Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102 - Calcul II

Été 2019 - Trimestre court

Devoir 4

Nom : Trépanier **Prénom :** William

Matricule : 1952594 **Section :** 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus LaTeX	Total
2	4	1	7 /10

Question 1

En utilisant la formule et soit D la région située dans le premier octant et bornée par le paraboloïde $z = 2(x^2 + y^2)$ et le plan $z = 2$:

$$\begin{aligned} A &= \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint\limits_D \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2}\, dA \\ &= \iint\limits_D \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)}\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1 + 16r^2}\, r\, dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1 + 16r^2}\, dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r\sqrt{1 + 16r^2}\, dr d\theta \end{aligned}$$

En posant $u = 1 + 16r^2$ et en calculant $du = 32r\, dr$:

$$A = \frac{\pi}{64} \int_1^{17} u^{1/2}\, du = \frac{\pi}{96}\, u^{3/2}\Big|_1^{17} = \frac{\pi}{96}\,(17^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\pi}{96}\,(17\sqrt{17} - 1)$$

Question 2

On trouve d'abord $\vec{r_u}$ et $\vec{r_v}$:

$$\vec{r_u} = 2u\vec{i} + v\vec{j}$$
$$\vec{r_v} = u\vec{j} + v\vec{k}$$

On calcule ensuite $\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|$:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & v & 0 \\ 0 & u & v \end{vmatrix} = v^2\vec{i} - 2uv\vec{j} + 2u^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\| &= \sqrt{(v^2)^2 + (-2uv)^2 + (2u^2)^2} = \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 4u^4} \\ &= \sqrt{(v^2 + 2u^2)^2} = v^2 + 2u^2\end{aligned}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\begin{aligned}\iint\limits_S zx\, dS &= \frac{1}{2}\iint\limits_D (v^2u^2)(v^2 + 2u^2)\, dA = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{1}(u^2v^4 + 2u^4v^2)\, dvdu \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left[\frac{u^2v^5}{5} + \frac{2u^4v^3}{3}\right]_{v=0}^{v=1} du = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(\frac{u^2}{5} + \frac{2u^4}{3}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{15} + \frac{2u^5}{15}\right]_{u=-2}^{u=2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{144}{15} = \frac{25}{4}\end{aligned}$$

Question 3

On trouve d'abord $\vec{r_u}$ et $\vec{r_v}$:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2u & 1 \\ 1 & -1 & 2v \end{vmatrix} = (4uv+1)\vec{i} + \vec{j} - 2u\vec{k}$$

On vérifie ensuite l'orientation avec le vecteur normal au point $(2, 2, 2)$:

$$x = v \Rightarrow v = 2$$
$$z = u + 2v \Rightarrow 2 = u + 4 \Rightarrow u = -2$$
$$y = 4 - 2 = 2$$

$$\vec{n}(-2,2) = \frac{(\vec{r_u} \times \vec{r_v})(-2,2)}{\|(\vec{r_u} \times \vec{r_v})(-2,2)\|} = \frac{-15\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{15^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{1}{11\sqrt{2}}(-15\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$$

Ainsi :

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = -(4uv+1)\vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r_u} \times \vec{r_v})\, dA$$
$$= \iint_D (v^2\vec{i} + (u+v^2)\vec{j} + (1-(u^2-v))\vec{k}) \cdot (-(4uv+1)\vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k})\, dA$$
$$= \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} (-4uv^3 - 2v^2 - 3u + 2u^3 + 2uv)\, dudv$$
$$= \int_{-3}^{3} \Big[-2u^2v^3 - 2uv^2 - \frac{3u^2}{2} + \frac{u^4}{2} + u^2v \Big]_{u=-3}^{u=3} dv = \int_{-3}^{3} -12v^2\, dv$$
$$= -4 \cdot v^3 \Big|_{-3}^{3} = -216$$

Question 4

a) Puisque pour tout point appartenant à S, $\vec{F}$ est tangent à S et considérant que $\vec{n}$ est orthogonal à S :

$$\angle(\vec{F}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi et en chaque point :

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S \left\|\vec{F}\right\| \|\vec{n}\| \cos(\angle(\vec{F}, \vec{n}))\, dS = \iint_S 0\, dS = 0$$

b) Puisque $\|\vec{n}\| = 1$:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = c \iint_S \vec{n} \cdot \vec{n}\, dS = c \iint_S \|\vec{n}\|^2 \; dS$$
$$= c \iint_S 1^2\, dS = cA$$

Question 5

a) D'une part, il suffit de démontrer que $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$:

$$\vec{r}(0) = 10\cos(0)\vec{i} + 10\sin(0)\vec{j} + 100\cos^2(0)\vec{k} = 10\vec{i} + 100\vec{k}$$
$$\vec{r}(2\pi) = 10\cos(2\pi)\vec{i} + 10\sin(2\pi)\vec{j} + 100\cos^2(2\pi)\vec{k} = 10\vec{i} + 100\vec{k}$$
$$\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) \Rightarrow \text{C est une courbe fermée}$$

Nous avons $x = 10\cos(t)$ et $z = 100\cos^2(t) = (10\cos(t))^2 = x^2$. Ainsi :

$$z = f(x, y) = x^2$$

b)
- Il est possible de calculer directement la circulation en évaluant la composante de $\vec{F}$ dans la direction du vecteur tangent unitaire $\vec{T}$. Ainsi, on calcule pour obtenir la circulation : $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$.
- Il est également possible d'utiliser le théorème de Stokes pour évaluer cette même intégrale en évaluant la composante normale du rotationnel de $\vec{F}$. Ainsi, on calcule pour obtenir la circulation : $\iint_S \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

c) Soit C la courbe paramétrée, S la surface paramétrée par $\vec{R}(x, y)$ trouvée en a) et D la projection de S sur le plan xy :

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \iint_S \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D \text{rot}\vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y)\, dA$$

Nous avons :

$$\vec{R}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + x^2\vec{k}$$
$$\vec{R}_x \times \vec{R}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2x\vec{i} + \vec{k}$$

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & 1 & xy + \sin(z^4) \end{vmatrix} = x\vec{i} - (y - 2z)\vec{j} - 2y\vec{k}$$

$$\text{rot}\vec{F} \cdot (\vec{R_x} \times \vec{R_y}) = -2x^2 - 2y$$

Considérant que D est le disque de rayon 10 centré à l'origine :

$$\iint_D \text{rot}\vec{F}(\vec{R}(x,y)) \cdot (\vec{R_x} \times \vec{R_y})\, dA = \iint_D (-2x^2 - 2y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{10} (-2r^2 \cos^2\theta - 2r \sin\theta) r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{10} (-2r^3 \cos^2\theta - 2r^2 \sin\theta)\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{\cos^2\theta}{2} r^4 - \frac{2\sin\theta}{3} r^3 \Big]_{r=0}^{r=10} d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(-5000\cos^2\theta - \frac{2000}{3}\sin\theta \Big)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-5000\Big(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\Big) - \frac{2000}{3}\sin\theta \Big)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-2500 - \frac{2500}{2}\cos\theta - \frac{2000}{3}\sin\theta \Big)\, d\theta$$

$$= \Big[-2500\theta - \frac{2500}{2}\sin\theta + \frac{2000}{3}\cos\theta \Big]_0^{2\pi} = -5000\pi$$

Total: 2,0 / 6

Question 6

0

a) Une surface fermée est une surface qui est la frontière d'une région solide E. Ainsi pour démontrer que la surface S est fermée, il suffit de démontrer que E existe :

$$E := \{(x, y, z)|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2},\ 0 \leq z \leq 2 - y^2\}$$
$$E\,\exists \Rightarrow S \text{ est fermée}$$

NM

b) Puisque $\vec{n}$ pointe vers l'intérieur de la surface, l'orientation est négative. En utilisant le théorème de flux-divergence :

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \mathrm{div}\vec{F}\, dV$$
$$\mathrm{div}\vec{F} = -2x - 2y + 1$$

Puisque l'orientation de la surface est négative et que le théorème de flux-divergence est vrai pour les surfaces orientées positivement, il suffit de multiplier $\mathrm{div}\vec{F} \cdot -1$. Ainsi, pour les fins de l'application du théorème :

$$\mathrm{div}\vec{F} = 2x + 2y - 1$$

Quant à l'intégrale :

$$\iiint_E \mathrm{div}\vec{F}\, dV = \iiint_E (2x + 2y - 1)\, dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-y^2} (2x + 2y - 1)\, dzdydx$$
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}} (2x + 2y - 1)(2 - y^2)\, dydx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}} (4x - 2xy^2 + 4y - 2y^3 - 2 + y^2)\, dydx$$
$$= \int_0^2 \left[4xy - \frac{2xy^3}{3} + 2y^2 - \frac{y^4}{2} - 2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2}} dx = \int_0^2 \left(\frac{8\sqrt{2}x}{3} + 2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) dx$$
$$= \left[\frac{8\sqrt{2}x^2}{6} + 2x - \frac{4\sqrt{2}x}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = 4 + \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

2,0 / 2

Question 7

a) Sachant que $\rho(x,y,z) = c$

$$M_{yz} = \iiint\limits_E cx\, dV = c \iiint\limits_E x\, dV$$

En posant :

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{2}\vec{i}$$
$$\text{div}\vec{F} = x$$

En appliquant le théorème de flux-divergence :

$$\iiint\limits_E \text{div}\vec{F}\, dV = \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \Longrightarrow$$
$$c \iiint\limits_E x\, dV = c \iint\limits_S \left(\frac{x^2}{2}\vec{i}\right) \cdot d\vec{S} = \frac{c}{2} \iint\limits_S (x^2\vec{i}) \cdot d\vec{S}$$

En substituant x par y et z, on peut démontrer de manière analogue que :

$$M_{xz} = \iiint\limits_E cy\, dV = c \iiint\limits_E y\, dV = \frac{c}{2} \iint\limits_S (y^2\vec{j}) \cdot d\vec{S}$$
$$M_{xy} = \iiint\limits_E cz\, dV = c \iiint\limits_E z\, dV = \frac{c}{2} \iint\limits_S (z^2\vec{k}) \cdot d\vec{S}$$

b) Puisque le solide est symétrique par rapport à x et y et que l'intégrale des fonctions sinus et cosinus évaluée entre 0 et 2π est égale à 0 :

$$\overline{x} = 0$$
$$\overline{y} = 0$$

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m} \iint\limits_S (z^2 \vec{k}) \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{R_u} \times \vec{R_v} = -u \sin u \cos v \vec{i} - u \sin u \sin v \vec{j} +$$

$$(u^2 \sin u \cos^3 v + u^2 \sin u \cos u \sin^2 v + u \sin^2 u \sin^2 v + u \sin^2 u \cos^2 v) \vec{k}$$

$$\overline{z} = \frac{1}{m} \iint\limits_D (u^2 \vec{k}) \cdot (\vec{R_u} \times \vec{R_v})\, dA$$

$$= \frac{1}{m} \iint\limits_D u^2 (u^2 \sin u \cos^3 v + u^2 \sin u \cos u \sin^2 v + u \sin^2 u \sin^2 v +$$

$$u \sin^2 u \cos^2 v)\, dA$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (u^4 \sin u \cos^3 v + u^4 \sin u \cos u \sin^2 v + u^3 \sin^2 u \sin^2 v +$$

$$u^3 \sin^2 u \cos^2 v)\, du dv = 0$$

Le centre de masse est $(0, 0, 0)$.