Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 2

Nom : Trépanier **Prénom :** William

Matricule : 1952594 **Section :** 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus LaTeX	Total
			/10

Question 1

Le paraboloïde $z_1 = x^2 + y^2 + 2$ se retrouve au dessus du paraboloïde $z_2 = 2x^2 + 2y^2$. En passant aux coordonnées cylindriques, on obtient : $z_1 = r^2 + 2$ et $z_2 = 2r^2$. Pour trouver les bornes de r sur sa projection dans le plan xy, il faut trouver l'intersection des deux paraboloïdes :

$$2r^2 = r^2 + 2 \Leftrightarrow r^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (r + \sqrt{2})(r - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{2},\ r \geq 0$$

Ainsi, nous obtenons :

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 2r^2 \leq z \leq r^2 + 2\}$$

Quant à l'intégrale :

$$J_1 = \iiint\limits_E (x^2 + y^2)^{3/2}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{2r^2}^{r^2+2} (r^2)^{3/2} \cdot r\ dzdrd\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{2r^2}^{r^2+2} r^4\ dzdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r^4 - r^6\right) drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(2^{5/2}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right)\right) d\theta =$$

$$2\pi \cdot \frac{16\sqrt{2}}{35} = \frac{32\sqrt{2}\pi}{35}$$

Question 2

Nous avons deux sphères, soit $S_1 := x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $S_2 := x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dont nous pouvons transformer en coordonnées sphériques : $S_1 := \rho^2 = 2^2$ et $S_2 := \rho^2 = 4^2$. Puisque $x \geq 0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Aussi, considérant $z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Nous avons donc la région E suivante :

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid 2 \leq \rho \leq 4,\ \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Quant à l'intégrale :

$$J_2 = \iiint\limits_E (x + y^2)\ dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \Big[(\rho \sin\phi \cos\theta +$$

$$\rho^2 sin^2\phi \sin^2\theta)\rho^2 \sin\phi\Big]\ d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^3 \sin^2\phi(\cos\theta + \rho \sin\phi \sin^2\theta)\ d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^3 \sin^2\phi \cos\theta\ d\rho\, d\theta\, d\phi\ +\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^4 \sin^3\phi \sin^2\theta\ d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi \cos\theta\ d\theta\, d\phi\ +\ \frac{992}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi \sin^2\theta\ d\theta\, d\phi =$$

$$120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi\ d\phi\ +\ \frac{992}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))\ d\theta\, d\phi =$$

$$120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\phi))\ d\phi\ +\ \frac{992\pi}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\ d\phi =$$

$$30\pi\ +\ \frac{992\pi}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi(1 - \cos^2\phi)\ d\phi =$$

$$30\pi\ +\ \frac{992\pi}{10}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\ d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \cos^2\phi\ d\phi\right)$$

Par changement de variable en posant $u = \cos\phi$ et en calculant $-du = \sin\phi\, d\phi$:

$$J_2 = 30\pi \;+\; \frac{992\pi}{10}\left(1 \;+\; \int_1^0 u^2\, du\right) = 30\pi + \frac{992\pi}{10}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1442\pi}{15}$$

Question 3

a) Soit $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{r}(t) = \cos(\pi t)\vec{i} + \sin(\pi t)\vec{j} + \cos(2\pi t)\vec{k}, 0 \leq t \leq 2$. En isolant t :

$$\begin{aligned}
\cos(\pi t) &= \frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right\},\ 0 \leq \pi t \leq 2\pi \\
\sin(\pi t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\},\ 0 \leq \pi t \leq 2\pi \\
\cos(2\pi t) &= -\frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\},\ 0 \leq 2\pi t \leq 2\pi
\end{aligned}$$

Puisque $t = \frac{1}{3}$ est commun aux trois équations et que $t = \frac{1}{3} \in [0, 2]$, $P \in C$

b)

$$\vec{r}\,'(t) = -\pi\sin(\pi t)\vec{i} + \pi\cos(\pi t)\vec{j} - 2\pi\sin(2\pi t)\vec{k}$$

En évaluant la dérivée au point $t = \frac{1}{3}$:

$$\vec{r}\,'\left(\frac{1}{3}\right) = -\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} + \pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{j} - 2\pi\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{k} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j} - \sqrt{3}\pi\vec{k}$$

Pour obtenir les équations paramétriques, on ajoute le point P à chaque paramètre :

$$\begin{cases}
x = -\frac{\sqrt{3}\pi}{2}t + \frac{1}{2} \\
y = \frac{\pi}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2} & \qquad 0 \leq t \leq 2 \\
z = -\sqrt{3}\pi t - \frac{1}{2}
\end{cases}$$

Question 4

a) (i) Il suffit de démontrer que les deux courbes satisfont l'équation cartésienne d'une sphère, soit $S := (x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2 = \rho^2$. Pour C_1 :

$$
\begin{gathered}
(\sqrt{3}\cos(t))^2 + (\sqrt{3}\sin(t))^2 + 1^2 = \rho^2 \\
3\cos^2(t) + 3\sin^2(t) + 1 = \rho^2 \\
3(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 1 = \rho^2 \\
3 + 1 = 4 = \rho^2 \\
\rho = \sqrt{4} = 2 \ \rho \geq 0
\end{gathered}
$$

Pour C_2 :

$$
\begin{gathered}
(\sqrt{2}\cos(t))^2 + (-\sqrt{2}\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2 = \rho^2 \\
2\cos^2(t) + 2\cos^2(t) + 4\sin^2(t) = \rho^2 \\
4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) = \rho^2 \\
4(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = \rho^2) \\
4 = \rho^2 \\
\rho = \sqrt{4} = 2 \ \rho \geq 0
\end{gathered}
$$

Ainsi, C_1 et C_2 satisfont la sphère d'équation $S := x^2 + y^2 + z^2 = 4$, soit la sphère de rayon 2 centrée à l'origine $(0, 0, 0)$. Tel que démontré, $\{C_1, C_2\} \in S$.

(ii) D'une part, il faut trouver le(s) point(s) d'intersection entre les deux courbes, soit s'il $\exists\, t_1, t_2 \,|\, \vec{r_1}(t_1) = \vec{r_2}(t_2)$:

Pour $z\,(\vec{k})$:

$$1 = 2\sin(t_2) \Leftrightarrow \sin(t_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Pour $x\,(\vec{i})$ considérant $t_2 = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$:

$$\begin{gathered}\sqrt{3}\cos(t_1) = \sqrt{2}\cos(t_2) \\ t_1 = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\},\ t_2 = \frac{\pi}{6} \\ t_1 = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\},\ t_2 = \frac{5\pi}{6}\end{gathered}$$

Pour $y\,(\vec{j})$ considérant $t_2 = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$:

$$\begin{gathered}\sqrt{3}\sin(t_1) = -\sqrt{2}\cos(t_2) \\ t_1 = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\},\ t_2 = \frac{\pi}{6} \\ t_1 = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\},\ t_2 = \frac{5\pi}{6}\end{gathered}$$

En choisissant les angles communs, nous avons :

$$\begin{gathered}t_1 = \frac{3\pi}{4},\ t_2 = \frac{5\pi}{6} \\ t_1 = \frac{7\pi}{4},\ t_2 = \frac{\pi}{6}\end{gathered}$$

Ensuite, il faut obtenir les vecteurs tangents avec la dérivée :

$$\begin{gathered}\vec{T_1}(t) = \vec{r_1}\,'(t) = -\sqrt{3}\sin(t_1)\vec{i} + \sqrt{3}\cos(t_1)\vec{j} \\ \vec{T_2}(t) = \vec{r_2}\,'(t) = -\sqrt{2}\sin(t_2)\vec{i} + \sqrt{2}\sin(t_2)\vec{j} + 2\cos(t_2)\vec{k}\end{gathered}$$

Pour les deux points d'intersection :

$$\vec{T_1}\Big(\frac{3\pi}{4}\Big) = -\frac{\sqrt{6}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{j}$$
$$\vec{T_2}\Big(\frac{5\pi}{6}\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \sqrt{3}\vec{k}$$
$$\vec{T_1}\cdot\vec{T_2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} + -\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot -\sqrt{3} = 0$$

$$\vec{T_1}\Big(\frac{7\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{j}$$
$$\vec{T_2}\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$$
$$\vec{T_1}\cdot\vec{T_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot\sqrt{3} = 0$$

Puisque pour les deux points d'intersection $\vec{T_1}\cdot\vec{T_2} = 0$, les deux courbes se coupent à angle droit.

b) Soit $\vec{r}(t)$ le vecteur position et $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ le vecteur vitesse. Puisque la distance à l'origine est constante :

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \kappa \Leftrightarrow \| \vec{r}(t) \| = \kappa$$

Ainsi :

$$\| \vec{r}(t) \|^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = \kappa^2$$

En dérivant :

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\Big(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\kappa^2\Big) \\
\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0 \\
2(\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t)) = 0 \\
\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) = 0,\ \forall\, t
\end{gathered}$$

Puisque le produit scalaire de $\vec{v}(t)$ et de $\vec{r}(t)$ est nul pour tout t, les vecteurs sont orthogonaux pour tout t.

Question 5

a) Puisque la densité du solide est proportionnelle au carré de la distance de l'origine, on peut obtenir celle-ci avec l'équation $(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{1/2} = x^2+y^2+z^2$. Ainsi, $\rho(x,y,z) = \kappa(x^2+y^2+z^2)$. En coordonnées cylindriques, nous avons :

$$x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1\ , r \geq 0$$

$$x^2+y^2+z^2 = 4 \Leftrightarrow r^2+z^2 = 4 \Leftrightarrow r = \sqrt{4-z^2},\ r \geq 0$$

Pour trouver les bornes de z, on trouve l'intersection entre la sphère et le cylindre :

$$1 = 4 - z^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}$$

Considérant que la sphère et le cylindre font un tour complet, $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainsi, nous avons la région suivante :

$$B_C = \{(r,\theta,z) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{4-z^2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}\}$$

Quant à l'intégrale :

$$m = \iiint\limits_{B_C} \kappa\left(x^2+y^2+z^2\right) dV = \kappa \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \left(r^3 + rz^2\right) drdzd\theta$$

En coordonnées sphériques, pour obterir les bornes de ρ :

$$x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow$$
$$\rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 1 \Leftrightarrow \rho\sin\phi = 1 \Leftrightarrow \rho = \csc\theta,\ \rho \geq 0$$

$$x^2+y^2+z^2 = 4 \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho = 2,\ \rho \geq 0$$

Quant aux bornes de ϕ, il suffit de trouver l'angle par rapport à l'axe des z positif où $\rho = 2$ et $z = \sqrt{3}$ (intersection trouvée lors des coordonnées cylindriques) :

$$cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \phi = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Considérant que la sphère et le cylindre font un tour complet, $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainsi, nous avons la région suivante :

$$B_S = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid \csc\phi \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Quant à l'intégrale :

$$m = \iiint\limits_{B_C} \kappa\,(x^2 + y^2 + z^2)\; dV = \kappa \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\csc\phi}^{2} \rho^4 \sin\phi\; d\rho d\phi d\theta$$

b) En utilisant les coordonnées sphériques :

$$m = \iiint\limits_{B_C} \kappa\,(x^2 + y^2 + z^2)\; dV = \kappa \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\csc\phi}^{2} \rho^4 \sin\phi\; d\rho d\phi d\theta =$$

$$\kappa\Big(\int_0^{2\pi}\; d\theta\Big)\Big(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\csc\phi}^{2} \rho^4 \sin\phi\; d\rho d\phi\Big) = 2\kappa\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \big(\frac{32\sin\phi}{5} - \frac{\csc^4\phi}{5}\big)\; d\phi =$$

$$2\kappa\pi\Big(\frac{32}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\phi\; d\phi - \frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \csc^4\phi\; d\phi\Big)$$

En utilisant la formule de réduction (#78) à deux reprises :

$$m = 2\kappa\pi\Big(\frac{32}{5}\cdot\sqrt{3} - \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{3}\cot\phi\csc^2\phi\Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\csc^2\theta d\theta\Big)\Big) =$$

$$2\kappa\pi\Big(\frac{32\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{5}\Big(\frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}\cot\phi\Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\Big)\Big) = 2\kappa\pi\Big(\frac{32\sqrt{3}}{5} - \frac{12\sqrt{3}}{15}\Big) = \kappa\,\frac{56\sqrt{3}\pi}{5}$$