Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102 - Calcul II
Été 2019 - Trimestre court

Devoir 4

Nom : Trépanier **Prénom :** William

Matricule : 1952594 **Section :** 1

Question corrigée	Autres questions	Bonus LaTeX	Total
			/10

Question 1

En utilisant la formule et soit D la région située dans le premier octant et bornée par le paraboloïde $z = 2(x^2 + y^2)$ et le plan $z = 2$:

$$\begin{aligned}
A &= \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint\limits_D \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2}\, dA \\
&= \iint\limits_D \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)}\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1 + 16r^2}\, r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\, \sqrt{1 + 16r^2}\, dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r\, \sqrt{1 + 16r^2}\, dr d\theta
\end{aligned}$$

En posant $u = 1 + 16r^2$ et en calculant $du = 32r\, dr$:

$$A = \frac{\pi}{64} \int_1^{17} u^{1/2}\, du = \frac{\pi}{96}\, u^{3/2} \Big|_1^{17} = \frac{\pi}{96}\, (17^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\pi}{96}\, (17\sqrt{17} - 1)$$

Question 2

On trouve d'abord $\vec{r_u}$ et $\vec{r_v}$:

$$\vec{r_u} = 2u\vec{i} + v\vec{j}$$
$$\vec{r_v} = u\vec{j} + v\vec{k}$$

On calcule ensuite $\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|$:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & v & 0 \\ 0 & u & v \end{vmatrix} = v^2\vec{i} - 2uv\vec{j} + 2u^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\| &= \sqrt{(v^2)^2 + (-2uv)^2 + (2u^2)^2} = \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 4u^4} \\ &= \sqrt{(v^2 + 2u^2)^2} = v^2 + 2u^2 \end{aligned}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\begin{aligned} \iint_S zx\, dS &= \frac{1}{2} \iint_D (v^2u^2)(v^2 + 2u^2)\, dA = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \int_0^1 (u^2v^4 + 2u^4v^2)\, dvdu \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left[\frac{u^2v^5}{5} + \frac{2u^4v^3}{3}\right]_{v=0}^{v=1} du = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(\frac{u^2}{5} + \frac{2u^4}{3}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{15} + \frac{2u^5}{15}\right]_{u=-2}^{u=2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{144}{15} = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Question 3

On trouve d'abord $\vec{r_u}$ et $\vec{r_v}$:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2u & 1 \\ 1 & -1 & 2v \end{vmatrix} = (4uv+1)\vec{i} + \vec{j} - 2u\vec{k}$$

On vérifie ensuite l'orientation avec le vecteur normal au point $(2,2,2)$:

$$x = v \Rightarrow v = 2$$
$$z = u + 2v \Rightarrow 2 = u + 4 \Rightarrow u = -2$$
$$y = 4 - 2 = 2$$

$$\vec{n}(-2,2) = \frac{(\vec{r_u} \times \vec{r_v})(-2,2)}{\|(\vec{r_u} \times \vec{r_v})(-2,2)\|} = \frac{-15\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{15^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{1}{11\sqrt{2}}(-15\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$$

Ainsi :

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = -(4uv+1)\vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k}$$

Quant à l'intégrale et soit D le domaine des bornes de u, v :

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r_u} \times \vec{r_v})\, dA$$
$$= \iint_D (v^2\vec{i} + (u+v^2)\vec{j} + (1-(u^2-v))\vec{k}) \cdot (-(4uv+1)\vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k})\, dA$$
$$= \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} (-4uv^3 - 2v^2 - 3u + 2u^3 + 2uv)\, dudv$$
$$= \int_{-3}^{3} \Big[-2u^2v^3 - 2uv^2 - \frac{3u^2}{2} + \frac{u^4}{2} + u^2v \Big]_{u=-3}^{u=3} dv = \int_{-3}^{3} -12v^2\, dv$$
$$= -4 \cdot v^3 \Big|_{-3}^{3} = -216$$

Question 4

a) Puisque pour tout point appartenant à S, $\vec{F}$ est tangent à S et considérant que $\vec{n}$ est orthogonal à S :

$$\angle(\vec{F}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi et en chaque point :

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint\limits_S \left\|\vec{F}\right\| \|\vec{n}\| \cos(\angle(\vec{F}, \vec{n})) \, dS = \iint\limits_S 0 \, dS = 0$$

b) Puisque $\|\vec{n}\| = 1$:

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = c \iint\limits_S \vec{n} \cdot \vec{n} \, dS = c \iint\limits_S \|\vec{n}\|^2 \, dS$$
$$= c \iint\limits_S 1^2 \, dS = cA$$

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

Question 7

a)

b)