POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102 - Calcul II
Été 2019 Trimestre court - Devoir 3

Résumé des consignes

- Le devoir est à rendre mercredi le **5 juin** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les consignes détaillées pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.
- Vous devez faire tous les calculs à la main et indiquer au minimum les grandes étapes de calcul dans votre rédaction. Il est permis d'utiliser les tables d'intégrales à la fin du livre ; dans ce cas, svp donnez le numéro de la formule employée.

Question 1

Calculez le vecteur normal unitaire du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ au point de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) = (2, \pi/4, 4)$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ associée à ce point.

Question 2

Soit C la courbe d'intersection du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et du plan $x = 2$. Calculez la longueur de la partie de C entre les points $(2, -1, 5)$ et $(2, 1, 5)$. Donnez d'abord une réponse exacte simplifiée, puis une approximation décimale.

Question 3

Les deux questions suivantes sont indépendantes

a) Une particule se déplace dans le champ de vitesse $\vec{F}(x, y) = (xy - 2)\vec{i} + (y^2 - 10)\vec{j}$. Si elle est au point $(1, 3)$ à l'instant $t = 1$, déterminez sa position approximative à l'instant $t = 1.05$.

b) Soit le champ vectoriel

$$\vec{G}(x, y) = \vec{i} + (1 + y^2)\,\vec{j}.$$

Donnez une paramétrisation de la ligne de courant de $\vec{G}$ passant par le point $(1, 1)$. Pour quel intervalle du paramètre cette paramétrisation est-elle valide ?

Question 4

Soit C le segment reliant le point $A = (1, -1, 0)$ au point $B = (1, 2, 3)$. Évaluez les intégrales suivantes.

a) $J_1 = \displaystyle\int_C (xy + z)\, ds$

b) $J2 = \displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}(x, y, z) = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$.

Question 5

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = (yze^{xy} - 2xy)\,\vec{i} + (xze^{xy} - x^2)\,\vec{j} + (e^{xy}+1)\,\vec{k}$.

a) Trouvez un potentiel pour le champ $\vec{F}$.

b) Calculez le travail effectué par $\vec{F}$ le long d'un arc de cercle C allant du point $(1,2,3)$ au point $(0,2,1)$.

c) Calculez le travail effectué par $\vec{F}$ autour d'un cercle situé dans le plan $z = 1 - x - y$.

Question 6

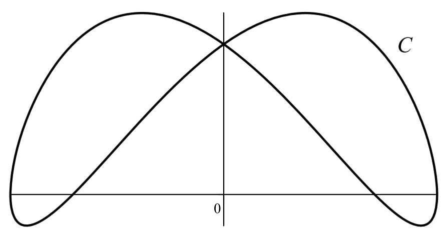
Soit C une courbe lisse par morceaux paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$. Démontrez que

$$\int_C \vec{x} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\left[||\vec{r}(b)||^2 - ||\vec{r}(a)||^2 \right],$$

où $\vec{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ est le vecteur position du point (x,y,z).

Question 7

La courbe C illustrée ci-dessous est paramétrée par $\vec{r}(t) = [\cos(t) - \sin(t)]\vec{i} + [\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t)]\vec{j}$.



a) Trouvez un intervalle $[a,b]$ pour le paramètre t de telle sorte que la boucle de gauche corresponde à $a \le t \le c$ et la boucle de droite à $c \le t \le b$, où c est le point milieu de $[a,b]$.

b) Calculez l'aire totale délimitée par les deux boucles de la courbe C.

c) Soit le champ vectoriel $F(x,y) = (2x+y)\vec{i} + (5x + e^y)\vec{j}$. Évaluez les intégrales suivantes :

(i) $J_1 = \oint_{B_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où B_1 est la boucle de gauche de la courbe C.

(ii) $J_2 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.