Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102 - Calcul II
Été 2019 Trimestre court - Devoir 1

Directives

- Le devoir est à rendre mercredi le **15 mai** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les consignes pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale. Vous devez montrer les étapes importantes de vos calculs.

Question 1

Évaluez l'intégrale suivante : $J_1 = \iint_R (y^3 - 2xy)\, dA$ où R est le rectangle $R = [-1, 2] \times [0, 4]$.

Question 2

Évaluez l'intégrale suivante :

$$J_2 = \iint_D (x^2 + y\cos(\pi x))\, dA,$$

où D est le domaine délimité par la parabole $y = x^2 - 6x + 5$ et la droite $y = 5$.

Question 3

Évaluez l'intégrale suivante en passant aux coordonnées polaires :

$$J_3 = \iint_D x(x^2 + y^2)^{3/2}\, dA,$$

où D est la région du premier quadrant située à la fois en dessous de la droite $y = x$ et à l'intérieur du disque $x^2 + y^2 \leq 9$.

Question 4

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = 10\,000 - e^{(12+x^2+y^2)^{3/4}}$ et D le disque $x^2 + y^2 \leq 4$. Montrez que

$$28\,000\,\pi \leq \iint_D f(x, y)\, dA \leq 40\,000\,\pi.$$

Question 5

a) Évaluez l'intégrale $J_4 = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \left[1 + y^2 \cos(x\sqrt{y})\right]\, dydx$. Est-ce que cette intégrale représente un volume ? Justifiez votre réponse.

b) Évaluez l'intégrale $J_5 = \iint_D \left[x^4 y + xy^4(1 + x^4y^4)^{1/4}\right]\, dA$, où D est le triangle de sommets $(-4, -4)$, $(0, 4)$, $(4, -4)$.

Question 6

Calculez le volume de la région E du premier octant borné par les surfaces $x + z = 5$ et $y + 2z = 4$.

Question 7

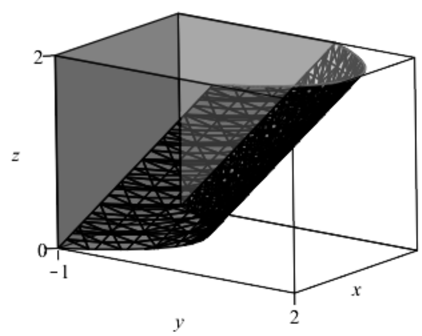
Une plaque mince a la forme d'un triangle isocèle dont la base mesure 4 unités et la hauteur mesure 6 unités. La densité de cette plaque est proportionnelle à la distance au sommet où les deux côtés les plus longs se rencontrent.

a) Calculez les moments d'inertie (seconds moments) de la plaque par rapport
   (i) à l'axe horizontal A_1 passant par la base du triangle.
   (ii) à l'axe vertical A_2 passant par la médiatrice de la base.

b) Est-il plus facile de faire tourner la plaque autour de l'axe A_1 ou autour de l'axe A_2 ? Justifiez votre réponse.

Question 8

Un solide occupe la région E de l'espace bornée par la surface $z = x^2 + ay$, où $a > 0$ est une constante, et les plans $x = \pm\sqrt{a}$, $y = -1$, $z = 0$ et $z = 2$. Ce solide est représenté sur la figure ci-dessous.



La *base* du solide est définie comme étant la partie de E située dans le plan $z = 0$. La densité du solide est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.

Déterminez pour quelles valeurs de la constante a le centre de masse du solide est situé au-dessus de sa base. Dans ce cas, le solide est en équilibre sur sa base.

Pour votre réponse, utilisez un gabarit semblable à celui-ci :

Étape	**Justification/Calcul**
1. Définition de la fonction de densité	
2. Description de la région E	
3. Calcul de la masse	
4. Calcul des moments	
5. Coordonnées en x et y du centre de masse	
6. Coordonnée en z du centre de masse	
7. Inégalité correspondant à la question	
8. Solution de l'inégalité	
9. Conclusion	