

Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie
Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 4

Nom : Trépanier

Prénom : William

Matricule : 1952594

Section : 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus L ^A T _E X	Total
			/10

Question 1

En utilisant la formule et soit D la région située dans le premier octant et bornée par le paraboloïde $z = 2(x^2 + y^2)$ et le plan $z = 2$:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1 + 16r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1 + 16r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r \sqrt{1 + 16r^2} dr d\theta \end{aligned}$$

En posant $u = 1 + 16r^2$ et en calculant $du = 32r dr$:

$$A = \frac{\pi}{64} \int_1^{17} u^{1/2} du = \frac{\pi}{96} u^{3/2} \Big|_1^{17} = \frac{\pi}{96} (17^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{96} (17\sqrt{17} - 1)$$

Question 2

On trouve d'abord \vec{r}_u et \vec{r}_v :

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= 2u\vec{i} + v\vec{j} \\ \vec{r}_v &= u\vec{j} + v\vec{k}\end{aligned}$$

On calcule ensuite $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & v & 0 \\ 0 & u & v \end{vmatrix} = v^2\vec{i} - 2uv\vec{j} + 2u^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| &= \sqrt{(v^2)^2 + (-2uv)^2 + (2u^2)^2} = \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 4u^4} \\ &= \sqrt{(v^2 + 2u^2)^2} = v^2 + 2u^2\end{aligned}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\begin{aligned}\iint_S zx \, dS &= \frac{1}{2} \iint_D (v^2 u^2)(v^2 + 2u^2) \, dA = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \int_0^1 (u^2 v^4 + 2u^4 v^2) \, dv \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left[\frac{u^2 v^5}{5} + \frac{2u^4 v^3}{3} \right]_{v=0}^{v=1} \, du = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left(\frac{u^2}{5} + \frac{2u^4}{3} \right) \, du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{15} + \frac{2u^5}{15} \right]_{u=-2}^{u=2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{144}{15} = \frac{25}{4}\end{aligned}$$

Question 3

On trouve d'abord \vec{r}_u et \vec{r}_v :

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2u & 1 \\ 1 & -1 & 2v \end{vmatrix} = (4uv + 1)\vec{i} + \vec{j} - 2u\vec{k}$$

On vérifie ensuite l'orientation avec le vecteur normal au point $(2, 2, 2)$:

$$x = v \Rightarrow v = 2$$

$$z = u + 2v \Rightarrow 2 = u + 4 \Rightarrow u = -2$$

$$y = 4 - 2 = 2$$

$$\vec{n}(-2, 2) = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(-2, 2)}{\|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(-2, 2)\|} = \frac{-15\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{15^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{1}{11\sqrt{2}}(-15\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$$

Ainsi :

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = -(4uv + 1)\vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dA \\ &= \iint_D (v^2\vec{i} + (u + v^2)\vec{j} + (1 - (u^2 - v))\vec{k}) \cdot (-(4uv + 1)\vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k}) dA \\ &= \int_{-3}^3 \int_{-3}^3 (-4uv^3 - 2v^2 - 3u + 2u^3 + 2uv) dudv \\ &= \int_{-3}^3 \left[-2u^2v^3 - 2uv^2 - \frac{3u^2}{2} + \frac{u^4}{2} + u^2v \right]_{u=-3}^{u=3} dv = \int_{-3}^3 -12v^2 dv \\ &= -4 \cdot v^3 \Big|_{-3}^3 = -216 \end{aligned}$$

Question 4

a)

b)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

Question 7

a)

b)