

Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie
Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 2

Nom : Trépanier

Prénom : William

Matricule : 1952594

Section : 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus L ^A T _E X	Total
			/10

Question 1

Le paraboloïde $z_1 = x^2 + y^2 + 2$ se retrouve au dessus du paraboloïde $z_2 = 2x^2 + 2y^2$. En passant aux coordonnées cylindriques, on obtient : $z_1 = r^2 + 2$ et $z_2 = 2r^2$. Pour trouver les bornes de r sur sa projection dans le plan xy , il faut trouver l'intersection des deux paraboloïdes :

$$2r^2 = r^2 + 2 \Leftrightarrow r^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (r + \sqrt{2})(r - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}, r \geq 0$$

Ainsi, nous obtenons :

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2r^2 \leq z \leq r^2 + 2\}$$

Quant à l'intégrale :

$$\begin{aligned} J_1 &= \iiint_E (x^2 + y^2)^{3/2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{2r^2}^{r^2+2} (r^2)^{3/2} \cdot r dz dr d\theta = \\ &\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{2r^2}^{r^2+2} r^4 dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2r^4 - r^6) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(2^{5/2} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right) \right) d\theta = \\ &2\pi \cdot \frac{16\sqrt{2}}{35} = \frac{32\sqrt{2}\pi}{35} \end{aligned}$$

Question 2

Nous avons deux sphères, soit $S_1 := x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $S_2 := x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dont nous pouvons transformer en coordonnées sphériques : $S_1 := \rho^2 = 2^2$ et $S_2 := \rho^2 = 4^2$. Puisque $x \geq 0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Aussi, considérant $z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Nous avons donc la région E suivante :

$$E = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \mid 2 \leq \rho \leq 4, \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Quant à l'intégrale :

$$\begin{aligned} J_2 &= \iiint_E (x + y^2) dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \left[(\rho \sin \phi \cos \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta) \rho^2 \sin \phi \right] d\rho d\theta d\phi = \\ &\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^3 \sin^2 \phi (\cos \theta + \rho \sin \phi \sin^2 \theta) d\rho d\theta d\phi = \\ &\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^3 \sin^2 \phi \cos \theta d\rho d\theta d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 \rho^4 \sin^3 \phi \sin^2 \theta d\rho d\theta d\phi = \\ &\quad 60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi \cos \theta d\theta d\phi + \frac{992}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi = \\ &\quad 120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi d\phi + \frac{992}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta)) d\theta d\phi = \\ &\quad 120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\phi)) d\phi + \frac{992\pi}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi d\phi = \\ &\quad 30\pi + \frac{992\pi}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi (1 - \cos^2 \phi) d\phi = \\ &\quad 30\pi + \frac{992\pi}{10} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos^2 \phi d\phi \right) \end{aligned}$$

Par changement de variable en posant $u = \cos \phi$ et en calculant $-du = \sin \phi d\phi$:

$$J_2 = 30\pi + \frac{992\pi}{10} \left(1 + \int_1^0 u^2 du \right) = 30\pi + \frac{992\pi}{10} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1442\pi}{15}$$

Question 3

a) Soit $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{r}(t) = \cos(\pi t)\vec{i} + \sin(\pi t)\vec{j} + \cos(2\pi t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2$. En isolant t :

$$\begin{aligned}\cos(\pi t) &= \frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right\}, \quad 0 \leq \pi t \leq 2\pi \\ \sin(\pi t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}, \quad 0 \leq \pi t \leq 2\pi \\ \cos(2\pi t) &= -\frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}, \quad 0 \leq 2\pi t \leq 2\pi\end{aligned}$$

Puisque $t = \frac{1}{3}$ est commun aux trois équations et que $t = \frac{1}{3} \in [0, 2]$, $P \in C$

b)

$$\vec{r}'(t) = -\pi \sin(\pi t)\vec{i} + \pi \cos(\pi t)\vec{j} - 2\pi \sin(2\pi t)\vec{k}$$

En évaluant la dérivée au point $t = \frac{1}{3}$:

$$\vec{r}'\left(\frac{1}{3}\right) = -\pi \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} + \pi \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{j} - 2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{k} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j} - \sqrt{3}\pi\vec{k}$$

Pour obtenir les équations paramétriques, on ajoute le point P à chaque paramètre :

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}\pi}{2}t + \frac{1}{2} \\ y = \frac{\pi}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = -\sqrt{3}\pi t - \frac{1}{2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Question 4

- a) (i) Il suffit de démontrer que les deux courbes satisfont l'équation cartésienne d'une sphère, soit $S := (x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2 = \rho^2$. Pour C_1 :

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} \cos(t))^2 + (\sqrt{3} \sin(t))^2 + 1^2 &= \rho^2 \\ 3 \cos^2(t) + 3 \sin^2(t) + 1 &= \rho^2 \\ 3(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 1 &= \rho^2 \\ 3 + 1 &= 4 = \rho^2 \\ \rho &= \sqrt{4} = 2 \quad \rho \geq 0 \end{aligned}$$

Pour C_2 :

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} \cos(t))^2 + (-\sqrt{2} \cos(t))^2 + (2 \sin(t))^2 &= \rho^2 \\ 2 \cos^2(t) + 2 \cos^2(t) + 4 \sin^2(t) &= \rho^2 \\ 4 \cos^2(t) + 4 \sin^2(t) &= \rho^2 \\ 4(\cos^2(t) + \sin^2(t)) &= \rho^2 \\ 4 &= \rho^2 \\ \rho &= \sqrt{4} = 2 \quad \rho \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, C_1 et C_2 satisfont la sphère d'équation $S := x^2 + y^2 + z^2 = 4$, soit la sphère de rayon 2 centrée à l'origine $(0, 0, 0)$. Tel que démontré, $\{C_1, C_2\} \in S$.

- (ii)
- b) Soit $\vec{r}(t)$ le vecteur position et $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$ le vecteur vitesse. Puisque la distance à l'origine est constante :

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \kappa \Leftrightarrow \|\vec{r}(t)\| = \kappa$$

Ainsi :

$$\|\vec{r}(t)\|^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = \kappa^2$$

En dérivant :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)) = \frac{d}{dt}(\kappa^2)$$

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$$

$$2(\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t)) = 0$$

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) = 0, \forall t$$

Puisque le produit scalaire de $\vec{v}(t)$ et de $\vec{r}(t)$ est nul pour tout t , les vecteurs sont orthogonaux pour tout t .

Question 5

- a) Puisque la densité du solide est proportionnelle au carré de la distance de l'origine, on peut obtenir celle-ci avec l'équation $(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^{1/2} = x^2 + y^2 + z^2$. Ainsi, $\rho(x, y, z) = \kappa(x^2 + y^2 + z^2)$. En coordonnées cylindriques, nous avons :

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1, r \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow r = \sqrt{4 - z^2}, r \geq 0$$

Pour trouver les bornes de z , on trouve l'intersection entre la sphère et le cylindre :

$$1 = 4 - z^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}$$

Considérant que la sphère et le cylindre font un tour complet, $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainsi, nous avons la région suivante :

$$B_C = \{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{4 - z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}\}$$

Quant à l'intégrale :

$$m = \iiint_{B_C} \kappa(x^2 + y^2 + z^2) dV = \kappa \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} (r^3 + rz^2) dr dz d\theta$$

En coordonnées sphériques, pour obtenir les bornes de ρ :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 &\Leftrightarrow \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \\ \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= 1 \Leftrightarrow \rho \sin \phi = 1 \Leftrightarrow \rho = \csc \theta, \rho \geq 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho = 2, \rho \geq 0$$

Quant aux bornes de ϕ , il suffit de trouver l'angle par rapport à l'axe des z positif où $\rho = 2$ et $z = \sqrt{3}$ (intersection trouvée lors des coordonnées cylindriques) :

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \phi = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Considérant que la sphère et le cylindre font un tour complet, $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainsi, nous avons la région suivante :

$$B_S = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \mid \csc\phi \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Quant à l'intégrale :

$$m = \iiint_{B_C} \kappa(x^2 + y^2 + z^2) dV = \kappa \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\csc\phi}^2 \rho^4 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

b) En utilisant les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{B_C} \kappa(x^2 + y^2 + z^2) dV = \kappa \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\csc\phi}^2 \rho^4 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \\ &\kappa \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\csc\phi}^2 \rho^4 \sin\phi d\rho d\phi \right) = 2\kappa\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{32 \sin\phi}{5} - \frac{\csc^4\phi}{5} \right) d\phi = \\ &2\kappa\pi \left(\frac{32}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\phi d\phi - \frac{1}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \csc^4\phi d\phi \right) \end{aligned}$$

En utilisant la formule de réduction (#78) à deux reprises :

$$\begin{aligned}
 m &= 2\kappa\pi \left(\frac{32}{5} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \cot \phi \csc^2 \phi \Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \csc^2 \theta d\theta \right) \right) = \\
 &2\kappa\pi \left(\frac{32\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} \cot \phi \Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \right) \right) = 2\kappa\pi \left(\frac{32\sqrt{3}}{5} - \frac{12\sqrt{3}}{15} \right) = \kappa \frac{56\sqrt{3}\pi}{5}
 \end{aligned}$$