Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 1

Nom : Trépanier **Prénom :** William

Matricule : 1952594 **Section :** 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus LaTeX	Total
			/10

Question 1

Soit $R := \{(x,y) \mid -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$:

$$J_1 = \iint\limits_R (y^3 - 2xy)\ dA = \int_0^4 \int_{-1}^2 (y^3 - 2xy)\ dxdy = \int_0^4 (y^3 \cdot x\Big|_{x=-1}^{x=2} - 2y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{x=-1}^{x=2})\ dy =$$

$$\int_0^4 (y^3(2-(-1))\ -\ y(2^2 - (-1)^2))\ dy = \int_0^4 (3y^3 - 3y)\ dy = \frac{3y^4}{4} - \frac{3y^2}{2}\Big|_0^4 =$$

$$\frac{3(4)^4}{4} - \frac{3(4)^2}{2} - (0-0) = 192 - 24 = 168$$

Question 2

Pour trouver le domaine d'intégration, il faut trouver les points d'intersection entre la parabole $y = x^2 - 6x + 5$ et la droite $y = 5$. La parabole $y = x^2 - 6x + 5$ se factorise en $y = (x-1)(x-5)$ ainsi ses zéros sont $x = 1$ et $x = 5$. Le sommet de la parabole est obtenue avec l'équation $\frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$. Puisque $3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$, le sommet de la parabole est le point (3, -4). Quant à l'intersection entre la parabole et la droite, on pose :

$$5 = x^2 - 6x + 5 \iff 0 = x^2 - 6x \iff 0 = x(x-6)$$

En évaluant x, on obtient les points d'intersection (0, 5) et (6, 5). La zone d'intégration est ainsi la suivante :

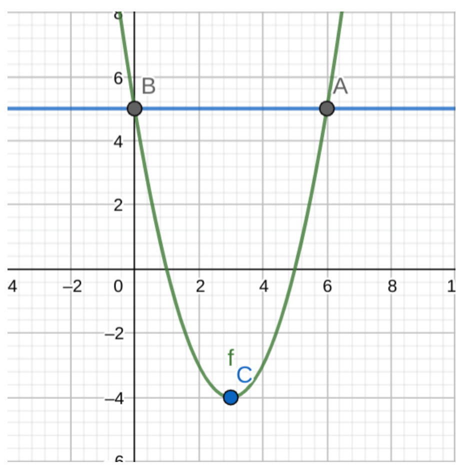

Figure 1 – Zone d'intégration

On pose ainsi $D := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6,\ x^2 - 6x + 5 \leq y \leq 5\}$

$$J_2 = \iint_D (x^2 + y\cos(\pi x))\, dA = \int_0^6 \int_{x^2-6x+5}^{5} (x^2 + y\cos(\pi x))\, dydx =$$

$$\int_0^6 (x^2 \cdot y\Big|_{x^2-6x+5}^{5} + \cos(\pi x) \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2-6x+5}^{5})\, dx =$$

$$\int_0^6 (x^2(5 - x^2 + 6x - 5) + \frac{\cos(\pi x)}{2}(5^2 - (x^2 - 6x + 5)^2)\, dx =$$

$$\int_0^6 (-x^4 + 6x^3 - \frac{x^4\cos(\pi x)}{2} + 6x^3\cos(\pi x) - 23x^2\cos(\pi x) + 30x\cos(\pi x))\ dx =$$

$$-\int_0^6 x^4\ dx\ + \int_0^6 6x^3\ dx\ - \int_0^6 \frac{x^4\cos(\pi x)}{2}\ dx + \int_0^6 6x^3\cos(\pi x)\ dx$$
$$- \int_0^6 23x^2\cos(\pi x)\ dx\ + \int_0^6 30x\cos(\pi x)\ dx = -I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 + I_6$$

Pour faciliter la lisibilité, les six intégrales seront évaluées séparément :

$$I_1 = \int_0^6 x^4\ dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^6 = \frac{6^5}{5} - 0 = \frac{7776}{5}$$

$$I_2 = \int_0^6 6x^3\ dx = 6\int_0^6 x^3\ dx = \left.\frac{6x^4}{4}\right|_0^6 = \frac{3\cdot 6^4}{2} - 0 = 1944$$
$$I_3 = \int_0^6 \frac{x^4\cos(\pi x)}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^6 x^4(\cos(\pi x))\ dx$$

En posant $u = x^4$ et $dv = \cos(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = 4x^3\ dx$ et $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_3 = \left.\frac{x^4\sin(\pi x)}{2\pi}\right|_0^6 - \frac{2}{\pi}\int_0^6 x^3(\sin(\pi x))\ dx = (0-0) - \frac{2}{\pi}\int_0^6 x^3(\sin(\pi x))\ dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^6 x^3(\sin(\pi x))$$

En posant $u = x^3$ et $dv = \sin(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = 3x^2\ dx$ et $v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_3 = \left.\frac{2x^3\cos(\pi x))}{\pi^2}\right|_0^6 - \frac{6}{\pi^2}\int_0^6 x^2\cos(\pi x)\ dx = \frac{432}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^2}\int_0^6 x^2\cos(\pi x)\ dx$$

En posant $u = x^2$ et $dv = \cos(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = 2x\ dx$ et $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_3 = \frac{432}{\pi^2} - \left.\frac{6x^2\sin(\pi x)}{\pi^3}\right|_0^6 + \frac{12}{\pi^3}\int_0^6 x\sin(\pi x)\ dx = \frac{432}{\pi^2} + \frac{12}{\pi^3}\int_0^6 x\sin(\pi x)\ dx$$

En posant $u = x$ et $dv = \sin(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = dx$ et et $v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{432}{\pi^2} - \frac{12x\cos(\pi x)}{\pi^4}\Big|_0^6 + \frac{12}{\pi^4}\int_0^6 \cos(\pi x)\ dx = \frac{432}{\pi^2} - \frac{72}{\pi^4} + \frac{12}{\pi^4}\int_0^6 \cos(\pi x)\ dx \\
&= \frac{432}{\pi^2} - \frac{72}{\pi^4} + \frac{12}{\pi^5}\int_0^{6\pi} \cos(u)\ du = \frac{432}{\pi^2} - \frac{72}{\pi^4} + \frac{12\sin(u)}{\pi^5}\Big|_0^{6\pi} = \frac{432}{\pi^2} - \frac{72}{\pi^4}
\end{aligned}$$

$$I_4 = \int_0^6 6x^3\cos(\pi x)\ dx = 6\int_0^6 x^3\cos(\pi x)\ dx$$

En posant $u = x^3$ et $dv = \cos(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = 3x^2\ dx$ et $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_4 = \frac{6x^3\sin(\pi x)}{\pi}\Big|_0^6 - \frac{18}{\pi}\int_0^6 x^2\sin(\pi x)\ dx = -\frac{18}{\pi}\int_0^6 x^2\sin(\pi x)\ dx$$

En posant $u = x^2$ et $dv = \sin(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = 2x\ dx$ et $v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_4 = \frac{18x^2\cos(\pi x)}{\pi^2}\Big|_0^6 - \frac{36}{\pi^2}\int_0^6 x\cos(\pi x)\ dx = \frac{648}{\pi^2} - \frac{36}{\pi^2}\int_0^6 x\cos(\pi x)\ dx$$

En posant $u = x$ et $dv = \cos(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = dx$ et $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_4 = \frac{648}{\pi^2} - \frac{36x\sin(\pi x)}{\pi^3}\Big|_0^6 + \frac{36}{\pi^3}\int_0^6 \sin(\pi x)\ dx &= \frac{648}{\pi^2} + \frac{36}{\pi^4}\int_0^{6\pi} \sin(u)\ du \\
&= \frac{648}{\pi^2} - \frac{36\cos(u)}{\pi^4}\Big|_0^{6\pi} = \frac{648}{\pi^2}
\end{aligned}$$

$$I_5 = \int_0^6 23x^2\cos(\pi x)\ dx = 23\int_0^6 x^2\cos(\pi x)\ dx$$

En posant $u = x^2$ et $dv = \cos(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = 2x\ dx$ et $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$.

Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_5 = \frac{23x^2 \sin(\pi x)}{\pi}\bigg|_0^6 - \frac{46}{\pi}\int_0^6 x\sin(\pi x)\ dx = -\frac{46}{\pi}\int_0^6 x\sin(\pi x)\ dx$$

En posant $u = x$ et $dv = \sin(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = dx$ et et $v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_5 = \frac{46x\cos(\pi x)}{\pi^2}\bigg|_0^6 - \frac{46}{\pi^2}\int_0^6 \cos(\pi x)\ dx &= \frac{276}{\pi^2} - \frac{46}{\pi^2}\int_0^6 \cos(\pi x)\ dx \\ &= \frac{276}{\pi^2} - \frac{46}{\pi^3}\int_0^{6\pi} \cos(u)\ du = \frac{276}{\pi^2} - \frac{46\sin(u)}{\pi^3}\bigg|_0^{6\pi} = \frac{276}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$I_6 = \int_0^6 30x\cos(\pi x)\ dx = 30\int_0^6 x\cos(\pi x)\ dx$$

En posant $u = x$ et $dv = \cos(\pi x)\ dx$, on calcule aussi $du = dx$ et $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$. Ainsi, par l'intégration par parties :

$$I_6 = \frac{30x\sin(\pi x)}{\pi}\bigg|_0^6 - \frac{30}{\pi}\int_0^6 \sin(\pi x)\ dx = \frac{-30}{\pi^2}\int_0^{6\pi} \sin(u)\ du = \frac{30\cos(u)}{\pi^2}\bigg|_0^{6\pi} = 0$$

Ainsi :

$$J_2 = -\frac{7776}{5} + 1944 - \frac{432}{\pi^2} + \frac{72}{\pi^4} + \frac{648}{\pi^2} - \frac{276}{\pi^2} + 0 = \frac{1944}{5} - \frac{60}{\pi^2} + \frac{72}{\pi^4}$$

Question 3

Pour calculer l'intégrale, il est plus simple de passer aux coordonnées polaires. La droite $y = x$ coupe le premier cadran en deux. Ainsi, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Également, $r = \sqrt{9} = 3$. On pose $D := \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$:

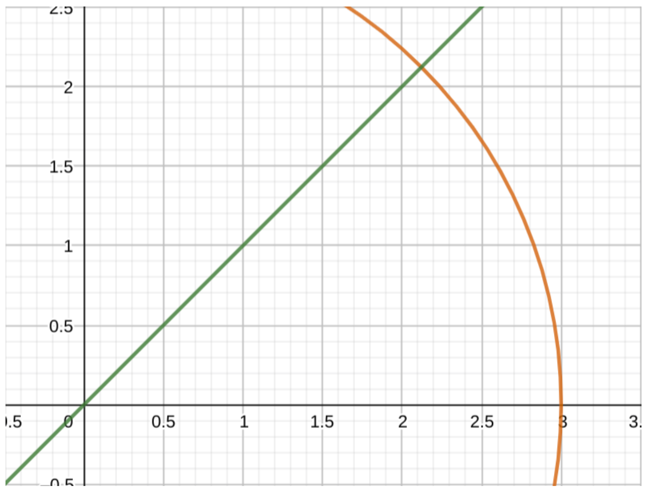

Figure 2 – Zone d'intégration

$$J_3 = \iint\limits_D x(x^2+y^2)^{3/2}\ dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^3 r\cos(\theta)(r^2)^{3/2}\ r\ drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^3 r^5 \cos(\theta)\ drd\theta =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^6}{6}\bigg|_0^3 \cos(\theta)\ d\theta = \frac{243}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta)\ d\theta = \frac{243}{2} \cdot \sin(\theta)\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{243}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0) = \frac{243\sqrt{2}}{4}$$

Question 4

Il est opportun de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. Le domaine d'intégration est un disque de rayon $\sqrt{4} = 2$, ainsi $r \in [0, 2]$. Puisqu'on intègre sur le cercle en entier, $\theta \in [0, 2\pi]$.
On pose $D := \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$:

$$\iint\limits_D 10000 - e^{(12+x^2+y^2)^{3/4}}\ dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (10000 - e^{(12+r^2)^{3/4}}) r\ drd\theta$$

Soit $f(r, \theta) = (10000 - e^{(12+r^2)^{3/4}})r$, il est possible de borner $f(r, \theta)$ par $g(r, \theta) = 7000r$ et $h(r, \theta) = 10000r$. Considérant :

$$g(r, \theta) \leq f(r, \theta) \leq h(r, \theta) \quad \forall (r, \theta) \in D$$

Ainsi, par théorème :

$$\iint\limits_D g(x, y)\ dA \leq \iint\limits_D f(x, y)\ dA \leq \iint\limits_D h(x, y)\ dA$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 7000r\ drd\theta \leq \iint\limits_D f(x, y)\ dA \leq \int_0^{2\pi} \int_0^2 10000r\ drd\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{7000r^2}{2}\bigg|_0^2\ d\theta \leq \iint\limits_D f(x, y)\ dA \leq \int_0^{2\pi} \frac{10000r^2}{2}\bigg|_0^2\ d\theta$$

$$14000\theta\bigg|_0^{2\pi} \leq \iint\limits_D f(x, y)\ dA \leq 20000\theta\bigg|_0^{2\pi}$$

$$28000\pi \leq \iint\limits_D f(x, y)\ dA \leq 40000\pi$$

Question 5

a) Pour répondre à la question, il est plus simple d'inverser les bornes d'intégration. Soit $D_1 := \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, \sqrt{x} \leq y \leq 2\}$, est équivalent à $D_2 := \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 2\}$ comme en témoigne la figure :

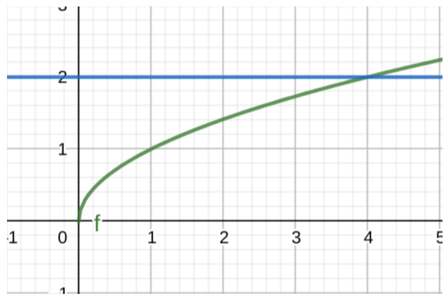

Figure 3 – Zone d'intégration

$$J_4 = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^4 \left[1 + y^2\cos(x\sqrt{y})\right] dydx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \left[1 + y^2\cos(x\sqrt{y})\right] dxdy =$$

$$\int_0^2 \left[x\Big|_0^{y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{y}}\sin(x\sqrt{y})\Big|_{x=0}^{x=y^2} \right] dy = \int_0^2 \left[y^2 + y^{3/2}\sin(y^{5/2}) \right] dy = \frac{8}{3} + \int_0^2 y^{3/2}\sin(y^{5/2}\ dy)$$

En posant $u = y^{5/2}$, on calcule $\frac{2}{5}du = y^{3/2}dy$. Par changement de variables :

$$\begin{aligned} J_4 = \frac{8}{3} + \int_0^{4\sqrt{2}} \frac{2}{5}\sin(u)\ du &= \frac{8}{3} + \frac{-2}{5}\cos(u)\Big|_0^{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{-2}{5}\Big(\cos(4\sqrt{2}) - \cos(0)\Big) = \frac{46}{15} - \frac{2\cos(4\sqrt{2})}{5} \end{aligned}$$

Pour que l'intégrale représente un volume, il faut que $f(x,y) = 1 + y^2\cos(x\sqrt{y}) \geq 0\ \forall\ (x,y)\ \in D_1$. Toutefois, $(\pi, 2) \in D_1$ et $f(\pi, 2) < 0$. Ainsi, par contradiction, l'intégrale ne représente pas un volume.

b) Soit $D := \{(x,y) \mid -(2 - \frac{y}{2}) \leq x \leq 2 - \frac{y}{2}, -4 \leq y \leq 4\}$, il s'agit d'un domaine symétrique tant pour x que pour y par rapport à 0 :

$$J_5 = \iint\limits_D \left[x^4y+yx^4\sqrt[4]{1-x^4y^4}\,\right]dA = \int_{-4}^{4}\int_{-(2-\frac{y}{2})}^{2-\frac{y}{2}} x^4y\ dxdy + \int_{-(2-\frac{y}{2})}^{2-\frac{y}{2}} yx^4\sqrt[4]{1-x^4y^4}\ dxdy$$

Puisque $yx^4\sqrt[4]{1-x^4y^4}$ est impaire en y (soit y^5) et qu'on intègre sur un domaine symétrique par rapport à 0, la seconde partie de l'intégrale est égale à 0 :

$$J_5 = \int_{-4}^{4}\int_{-(2-\frac{y}{2})}^{2-\frac{y}{2}} x^4y\ dxdy\ + 0 = \int_{-4}^{4} y\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-(2-\frac{y}{2})}^{2-\frac{y}{2}}\ dy = \frac{2}{5}\int_{-4}^{4} y(2-\frac{y}{2})^5\ dy$$

. En posant $u = 2-\frac{y}{2}$ et en calculant $du = \frac{-1}{2}dy$:

$$J_5 = \frac{8}{5}\int_4^0 (u^6-2u^5)du = \frac{8}{5}\cdot\frac{u^7}{7}\Big|_4^0 - \frac{16}{5}\cdot\frac{u^6}{6}\Big|_4^0 = -\frac{32768}{21}$$

Question 6

Puisque le volume désiré est celui du premier octant, il faut considérer également les plans $x = 0$ et $y = 0$. Nous avons les équations $x + z = 5 \Leftrightarrow z = 5 - x$ et $y + 2z = 4 \Leftrightarrow z = 2 - \frac{y}{2}$. En posant $5 - x = 2 - \frac{y}{2}$, nous pouvons trouver l'intersection des deux plans, soit le plan $y = x - 3$. Puisque la valeur maximale de z est dictée par le plan qui se retrouve sous l'autre plan, il est opportun de procéder par deux intégrales, puisqu'une portion du volume est borné par le plan $z = 5 - x$ alors qu'une seconde est borné par le plan $z = 2 - \frac{y}{2}$. Nous avons ainsi $B_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y + 3,\ 0 \leq y \leq 4,\ 0 \leq z \leq 2 - \frac{y}{2}\}$. Également, $B_2 = \{(x, y, z) \mid y + 3 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 4,\ 0 \leq z \leq 5 - x\}$

$$V = \iiint\limits_{B_1} dV + \iiint\limits_{B_2} dV = \int_0^4 \int_0^{y+3} \int_0^{2-\frac{y}{2}} dzdxdy + \int_0^4 \int_{y+3}^{5} \int_0^{5-x} dzdxdy =$$

$$\int_0^4 \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + 6\right) dy + \int_0^4 \left(\frac{y^2}{2} - 2y + 2\right) dy = \frac{52}{3} + \frac{8}{3} = 20$$

Question 7

a) (i) Considérant que la densité dépend de la distance au sommet du triangle qui joint les deux longs côtés, on place celui-ci à l'origine $(0,0)$. Les deux autres sommets du triangle se retrouvent à $(-2,6)$ et $(2,6)$. On peut calculer la distance à l'aide de la formule $\sqrt{x^2+y^2}$. Ainsi, $\rho(x,y)=\kappa\sqrt{x^2+y^2}$. Pour calculer le moment par rapport à l'axe des x :

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)\, dA = \kappa \iint_D y^2\sqrt{x^2+y^2}\, dA$$

On pose $D := \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 6\csc(\theta),\ \arctan(3) \le \theta \le \pi - \arctan(-3)\}$

$$I_x = \kappa \int_{\arctan(3)}^{\pi-\arctan(-3)} \int_0^{6\csc(\theta)} r^4 \sin^2(\theta)\, dr d\theta = \kappa \int_{\arctan(3)}^{\pi-\arctan(-3)} \sin^2(\theta) \frac{r^5}{5}\Big|_0^{6\csc(\theta)} d\theta =$$

$$\kappa \frac{7776}{5} \int_{\arctan(3)}^{\pi-\arctan(-3)} \csc^3(\theta)\, d\theta = \kappa \frac{15552}{5} \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}} \csc^3(\theta)\, d\theta$$

Par la formule de réduction (#72) :

$$I_x = \kappa \frac{15552}{5}\left[\frac{-1}{2}\cdot\csc(\theta)\cot(\theta) + \frac{1}{2}\ln|\csc(\theta)-\cot(\theta)|\right]_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \kappa\ \frac{15552}{5}\left(\frac{\sqrt{10}}{18} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)\right) \approx 2111.38\kappa$$

(ii)

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)\, dA = \kappa \iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}\, dA$$

On pose $D := \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 6\csc(\theta),\ \arctan(3) \le \theta \le \pi - \arctan(-3)\}$

$$I_y = \kappa \int_{\arctan(3)}^{\pi-\arctan(-3)} \int_0^{6\csc(\theta)} r^4 \cos^2(\theta)\, dr d\theta = \kappa\frac{7776}{5} \int_{\arctan(3)}^{\pi-\arctan(-3)} \csc^5(\theta)\cos^2(\theta)\, d\theta$$

$$\kappa\frac{15552}{5}\int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2(\theta)}{\sin^5(\theta)}\,d\theta=\kappa\frac{15552}{5}\int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}}\csc^5(\theta)\,d\theta-\int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}}\csc^3(\theta)\,d\theta=$$

Par la formule de réduction (#78) et le résultat de l'intégrale précédente :

$$I_y=\kappa\frac{15552}{5}\left(\frac{-1}{4}\cot(\theta)\csc^3(\theta)\Big|_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{4}\int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}}\csc^3(\theta)\,d\theta-\int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}}\csc^3(\theta)\,d\theta\right)=$$

$$\kappa\frac{3888}{5}\left(\frac{10\sqrt{10}}{81}-\frac{1}{4}\int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{2}}\csc^3(\theta)\,d\theta\right)=$$

$$\kappa\,\frac{3888}{5}\left(\frac{10\sqrt{10}}{81}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{10}}{18}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)\right)\right)\approx 237.59\kappa$$

b) Il est plus facile de tourner la plaque autour de l'axe A_2 puisque le moment d'inertie (qui s'oppose à la variation de la vitesse) est plus faible.

Question 8

1. Définition de la fonction de densité

On énonce que la densité est proportionnelle à la distance au plan :
$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{R},\ z = 0\}$. Ainsi, pour tout point de la région, la distance au plan $z = 0$ est égale à z. Ainsi :

$$\rho(x, y, z) = \kappa z$$

2. Description de la région E

En effectuant une projection de la région E sur le plan $D := xz$, nous avons :

$$B := \Big\{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, -1 \leq y \leq \frac{z - x^2}{a}\Big\}$$

Soit :

$$B := \Big\{(x, y, z) \mid -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a},\ -1 \leq y \leq \frac{z - x^2}{a},\ 0 \leq z \leq 2\Big\}$$

3. Calcul de la masse

$$m = \iiint\limits_E \rho(x, y, z)\, dV = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-1}^{\frac{z-x^2}{a}} z\ dydxdz = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \big[\frac{z(z - x^2)}{a} + z\big]\, dxdz =$$

$$\kappa \int_0^2 \Big(\frac{2z^2}{\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}z}{3} + 2\sqrt{a}\Big)\, dz = \kappa\ \frac{8(a + 2)}{3\sqrt{a}}$$

4. Calcul des moments

$$M_{yx} = \iiint\limits_E x\rho(x,y,z)\; dV = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-1}^{\frac{z-x^2}{a}} xz\; dydxdz = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} xz\Big(\frac{z-x^2}{a}+1\Big)\; dxdz$$

Puisque x ici est une fonction impaire intégrée sur un domaine symétrique à 0 :

$$M_{yz} = 0$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_E y\rho(x,y,z)\; dV = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-1}^{\frac{z-x^2}{a}} yz\; dydxdz = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \Big(\frac{z\left(z-x^2\right)^2}{2a^2} - \frac{z}{2}\Big)\; dxdz =$$

$$\kappa \int_0^2 \frac{15z^3 - 10a^2 - 12a^2 z}{15a^{\frac{3}{2}}}\; dz = \kappa\; \frac{4\left(-18a^2 - 20a + 45\right)}{45a^{\frac{3}{2}}}$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_E z\rho(x,y,z)\; dV = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{-1}^{\frac{z-x^2}{a}} z^2\; dydxdz = \kappa \int_0^2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{z^2\left(z-x^2\right)}{a} + z^2\; dxdz =$$

$$\kappa \int_0^2 \frac{2z^3}{\sqrt{a}} + \frac{4\sqrt{a}z^2}{3}\; dz = \kappa\left[\frac{8}{\sqrt{a}} + \frac{32\sqrt{a}}{9}\right]$$

5. Coordonnées en x et y du centre de masse

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{0}{\frac{8(a+2)}{3\sqrt{a}}} = 0$$

$$\overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} \frac{\frac{4\left(-18a^2-20a+45\right)}{45a^{\frac{3}{2}}}}{\frac{8(a+2)}{3\sqrt{a}}} = (-18a^2 - 20a + 45)/(30a(a+2))$$

6. Coordonnée en z du centre de masse

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{8}{\sqrt{a}} + \frac{32\sqrt{a}}{9}}{\frac{8(a+2)}{3\sqrt{a}}} = \frac{3\left(\frac{32\sqrt{a}}{9} + \frac{8}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a}}{8(a+2)}$$

7. Inégalité correspondant à la question

$$\frac{3\left(\frac{32\sqrt{a}}{9} + \frac{8}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a}}{8(a+2)} > 0$$

8. Solution de l'inégalité

$$\frac{3\left(\frac{32\sqrt{a}}{9} + \frac{8}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a}}{8(a+2)} > 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ dans } \mathbb{R}$$

9. Conclusion

Le centre de masse du solide est situé au dessus de sa base lorsque $a > 0$.