POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102 - Calcul II
Été 2019 Trimestre court - Devoir 2

Directives

- Le devoir est à rendre mercredi le **23 mai** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les directives pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée. Vous pouvez utiliser les tables d'intégrales à la fin de votre livre.

Question 1

Utilisez les coordonnées cylindriques pour évaluer l'intégrale

$$J_1 = \iiint_E (x^2+y^2)^{3/2}\,dV,$$

où E est la région bornée par les paraboloïdes $z = x^2+y^2+2$ et $z = 2x^2+2y^2$.

Question 2

Utilisez les coordonnées sphériques pour évaluer l'intégrale

$$J_2 = \iiint_E (x+y^2)\,dV,$$

où E est la région définie par $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=16$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Question 3

Soit la courbe C paramétrée par $\vec{r}(t) = \cos(\pi t)\,\vec{i} + \sin(\pi t)\,\vec{j} + \cos(2\pi t)\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2$.

a) Montrez que le point $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C.

b) Trouvez les équations paramétriques de la droite tangente à la courbe C au point P.

Question 4

Les parties a) et b) sont indépendantes.

a) Soit C_1 la courbe paramétrée par

$$\vec{r}_1(t) = \sqrt{3}\cos(t)\,\vec{i} + \sqrt{3}\sin(t)\,\vec{j} + \vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

et C_2 la courbe paramétrée par

$$\vec{r}_2(t) = \sqrt{2}\cos(t)\,\vec{i} - \sqrt{2}\sin(t) + 2\cos(t)\,\vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(i) Montrez que ces deux courbes sont situées sur une même sphère. Donnez l'équation cartésienne, le centre et le rayon de cette sphère.

(ii) Montrez que les courbes C_1 et C_2 se coupent à angle droit.

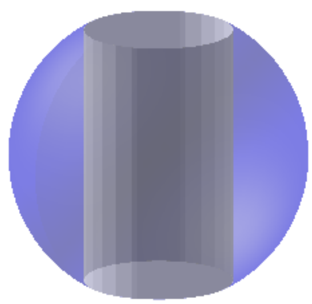
L'angle entre deux courbes en un point d'intersection est l'angle entre leur vecteurs tangents en ce point.

b) Un objet est en mouvement dans l'espace à distance constante de l'origine. Montrez que son vecteur position et son vecteur vitesse sont toujours perpendiculaires.

Rappel : si la trajectoire de l'objet est une courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ alors sa vitesse est $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$.

Question 5

On considère un solide B ayant la forme d'une sphère solide comportant un trou cylindrique, comme qu'illustré ci-dessous. Un modèle de ce solide est la région située à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$ et à « l'extérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ (c'est-à-dire la région définie par $x^2 + y^2 \geq 1$). Dans ce modèle, la densité du solide est proportionnelle au carré de la distance à l'origine.



a) Sans les évaluer, écrivez les intégrales permettant de calculer la masse de B d'abord en coordonnées cylindriques et ensuite en coordonnées sphériques.

b) Calculez la masse du solide en utilisant le système de coordonnées de votre choix. Une réponse exacte est exigée. Donnez aussi une approximation décimale.
