



POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel

MTH1102 - Calcul II

Été 2019 Trimestre court - Devoir 2

Directives

- Le devoir est à rendre mercredi le **23 mai** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les directives pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée. Vous pouvez utiliser les tables d'intégrales à la fin de votre livre.

Question 1

Utilisez les coordonnées cylindriques pour évaluer l'intégrale

$$J_1 = \iiint_E (x^2 + y^2)^{3/2} dV,$$

où E est la région bornée par les paraboloïdes $z = x^2 + y^2 + 2$ et $z = 2x^2 + 2y^2$.

Question 2

Utilisez les coordonnées sphériques pour évaluer l'intégrale

$$J_2 = \iiint_E (x + y^2) dV,$$

où E est la région définie par $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Question 3

Soit la courbe C paramétrée par $\vec{r}(t) = \cos(\pi t)\vec{i} + \sin(\pi t)\vec{j} + \cos(2\pi t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2$.

- Montrez que le point $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C .
- Trouvez les équations paramétriques de la droite tangente à la courbe C au point P .

Question 4

Les parties a) et b) sont indépendantes.

- Soit C_1 la courbe paramétrée par

$$\vec{r}_1(t) = \sqrt{3}\cos(t)\vec{i} + \sqrt{3}\sin(t)\vec{j} + \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

et C_2 la courbe paramétrée par

$$\vec{r}_2(t) = \sqrt{2}\cos(t)\vec{i} - \sqrt{2}\cos(t)\vec{j} + 2\sin(t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- (i) Montrez que ces deux courbes sont situées sur une même sphère. Donnez l'équation cartésienne, le centre et le rayon de cette sphère.
- (ii) Montrez que les courbes C_1 et C_2 se coupent à angle droit.

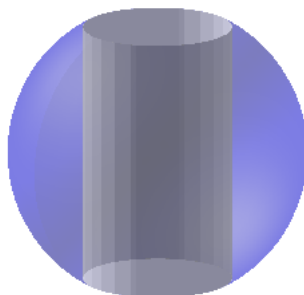
L'angle entre deux courbes en un point d'intersection est l'angle entre leur vecteurs tangents en ce point.

- b) Un objet est en mouvement dans l'espace à distance constante de l'origine. Montrez que son vecteur position et son vecteur vitesse sont toujours perpendiculaires.

Rappel : si la trajectoire de l'objet est une courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ alors sa vitesse est $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$.

Question 5

On considère un solide B ayant la forme d'une sphère solide comportant un trou cylindrique, comme qu'illustré ci-dessous. Un modèle de ce solide est la région située à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et à « l'extérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ (c'est-à-dire la région définie par $x^2 + y^2 \geq 1$). Dans ce modèle, la densité du solide est proportionnelle au carré de la distance à l'origine.



- a) Sans les évaluer, écrivez les intégrales permettant de calculer la masse de B d'abord en coordonnées cylindriques et ensuite en coordonnées sphériques.
- b) Calculez la masse du solide en utilisant le système de coordonnées de votre choix. Une réponse exacte est exigée. Donnez aussi une approximation décimale.