vec{k} \\ \vec{r}'(2\pi) &= 10 \cos(2\pi)\vec{i} + 10 \sin(2\pi)\vec{j} + 100 \cos^2(2\pi)\vec{k} = 10\vec{i} + 100\vec{k} \\ \vec{r}'(0) &= \vec{r}'(2\pi) \Rightarrow C \text{ est une courbe fermée}\end{aligned}$$

Nous avons $x = 10 \cos(t)$ et $z = 100 \cos^2(t) = (10 \cos(t))^2 = x^2$. Ainsi :

$$z = f(x, y) = x^2$$

b) • Il est possible de calculer directement la circulation en évaluant la composante de \vec{F} dans la direction du vecteur tangent unitaire \vec{T} . Ainsi, on calcule pour obtenir la circulation : $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$.

• Il est également possible d'utiliser le théorème de Stokes pour évaluer cette même intégrale en évaluant la composante normale du rotationnel de \vec{F} . Ainsi, on calcule pour obtenir la circulation : $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

c) Soit C la courbe paramétrée, S la surface paramétrée par $\vec{R}(x, y)$ trouvée en a) et D la projection de S sur le plan xy :

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \text{rot} \vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y) dA$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{R}(x, y) &= x\vec{i} + y\vec{j} + x^2\vec{k} \\ \vec{R}_x \times \vec{R}_y &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2x\vec{i} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & 1 & xy + \sin(z^4) \end{vmatrix} = x\vec{i} - (y - 2z)\vec{j} - 2y\vec{k}$$

$$\text{rot}\vec{F} \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y) = -2x^2 - 2y$$

Considérant que D est le disque de rayon 10 centré à l'origine :

$$\begin{aligned} \iint_D \text{rot}\vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y) dA &= \iint_D (-2x^2 - 2y) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{10} (-2r^2 \cos^2 \theta - 2r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{10} (-2r^3 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^2 \theta}{2} r^4 - \frac{2 \sin \theta}{3} r^3 \right]_{r=0}^{r=10} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-5000 \cos^2 \theta - \frac{2000}{3} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-5000 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) - \frac{2000}{3} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-2500 - \frac{2500}{2} \cos \theta - \frac{2000}{3} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \left[-2500\theta - \frac{2500}{2} \sin \theta + \frac{2000}{3} \cos \theta \right]_0^{2\pi} = -5000\pi \end{aligned}$$

Question 6

- a) Une surface fermée est une surface qui est la frontière d'une région solide E . Ainsi pour démontrer que la surface S est fermée, il suffit de démontrer que E existe :

$$E := \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2}, 0 \leq z \leq 2 - y^2\}$$

$$E \ni \Rightarrow S \text{ est fermée}$$

- b) Puisque \vec{n} pointe vers l'intérieur de la surface, l'orientation est négative. En utilisant le théorème de flux-divergence :

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = -2x - 2y + 1$$

Puisque l'orientation de la surface est négative et que le théorème de flux-divergence est vrai pour les surfaces orientées positivement, il suffit de multiplier $\operatorname{div} \vec{F} \cdot -1$. Ainsi, pour les fins de l'application du théorème :

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2x + 2y - 1$$

Quant à l'intégrale :

$$\begin{aligned} \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV &= \iiint_E (2x + 2y - 1) dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-y^2} (2x + 2y - 1) dz dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}} (2x + 2y - 1)(2 - y^2) dy dx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}} (4x - 2xy^2 + 4y - 2y^3 - 2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[4xy - \frac{2xy^3}{3} + 2y^2 - \frac{y^4}{2} - 2y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{2}} dx = \int_0^2 \left(\frac{8\sqrt{2}x}{3} + 2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{8\sqrt{2}x^2}{6} + 2x - \frac{4\sqrt{2}x}{3} \right]_{x=0}^{x=2} = 4 + \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Question 7

a) Sachant que $\rho(x, y, z) = c$

$$M_{yz} = \iiint_E cx \, dV = c \iiint_E x \, dV$$

En posant :

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= \frac{x^2}{2} \vec{i} \\ \operatorname{div} \vec{F} &= x\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de flux-divergence :

$$\begin{aligned}\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV &= \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \implies \\ c \iiint_E x \, dV &= c \iint_S \left(\frac{x^2}{2} \vec{i} \right) \cdot d\vec{S} = \frac{c}{2} \iint_S (x^2 \vec{i}) \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

En substituant x par y et z , on peut démontrer de manière analogue que :

$$\begin{aligned}M_{xz} &= \iiint_E cy \, dV = c \iiint_E y \, dV = \frac{c}{2} \iint_S (y^2 \vec{j}) \cdot d\vec{S} \\ M_{xy} &= \iiint_E cz \, dV = c \iiint_E z \, dV = \frac{c}{2} \iint_S (z^2 \vec{k}) \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

b) Puisque le solide est symétrique par rapport à x et y et que l'intégrale des fonctions sinus et cosinus évaluée entre 0 et 2π est égale à 0 :

$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = 0$$

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m} \iint_S (z^2 \vec{k}) \cdot d\vec{S} \\
\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= -u \sin u \cos v \vec{i} - u \sin u \sin v \vec{j} + \\
&\quad (u^2 \sin u \cos^3 v + u^2 \sin u \cos u \sin^2 v + u \sin^2 u \sin^2 v + u \sin^2 u \cos^2 v) \vec{k} \\
\bar{z} &= \frac{1}{m} \iint_D (u^2 \vec{k}) \cdot (\vec{R}_u \times \vec{R}_v) dA \\
&= \frac{1}{m} \iint_D u^2 (u^2 \sin u \cos^3 v + u^2 \sin u \cos u \sin^2 v + u \sin^2 u \sin^2 v + \\
&\quad u \sin^2 u \cos^2 v) dA \\
&= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (u^4 \sin u \cos^3 v + u^4 \sin u \cos u \sin^2 v + u^3 \sin^2 u \sin^2 v + \\
&\quad u^3 \sin^2 u \cos^2 v) du dv = 0
\end{aligned}$$

Le centre de masse est $(0, 0, 0)$.