Standard Code Library

SDU-TCS

Shandong University

October 14, 2024

Contents

一切的开始

数据结构

ST 表

```cpp
template<class T,
    class Cmp = std::less<T>>
struct RMQ {
    const Cmp cmp = Cmp();
    static constexpr unsigned B = 64;
    using u64 = unsigned long long;
    int n;
    std::vector<std::vector<T>> a;
    std::vector<T> pre, suf, ini;
    std::vector<u64> stk;
    RMQ() {}
    RMQ(const std::vector<T> &v) {
        init(v);
    }
    void init(const std::vector<T> &v) {
        n = v.size();
        pre = suf = ini = v;
        stk.resize(n);
        if (!n) {
            return;
        }
        const int M = (n - 1) / B + 1;
        const int lg = std::__lg(M);
        a.assign(lg + 1, std::vector<T>(M));
        for (int i = 0; i < M; i++) {
            a[0][i] = v[i * B];
            for (int j = 1; j < B && i * B + j < n; j++) {
                a[0][i] = std::min(a[0][i], v[i * B + j], cmp);
            }
        }
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            if (i % B) {
                pre[i] = std::min(pre[i], pre[i - 1], cmp);
            }
        }
        for (int i = n - 2; i >= 0; i--) {
            if (i % B != B - 1) {
                suf[i] = std::min(suf[i], suf[i + 1], cmp);
            }
        }
        for (int j = 0; j < lg; j++) {
            for (int i = 0; i + (2 << j) <= M; i++) {
                a[j + 1][i] = std::min(a[j][i], a[j][i + (1 << j)], cmp);
            }
        }
        for (int i = 0; i < M; i++) {
            const int l = i * B;
            const int r = std::min(1U * n, l + B);
            u64 s = 0;
            for (int j = l; j < r; j++) {
                while (s && cmp(v[j], v[std::__lg(s) + l])) {
                    s ^= 1ULL << std::__lg(s);
                }
                s |= 1ULL << (j - l);
                stk[j] = s;
            }
        }
    }
    T operator()(int l, int r) {
        if (l / B != (r - 1) / B) {
            T ans = std::min(suf[l], pre[r - 1], cmp);
            l = l / B + 1;
            r = r / B;
            if (l < r) {
```

```
                int k = std::__lg(r - l);
                ans = std::min({ans, a[k][l], a[k][r - (1 << k)]}, cmp);
            }
            return ans;
        } else {
            int x = B * (l / B);
            return ini[__builtin_ctzll(stk[r - 1] >> (l - x)) + l];
        }
    }
};

```

线段树

```
struct SegTree {
    int l, r;
    SegTree *ls, *rs;
    int sum;
    int mx;
    int mn;
    int plus = 0;
    SegTree (const int L, const int R) : l(L), r(R) {
        plus = 0;mx = mn = 0;
        if (L == R) {
            /*Initial*/
            // sum = 1;
            ls = rs = nullptr;
        } else {
            int M = (L + R) >> 1;
            ls = new SegTree (L, M);
            rs = new SegTree (M + 1, R);
            pushup();
        }
    }
    void pushup() {
        sum = ls->sum + rs->sum;
        mn = min(ls->mn,rs->mn);
        mx = max(ls->mx,rs->mx);
    }
    void make_tag(long long w) {
        sum += (r - l + 1) * w;
        mn += w;
        mx += w;
        plus += w;
    }
    void pushdown() {
        if (plus == 0) return;
        ls->make_tag(plus);
        rs->make_tag(plus);
        plus = 0;
    }
    void upd(const int L, const int R, const int w) {
        if ((L > r) || (l > R)) return;
        if ((L <= l) && (r <= R)) {
            make_tag(w);
        } else {
            pushdown();
            ls->upd(L, R, w);
            rs->upd(L, R, w);
            pushup();
        }
    }
    void upd(const int x,const int w) {
        if((x > r) || (l > x)) return ;
        if(l == x && r == x) {
            sum = w;
        } else {
            ls->upd(x,w);
            rs->upd(x,w);
            pushup();
        }
```

```cpp
    }
    int qry(const int L,const int R) {
        if ((L > r) || (l > R)) return 0;
        if ((L <= l) && (r <= R)) {
            return sum;
        } else {
            pushdown();
            return ls->qry(L, R) + rs->qry(L, R);
        }
    }
    bool check(int w) {
        if(mn < w - 1 || mx > w)return false;
        return true;
    }
    int findR(int L,int R,int w) {
        if ((L > r) || (l > R)) return -1;
        if ((L <= l) && (r <= R)) {
            if(check(w)) return -1;
            if(l == r) {
               return l;
            }
        }
        pushdown();
        int res = ls->findR(L,R,w);
        if(res == -1) {
            res = rs->findR(L,R,w);
        }
        return res;
    }
};
```

树上动态直径

```cpp
#include<bits/stdc++.h>

using namespace std;

using ll = long long;
using pii = pair<int,int>;

const int maxn = 2e5 + 7;
int n,q;
ll w;
vector<pair<int,ll>> e[maxn];

ll c[maxn];
void add(int x,ll y) {
    for(;x <= n;x += (x & (-x))) c[x] += y;
}
void change(int l,int r,ll x) { // [l,r]
    add(l,x);add(r + 1,-x);
}
ll ask(int x) {
    ll ans = 0;
    for(;x > 0;x -= (x & (-x))) ans += c[x];
    return ans;
}

int dfn[maxn],mi[22][maxn],id[maxn],siz[maxn],cnt;
int get(int x, int y) {return dfn[x] < dfn[y] ? x : y;}
void dfs(int x, int fa) {
    mi[0][dfn[x] = ++cnt] = fa;
    id[cnt] = x;siz[x] = 1;
    for(auto [v,w] : e[x]) {
        if(v == fa) continue;
        dfs(v,x);
        change(dfn[v],dfn[v] + siz[v] - 1,w);
        siz[x] += siz[v];
    }
}
int lca(int u, int v) {
```

```
    if(u == v) return u;
    if((u = dfn[u]) > (v = dfn[v])) swap(u, v);
    int d = __lg(v - u++);
    return get(mi[d][u], mi[d][v - (1 << d) + 1]);
}
ll dis(pii a) {
    auto [u,v] = a;
    return ask(dfn[u]) + ask(dfn[v]) - 2 * ask(dfn[lca(u,v)]);
}

pii tr[maxn << 2];
pii merge(pii &a,pii &b) {
    pii p[6] = {a,b,{a.first,b.first},{a.first,b.second},{a.second,b.first},{a.second,b.second}};
    vector<ll> d(6);
    for(int i = 0;i < 6;i ++) d[i] = dis(p[i]);
    return p[max_element(d.begin(),d.end()) - d.begin()];
}
void build(int x,int l,int r) {
    if(l == r) {
        tr[x] = {id[l],id[l]};
        return ;
    }
    int mid = l + r >> 1;
    build(x << 1,l,mid);
    build(x << 1 | 1,mid + 1,r);
    tr[x] = merge(tr[x << 1],tr[x << 1 | 1]);
}
void update(int x,int L,int R,int l,int r) {
    if(L == l && r == R) return ;
    int mid = L + R >> 1;
    if(r <= mid) update(x << 1,L,mid,l,r);
    else if(l > mid) update(x << 1 | 1,mid + 1,R,l,r);
    else update(x << 1,L,mid,l,mid),update(x << 1 | 1,mid + 1,R,mid + 1,r);
    tr[x] = merge(tr[x << 1],tr[x << 1 | 1]);
}

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin >> n >> q >> w;
    vector<tuple<int,int,int>> edges;
    for(int i = 0;i < n - 1;i ++) {
        int x,y;ll z;
        cin >> x >> y >> z;
        e[x].push_back({y,z});
        e[y].push_back({x,z});
        edges.emplace_back(x,y,z);
    }
    dfs(1, 0);
    for(int i = 1; i <= __lg(n); i++)
      for(int j = 1; j + (1 << i) - 1 <= n; j++)
        mi[i][j] = get(mi[i - 1][j], mi[i - 1][j + (1 << i - 1)]);
    ll lastans = 0;
    build(1,1,n);
    for(int i = 0;i < q;i ++) {
        int x;ll y;
        cin >> x >> y;
        x = (x + lastans) % (n - 1);
        y = (y + lastans) % w;
        auto [son,fa,ww] = edges[x];
        if(dfn[son] < dfn[fa]) swap(son,fa);
        change(dfn[son],dfn[son] + siz[son] - 1,y - ww);
        update(1,1,n,dfn[son],dfn[son] + siz[son] - 1);
        lastans = dis(tr[1]);
        cout << lastans << "\n";
        ww = y;
        edges[x] = {son,fa,ww};
    }
}
```

扫描线

```cpp
//二维数点
struct Segment{
    int l,r,h,add;
    bool operator <(const Segment a)const{
        return h < a.h;
    }
};
struct SegTree {
    int l, r;
    SegTree *ls, *rs;
    int mn,len;
    int plus;
    SegTree (const int L, const int R) : l(L), r(R) {
        plus = 0;len = 0;
        if (L == R) {
            ls = rs = nullptr;
        } else {
            int M = (L + R) >> 1;
            ls = new SegTree (L, M);
            rs = new SegTree (M + 1, R);
            pushup();
        }
    }
    void pushup() {
        if(plus) len = r - l + 1;
        else if(l == r)len = 0;
        else len = ls->len + rs->len;
    }
    void make_tag(int w) {
        plus += w;
    }
    void pushdown() {
        if (plus == 0) return;
        ls->make_tag(plus);
        rs->make_tag(plus);
        plus = 0;
    }
    void update(const int L, const int R, const int w) {
        if ((L > r) || (l > R)) {
            return;
        }
        if ((L <= l) && (r <= R)) {
            make_tag(w);
            pushup();
            return ;
        } else {
            ls->update(L, R, w);
            rs->update(L, R, w);
            pushup();
        }
    }
};
//矩形面积并
#include<bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;
const double eps = 1e-8;
const int maxn = 2e5 + 7;
std::vector<int> x;
struct Segment{
    int l,r,h,add;
    bool operator <(const Segment a)const{
        return h < a.h;
    }
};
struct SegTree {
    int l, r;
    SegTree *ls, *rs;
```

```cpp
    int mn,len;
    int plus;
    SegTree (const int L, const int R) : l(L), r(R) {
        plus = 0;len = 0;
        if (L == R) {
            ls = rs = nullptr;
        } else {
            int M = (L + R) >> 1;
            ls = new SegTree (L, M);
            rs = new SegTree (M + 1, R);
            pushup();
        }
    }
    void pushup() {
        if(plus) len = x[r] - x[l - 1];
        else if(l == r)len = 0;
        else len = ls->len + rs->len;
    }
    void make_tag(int w) {
        plus += w;
    }
    void pushdown() {
        if (plus == 0) return;
        ls->make_tag(plus);
        rs->make_tag(plus);
        plus = 0;
    }
    void update(const int L, const int R, const int w) {
        if ((L >= x[r]) || (x[l - 1] >= R)) {
            return;
        }
        if ((L <= x[l - 1]) && (x[r] <= R)) {
            make_tag(w);
            pushup();
            return ;
        } else {
            //pushdown();
            ls->update(L, R, w);
            rs->update(L, R, w);
            pushup();
        }
    }
};
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);

    vector&lt;Segment&gt; s;
    int n;
    cin >> n;
    for(int i = 0;i < n;i ++){
        int xa,ya,xb,yb;
        cin >> xa >> ya >> xb >> yb;
        x.push_back(xa);
        x.push_back(xb);
        s.push_back({xa,xb,ya,1});
        s.push_back({xa,xb,yb,-1});
    }
    sort(s.begin(),s.end());
    sort(x.begin(),x.end());
    x.erase(unique(x.begin(),x.end()),x.end());
    int N = x.size();
    SegTree Seg(1,N - 1);
    ll ans = 0;
    if(s.size()){
        Seg.update(s[0].l,s[0].r,s[0].add);
        for(int i = 1;i < s.size();i ++){
            ans += 1ll * Seg.len * (s[i].h - s[i - 1].h);
            Seg.update(s[i].l,s[i].r,s[i].add);
        }
    }
```

```
    cout << ans << "\n";
    return 0;
}
```

Seg beats

本质上是维护了两棵线段树，A 树维护区间内最大值产生的贡献，B 树维护剩下树的贡献。注意 A 树某节点的孩子不一定全部能贡献到该节点，因为孩子的最大值不一定是父亲的最大值。所以要注意下传标记时，A 树的孩子下传的可能是 B 的标记。

beats 的部分是，每次让序列里每个数对另一个数 V 取 min，则直接暴力递归到 `inRange` 且 B 的最大值小于 V 的那些节点上，转化成对 A 那个节点的区间加法（加上 $V - val_A$）即可。这么做的均摊复杂度是 $O(\log n)$。

做区间历史最大值的方法是，维护两个标记 x, y，x 是真正的加标记，y 是 x 在上次下传结束并清零后的历史最大值。下传时注意先下传 y 再下传 x。实现历史最值是平凡的，不需要 beats。beats 解决的仅是取 min 的操作。

下面五个操作分别是：区间加，区间对 k 取 min，区间求和，区间最大值，区间历史最大值。

```cpp
#include <array>
#include <iostream>
#include <algorithm>

typedef long long int ll;

const int maxn = 500005;

ll a[maxn];

const ll inf = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;

struct Node {
  Node *ls, *rs;
  int l, r, maxCnt;
  ll v, add, maxAdd, sum, maxV, maxHistory;

  Node(const int L, const int R) :
      ls(nullptr), rs(nullptr), l(L), r(R), maxCnt(0),
      v(0), add(0), maxAdd(0), sum(0), maxV(-inf), maxHistory(-inf) {}

  inline bool inRange(const int L, const int R) {
    return L <= l && r <= R;
  }
  inline bool outRange(const int L, const int R) {
    return l > R || L > r;
  }

  void addVal(const ll t, int len) {
    add += t;
    sum += len * t;
    maxV += t;
  }

  void makeAdd(const ll t, int len) {
    addVal(t, len);
    maxHistory = std::max(maxHistory, maxV);
    maxAdd = std::max(maxAdd, add);
  }
};

void pushup(Node *x, Node *y) {
  y->maxV = std::max(y->ls->maxV, y->rs->maxV);
  y->sum = y->ls->sum + y->rs->sum;
  y->maxHistory = std::max({y->maxHistory, y->ls->maxHistory, y->rs->maxHistory});
  if (x->ls->maxV != x->rs->maxV) {
    bool flag = x->ls->maxV < x->rs->maxV;
    if (flag) std::swap(x->ls, x->rs);
    x->maxV = x->ls->maxV;
    x->maxCnt = x->ls->maxCnt;
    y->maxV = std::max(y->maxV, x->rs->maxV);
    y->sum += x->rs->sum;
    x->sum = x->ls->sum;
```

```cpp
      if (flag) std::swap(x->ls, x->rs);
    } else {
      x->maxCnt = x->ls->maxCnt + x->rs->maxCnt;
      x->sum = x->ls->sum + x->rs->sum;
      x->maxV = x->ls->maxV;
    }
    x->maxHistory = std::max({x->ls->maxHistory, x->rs->maxHistory, x->maxHistory, y->maxHistory});
  }

  void New(Node *&u1, Node *&u2, int L, int R) {
    u1 = new Node(L, R);
    u2 = new Node(L, R);
    if (L == R) {
      u1->v = u1->sum = u1->maxV = u1->maxHistory = a[L];
      u1->maxCnt = 1;
    } else {
      int M = (L + R) >> 1;
      New(u1->ls, u2->ls, L, M);
      New(u1->rs, u2->rs, M + 1, R);
      pushup(u1, u2);
    }
  }

  void pushdown(Node *x, Node *y) {
    ll val = std::max(x->ls->maxV, x->rs->maxV);
    std::array<Node*, 2> aim({y, x});
    Node *curl = aim[x->ls->maxV == val], *curr = aim[x->rs->maxV == val];
    x->ls->maxAdd = std::max(x->ls->maxAdd, x->ls->add + curl->maxAdd);
    x->ls->maxHistory = std::max(x->ls->maxHistory, x->ls->maxV + curl->maxAdd);
    x->ls->addVal(curl->add, x->ls->maxCnt);
    x->rs->maxAdd = std::max(x->rs->maxAdd, x->rs->add + curr->maxAdd);
    x->rs->maxHistory = std::max(x->rs->maxHistory, x->rs->maxV + curr->maxAdd);
    x->rs->addVal(curr->add, x->rs->maxCnt);
    y->ls->maxAdd = std::max(y->ls->maxAdd, y->ls->add + y->maxAdd);
    y->rs->maxAdd = std::max(y->rs->maxAdd, y->rs->add + y->maxAdd);
    y->ls->addVal(y->add, x->ls->r - x->ls->l + 1 - x->ls->maxCnt);
    y->rs->addVal(y->add, x->rs->r - x->rs->l + 1 - x->rs->maxCnt);
    x->add = y->add = x->maxAdd = y->maxAdd = 0;
  }

  void addV(Node *x, Node *y, int L, int R, ll k) {
    if (x->inRange(L, R)) {
      x->makeAdd(k, x->maxCnt);
      y->makeAdd(k, x->r - x->l + 1 - x->maxCnt);
    } else if (!x->outRange(L, R)) {
      pushdown(x, y);
      addV(x->ls, y->ls, L, R, k);
      addV(x->rs, y->rs, L, R, k);
      pushup(x, y);
    }
  }

  std::array<ll, 3> qry(Node *x, Node *y, const int L, const int R) {
    if (x->inRange(L, R)) return {x->sum + y->sum * ((x->r - x->l + 1) != x->maxCnt), x->maxV, x->maxHistory};
    else if (x->outRange(L, R)) return {0, -inf, -inf};
    else {
      pushdown(x, y);
      auto A = qry(x->ls, y->ls, L, R), B = qry(x->rs, y->rs, L, R);
      return {A[0] + B[0], std::max(A[1], B[1]), std::max(A[2], B[2])};
    }
  }

  void minV(Node *x, Node *y, const int L, const int R, int k) {
    if (x->maxV <= k) return;
    if (x->inRange(L, R) && y->maxV < k) {
      ll delta = k - x->maxV;
      x->makeAdd(delta, x->maxCnt);
    } else if (!x->outRange(L, R)) {
      pushdown(x, y);
      minV(x->ls, y->ls, L, R, k);
      minV(x->rs, y->rs, L, R, k);
```

```cpp
    pushup(x, y);
  }
}

int main() {
  std::ios::sync_with_stdio(false);
  std::cin.tie(nullptr);
  int n, m;
  std::cin >> n >> m;
  for (int i = 1; i <= n; ++i) std::cin >> a[i];
  Node *rot1, *rot2;
  New(rot1, rot2, 1, n);
  for (int op, l, r; m; --m) {
    std::cin >> op >> l >> r;
    if (op == 1) {
      std::cin >> op;
      addV(rot1, rot2, l, r, op);
    } else if (op == 2) {
      std::cin >> op;
      minV(rot1, rot2, l, r, op);
    } else {
      std::cout << qry(rot1, rot2, l, r)[op - 3] << '\n';
    }
  }
}
```

树状数组

```cpp
template <typename T>
struct Fenwick {
    int n;
    std::vector<T> a;
    Fenwick(int n) : n(n), a(n) {}
    void add(int x, T v) {
        for (int i = x + 1; i <= n; i += i & -i) {
            a[i - 1] += v;
        }
    }
    T sum(int x) {
        T ans = 0;
        for (int i = x; i > 0; i -= i & -i) {
            ans += a[i - 1];
        }
        return ans;
    }
    T rangeSum(int l, int r) {
        return sum(r) - sum(l);
    }
    int kth(T k) {
        int x = 0;
        // 先从高位开始取，如果当前这一位可以取，那么就考虑下一位是取 1 还是 0
        // 到最后找到的就是最大的那个 pos 并且对应的 <=x 的
        for (int i = 1 << std::__lg(n); i; i /= 2) {
            if (x + i <= n && k >= a[x + i - 1]) {
                x += i;
                k -= a[x - 1];
            }
        }
        return x;
    }//树状数组上倍增本质上是通过倍增来快速找出对应的区间
};
```

DSU

```cpp
struct DSU {
    std::vector<int> f, siz;
    DSU(int n) : f(n), siz(n, 1) { std::iota(f.begin(), f.end(), 0); }
    int leader(int x) {
        while (x != f[x]) x = f[x] = f[f[x]];
        return x;
```

```
    }
    bool same(int x, int y) { return leader(x) == leader(y); }
    bool merge(int x, int y) {
        x = leader(x);
        y = leader(y);
        if (x == y) return false;
        siz[x] += siz[y];
        f[y] = x;
        return true;
    }
    int size(int x) { return siz[leader(x)]; }
};
```

Splay

```
struct Node {
  int v, sz, sm;
  Node *ch[2], *fa;

  Node(const int V, Node *const f) : v(V), sz(1), sm(1), fa(f) {
    ch[0] = ch[1] = nullptr;
  }

  inline int GetRela(const int x) { return (v == x) ? -1 : (x > v); }

  void pushup() { sm = (ch[0] ? ch[0]->sm : 0) + (ch[1] ? ch[1]->sm : 0) + sz; }

  inline void rotate(const int x) {
    auto nrt = ch[x];
    ch[x] = nrt->ch[x ^ 1];
    nrt->ch[x ^ 1] = this;
    if (ch[x]) ch[x]->fa = this;
    nrt->fa = fa; fa = nrt;
    if (nrt->fa) nrt->fa->ch[nrt->fa->GetRela(nrt->v)] = nrt;
    pushup(); nrt->pushup();
  }

  void splay(const Node *p) {
    while (fa != p) {
      auto pa = fa->fa;
      if (pa == p) {
        fa->rotate(fa->GetRela(v));
      } else {
        int k1 = fa->GetRela(v), k2 = pa->GetRela(fa->v);
        if (k1 == k2) {
          pa->rotate(k1);
          fa->rotate(k1);
        } else {
          fa->rotate(k1);
          fa->rotate(k2);
        }
      }
    }
  }
};
```

LCT

```
struct Node {
  int v, s;
  bool tag;
  Node *ch[2], *fa;

  inline void maketag() {
    tag = !tag;
    std::swap(ch[0], ch[1]);
  }
  inline void pushup() {
    s = v;
    for (auto u : ch) if (u != nullptr) {
```

```
      s ^= u->s;
    }
  }
  inline void pushdown() {
    if (tag) {
      for (auto u : ch) if (u != nullptr) {
        u->maketag();
      }
      tag = false;
    }
  }

  inline int Getson() { return fa->ch[1] == this; }

  inline bool IsRoot() { return (fa == nullptr) || (fa->ch[Getson()] != this); }

  void rotate(const int x) {
    auto nt = ch[x];
    ch[x] = nt->ch[x ^ 1];
    nt->ch[x ^ 1] = this;
    if (ch[x]) ch[x]->fa = this;
    nt->fa = fa;
    if (!IsRoot()) { fa->ch[Getson()] = nt; }
    fa = nt;
    pushup(); nt->pushup();
  }

  void splay() {
    static Node* stk[maxn];
    int top = 0;
    stk[++top] = this;
    for (auto u = this; !u->IsRoot(); stk[++top] = u = u->fa);
    while (top) stk[top--]->pushdown();
    while (!IsRoot()) {
      if (fa->IsRoot()) {
        fa->rotate(Getson());
      } else {
        auto pa = fa->fa;
        int l1 = Getson(), l2 = fa->Getson();
        if (l1 == l2) {
          pa->rotate(l2);
          fa->rotate(l1);
        } else {
          fa->rotate(l1);
          fa->rotate(l2);
        }
      }
    }
  }
};
Node *node[maxn], Mem[maxn];

void Cut(const int x, const int y);
void Link(const int x, const int y);
void Query(const int x, const int y);
void Update(const int x, const int y);

void access(Node *u) {
  for (Node *v = nullptr; u; u = (v = u)->fa) {
    u->splay();
    u->ch[1] = v; u->pushup();
  }
}

void makeroot(Node *const u) {
  access(u);
  u->splay();
  u->maketag();
}

void Query(const int x, const int y) {
```

```cpp
  auto u = node[x], v = node[y];
  makeroot(u);
  access(v);
  v->splay();
  qw(v->s, '\n');
}

void Link(const int x, const int y) {
  auto u = node[x], v = node[y];
  makeroot(u);
  access(v); v->splay();
  if (u->IsRoot() == false) return;
  u->fa = v;
}

void Cut(const int x, const int y) {
  auto u = node[x], v = node[y];
  makeroot(u); access(v); u->splay();
  if ((u->ch[1] != v) || (v->ch[0] != nullptr)) return;
  u->ch[1] = v->fa = nullptr;
  u->pushup();
}

// w[x] -> y
void Update(const int x, const int y) {
  auto u = node[x];
  u->splay();
  u->s ^= u->v;
  u->s ^= (u->v = a[x] = y);
}
```

珂朵莉树

```cpp
auto getPos(int pos) {
  return --s.upper_bound({pos + 1, 0, 0});
}

void split(int pos) {
  auto it = getPos(pos);
  auto [l, r, v] = *it;
  s.erase(it);
  if (pos > l) s.insert({l, pos - 1, v});
  s.insert({pos, r, v});
}

void add(int l, int r, int v) {
  split(l); split(r + 1);
  for (auto x = getPos(l), y = getPos(r + 1); x != y; ++x) {
    x->v += v;
  }
}

void upd(int l, int r, int v) {
  split(l); split(r + 1);
  s.erase(getPos(l), getPos(r + 1));
  s.insert({l, r, v});
}
```

`getPos(pos)`：找到 pos 所在的迭代器 `split(pos)`：把 pos 所在的迭代器区间 [l, r] 分成 [l, pos - 1] 和 [pos, r] 两个

李超树

插入线段 kx + b 求某点最值

```cpp
constexpr long long INF = 1'000'000'000'000'000'000;
constexpr int C = 100'000;
struct Line {
    ll k,b;
    int id;
    Line(ll k,ll b,int id) : k(k), b(b), id(id) {}
```

```
};
long long f(const Line &line, int x) {
    return 1LL * line.k * x + line.b;
}
Line get(Line a, Line c, int x) {
    ll b = f(a,x), d = f(c,x);
    return b == d ? (a.id < c.id ? a : c) : b > d ? a : c;
}
struct Node {
    Node *lc, *rc;
    Line line;
    Node(const Line &line) : lc(nullptr), rc(nullptr), line(line) {}
};
void modify(Node *&p, int l, int r, Line line) {
    if (p == nullptr) {
        p = new Node(Line(0,-1e18,0));
    }
    if(l == r) {
        if(f(p -> line,l) <= f(line,l)) p -> line = line;
        return ;
    }
    int m = (l + r) / 2;
    if (f(p -> line, m) < f(line, m)) swap(p -> line, line);
    if (f(p -> line, l) < f(line, l)) modify(p -> lc, l, m, line);
    else if(f(p -> line, r) < f(line, r)) modify(p -> rc, m + 1, r, line);
}
Node *merge(Node *p, Node *q, int l, int r) {
    if (p == nullptr)
        return q;
    if (q == nullptr)
        return p;
    int m = (l + r) / 2;
    p -> lc = merge(p -> lc, q -> lc, l, m);
    p -> rc = merge(p -> rc, q -> rc, m, r);
    modify(p, l, r, q -> line);
    return p;
}
Line query(Node *p, int l, int r, int x) {
    if (p == nullptr)
        return Line(0,-1e18,0);
    if(l == r) return p -> line;
    int m = (l + r) / 2;
    if (x <= m) return get(query(p -> lc, l, m, x),p -> line,x);
    return get(query(p -> rc, m + 1, r, x),p -> line,x);
}
```

动态维护凸壳

```
/**
 * Author: Simon Lindholm
 * Date: 2017-04-20
 * License: CC0
 * Source: own work
 * Description: Container where you can add lines of the form kx+m, and query maximum values at points x.
 *  Useful for dynamic programming.
 * Time: O(\log N)
 * Status: tested
 */

struct Line {
  mutable ll k, m, p;
  bool operator<(const Line &o) const { return k < o.k; }
  bool operator<(ll x) const { return p < x; }
};

struct LineContainer: multiset<Line, less<>> {
  const ll inf = LLONG_MAX;
  ll val_offset = 0;
  void offset(ll x) {
    val_offset += x;//整体加
  }
```

```cpp
  ll div(ll a, ll b) {
    return a / b - ((a^b) < 0 && a%b);
  }
  bool isect(iterator x, iterator y) {
    if (y == end()) {
      x->p = inf;
      return 0;
    }
    if (x->k == y->k) {
      x->p = (x->m > y->m)? inf: -inf;
    } else {
      x->p = div(y->m - x->m, x->k - y->k);
    }
    return x->p >= y->p;
  }
  void add(ll k, ll m) {
    auto z = insert({k, m - val_offset, 0}), y = z++, x = y;//这里加减看情况
    while (isect(y, z)) z = erase(z);
    if (x != begin() && isect(--x, y)) isect(x, y = erase(y));
    while ((y = x) != begin() && (--x)->p >= y->p) isect(x, erase(y));
  }
  ll query(ll x) {
    assert(!empty());
    auto l = *lower_bound(x);
    return l.k * x + l.m + val_offset;
  }
};

LineContainer* merge(LineContainer *S, LineContainer *T) {
  if (S->size() > T->size())
    swap(S, T);
  for (auto l: *S) {
    T->add(l.k, l.m + S->val_offset);
  }
  return T;
}
```

线段树合并

```cpp
struct Info{
    int mx = 0,id = 0;
    Info() {}
    Info(int mx,int id) :mx(mx),id(id) {}
};
Info operator+(const Info a,const Info b) {
    if(a.mx > b.mx) return a;
    if(b.mx > a.mx) return b;
    if(a.id < b.id) return a;
    else return b;
}
struct Node {
    int l, r;
    Node *ls, *rs;
    Info t;
    Node(int l,int r) : l(l),r(r),ls(nullptr),rs(nullptr){}
};

void push_up(Node *&p) {
    if(p->ls == nullptr) {
        p->t = p->rs->t;return ;
    }
    if(p->rs == nullptr) {
        p->t = p->ls->t;return ;
    }
    p->t = p->ls->t + p->rs->t;
}
void upd(Node *&p,int l,int r,int x,int w) {
    if(p == nullptr) {
        p = new Node(l,r);
    }
    if(l == r) {
```

```
        p->t.mx += w;
        p->t.id = x;
        return ;
    }
    int mid = l + r >> 1;
    if(x <= mid) upd(p->ls,l,mid,x,w);
    else upd(p->rs,mid + 1,r,x,w);
    push_up(p);
}

Node* merge(Node *p,Node *q,int l,int r) {
    if(p == nullptr) return q;
    if(q == nullptr) return p;
    if(l == r) {
        p->t.mx += q->t.mx;
        return p;
    }
    int mid = l + r >> 1;
    p->ls = merge(p->ls,q->ls,l,mid);
    p->rs = merge(p->rs,q->rs,mid + 1,r);
    push_up(p);
    return p;
}
```

图论

树链剖分

```
// 重链剖分
void dfs1(int x) {
  son[x] = -1;
  siz[x] = 1;
  for (auto v:e[x])
    if (!dep[v]) {
      dep[v] = dep[x] + 1;
      fa[v] = x;
      dfs1(v);
      siz[x] += siz[v];
      if (son[x] == -1 || siz[v] > siz[son[x]]) son[x] = v;
    }
}

void dfs2(int x, int t) {
  top[x] = t;
  dfn[x] = ++ cnt;
  rnk[cnt] = x;
  if (son[x] == -1) return;
  dfs2(son[x], t);
  for (auto v:e[x])
    if (v != son[x] && v != fa[x]) dfs2(v, v);
}
int lca(int u, int v) {
  while (top[u] != top[v]) {
    if (dep[top[u]] > dep[top[v]])
      u = fa[top[u]];
    else
      v = fa[top[v]];
  }
  return dep[u] > dep[v] ? v : u;
}
```

LCA

倍增求 LCA

```
void dfs(int x){
    for(int j = 1;j <= 19;j ++){
        f[x][j] = f[f[x][j - 1]][j - 1];
    }
```

```cpp
    for(auto v:e[x]){
        if(v == f[x][0])continue;
        f[v][0] = x;
        dep[v] = dep[x] + 1;
        dfs(v);
    }
}
int lca(int u,int v){
    if(dep[u] < dep[v])swap(u,v);
    for(int i = 0;i <= 19;i ++){
        if((dep[u] - dep[v]) & (1 << i))u = f[u][i];
    }
    if(u == v)return u;
    for(int j = 19;j >= 0; j--){
        if(f[u][j] != f[v][j]){
            u = f[u][j];
            v = f[v][j];
        }
    }
    return f[u][0];
}
int kth(int x,int k){
    for(int i = 0;i <= 19;i ++){
        if(k & (1 << i))x = f[x][i];
    }
    return x;
}
```

dfn 求 LCA

```cpp
int get(int x, int y) {return dfn[x] < dfn[y] ? x : y;}
void dfs(int id, int f) {
  mi[0][dfn[id] = ++dn] = f;
  for(int it : e[id]) if(it != f) dfs(it, id);
}
int lca(int u, int v) {
  if(u == v) return u;
  if((u = dfn[u]) > (v = dfn[v])) swap(u, v);
  int d = __lg(v - u++);
  return get(mi[d][u], mi[d][v - (1 << d) + 1]);
}
dfs(R, 0);
for(int i = 1; i <= __lg(n); i++)
  for(int j = 1; j + (1 << i) - 1 <= n; j++)
    mi[i][j] = get(mi[i - 1][j], mi[i - 1][j + (1 << i - 1)]);
```

树哈希

```cpp
typedef unsigned long long ull;
struct TreeHash{
    std::vector<int> hs;
    TreeHash(int n){
        hs.resize(n,0);
    }
    mt19937_64 rnd(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
    ull bas = rnd();
    ull H(ull x){
        return x*x*x*19890535+19260817;
    }
    ull F(ull x){
        return H(x & ((1ll << 32) - 1)) + H(x >> 32);
    }
    int flag,n;
    void dfs(int u,int fa){
        hs[u] = bas;
        for(auto v:e[u]){
            if(v == fa) continue;
            dfs(v,u);
            hs[u] += F(hs[v]);
        }
```

```
    }
};
```

虚树

```cpp
void build_virtual_tree(vector<int> &h) {
  vector<int> a;
  sort(h.begin(), h.end(),[&](int &a,int &b){
      return dfn[a] < dfn[b];
  });  // 把关键点按照 dfn 序排序
  for (int i = 0; i < h.size(); ++i) {
    a.push_back(h[i]);
    if(i + 1 != h.size())a.push_back(lca(h[i], h[i + 1]));  // 插入 lca
  }
  sort(a.begin(), a.end(), [&](int &a,int &b){
      return dfn[a] < dfn[b];
  });  // 把所有虚树上的点按照 dfn 序排序
  a.erase(unique(a.begin(),a.end()),a.end());
  for (int i = 0; i < a.size() - 1; ++i) {
    int lc = lca(a[i], a[i + 1]);
    add(lc, a[i + 1]);  // 连边, 如有边权 就是 distance(lc,a[i+1])
  }
}
```

最小环

```cpp
//floyd 找最小环
//dijkstra 暴力删边跑最短路-
int floyd(const int &n) {
  for (int i = 1; i <= n; ++i)
    for (int j = 1; j <= n; ++j)
      dis[i][j] = f[i][j]; // 初始化最短路矩阵
  int ans = inf;
  for (int k = 1; k <= n; ++k) {
    for (int i = 1; i < k; ++i)
      for (int j = 1; j < i; ++j)
        ans = std::min(ans, dis[i][j] + f[i][k] + f[k][j]); // 更新答案
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
      for (int j = 1; j <= n; ++j)
        dis[i][j] = std::min(dis[i][j], dis[i][k] + dis[k][j]); // 正常的 floyd 更新最短路矩阵
  }
  return ans;
}
```

差分约束

$x_i + C \geq x_j$，最短路-> 最大解；最长路-> 最小解；判负环或正环即可

```cpp
bool spfa(){
    queue<int> q;
    vector<int> vis(n + 1),cnt(n + 1),dis(n + 1,1e9);
    dis[1] = 0;
    cnt[1] = 1;
    q.push(1);
    while(!q.empty()){
        int u = q.front();
        q.pop();
        vis[u] = 0;
        if(cnt[u] >= n)return 1;
        for(auto v:e[u]){
            if(dis[v] > dis[u] + len[p]){
                dis[v] = dis[u] + len[p];
                if(vis[v] == 0){
                    vis[v] = 1;
                    q.push(v);
                    cnt[v] ++;
                }
            }
        }
```

```
    }
    return 0;
}
```

最大流

```
struct Flow {
    static constexpr int INF = 1e9;
    int n;
    struct Edge {
        int to, cap;
        Edge(int to, int cap) : to(to), cap(cap) {}
    };
    vector<Edge> e;
    vector<vector<int>> g;
    vector<int> cur, h;
    Flow(int n) : n(n), g(n) {}
    void init(int n) {
        for (int i = 0; i < n; i++) g[i].clear();
        e.clear();
      }
    bool bfs(int s, int t) {
        h.assign(n, -1);
        queue<int> que;
        h[s] = 0;
        que.push(s);
        while (!que.empty()) {
            int u = que.front();
            que.pop();
            for (int i : g[u]) {
                int v = e[i].to;
                int c = e[i].cap;
                if (c > 0 && h[v] == -1) {
                    h[v] = h[u] + 1;
                    if (v == t)
                        return true;
                    que.push(v);
                }
            }
        }
        return false;
    }
    int dfs(int u, int t, int f) {
        if (u == t)
            return f;
        int r = f;
        for (int &i = cur[u]; i < int(g[u].size()); ++i) {
            int j = g[u][i];
            int v = e[j].to;
            int c = e[j].cap;
            if (c > 0 && h[v] == h[u] + 1) {
                int a = dfs(v, t, std::min(r, c));
                e[j].cap -= a;
                e[j ^ 1].cap += a;
                r -= a;
                if (r == 0)
                    return f;
            }
        }
        return f - r;
    }
    void addEdge(int u, int v, int c) {
        g[u].push_back(e.size());
        e.push_back({v, c});
        g[v].push_back(e.size());
        e.push_back({u, 0});
    }
    int maxFlow(int s, int t) {
        int ans = 0;
        while (bfs(s, t)) {
            cur.assign(n, 0);
```

```
            ans += dfs(s, t, INF);
        }
        return ans;
    }
};
```

最小费用最大流

```
using i64 = long long;
struct MCFGraph {
    struct Edge {
        int v, c, f;
        Edge(int v, int c, int f) : v(v), c(c), f(f) {}
    };
    const int n;
    std::vector<Edge> e;
    std::vector<std::vector<int>> g;
    std::vector<i64> h, dis;
    std::vector<int> pre;
    bool dijkstra(int s, int t) {
        dis.assign(n, std::numeric_limits<i64>::max());
        pre.assign(n, -1);
        priority_queue<pair<i64, int>, vector<pair<i64, int>>, greater<pair<i64, int>>> que;
        dis[s] = 0;
        que.emplace(0, s);
        while (!que.empty()) {
            i64 d = que.top().first;
            int u = que.top().second;
            que.pop();
            if (dis[u] < d) continue;
            for (int i : g[u]) {
                int v = e[i].v;
                int c = e[i].c;
                int f = e[i].f;
                if (c > 0 && dis[v] > d + h[u] - h[v] + f) {
                    dis[v] = d + h[u] - h[v] + f;
                    pre[v] = i;
                    que.emplace(dis[v], v);
                }
            }
        }
        return dis[t] != std::numeric_limits<i64>::max();
    }
    MCFGraph(int n) : n(n), g(n) {}
    void addEdge(int u, int v, int c, int f) {
        if (f < 0) {
            g[u].push_back(e.size());
            e.emplace_back(v, 0, f);
            g[v].push_back(e.size());
            e.emplace_back(u, c, -f);
        } else {
            g[u].push_back(e.size());
            e.emplace_back(v, c, f);
            g[v].push_back(e.size());
            e.emplace_back(u, 0, -f);
        }
    }
    std::pair<int, i64> flow(int s, int t) {
        int flow = 0;
        i64 cost = 0;
        h.assign(n, 0);
        while (dijkstra(s, t)) {
            for (int i = 0; i < n; ++i) h[i] += dis[i];
            int aug = std::numeric_limits<int>::max();
            for (int i = t; i != s; i = e[pre[i] ^ 1].v) aug = std::min(aug, e[pre[i]].c);
            for (int i = t; i != s; i = e[pre[i] ^ 1].v) {
                e[pre[i]].c -= aug;
                e[pre[i] ^ 1].c += aug;
            }
            flow += aug;
            cost += i64(aug) * h[t];
```

```
        }
        return std::make_pair(flow, cost);
    }
};
```

```
const int N = 5e3 + 5, M = 5e4 + 5;
struct flow {
  int cnt = 1, hd[N], nxt[M << 1], to[M << 1], limit[M << 1], cst[M << 1];
  void add(int u, int v, int w, int c) {
    nxt[++cnt] = hd[u], hd[u] = cnt, to[cnt] = v, limit[cnt] = w, cst[cnt] = c;
    nxt[++cnt] = hd[v], hd[v] = cnt, to[cnt] = u, limit[cnt] = 0, cst[cnt] = -c;
  }
  int fr[N], fl[N], in[N], dis[N];
  pair<int, int> mincost(int s, int t) {
    int flow = 0, cost = 0;
    while(1) {
      queue<int> q;
      memset(dis, 0x3f, sizeof(dis));
      memset(in, 0, sizeof(in));
      fl[s] = 1e9, dis[s] = 0, q.push(s);
      while(!q.empty()) {
        int t = q.front();
        q.pop(), in[t] = 0;
        for(int i = hd[t]; i; i = nxt[i]) {
          int it = to[i], d = dis[t] + cst[i];
          if(limit[i] && d < dis[it]) {
            fl[it] = min(limit[i], fl[t]), fr[it] = i, dis[it] = d;
            if(!in[it]) in[it] = 1, q.push(it);
          }
        }
      }
      if(dis[t] > 1e9) return make_pair(flow, cost);
      flow += fl[t], cost += dis[t] * fl[t];
      for(int u = t; u != s; u = to[fr[u] ^ 1]) limit[fr[u]] -= fl[t], limit[fr[u] ^ 1] += fl[t];
    }
  }
} g;
```

二分图最大匹配

```
auto dfs = [&](auto &&dfs, int u, int tag) -> bool {
    if (vistime[u] == tag) return false;
    vistime[u] = tag;
    for (auto v : e[u]) if (!mtch[v] || dfs(dfs, mtch[v], tag)) {
      mtch[v] = u;
      return true;
    }
    return false;
 };
```

KM(二分图最大权匹配)

```
template <typename T>
struct hungarian {  // km
  int n;
  vector<int> matchx;  // 左集合对应的匹配点
  vector<int> matchy;  // 右集合对应的匹配点
  vector<int> pre;     // 连接右集合的左点
  vector<bool> visx;   // 拜访数组 左
  vector<bool> visy;   // 拜访数组 右
  vector<T> lx;
  vector<T> ly;
  vector<vector<T> > g;
  vector<T> slack;
  T inf;
  T res;
  queue<int> q;
  int org_n;
  int org_m;

```

```
hungarian(int _n, int _m) {
  org_n = _n;
  org_m = _m;
  n = max(_n, _m);
  inf = numeric_limits<T>::max();
  res = 0;
  g = vector<vector<T> >(n, vector<T>(n));
  matchx = vector<int>(n, -1);
  matchy = vector<int>(n, -1);
  pre = vector<int>(n);
  visx = vector<bool>(n);
  visy = vector<bool>(n);
  lx = vector<T>(n, -inf);
  ly = vector<T>(n);
  slack = vector<T>(n);
}

void addEdge(int u, int v, int w) {
  g[u][v] = max(w, 0);  // 负值还不如不匹配 因此设为 0 不影响
}

bool check(int v) {
  visy[v] = true;
  if (matchy[v] != -1) {
    q.push(matchy[v]);
    visx[matchy[v]] = true;  // in S
    return false;
  }
  // 找到新的未匹配点 更新匹配点 pre 数组记录着" 非匹配边" 上与之相连的点
  while (v != -1) {
    matchy[v] = pre[v];
    swap(v, matchx[pre[v]]);
  }
  return true;
}

void bfs(int i) {
  while (!q.empty()) {
    q.pop();
  }
  q.push(i);
  visx[i] = true;
  while (true) {
    while (!q.empty()) {
      int u = q.front();
      q.pop();
      for (int v = 0; v < n; v++) {
        if (!visy[v]) {
          T delta = lx[u] + ly[v] - g[u][v];
          if (slack[v] >= delta) {
            pre[v] = u;
            if (delta) {
              slack[v] = delta;
            } else if (check(v)) {  // delta=0 代表有机会加入相等子图 找增广路
                                    // 找到就 return 重建交错树
              return;
            }
          }
        }
      }
    }
    // 没有增广路 修改顶标
    T a = inf;
    for (int j = 0; j < n; j++) {
      if (!visy[j]) {
        a = min(a, slack[j]);
      }
    }
    for (int j = 0; j < n; j++) {
      if (visx[j]) {  // S
        lx[j] -= a;
```

```cpp
        }
        if (visy[j]) {  // T
          ly[j] += a;
        } else {  // T'
          slack[j] -= a;
        }
      }
      for (int j = 0; j < n; j++) {
        if (!visy[j] && slack[j] == 0 && check(j)) {
          return;
        }
      }
    }
  }

  void solve() {
    // 初始顶标
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      for (int j = 0; j < n; j++) {
        lx[i] = max(lx[i], g[i][j]);
      }
    }

    for (int i = 0; i < n; i++) {
      fill(slack.begin(), slack.end(), inf);
      fill(visx.begin(), visx.end(), false);
      fill(visy.begin(), visy.end(), false);
      bfs(i);
    }

    // custom
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      if (g[i][matchx[i]] > 0) {
        res += g[i][matchx[i]];
      } else {
        matchx[i] = -1;
      }
    }
    cout << res << "\n";
    for (int i = 0; i < org_n; i++) {
      cout << matchx[i] + 1 << " ";
    }
    cout << "\n";
  }
};
```

一般图最大匹配

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
struct Graph {
    int n;
    std::vector<std::vector<int>> e;
    Graph(int n) : n(n), e(n + 1) {}
    void addEdge(int u, int v) {
        e[u].push_back(v);
        e[v].push_back(u);
    }
    std::vector<int> findMatching() {
        std::vector<int> match(n + 1, -1), vis(n + 1), link(n + 1), f(n + 1), dep(n + 1);
        // disjoint set union
        auto find = [&](int u) {
            while (f[u] != u)
                u = f[u] = f[f[u]];
            return u;
        };
        auto lca = [&](int u, int v) {
            u = find(u);
            v = find(v);
            while (u != v) {
                if (dep[u] < dep[v])
                    std::swap(u, v);
```

```cpp
                u = find(link[match[u]]);
            }
            return u;
        };
        std::queue<int> q;
        auto blossom = [&](int u, int v, int p) {
            while (find(u) != p) {
                link[u] = v;
                v = match[u];
                if (vis[v] == 0) {
                    vis[v] = 1;
                    q.push(v);
                }
                f[u] = f[v] = p;
                u = link[v];
            }
        };
        // find an augmenting path starting from u and augment (if exist)
        auto augment = [&](int u) {
            while (!q.empty())
                q.pop();
            std::iota(f.begin(), f.end(), 0);
            // vis = 0 corresponds to inner vertices, vis = 1 corresponds to outer vertices
            std::fill(vis.begin(), vis.end(), -1);

            q.push(u);
            vis[u] = 1;
            dep[u] = 0;

            while (!q.empty()){
                int u = q.front();
                q.pop();
                for (auto v : e[u]) {
                    if (vis[v] == -1) {
                        vis[v] = 0;
                        link[v] = u;
                        dep[v] = dep[u] + 1;
                        // found an augmenting path
                        if (match[v] == -1) {
                            for (int x = v, y = u, temp; y != -1; x = temp, y = x == -1 ? -1 : link[x]){
                                temp = match[y];
                                match[x] = y;
                                match[y] = x;
                            }
                            return;
                        }
                        vis[match[v]] = 1;
                        dep[match[v]] = dep[u] + 2;
                        q.push(match[v]);

                    } else if (vis[v] == 1 && find(v) != find(u)) {
                        // found a blossom
                        int p = lca(u, v);
                        blossom(u, v, p);
                        blossom(v, u, p);
                    }
                }
            }

        };
        // find a maximal matching greedily (decrease constant)
        auto greedy = [&]() {
            for (int u = 1; u <= n; ++u) {
                if (match[u] != -1)
                    continue;
                for (auto v : e[u]) {
                    if (match[v] == -1) {
                        match[u] = v;
                        match[v] = u;
                        break;
                    }
```

```cpp
                }
            }
        };
        greedy();
        for (int u = 1; u <= n; ++u)
            if (match[u] == -1)
                augment(u);

        return match;
    }
};
int main() {
    std::ios::sync_with_stdio(false);
    std::cin.tie(nullptr);
    int n, m;
    std::cin >> n >> m;
    Graph g(n);
    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        int u, v;
        std::cin >> u >> v;
        g.addEdge(u, v);
    }
    auto match = g.findMatching();
    int ans = 0;
    for (int u = 1; u <= n; ++u)
        if (match[u] != -1)
            ++ans;
    std::cout << ans / 2 << "\n";
    for (int u = 1; u <= n; ++u)
        if(match[u] != -1)std::cout << match[u] << " ";
        else std::cout << 0 << " ";
    return 0;
}
```

缩点 SCC

```cpp
void dfs(const int u) {
  low[u] = dfn[u] = ++cnt;
  ins[stk[++top] = u] = true;
  for (auto v : e[u]) if (dfn[v] == 0) {
    dfs(v);
    low[u] = std::min(low[u], low[v]);
  } else if (ins[v]) {
    low[u] = std::min(low[u], dfn[v]);
  }
  if (low[u] == dfn[u]) {
    ++scnt; int v;
    do {
      ins[v = stk[top--]] = false;
      w[bel[v] = scnt] += a[v];
    } while (u != v);
  }
}
```

割点与桥

```cpp
//割点
void tarjan(int u, int fa){
    dfn[u] = low[u] = ++cnt; int du = 0;
    for(for v:e[x]){
        if(v == fa) continue;
        if(!dfn[v]){ ++du;
            tarjan(v, u); low[u] = min(low[u], low[v]);
            if(low[v] >= dfn[u] && fa) vis[u] = 1;
        }
        else low[u] = min(low[u], dfn[v]);
    }
    if(!fa && du > 1) vis[u] = 1;
}
//桥
```

```
void tarjan(int u, int fa) {
  f[u] = fa;
  low[u] = dfn[u] = ++cnt;
  for (auto v:e[u]) {
    if (!dfn[v]) {
      tarjan(v, u);
      low[u] = min(low[u], low[v]);
      if (low[v] > dfn[u]) {
        isbridge[v] = true;
        ++cnt_bridge;
      }
    } else if (dfn[v] < dfn[u] && v != fa) {
      low[u] = min(low[u], dfn[v]);
    }
  }
}
```

边双缩点

```
void form(int x){
    std::vector<int> tmp;
    int now = 0;
    do{
        now = s[top --];
        tmp.push_back(now);
    }while(now != x);
    ans.push_back(tmp);
}
void tarjan(int x,int now){
    dfn[x] = low[x] = ++cnt;
    s[++ top] = x;
    for(auto [v,_]:e[x]){
        if(_ == now)continue;
        if(!dfn[v]){
            tarjan(v,_);
            low[x] = min(low[x],low[v]);
            if(low[v] > dfn[x]){
                form(v);
            }

        }else low[x] = min(low[x],dfn[v]);
    }
}
for(int i = 1;i <= n;i ++){
    if(dfn[i] == 0){
        tarjan(i,0);
        form(i);
    }
}
cout << ans.size() << "\n";
for(auto A:ans){
    cout << A.size() << " ";
    for(auto x:A){
        cout << x << " ";
    }cout << "\n";
}
```

圆方树

```
void dfs(int u) {
    static int cnt = 0;
    dfn[u] = low[u] = ++cnt;
    for (auto [v,w]:e[u]) {
        if (v == fa[u]) continue;
        if (!dfn[v]) {
            fa[v] = u; fr[v] = w;
            dfs(v); low[u] = min(low[u], low[v]);
        }
        else low[u] = min(low[u], dfn[v]);
        if (low[v] > dfn[u]) add(u, v, w); // 圆 - 圆
```

```
    }
    for (auto [v,w]:e[u]) {
        if (u == fa[v] || dfn[v] < dfn[u]) continue;
        add(u, v, w); // 圆 - 方
    }
}
```

广义圆方树

跟普通圆方树没有太大的区别，大概就是对于每个点双新建一个方点，然后将点双中的所有点向方点连边

需要注意的是我的写法中，两个点一条边也视为一个点双

性质

1. 树上的每一条边都连接了一个圆点和一个方点
2. 每个点双有唯一的方点
3. 一条从圆点到圆点的树上简单路径代表原图的中的一堆路径，其中圆点是必须经过的，而方点 (指的是与方点相连的点双）是可以随便走的，也可以理解成原图中两点简单路径的并

```
void dfs(int x) {
    stk.push_back(x);
    dfn[x] = low[x] = cur++;

    for (auto y : adj[x]) {
        if (dfn[y] == -1) {
            dfs(y);
            low[x] = std::min(low[x], low[y]);
            if (low[y] == dfn[x]) {
                int v;
                do {
                    v = stk.back();
                    stk.pop_back();
                    edges.emplace_back(n + cnt, v);
                } while (v != y);
                edges.emplace_back(x, n + cnt);
                cnt++;
            }
        } else {
            low[x] = std::min(low[x], dfn[y]);
        }
    }
}
```

2-SAT

输出方案时可以通过变量在图中的拓扑序确定该变量的取值。如果变量 x 的拓扑序在 $\neg x$ 之后，那么取 x 值为真。应用到 Tarjan 算法的缩点，即 x 所在 SCC 编号在 $\neg x$ 之前时，取 x 为真。因为 Tarjan 算法求强连通分量时使用了栈，所以 Tarjan 求得的 SCC 编号相当于反拓扑序。

环计数

```
//三元环
  for (int u, v; m; --m) {
    u = A[m]; v = B[m];
    if (d[u] > d[v]) {
      std::swap(u, v);
    } else if ((d[u] == d[v]) && (u > v)) {
      std::swap(u, v);
    }
    e[u].push_back(v);
  }
  for (int u = 1; u <= n; ++u) {
    for (auto v : e[u]) vis[v] = u;
    for (auto v : e[u]) {
      for (auto w : e[v]) if (vis[w] == u) {
        ++ans;
      }
```

```
        }
    }
   // 四元环
    auto cmp = [&](int &a,int &b){
        if(d[a] != d[b])return d[a] > d[b];
        else return a < b;
    }
    for(int u = 1;u <= n;++ u) {
        for(auto v: G[u])//G 为原图
            for(auto w: e[v])
               if(cmp(u,w)) (ans += vis[w] ++)%=MOD;
        for(auto v: G[u])
            for(auto w: e[v])
               if(cmp(u,w)) vis[w] = 0;
    }
```

字符串

manacher

```
struct Manacher {
    int n, l, f[maxn * 2], Len;
    char s[maxn * 2];

    void init(char *c) {
        l = strlen(c + 1); s[0] = '~';
        for (int i = 1, j = 2; i <= l; ++i, j += 2)
            s[j] = c[i], s[j - 1] = '#';
        n = 2 * l + 1; s[n] = '#'; s[n + 1] = '\0';
    }
    void manacher() {
        int p = 0, mr = 0;
        for (int i = 1; i <= n; ++i) f[i] = 0;
        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
            if (i < mr) f[i] = min(f[2 * p - i], mr - i);
            while (s[i + f[i]] == s[i - f[i]]) ++f[i]; --f[i];
            if (f[i] + i > mr) mr = i + f[i], p = i;
            Len = max(Len, f[i]);
        }
    }

    void solve() {
        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
            // [1, l]
            int L = i - f[i] + 1 >> 1, R = i + f[i] - 1 >> 1;
            if (!f[i]) continue;

            // [1, 2 * l + 1]
            L = i - f[i], R = i + f[i];
        }
    }
} M;
```

SA

sa_i 表示排名为 i 的后缀。

rnk_i 表示 $[i,n]$ 这个后缀的排名（在 SA 里的下标）。

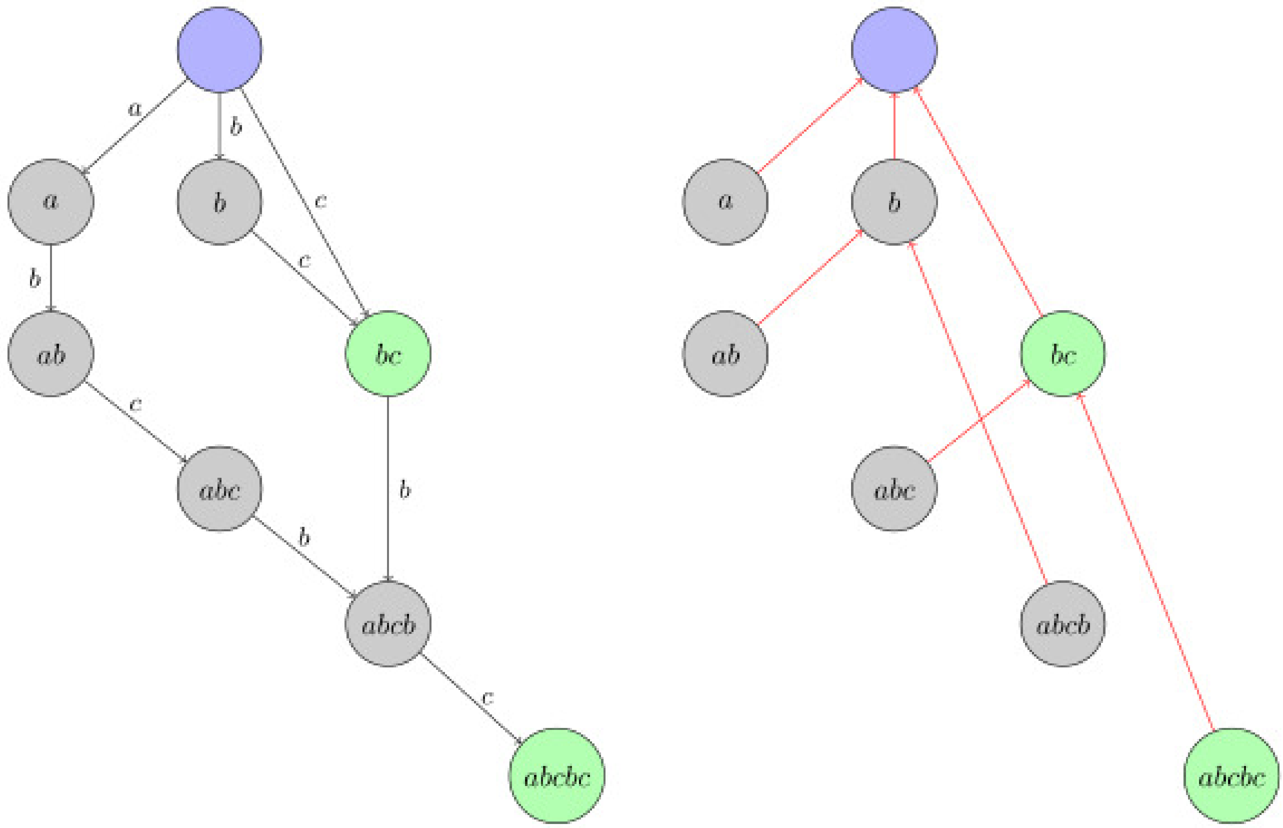
height_i 是 sa_i 和 sa_{i-1} 的 LCP 长度。换句话说，向求排名为 i 的后缀和排名为 $i-1$ 的后缀的 LCP 直接就是 height_i；求 $[i,n]$ 这个后缀和它在 sa 里前一个串的 LCP 就是 height_{rnk_i}

```
const int maxn = 1000005;

int sa[maxn], rnk[maxn], tax[maxn], tp[maxn], height[maxn];
void SA(string s) {
    int n = s.size();
    s = '#' + s;
    m = SIGMA_SIZE;
```

```
    vector<int> S(n + 1);
    auto RadixSort = [&]() {
        for (int i = 0; i <= m; ++i) tax[i] = 0;
        for (int i = 1; i <= n; ++i) ++tax[rnk[i]];
        for (int i = 1; i <= m; ++i) tax[i] += tax[i - 1];
        for (int i = n; i; --i) sa[tax[rnk[tp[i]]]--] = tp[i];
    };
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        S[i] = s[i] - '0';
        tp[i] = i;
        rnk[i] = S[i];
    }
    RadixSort();
    for (int len = 1, p = 0; p != n; m = p, len <<= 1) {
        p = 0;
        for (int i = n - len + 1; i <= n; ++i) tp[++p] = i;
        for (int i = 1; i <= n; ++i) if (sa[i] > len) tp[++p] = sa[i] - len;
        RadixSort();
        std::swap(rnk, tp);
        p = 0;
        for (int i = 1; i <= n; ++i)
          rnk[sa[i]] = ((tp[sa[i]] == tp[sa[i-1]]) && (tp[sa[i] + len] == tp[sa[i-1] + len])) ? p : ++p;
    }
    for (int i = 1, p = 0; i <= n; ++i) {
        int pre = sa[rnk[i] - 1];
        if (p) --p;
        while (S[pre + p] == S[i + p]) ++p;
        h[0][rnk[i]] = height[rnk[i]] = p;
    }
    for (int i = 1; i <= 20; ++i) {
        memset(h[i], 0x3f, n * 4 + 4);
        for (int j = 1; j + (1 << i - 1) <= n; ++j)
            h[i][j] = min(h[i - 1][j], h[i - 1][j + (1 << i - 1)]);
    }
}
int Q(int l, int r) {
    if (l > r) swap(l, r);
    ++l;
    int k = __lg(r - l + 1);
    return min(h[k][l], h[k][r - (1 << k) + 1]);
}
int lcp(int i, int j) {
    if (i == j) return n - i + 1;
    return Q(rnk[i], rnk[j]);
}
```

PAM

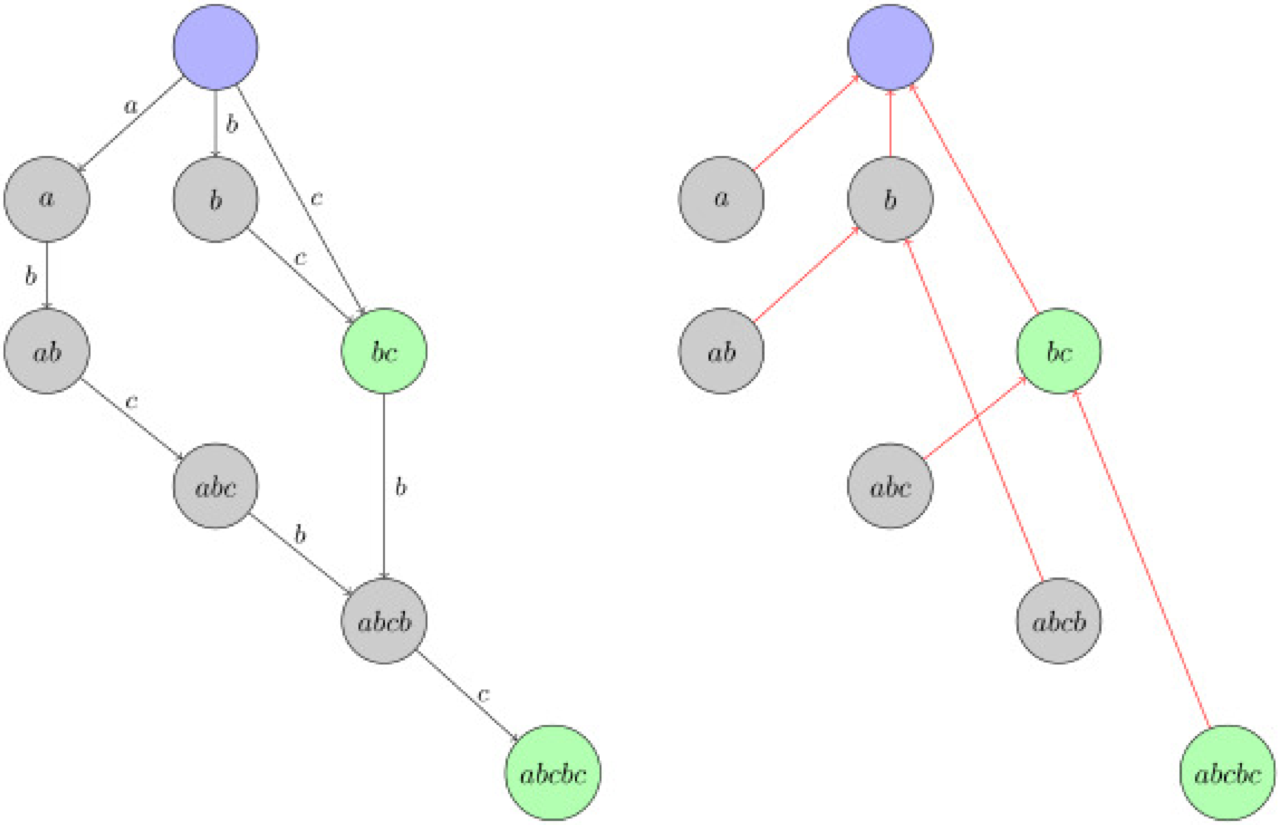


转移边表示的是在原回文串的两边各加一个字符，得到长度加 2 的新回文串；`fail` 指针则指向该回文串的最长回文后缀。和其他自动机有所不同，它有两个根节点，分别代表长度为偶数的串和长度为奇数的串。它们的长度分别为 0 和 -1（注意不是 1，为了添加 2 的长度可以得到长为 1 的回文串），以下分别称为奇根和偶根。值得注意的是，偶根的 fail 指针指向的是奇根，而奇根的 `fail` 并不需在意，它的儿子中总会有长为 1 的回文串，因而不可能会失配。

```cpp
struct PAM {
    static constexpr int ALPHABET_SIZE = 28;
    struct Node {
        int len; // 当前节点最长回文长度
        int fail;// 该回文串的最长回文后缀
        int scnt; // 当前节点表示的回文后缀的本质不同回文串个数
        int pcnt; // 当前节点回文串在字符串中出现次数，每个点代表一个不同的回文串
        std::array<int, ALPHABET_SIZE> next; // 转移边
        Node() : len{}, fail{}, scnt{}, next{}, pcnt{} {}
    };
    std::vector<Node> t;
    int last;
    std::string s;
    PAM() {
        init();
    }
    void init() {
        t.assign(2, Node());
        t[1].len = -1;
        last = 0;
        t[0].fail = 1;
        s = "$";
    }
    int newNode() {
        t.emplace_back();
        return t.size() - 1;
    }
    int get_fail(int x) {
```

```cpp
        int pos = s.size() - 1;
        while(s[pos - t[x].len - 1] != s[pos]) x = t[x].fail;
        return x;
    }
    void add(char c, char offset = 'a') {
        s += c;
        int let = c - offset;
        int x = get_fail(last);
        if (!t[x].next[let]) {
            int now = newNode();
            t[now].len = t[x].len + 2;
            t[now].fail = t[get_fail(t[x].fail)].next[let];
            t[x].next[let] = now;
            t[now].scnt = t[t[now].fail].scnt + 1;
        }
        last = t[x].next[let];
        t[last].pcnt ++;
    }
};
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    string s;
    cin >> s;
    PAM pam;
    pam.init();
    for(int i = 0;i < s.size();i ++) {
        pam.add(s[i]);
        int ans = pam.t[pam.last].scnt;
        cout << ans << " ";
        if(i + 1 != s.size()) {
            s[i + 1] = (s[i + 1] - 97 + ans) % 26 + 97;
        }
    }
}
```

SAM



fa 为 parent 树上的父亲，nxt 为自动机上的指向。

```
struct SAM {
    static constexpr int ALPHABET_SIZE = 26,rt = 1;
    struct Node {
        int len,fa,siz;
        std::array<int, ALPHABET_SIZE> nxt;
        Node() : len{}, fa{}, siz{}, nxt{} {}
    };
    std::vector<Node> t;
    SAM() {
        init();
    }
    void init() {
        t.assign(2, Node());
    }
    int newNode() {
        t.emplace_back();
        return t.size() - 1;
    }
    int getfa(int x){
        return t[x].fa;
    }
    int getlen(int x){
        return t[x].len;//表示该状态能够接受的最长的字符串长度。
    }
    int size(){
        return t.size();
    }
    int extend(int p, int ch) {
        int np = newNode();
        t[np].len = t[p].len + 1;t[np].siz = 1;
        while(p && !t[p].nxt[ch])t[p].nxt[ch] = np,p = t[p].fa;
        if(!p){t[np].fa = rt;return np;}
```

```cpp
            int q = t[p].nxt[ch];
            if(t[q].len == t[p].len + 1){
                t[np].fa = q;
            }else {
                int nq = newNode();t[nq].len = t[p].len + 1;t[nq].fa = t[q].fa;
                for(int i = 0;i < 26;i ++)t[nq].nxt[i] = t[q].nxt[i];
                while(p && t[p].nxt[ch] == q)t[p].nxt[ch] = nq,p = t[p].fa;
                t[np].fa = t[q].fa = nq;
            }
            return np;
        }
        int extend_(int p, int ch) {//广义
            if(t[p].nxt[ch]){
                int q = t[p].nxt[ch];
                if(t[q].len == t[p].len + 1)return q;
                int nq = newNode();t[nq].len = t[p].len + 1;t[nq].fa = t[q].fa;
                for(int i = 0;i < 26;i ++)t[nq].nxt[i] = t[q].nxt[i];
                while(p && t[p].nxt[ch] == q)t[p].nxt[ch] = nq,p = t[p].fa;
                t[q].fa = nq;return nq;
            }
            int np = newNode();
            t[np].len = t[p].len + 1;
            while(p && !t[p].nxt[ch])t[p].nxt[ch] = np,p = t[p].fa;
            if(!p){t[np].fa = rt;return np;}
            int q = t[p].nxt[ch];
            if(t[q].len == t[p].len + 1){
                t[np].fa = q;
            }else {
                int nq = newNode();t[nq].len = t[p].len + 1;t[nq].fa = t[q].fa;
                for(int i = 0;i < 26;i ++)t[nq].nxt[i] = t[q].nxt[i];
                while(p && t[p].nxt[ch] == q)t[p].nxt[ch] = nq,p = t[p].fa;
                t[np].fa = t[q].fa = nq;
            }
            return np;
        }
        void build(vector<vector<int>> &e){
            e.resize(t.size());
            for(int i = 2;i < t.size();i ++){
                e[t[i].fa].push_back(i);
            }
        }
};
int main(){
    string s;
    cin >> s;
    int n = s.size();
    SAM sam;
    vector<int> pos(n + 1);
    pos[0] = 1;
    for(int i = 0;i < n;i ++){
        pos[i + 1] = sam.extend(pos[i],s[i] - 'a');
    }
    std::vector<std::vector<int>> e;
    sam.build(e);
    long long ans = 0;
    auto dfs = [&](auto&& self,int x)->void{
        for(auto v:e[x]){
            self(self,v);
            sam.t[x].siz += sam.t[v].siz;
        }
        if(sam.t[x].siz != 1){
            ans = max(ans,1ll * sam.t[x].siz * sam.t[x].len);
        }
    };
    dfs(dfs,1);
    cout << ans << "\n";
}
```

1. 本质不同的子串个数

   这个显然就是所有状态所对应的 endpos 集合的大小的和也等价于每个节点的 len 减去 parent 树上的父亲的 len

2. 求两个串的最长公共子串

```cpp
int p = 1,len = 0,ans = 0;
std::vector<int> l(m),L(m);
for(int i = 0;i < m;i ++){
    int ch = s[i] - 'a';
    if(sam.t[p].nxt[ch]){
        p = sam.t[p].nxt[ch];len ++;
    }else {
        while(p && sam.t[p].nxt[ch] == 0){
            p = sam.t[p].fa;
        }
        if(!p)p = 1,len = 0;
        else len = sam.t[p].len + 1,p = sam.t[p].nxt[ch];
    }//其中 p 为前缀最长能匹配到的后缀所在的节点
    l[i] = len;
    L[i] = i - len + 1;
}
```

3. 广义 SAM

```cpp
int main(){
    SAM sam;
    int n;
    cin >> n;
    std::vector<std::vector<int>> pos(n);
    for(int i = 0;i < n;i ++){
        string s;
        cin >> s;
        pos[i].resize(s.size() + 1);
        pos[i][0] = 1;
        for(int j = 0;j < s.size();j ++){
            pos[i][j + 1] = sam.extend_(pos[i][j],s[j] - 'a');
        }
    }
    ll ans = 0;
    for(int i = 2;i < sam.t.size();i ++){
        ans += sam.getlen(i) - sam.getlen(sam.getfa(i));
    }
    cout << ans << "\n";
    cout << sam.t.size() - 1 << "\n";
}
```

parent 树上每个节点维护了一个区间，若 p 是 q 的父节点则有 maxp = minq - 1

每个节点的 endpos 集合为该节点 parent 树上的子树 siz 大小

反串的 SAM 的 parent 树是原串的后缀树

ACAM

AC 自动机的失配指针指向所有模式串的前缀中匹配当前状态的最长后缀。

`fail` 树上 u 和 v 的 lca 为 u 和 v 的最长公共 border。

```cpp
const int maxn = 2e5 + 7;
#define ch s[i] - 'a'
struct AC_automaton {
    int nxt[26], cnt, fail;
} T[maxn];
int tot = 1, rt = 1, id[maxn];
void insert(string &s, int k) {
    int now = rt, l = s.size();
    for (int i = 0; i < l; ++i) {
        if (!T[now].nxt[ch]) T[now].nxt[ch] = ++tot;
        now = T[now].nxt[ch];
    } id[k] = now;
}
void init_fail() { // Trie 图
    queue<int> q;
    for (int i = 0; i < 26; ++i) {
        int &u = T[rt].nxt[i];
```

```
            if (!u) { u = rt; continue; }
            T[u].fail = rt; q.push(u);
        }
        while (!q.empty()) {
            int u = q.front(); q.pop();
            for (int i = 0; i < 26; ++i) {
                int &v = T[u].nxt[i];
                if (!v) { v = T[T[u].fail].nxt[i]; continue; }
                T[v].fail = T[T[u].fail].nxt[i]; q.push(v);
            }
        }
}
int siz[maxn];
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    int n;
    cin >> n;
    for(int i = 0;i < n;i ++) {
        string t;
        cin >> t;
        insert(t,i);
    }
    init_fail();
    string s;
    cin >> s;
    for(int u = rt,i = 0;i < s.size();i ++) {
        u = T[u].nxt[ch];
        ++ siz[u];
    }
    vector<vector<int>> e(tot + 1);
    for(int i = 2;i <= tot;i ++) e[T[i].fail].push_back(i);
    auto dfs = [&](auto self,int x) -> void  {
        for(auto v : e[x]) {
            self(self,v);
            siz[x] += siz[v];
        }
    };
    dfs(dfs,1);
    for(int i = 0;i < n;i ++)  cout << siz[id[i]] << "\n";
}
```

KMP

```
struct KMP{
    string s2;// add '#'
    std::vector<int> nxt;
    int m;
    KMP(string y) :s2(y){
        m = s2.size() - 1;
        nxt.resize(m + 1,0);
        for(int i = 2,p = 0;i <= m;i ++){
            while(p && s2[i] != s2[p + 1])p = nxt[p];
            if(s2[i] == s2[p + 1])p ++;
            nxt[i] = p;
        }
    }
    void match(string s1){
        int n = s1.size() - 1;
        for(int i = 1,p = 0;i <= n;i ++){
            while(p && s1[i] != s2[p + 1])p = nxt[p];
            if(s1[i] == s2[p + 1]){
                p ++;
                if(p == m){
                    //cout<<i - m + 1<<endl;
                    p = nxt[p];
                }
            }
        }
    }
    std::vector<int> find_border(){
```

```cpp
        std::vector<int> v;
        for(int i = nxt[m];i;i = nxt[i])v.push_back(i);
        return v;
    }// 找该串所有的周期
    std::vector<int> calc_prefixes(){
        std::vector<int> cnt(m + 1,1);
        for(int i = m;i >= 1;i --)cnt[nxt[i]] += cnt[i];
        return cnt;
    }// 每个前缀出现次数
};
```

KMP 自动机

```cpp
for(int i = 1, fail = 0; i <= n; i ++) {
    fail = nxt[fail][s[i]]; // 注意这一行不能和下一行互换
    nxt[i - 1][s[i]] = i;
    for(int j = 0; j < m; j ++)
        nxt[i][j] = nxt[fail][j];
}
```

Z 函数

对于一个长度为 n 字符串 s，定义函数 $z[i]$ 表示和 $s[i,n-1]$（即以 $s[i]$ 开头的后缀）的最长公共前缀（LCP）的长度，特别地，$z[0]=0$。

```cpp
std::vector<int> getZ(const std::string &s) {
  int n = s.size();
  std::vector<int> Z(n);
  Z[0] = n;
  for (int i = 1, l = 0, r = 0; i < n; ++i) {
    if (i <= r && Z[i - l] < r - i + 1) {
      Z[i] = Z[i - l];
    } else {
      Z[i] = std::max(0, r - i + 1);
      while (i + Z[i] < n && s[Z[i]] == s[i + Z[i]]) ++Z[i];
    }
    if (i + Z[i] - 1 > r) r = i + Z[l = i] - 1;
  }
  return Z;
}

std::vector<int> match(const std::string &s, const std::string &t) {
  auto Z = getZ(t);
  int n = s.size(), m = t.size();
  std::vector<int> ret(n);
  while (ret[0] < n && ret[0] < m && s[ret[0]] == t[ret[0]]) ++ret[0];
  for (int l = 0, r = ret[0] - 1, i = 1; i < n; ++i) {
    if (i <= r && Z[i - l] < r - i + 1) {
      ret[i] = Z[i - l];
    } else {
      ret[i] = std::max(0, r - i + 1);
      while (i + ret[i] < n && s[i + ret[i]] == t[ret[i]]) ++ret[i];
    }
    if (i + ret[i] - 1 > r) r = i + ret[l = i] - 1;
  }
  return ret;
}
```

LCP

```cpp
for(int i = n;i >= 1;i --) {
    for(int j = n;j >= 1;j --) {
        if(s[i] == s[j]) {
            f[i][j] = f[i + 1][j + 1] + 1;// i-n 和 j-n 的 lcp
        }
    }
}
```

Hash

```cpp
struct Hash {
    string s;
    using ull = unsigned long long;
    ull P1 = 998255347;
    ull P2 = 1018253347;
    ull base = 131;
    vector<ull> hs1,hs2;
    vector<ull> ps1,ps2;
    Hash(string s): s(s) {
        int n = s.size();
        hs1.resize(n);
        hs2.resize(n);
        ps1.resize(n);
        ps2.resize(n);
        ps1[0] = ps2[0] = 1;
        hs1[0] = hs2[0] = (s[0] - 'a' + 1);
        for(int i = 1;i < n;i ++) {
            hs1[i] = hs1[i - 1] * base % P1 + (s[i] - 'a' + 1);
            hs2[i] = hs2[i - 1] * base % P2 + (s[i] - 'a' + 1);
            ps1[i] = (ps1[i - 1] * base) % P1;
            ps2[i] = (ps2[i - 1] * base) % P2;
        }
    }
    pair<ull,ull> query(int l,int r) {
        ull res1 = (hs1[r] - (l == 0 ? 0 : hs1[l - 1]) * ps1[r - l + 1] % P1 + P1) % P1;
        ull res2 = (hs2[r] - (l == 0 ? 0 : hs2[l - 1]) * ps2[r - l + 1] % P2 + P2) % P2;
        return {res1,res2};
    } // [l,r]
};
```

数学

数论

扩展欧几里得（线性同余方程，斐蜀定理）

扩展欧几里得：$\gcd(a,b) = \gcd(b, a\%b)$ ，$ax + by = bx + (a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor)y$

斐蜀定理：$ax + by = c$ 若有解，则有 $(a,b)|c$

线性同余方程：$ax \equiv c \pmod{b} \Rightarrow ax + by = c$

```cpp
ll exgcd(ll a,ll b,ll &x,ll &y){
    if(b == 0){
        x = 1 ,y = 0;return a;
    }
    ll d = exgcd(b,a % b,x,y);
    ll tmp = x;
    x = y;
    y = tmp - (a / b) * y;
    return d;
}
void solve(){
    ll a,b,c;
    cin >> a >> b >> c;
    ll x0,y0;
    ll d = exgcd(a,b,x0,y0);
    if(c % d){
        cout << -1 << "\n";
        return ;
    }
    ll p = a / d,q = b / d;
    ll x = ((c / d) % q * x0 % q + q) % q;
    if(x == 0)x = q;
    ll y = (c - a * x) / b;
    if(y <= 0){
        y = ((c / d) % p * y0 % p + p) % p;
        cout << (x == 0 ? q : x) << " " << (y == 0 ? p : y) << "\n";
```

```cpp
        return ;
    }
    ll ans_x_mn = x;
    ll ans_y_mx = y;
    y = ((c / d) % p * y0 % p + p) % p;
    if(y == 0)y = p;
    x = (c - b * y) / a;
    ll ans_x_mx = x;
    ll ans_y_mn = y;
    ll sum = min((ans_x_mx - ans_x_mn) / q,(ans_y_mx - ans_y_mn) / p);
    cout << sum + 1 << " " << ans_x_mn << " " << ans_y_mn << " " << ans_x_mx << " " << ans_y_mx << "\n";
    // 正整数解总数
}
```

费马小定理（逆元）

若 p 为素数，$\gcd(a,p)=1$，则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

线性求逆元

```cpp
inv[0] = inv[1] = 1;
for(int i = 2 ;i <= n ;i++) inv[i] = (p - p/i) * inv[p % i] % p;
```

CRT（中国剩余定理）

$$\begin{cases} x=b_1(\mathrm{mod} a_1) \\ x=b_2(\mathrm{mod} a_2) \\ \cdots \\ x=b_n(\mathrm{mod} a_n) \end{cases}$$

若 $ a_{1} ,a_{2},...,a_{n}$ 两两互质:

令 $M=\prod_1^n a_i, m_i'=\frac{M}{a_i}, t_i \times m_i' \equiv 1(\mathrm{mod}\ a_i)$ 则有 $x=\sum_{i=1}^n b_i \times m_i' \times t_i$（此解为唯一解）

若 $ a_{1} ,a_{2},...,a_{n}$ 两两不互质:

合并两个方程组 $x=a_1p+b_1=a_2q+b_2$

则可将方程依次两两合并为 $x\equiv a_1p+b_1(\mathrm{mod} \mathrm{lcm}(a_1,a_2))$，其中先求解 p，再带入求 x。

```cpp
ll r1 = B[1], m1 = A[1],r2,m2;
for(int i = 1;i < n ;i ++) {
    r2 = B[i + 1],m2 = A[i + 1];
    ll a = m1,b = m2,c = r2 - r1;
    ll d = exgcd(a,b,x,y);
    if(c % d) {
        cout<<0;return 0;
    }
    ll p = a / d,q = b / d;
    x = ((x * c / d) + q) % q;
    ll mod = lcm(m2,m1);
    ll x0 = (m1 * x + r1) % mod;
    r1 = x0 < 0 ? x0 + mod : x0;
    m1 = mod;
}
cout << r1 % m1 << "\n";
```

卢卡斯定理

$C_n^m=C_{n \bmod p}^{m \bmod p}\cdot C_{\lfloor n/p \rfloor}^{\lfloor m/p \rfloor}$，其中 p 为质数。

原根

满足同余式 $a^n\equiv 1(\mathrm{mod} m)$ 的最小正整数 n 存在，这个 n 称作 a 模 m 的阶，记作 $\delta_m(a)$，$a,a^2,\cdots,a^{\delta_m(a)}$ 模 m 两两不同余。

设 $m\in\mathbf{N}^*$，$g\in\mathbf{Z}$. 若 $(g,m)=1$，且 $\delta_m(g)=\varphi(m)$，则称 g 为模 m 的原根。

即 g 满足 $\delta_m(g) = |\mathbf{Z}_m^*| = \varphi(m)$. 当 m 是质数时，我们有 $g^i \bmod m, 0 < i < m$ 的结果互不相同。

原根判定定理:

设 $m \geq 3, (g, m) = 1$，则 g 是模 m 的原根的充要条件是，对于 $\varphi(m)$ 的每个素因数 p，都有 $g^{\frac{\varphi(m)}{p}} \not\equiv 1 \pmod m$。

若一个数 m 有原根，则它原根的个数为 $\varphi(\varphi(m))$，每一个原根都形如 g^k 的形式，要求满足 $\gcd(k, \varphi(n)) = 1$。

原根存在定理:

一个数 m 存在原根当且仅当 $m = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$，其中 p 为奇素数，$\alpha \in \mathbf{N}^*$。

离散对数（BSGS）

$a^x = b(\bmod m)$

此处只解决 m 为质数，将 x 分解为 $i \times t - p$，则有 $a^{i \times t} = b \times a^p (\bmod m)$

$t = \sqrt[2]{m}$ 时均摊复杂度最小

$0 < p < t$ 枚举 p 计算出每一个 a^p 的值存入 hash 表

再枚举 i，算出 $a^{i \times t}$ 的值在 hash 表中查找

```
ll bsgs(ll a,ll b,ll p){
    map <ll,ll> hsh ;hsh.clear();
    ll t = sqrt(p) + 1,j;
    b %= p;
    for(int i = 0 ; i < t ;i++){
        ll tmp = b * qp(a,i,p) % p;
        hsh[tmp] = i;
    }
    a = qp(a,t,p);
    if(a == 0){
        if(b == 0)return 1;
        else return -1;
    }
    for(int i = 0 ;i <= t ;i++){
        ll tmp = qp(a,i,p);
        if(hsh.find(tmp) == hsh.end())j = -1;
        else  j = hsh[tmp];
        if(i * t - j >=0 && j >= 0)return i*t-j;
    }
    return -1;
}
```

威尔逊定理

对于素数 p 有 $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$。

数论分块

```
ll up(ll x,ll y){
    return (x + y - 1) / y;
}
ll calc_up(ll x){
    ll l = 1,r;ll ans = 1e18;
    while(l <= x){
        ll m = up(x,l);
        if(m == 1)r = x;else r = (x - 1) / (m - 1);
        l = r + 1;
    }
    return ans;
}
ll calc_down(ll x){
    ll l = 1,r;ll ans = 1;
    while(l <= x){
        r = x / (x / l);
        l = r + 1;
    }
```

```
    return ans;
}
```

积性函数

数论函数：在所有正整数上的函数被称为算术函数（数论函数）

加性函数：如果数论函数 f 对于任意两个互素的正整数 p, q 均有 $f(pq) = f(p) + f(q)$，称为加性函数

积性函数：如果数论函数 f 对于任意两个互素的正整数 p, q 均有 $f(pq) = f(p)f(q)$，称为积性函数

完全积性函数：在积性函数的基础上，p, q 对于任意正整数均成立，称为完全积性函数

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为积性函数，不难证明下列函数均为积性函数：

$$h(x) = f(x^p), h(x) = f^p(x), h(x) = \sum_{d|x} f(d), h(x) = f(x)g(x)$$

常见积性函数：

- 单位函数：$\varepsilon(n) = [n = 1]$。（完全积性）
- 恒等函数：$\mathrm{id}_k(n) = n^k$，$\mathrm{id}_1(n)$ 通常简记作 $\mathrm{id}(n)$。（完全积性）
- 常数函数：$1(n) = 1$。（完全积性）
- 除数函数：$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$。$\sigma_0(n)$ 通常简记作 $d(n)$ 或 $\tau(n)$，$\sigma_1(n)$ 通常简记作 $\sigma(n)$。
- 欧拉函数：$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{n}[\gcd(i, n) = 1]$
- 莫比乌斯函数：$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \exists d > 1, d^2 \mid n \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{otherwise} \end{cases}$，其中 $\omega(n)$ 表示 n 的本质不同质因子个数，它是一个加性函数。

线性筛

一般情况下可通过线性筛快速筛出积性函数

```
void init(const int n){
    mu[1] = 1;phi[1] = 1;
    for(int i = 2;i <= n;i ++){
        if(!vis[i]){
            p[++ tot] = i;
            mu[i] = -1;phi[i] = i - 1;
        }
        for(int j = 1;j <= tot && i * p[j] <= n;j ++){
            vis[i * p[j]] = 1;
            if(i % p[j] == 0){
                phi[i * p[j]] = phi[i] * p[j];
                mu[i * p[j]] = 0;
                break;
            }
            mu[i * p[j]] = -mu[i];
            phi[i * p[j]] = phi[i] * phi[p[j]];
        }
    }
}
```

欧拉函数

欧拉函数（Euler’s totient function），即 $\varphi(n)$，表示的是小于等于 n 和 n 互质的数的个数。$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{n}[\gcd(i, n) = 1]$

由唯一分解定理，设 $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$，其中 p_i 是质数，有 $\varphi(n) = n \times \prod_{i=1}^{s} \dfrac{p_i - 1}{p_i}$。

如果 $(a, b) = 1$, $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ 如果 a 或 b 为质数 $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ 如果 $(a, b) \neq 1, \varphi(a * b) = \varphi(a) * b$

欧拉定理及扩展

如果 $(a, m), a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\bmod m)$ 当 $b \geq \varphi(p)$ 时 $a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(p) + \varphi(p)} (\bmod p)$ 当 $b < \varphi(p)$ 时 $a^b \equiv a^b (\bmod p)$

狄利克雷卷积

对于两个数论函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，则它们的狄利克雷卷积得到的结果 $h(x)$ 定义为：$h(x) = \sum_{d|x} f(d) g\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{ab=x} f(a) g(b)$ 上式可以简记为：$h = f * g$

狄利克雷卷积满足交换律，结合律，分配律

单位函数 ε 是 Dirichlet 卷积运算中的单位元，即对于任何数论函数 f，都有 $f * \varepsilon = f$

对于任何一个满足 $f(x) \neq 0$ 的数论函数，如果有另一个数论函数 $g(x)$ 满足 $f * g = \varepsilon$，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的逆元。由 **等式的性质**可知，逆元是唯一的

常见数论卷积

$\phi * 1 = id$

$\mu * 1 = \varepsilon$

$\mu * id = \phi$

两个积性函数的 Dirichlet 卷积也是积性函数

积性函数的逆元也是积性函数，且 $f(1) \neq 0$

莫比乌斯反演

莫比乌斯函数

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n\text{含有平方因子} \\ (-1)^k & k\text{为}n\text{的本质不同质因子} \end{cases}$$

$\mu * 1 = \varepsilon$

形式一:

$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Rightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$

形式二:

$f(n) = \sum_{n|d} g(d) \Rightarrow g(n) = \sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n}) f(d)$

上两式的证明可通过等价替换和交换求和号来推导

此外我们也可以通过狄利克雷卷积来理解

$f = g * 1, g = f * \mu$

实际应用中我们常使用 $\varepsilon(\gcd) = \sum_{d|\gcd} \mu(d)$，即 $\mu * 1 = \varepsilon$

同时也是形式 1 中 $f = \varepsilon$ 的情况

欧拉反演

$\varphi * 1 = id$

展开形式同莫比乌斯反演，本质上是莫比乌斯反演的进一步推导，卷积式也可用 $\mu * 1 = \varepsilon$ 推出

实际应用中常使用 $\gcd = \sum_{d|\gcd} \varphi(d)$

杜教筛

对于数论函数 f，要计算 $S(n)=\sum_{i=1}^{n} f(i)$

找到一个数论函数 g，有 $\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)=\sum_{i=1}^{n} g(i)S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

得到 $g(1)S(n)=S(n)=\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)-\sum_{i=2}^{n} g(i)S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

```
const int maxn = 3e6 + 7;
int mu[maxn],p[maxn],vis[maxn],tot;
int sum_mu[maxn];
int phi[maxn];
ll sum_phi[maxn];
map <ll,ll> mp_mu,mp_phi;
void init(const int n){
    mu[1] = 1;phi[1] = 1;
    for(int i = 2;i <= n;i ++){
        if(!vis[i]){
            p[++ tot] = i;
            mu[i] = -1;phi[i] = i - 1;
        }
        for(int j = 1;j <= tot && i * p[j] <= n;j ++){
            vis[i * p[j]] = 1;
            if(i % p[j] == 0){
                phi[i * p[j]] = phi[i] * p[j];
                mu[i * p[j]] = 0;
                break;
            }
            mu[i * p[j]] = -mu[i];
            phi[i * p[j]] = phi[i] * phi[p[j]];
        }
    }
    for(int i = 1;i < n;i ++)sum_mu[i] = sum_mu[i - 1] + mu[i],sum_phi[i] = sum_phi[i - 1] + phi[i];
}
ll calc_mu(ll x){
    if(x < maxn)return sum_mu[x];
    if(mp_mu[x]) return mp_mu[x];
    ll l = 2,r;ll ans = 1;
    while(l <= x){
        r = x / (x / l);
        ans -= 1ll * (r - l + 1) * calc_mu(x / l);
        l = r + 1;
    }
    return mp_mu[x] = ans;
}
ll calc_phi(ll x){
    if(x < maxn)return sum_phi[x];
    if(mp_phi[x]) return mp_phi[x];
    ll l = 2,r;ll ans = 1ll * x * (x + 1) >> 1;
    while(l <= x){
        r = x / (x / l);
        ans -= 1ll * (r - l + 1) * calc_phi(x / l);
        l = r + 1;
    }
    return mp_phi[x] = ans;
}
```

由于符合数论反演实际意义的函数不多所以大部分数论反演题目基本上都是对上述两种反演的卷积式的应用，变形之后进行求和号交换，换元等数学手段处理等到可以快速求解的算式

Min_25

第一步

目标：求 $g(n)=\sum_{p\le n} f(p)$。

不妨设 $f(p)$ 是完全积性函数，如果不是可以尝试拆成若干项完全积性函数，分别求然后相加。

首先要线性筛求出 $\sqrt{n}$ 以内的质数。

$g(n)$ 很难直接求解，考虑用 DP 计算。设 $g(n,j)=\sum_{i=1}^{n} f(i)[i\text{是质数或其最小质因子}>p_j]$，其中 p_j 表示第 j 个质数，那么我们要的就是 $g(n,k), k\text{为最小的满足}p_k \geq \sqrt{n}$。考虑从 $j-1$ 变到 j，那么最小质因子为 p_j 的合数会被筛掉，那么它们的贡献要减去。则有转移

$$g(n,j)=g(n,j-1)-f(p_j)\left(g\left(\left\lfloor\frac{n}{p_j}\right\rfloor, j-1\right)-g(p_{j-1},j-1)\right)$$

系数 $f(p_j)$ 表示由于 $f(p)$ 是完全积性函数，所以可以把它从后面提出来。$g\left(\left\lfloor\frac{n}{p_j}\right\rfloor, j-1\right)$ 表示考虑所有 p_j 的倍数，它们除以 p_j 之后，最小质因子 $>p_{j-1}$ 的合数**以及所有质数**的贡献，应当减去。但是，这些**质数**中可能有 $\leq p_{j-1}$ 的，它们在之前就被筛掉过了，所以要加回来，也就是 $g(p_{j-1},j-1)$。

由于有公式 $\lfloor\frac{\lfloor\frac{a}{b}\rfloor}{c}\rfloor=\lfloor\frac{a}{bc}\rfloor$，因此容易发现上述式子只会用到形如 $\lfloor\frac{n}{x}\rfloor, x\leq n$ 的点处的 DP 值，即第一项的状态数是 $O(\sqrt{n})$（实际实现的时候注意状态数是 $2\sqrt{n}$）。我们预处理出这 $O(\sqrt{n})$ 个数，把他们离散化，顺带求出 $g(x,0)$，然后 DP 即可。

第二步

目标：求 $S(n)=\sum_{i\leq n} f(i)$。与第一步类似，设 $S(n,j)=\sum_{i=1}^{n} f(i)[i\text{的最小质因子}>p_j]$。但此处 f 不需要再拆分成单项式，直接是原函数即可（因为不需要依赖于**完全积性**，只需要**积性**即可）（但要能快速计算 $f(p^k)$ 的值）。

考虑把贡献拆成质数的和合数的，合数枚举最小质因子以及次数，于是有转移：

$$S(n,j)=g(n)-g(p_j)+\sum_{j<k,p_k\leq\sqrt{n},1\leq e,p_k^e\leq n} f(p_k^e)\left(S\left(\left\lfloor\frac{n}{p_k^e}\right\rfloor, k\right)+[e\neq 1]\right)$$

最后一项 $[e\neq 1]$ 的意思是，对于 $e=1$ 的情况，S 没有计算 1 贡献，刚好，因为此时 $p_k\times 1$ 是质数，其贡献在之前计算过；对于 $e>1$ 的情况，$p_k^e\times 1$ 是合数，贡献算漏了，要补上。直接暴力递归计算（并且不需要记忆化）。

```cpp
#include<bits/stdc++.h>

using namespace std;
using ll = long long;
const int mo = 1e9 + 7;
std::vector<int> minp, primes;
void sieve(int n) {
    minp.assign(n + 1, 0);
    primes.clear();
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        if (minp[i] == 0) {
            minp[i] = i;
            primes.push_back(i);
        }
        for (auto p : primes) {
            if (i * p > n) break;
            minp[i * p] = p;
            if (p == minp[i]) {
                break;
            }
        }
    }
}
int qp(int a,int b) {
    int ans = 1,base = a;
    while(b != 0) {
        if(b & 1) ans = 1ll * ans * base % mo;
        base = 1ll * base * base % mo;
        b >>= 1;
    }
    return ans;
}
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    ll n;
    cin >> n;
    ll s = sqrt(n);
    sieve(s);
```

```cpp
    vector<ll> v;
    for(ll l = 1,r;l <= n;l = r + 1) {
        v.push_back(n / l);
        r = n / (n / l);
    }
    int inv2 = qp(2,mo - 2);
    int inv6 = qp(6,mo - 2);
    auto calc1 = [&](ll x) ->ll {
        x %= mo;
        return (x * (x + 1) % mo) * inv2 % mo;
    };
    auto calc2 = [&](ll x) ->ll {
        x %= mo;
        return (x * (x + 1) % mo * (2 * x + 1) % mo) * inv6 % mo;
    };
    vector<ll> f1(v.size() + 1),f2(v.size() + 1);
    auto getid = [&](ll x) -> ll {
        if(x <= s) return v.size() - x;
        else return n / x - 1;
    };
    for(int i = 0;i < v.size();i ++) {
        ll x = v[i];
        x %= mo;
        f1[i] = (calc1(x) + mo - 1) % mo;// \sum_2^n i^k = \sum_1^n i^k - 1
        f2[i] = (calc2(x) + mo - 1) % mo;
    }
    ll ps1 = 0,ps2 = 0;
    for(auto p : primes) {
        for(int i = 0;i < v.size();i ++) {
            if(1ll * p * p > v[i]) break;
            f1[i] -= 1ll * p * (f1[getid(v[i] / p)] - ps1 + mo) % mo;
            f1[i] += mo;f1[i] %= mo;
            f2[i] -= 1ll * p * p % mo * (f2[getid(v[i] / p)] - ps2 + mo) % mo;
            f2[i] += mo;f2[i] %= mo;
        }
        ps1 += p;ps1 %= mo;
        ps2 += 1ll * p * p % mo;ps2 %= mo;
    }
    auto F = [](ll x) -> ll { // targeted function
        x %= mo;
        return (x * x % mo - x + mo) % mo;
    };
    auto S = [&](auto self,ll x,int y) -> ll {
        int p = y == 0 ? 0 : primes[y - 1];
        if(p >= x) return 0ll;
        ll res = (f2[getid(x)] - f2[getid(p)] - (f1[getid(x)] - f1[getid(p)]) + mo + mo) % mo;
        for(int i = y;i < primes.size() && primes[i] <= x / primes[i];i ++) {
            ll w = primes[i];
            for(int j = 1;w <= x;j ++,w = w * primes[i]) {
                res = (res + F(w) * (self(self,x / w,i + 1) % mo + (j != 1)) % mo) % mo;
            }
        }
        return res;
    };
    cout << (S(S,n,0) + 1) % mo << "\n";
}
```

素数测试与因式分解（Miller-Rabin & Pollard-Rho）

```cpp
i64 mul(i64 a, i64 b, i64 m) {
    return static_cast<__int128>(a) * b % m;
}
i64 power(i64 a, i64 b, i64 m) {
    i64 res = 1 % m;
    for (; b; b >>= 1, a = mul(a, a, m))
        if (b & 1)
            res = mul(res, a, m);
    return res;
}
bool isprime(i64 n) {
    if (n < 2)
```

```
        return false;
    static constexpr int A[] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23};
    int s = __builtin_ctzll(n - 1);
    i64 d = (n - 1) >> s;
    for (auto a : A) {
        if (a == n)
            return true;
        i64 x = power(a, d, n);
        if (x == 1 || x == n - 1)
            continue;
        bool ok = false;
        for (int i = 0; i < s - 1; ++i) {
            x = mul(x, x, n);
            if (x == n - 1) {
                ok = true;
                break;
            }
        }
        if (!ok)
            return false;
    }
    return true;
}
std::vector<i64> factorize(i64 n) {
    std::vector<i64> p;
    std::function<void(i64)> f = [&](i64 n) {
        if (n <= 10000) {
            for (int i = 2; i * i <= n; ++i)
                for (; n % i == 0; n /= i)
                    p.push_back(i);
            if (n > 1)
                p.push_back(n);
            return;
        }
        if (isprime(n)) {
            p.push_back(n);
            return;
        }
        auto g = [&](i64 x) {
            return (mul(x, x, n) + 1) % n;
        };
        i64 x0 = 2;
        while (true) {
            i64 x = x0;
            i64 y = x0;
            i64 d = 1;
            i64 power = 1, lam = 0;
            i64 v = 1;
            while (d == 1) {
                y = g(y);
                ++lam;
                v = mul(v, std::abs(x - y), n);
                if (lam % 127 == 0) {
                    d = std::gcd(v, n);
                    v = 1;
                }
                if (power == lam) {
                    x = y;
                    power *= 2;
                    lam = 0;
                    d = std::gcd(v, n);
                    v = 1;
                }
            }
            if (d != n) {
                f(d);
                f(n / d);
                return;
            }
            ++x0;
        }
```

```
    };
    f(n);
    std::sort(p.begin(), p.end());
    return p;
}
```

公式

一些数论公式

- 当 $x \geq \phi(p)$ 时有 $a^x \equiv a^{x \ mod \ \phi(p)+\phi(p)} \pmod p$
- $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$
- $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$
- $\sum_{d|n} 2^{\omega(d)} = \sigma_0(n^2)$，其中 ω 是不同素因子个数
- $\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{\omega(d)}$

一些数论函数求和的例子

- $\sum_{i=1}^n i[gcd(i,n)=1] = \frac{n\varphi(n)+[n=1]}{2}$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [gcd(i,j)=x] = \sum_d \mu(d) \lfloor \frac{n}{dx} \rfloor \lfloor \frac{m}{dx} \rfloor$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m gcd(i,j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{d|gcd(i,j)} \varphi(d) = \sum_d \varphi(d) \lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$
- $S(n) = \sum_{i=1}^n \mu(i) = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{d|i,d<i} \mu(d) \overset{t=\frac{i}{d}}{=} 1 - \sum_{t=2}^n S(\lfloor \frac{n}{t} \rfloor)$
  - 利用 $[n=1] = \sum_{d|n} \mu(d)$
- $S(n) = \sum_{i=1}^n \varphi(i) = \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n \sum_{d|i,d<i} \varphi(i) \overset{t=\frac{i}{d}}{=} \frac{i(i+1)}{2} - \sum_{t=2}^n S(\frac{n}{t})$
  - 利用 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- $\sum_{i=1}^n \mu^2(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(d) \lfloor \frac{n}{d^2} \rfloor$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n gcd^2(i,j) = \sum_d d^2 \sum_t \mu(t) \lfloor \frac{n}{dt} \rfloor^2$
  $\overset{x=dt}{=} \sum_x \lfloor \frac{n}{x} \rfloor^2 \sum_{d|x} d^2 \mu(\frac{x}{d})$
- $\sum_{i=1}^n \varphi(i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [i \perp j] - 1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu(i) \cdot \lfloor \frac{n}{i} \rfloor^2 - 1$

斐波那契数列性质

- $F_{a+b} = F_{a-1} \cdot F_b + F_a \cdot F_{b+1}$
- $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}, F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
- $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $F_n^2 = (-1)^{n-1} + F_{n-1} \cdot F_{n+1}$
- $gcd(F_a, F_b) = F_{gcd(a,b)}$
- 模 n 周期（皮萨诺周期）
  - $\pi(p^k) = p^{k-1}\pi(p)$
  - $\pi(nm) = lcm(\pi(n), \pi(m)), \forall n \perp m$
  - $\pi(2) = 3, \pi(5) = 20$
  - $\forall p \equiv \pm 1 \pmod{10}, \pi(p) | p-1$
  - $\forall p \equiv \pm 2 \pmod 5, \pi(p) | 2p+2$

组合数学

组合化简技巧

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \tag{1}$$

相当于将选出的集合对全集取补集，故数值不变。（对称性）

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \tag{2}$$

由定义导出的递推式。

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \tag{3}$$

组合数的递推式（杨辉三角的公式表达）。我们可以利用这个式子，在 $O(n^2)$ 的复杂度下推导组合数。

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n \tag{4}$$

这是二项式定理的特殊情况。取 $a = b = 1$ 就得到上式。

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = [n = 0] \tag{5}$$

二项式定理的另一种特殊情况，可取 $a = 1, b = -1$。式子的特殊情况是取 $n = 0$ 时答案为 1。

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{m-i} = \binom{m+n}{m} \quad (n \geq m) \tag{6}$$

拆组合数的式子，在处理某些数据结构题时会用到。

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \tag{7}$$

这是 (6) 的特殊情况，取 $n = m$ 即可。

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1} \tag{8}$$

带权和的一个式子，通过对 (3) 对应的多项式函数求导可以得证。

$$\sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2} \tag{9}$$

与上式类似，可以通过对多项式函数求导证明。

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{10}$$

通过组合分析一一考虑 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}$ 的 $k+1$ 子集数可以得证，在恒等式证明中比较常用。

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} \tag{11}$$

通过定义可以证明。

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i}{i}=F_{n+1} \tag{12}$$

其中 F 是斐波那契数列。

鸽巢原理

把 $n+1$ 个物品放进 n 个盒子，至少有一个盒子包含两个或更多的物品

加强形式：

令 $q_1, q_2 \ldots q_n$ 为正整数，如果将 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物品放入 n 个盒子，那么，或者第 1 个盒子至少含有 q_1 个物品，或者第 2 个盒子至少含有 q_2 个物品，$\cdots$，或者第 n 个盒子至少含有 q_n 个物品。

容斥原理

$\bigcup_{i=1}^{n} S_i=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\sum_{a_i<a_{i+1}}\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}$

二项式定理

$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$

多重集的排列数 | 多重组合数

请大家一定要区分 **多重组合数**与 **多重集的组合数**！两者是完全不同的概念！

多重集是指包含重复元素的广义集合。设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，...，n_k 个 a_k 组成的多重集，S 的全排列个数为

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

相当于把相同元素的排列数除掉了。具体地，你可以认为你有 k 种不一样的球，每种球的个数分别是 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，且 $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$。这 n 个球的全排列数就是 **多重集的排列数**。多重集的排列数常被称作 **多重组合数**。我们可以用多重组合数的符号表示上式：

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k}=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$$

可以看出，$\binom{n}{m}$ 等价于 $\binom{n}{m, n-m}$，只不过后者较为繁琐，因而不采用。

多重集的组合数 1

设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，...，n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于整数 $r(r<n_i, \forall i\in[1,k])$，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数就是 **多重集的组合数**。这个问题等价于 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数解的数目，可以用插板法解决，答案为

$$\binom{r+k-1}{k-1}$$

多重集的组合数 2

考虑这个问题：设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k,\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，…，n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于正整数 r，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数。

这样就限制了每种元素的取的个数。同样的，我们可以把这个问题转化为带限制的线性方程求解：

$$\forall i\in[1,k],\ x_i\le n_i,\ \sum_{i=1}^{k}x_i=r$$

于是很自然地想到了容斥原理。容斥的模型如下：

1. 全集：$\sum_{i=1}^{k}x_i=r$ 的非负整数解。
2. 属性：$x_i\le n_i$。

于是设满足属性 i 的集合是 S_i，$\overline{S_i}$ 表示不满足属性 i 的集合，即满足 $x_i\ge n_i+1$ 的集合（转化为上面插板法的问题三）。那么答案即为

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k}S_i\right|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{k}\overline{S_i}\right|$$

根据容斥原理，有：

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k}\overline{S_i}\right| &=\sum_i\left|\overline{S_i}\right|-\sum_{i,j}\left|\overline{S_i}\cap\overline{S_j}\right|+\sum_{i,j,k}\left|\overline{S_i}\cap\overline{S_j}\cap\overline{S_k}\right|-\cdots && (1)\\
&\quad+(-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i=1}^{k}\overline{S_i}\right| && (2)\\
&=\sum_i\binom{k+r-n_i-2}{k-1}-\sum_{i,j}\binom{k+r-n_i-n_j-3}{k-1}+\sum_{i,j,k}\binom{k+r-n_i-n_j-n_k-4}{k-1}-\cdots && (3)\\
&\quad+(-1)^{k-1}\binom{k+r-\sum_{i=1}^{k}n_i-k-1}{k-1} && (4)
\end{aligned}$$

拿全集 $|U|=\binom{k+r-1}{k-1}$ 减去上式，得到多重集的组合数

$$Ans=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\sum_A\binom{k+r-1-\sum_A n_{A_i}-p}{k-1}$$

其中 A 是充当枚举子集的作用，满足 $|A|=p,\ A_i<A_{i+1}$。

圆排列

n 个人全部来围成一圈，所有的排列数记为 Q_n^n。考虑其中已经排好的一圈，从不同位置断开，又变成不同的队列。所以有

$$\mathrm{Q}_n^n\times n=\mathrm{A}_n^n\Longrightarrow\mathrm{Q}_n=\frac{\mathrm{A}_n^n}{n}=(n-1)!$$

由此可知部分圆排列的公式：

$$\mathrm{Q}_n^r=\frac{\mathrm{A}_n^r}{r}=\frac{n!}{r\times(n-r)!}$$

错排

$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$

Catalan 数

$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$

Stirling 数

第一类斯特林数（感觉 useless）

把 n 个不同元素分配到 k 个圆排列里，圆不能为空

$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \times s_{n-1,k}$

第二类斯特林数

将 n 个物体划分成 k 个非空的没有区别的集合的方法数，等同于把 n 个不同的小球放入 m 个相同的盒子中（且盒子不能为空）的方案数。递推公式为

$s_{i,j} = s_{i-1,j} \times j + s_{i-1,j-1}$ （$s_{i,j}$ 表示前 i 个小球放到前 j 个盒子里的方案数）

我们可以这样理解：对于一个 $s_{i,j}$，你接下来要再放一个小球，你可以放到前 j 个盒子里，方案数为 $j \times s_{i-1,j-1}$，也可以放到下一个盒子里，方案数为 $s_{i,j+1}$。

此外这个部分还有一种做法。考虑容斥：枚举多少个盒子空了，然后剩下的部分就是第三种情况了。然后就可以得到下面这个式子：

$S_{n,m} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$

高维前缀和

对于所有的 $i, 0 \le i \le 2^n - 1$，求解 $\sum_{j \subset i} a_j$

去除原有二维前缀和的容斥求法，对每一维采用类似一维前缀和的方式依次累加进行计算，每次提高一个维度不断累加。实际上就等价于 f_i 加上 $f_{i \oplus (2^j)}$，类似 or 运算

```
for(int j = 0; j < n; j++)
    for(int i = 0; i < 1 << n; i++)
        if(i >> j & 1) f[i] += f[i ^ (1 << j)];
```

对超集求和，也为高维后缀和，类似 and 运算

```
for(int j = 0; j < n; j++)
    for(int i = 0; i < 1 << n; i++)
        if(!(i >> j & 1)) f[i] += f[i ^ (1 << j)];
```

二项式反演

三种形式

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g(k) \Longleftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(k)$$

至多和恰好的转换

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k) \Longleftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

至少和恰好的转换

$$f(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} g(k) \Longleftrightarrow g(n) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} f(k)$$

斯特林反演

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}g(k)\iff g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}f(k)$$

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}g(k)\iff g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}f(k)$$

子集反演

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S}g(T)\Longrightarrow g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$$

最值反演（min-max 容斥）

$$\max S=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min T$$

$$\min S=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\max T$$

拓展

$$k^{th}\max S=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T-1|}{k-1}\min T$$

反之同理

此外上述两种 min-max 容斥在期望上仍然成立

线性代数

高斯消元

```cpp
typedef long long ll;
const int mo = 1e9 + 7;
using i64 = long long;

template<typename T>
struct Gauss{
    int n,m;// n 行 m 列
    std::vector<std::vector<T>> a;
    Gauss(int n,int m,const vector<vector<T>> &a):n(n),m(m),a(a){}
    vector<double> gauss(){
        std::vector<double> sol;
        int r = 0;
        for(int i = 0;i < m;i ++){
            if(n < m && i >= n) break;
            int mx = i;//最大数的行号
            for(int j = i + 1;j < n;j ++)
                if(fabs(a[mx][i]) < fabs(a[j][i])) mx = j;
            if(fabs(a[mx][i]) < eps) continue;
            if(mx != i) swap(a[mx],a[i]);
            double t = a[i][i];
            for(int j = i;j < m + 1;j ++){
                a[i][j] /= t;
            }
            for(int j = i + 1;j < n;j ++){
                t = a[j][i];
                for(int k = i;k < m + 1;k ++){
                    a[j][k] -= a[i][k] * t;
                }
            }
            r ++;
```

```cpp
        }
        for(int i = m;i < n;i ++){
            if(fabs(a[i][m]) > eps)return sol;// 无解
        }
        if(r < m) return sol;// 无穷解
        sol.resize(m);
        sol[m - 1] = a[m - 1][m];
        for(int i = n - 2;i >= 0;i --){
            sol[i] = a[i][m];
            for(int j = i + 1;j < m;j ++){
                sol[i] -= a[i][j] * sol[j];
            }
        }
        return sol;
    }
    int gauss_det(){
        assert(n == m);
        int det = 1;
        for(int i = 0;i < n;i ++){
            for(int j = i + 1;j < n;j ++){
                while(a[j][i] != 0){
                    int k = a[i][i] / a[j][i];
                    for(int h = i;h < n;h ++){
                        a[i][h] -= a[j][h] * k;
                        std::swap(a[i][h],a[j][h]);
                    }
                    det = -det;
                }
            }
        }
        for(int i = 0;i < n;i ++) det *= a[i][i];
        return det;
    }

    T gauss_det_mod(int st = 0){
        T det = T(1);
        for(int i = st;i < n;i ++){
            det *= a[i][i];
            //cerr << i << " " << a[i][i].a << " " << a[i][i].b << "\n";
            T tmp = T(1) / a[i][i];
            for(int j = i;j < n;j ++) a[i][j] *= tmp;
            for(int j = i + 1;j < n;j ++){
                tmp = a[j][i];
                for(int k = i;k < n;k ++) a[j][k] = a[j][k] - tmp * a[i][k];
            }
        }
        return det;
    }
};
```

线性基

```cpp
struct LinearBasis {
    static const int n = 60;
    bool O; ll a[n + 1]; int cnt;

    void clear() { O = 0; cnt = 0; for (int i = 0; i <= n; ++i) a[i] = 0; }
    void insert(ll v) {
        for (int i = n; ~i; --i) {
            if (!(v >> i & 1)) continue;
            if (!a[i]) { a[i] = v; break; }
            v ^= a[i];
        } O |= !v;
    }
    void work() {
        for (int i = 0; i <= n; cnt += a[i++] > 0)
            for (int j = 0; j < i; ++j)
                if (a[i] >> j & 1) a[i] ^= a[j];
    }
    ll get_max(ll v = 0) {
        for (int i = n; ~i; --i) v = max(v, v ^ a[i]);
```

```
            return v;
        }
        ll get_min() {
            if (O) return 0;
            for (int i = 0; i <= n; ++i)
                if (a[i]) return a[i];
        }
        ll get_min(ll v) {
            for (int i = n; ~i; --i) v = min(v, v ^ a[i]);
            return v;
        }
        ll get_kth(ll k) {
            ll ans = 0; k -= O;
            for (int i = 0; i <= n; ++i) {
                if (!a[i]) continue;
                if (k & 1) ans ^= a[i];
                k >>= 1;
            }
            if (k > 0) return -1;
            else return ans;
        }
        bool check(ll v) {
            for (int i = n; ~i; --i) {
                if (!(v >> i & 1)) continue;
                if (!a[i]) return 0;
                v ^= a[i];
            } return 1;
        }
};
```

Prüfer 序列

Prüfer 是这样建立的：每次选择一个编号最小的叶结点并删掉它，然后在序列中记录下它连接到的那个结点。重复 $n-2$ 次后就只剩下两个结点。

- **重要性质：prufer 序列与无根树一一对应。**
- **度数为 d_i 的节点会在 prufer 序列中出现 d_i-1 次。**
- **一个 n 个节点的完全图的生成树个数为 n^{n-2}。**
- **对于给定度数为 $d_{1\dots n}$ 的一棵无根树共有 $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!}$ 种情况。**
- **n 个点 m 条边的带标号无向图有 k 个连通块。我们希望添加 $k-1$ 条边使得整个图连通。方案数为 $n^{k-2}\prod_{i=1}^{k}s_i$。**

LGV 引理

LGV 引理仅适用于 **有向无环图**。

定义

$\omega(P)$ 表示 P 这条路径上所有边的边权之积。（路径计数时，可以将边权都设为 1）（事实上，边权可以为生成函数）

$e(u,v)$ 表示 u 到 v 的 **每一条**路径 P 的 $\omega(P)$ 之和，即 $e(u,v)=\sum\limits_{P:u\to v}\omega(P)$。

起点集合 A，是有向无环图点集的一个子集，大小为 n。

终点集合 B，也是有向无环图点集的一个子集，大小也为 n。

一组 $A\to B$ 的不相交路径 S：S_i 是一条从 A_i 到 $B_{\sigma(S)_i}$ 的路径（$\sigma(S)$ 是一个排列），对于任何 $i\neq j$，S_i 和 S_j 没有公共顶点。

$N(\sigma)$ 表示排列 σ 的逆序对个数。

引理

$$M=\begin{bmatrix} e(A_1,B_1) & e(A_1,B_2) & \cdots & e(A_1,B_n) \\ e(A_2,B_1) & e(A_2,B_2) & \cdots & e(A_2,B_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(A_n,B_1) & e(A_n,B_2) & \cdots & e(A_n,B_n) \end{bmatrix}$$

$$\det(M)=\sum_{S:A\to B}(-1)^{N(\sigma(S))}\prod_{i=1}^{n}\omega(S_i)$$

其中 $\sum_{S:A\to B}$ 表示满足上文要求的 $A\to B$ 的每一组不相交路径 S。

矩阵树定理

定理 1（矩阵树定理，无向图行列式形式） 对于任意的 i，都有

$$t(G)=\det L(G)\begin{pmatrix}1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\\1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\end{pmatrix}$$

其中记号 $L(G)\binom{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n}{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n}$ 表示矩阵 $L(G)$ 的第 $1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$ 行与第 $1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$ 列构成的子矩阵。也就是说，无向图的 Laplace 矩阵具有这样的性质，它的所有 $n-1$ 阶主子式都相等。

定理 2（矩阵树定理，无向图特征值形式） 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ 为 $L(G)$ 的 $n-1$ 个非零特征值，那么有

$t(G)=\frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$

定理 3（矩阵树定理，有向图根向形式） 对于任意的 k，都有

$$t^{root}(G,k)=\det L^{out}(G)\begin{pmatrix}1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\\1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\end{pmatrix}$$

因此如果要统计一张图所有的根向树形图，只要枚举所有的根 k 并对 $t^{root}(G,k)$ 求和即可。

定理 4（矩阵树定理，有向图叶向形式） 对于任意的 k，都有

$$t^{leaf}(G,k)=\det L^{in}(G)\begin{pmatrix}1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\\1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\end{pmatrix}$$

因此如果要统计一张图所有的叶向树形图，只要枚举所有的根 k 并对 $t^{leaf}(G,k)$ 求和即可。

BEST 定理

定理 5 （BEST 定理） 设 G 是有向欧拉图，那么 G 的不同欧拉回路总数 $ec(G)$ 是

$$ec(G)=t^{root}(G,k)\prod_{v\in V}(\deg(v)-1)!$$

注意，对欧拉图 G 的任意两个节点 k,k'，都有 $t^{root}(G,k)=t^{root}(G,k')$，且欧拉图 G 的所有节点的入度和出度相等。

博弈

Nim 游戏：每轮从若干堆石子中的一堆取走若干颗。先手必胜条件为石子数量异或和非零。

阶梯 Nim 游戏：可以选择阶梯上某一堆中的若干颗向下推动一级，直到全部推下去。先手必胜条件是奇数阶梯的异或和非零（对于偶数阶梯的操作可以模仿）。

Anti-SG：无法操作者胜。先手必胜的条件是：

- SG 不为 0 且某个单一游戏的 SG 大于 1 。
- SG 为 0 且没有单一游戏的 SG 大于 1。

Every-SG：对所有单一游戏都要操作。先手必胜的条件是单一游戏中的最大 step 为奇数。

- 对于终止状态 step 为 0
- 对于 SG 为 0 的状态，step 是最大后继 step +1
- 对于 SG 非 0 的状态，step 是最小后继 step +1

树上删边：叶子 SG 为 0，非叶子结点为所有子结点的 SG 值加 1 后的异或和。

多项式

拉格朗日插值

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```cpp
vector<int> lagrange(const vector<int> &x,const vector<int> y){
    assert(x.size() == y.size());
    int n = x.size();
    std::vector<int> a(n);
    for(int i = 0;i < n;i ++){
        int A = 1;
        for(int j = 0;j < n;j ++){
            if(i == j)continue;
            assert(x[i] - x[j]);
            A = 1ll * A * (x[i] - x[j] + mo) % mo;
        }
        a[i] = 1ll * y[i] * qp(A,mo - 2) % mo;
    }
    std::vector<int> b(n + 1),c(n),f(n);
    b[0] = 1;
    for(int i = 0;i < n;i ++){
        for(int j = i + 1;j >= 1;j --){
            b[j] = (1ll * b[j] * (mo - x[i]) % mo + b[j - 1]) % mo;
        }
        b[0] = 1ll * b[0] * (mo - x[i]) % mo;
    }
    for(int i = 0;i < n;i ++){
        int inv = qp(mo - x[i],mo - 2);
        if(!inv){
            for(int j = 0;j < n;j ++)c[j] = b[j + 1];
        }else {
            c[0] = 1ll * b[0] * inv % mo;
            for(int j = 1;j < n;j ++){
                c[j] = 1ll * (b[j] - c[j - 1] + mo) * inv % mo;
            }
        }
        for(int j = 0 ;j < n;j ++){
            f[j] = (f[j] + 1ll * a[i] * c[j] % mo) % mo;
        }
    }
    return f;
}
```

横坐标连续

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(x-j)}{(x-i)\cdot(-1)^{n+1-i}\cdot(i-1)!\cdot(n+1-i)!}$$

普通幂与上升幂和下降幂

记上升阶乘幂 $x^{\overline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$。

则可以利用下面的恒等式将上升幂转化为普通幂：

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

如果将普通幂转化为上升幂，则有下面的恒等式：

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

记下降阶乘幂 $x^{\underline{n}} = \dfrac{x!}{(x-n)!} = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = n!\binom{x}{n}$。

则可以利用下面的恒等式将普通幂转化为下降幂：

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$$

如果将下降幂转化为普通幂，则有下面的恒等式：

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

多项式操作技巧

分治 FFT

$\prod_{i=1}^{n} f_i(x)$，分治两两合并即可，要求每个多项式次数较低

$f_i = \sum_{j=1}^{i} f_{i-j} g_j$，先求出左边 f_i 再将其与 g_i 相乘算出对右边 f_i 的贡献。

上式也可化为 $f(x) = (1 - g(x))^{-1}$

循环卷积

将其中一个序列复制一遍，再做卷积

差卷积

$h_d = \sum f_i g_{i+d}$

将其中一个序列翻转，就转化成了加法卷积

乘法卷积

$h_k = \sum_{i \times j = k} f_i g_j$

对下标取离散对数，转成加法卷积

ln 转 exp

对于形如 $\prod(1 + x^{a_i})$ 这种形式的，对其取 ln 将乘法转为加法，然后再 exp 回去。

FWT

or，and，xor 卷积

```cpp
void FWT_or(vector<Z> a,int N,int opt){ // N = 2^n
    for(int len = 2,M = 1;len <= N;M = len,len <<= 1){
        for(int L = 0,R = len - 1; R <= N;L += len,R += len){
            for(int k = L;k < L + M;k ++){
                if(opt == 1)a[k + M] += a[k];
                else a[k + M] -= a[k];
            }
        }
    }
}

void FWT_and(vector<Z> a,int N,int opt){
    for(int len = 2,M = 1;len <= N;M = len,len <<= 1){
        for(int L = 0,R = len - 1; R <= N;L += len,R += len){
            for(int k = L;k < L + M;k ++){
                if(opt == 1)a[k] += a[k + M];
                else a[k] -= a[k + M];
            }
        }
    }
}
void FWT_xor(vector<Z> a,int N,int opt){
    for(int len = 2,M = 1;len <= N;M = len,len <<= 1){
        for(int L = 0,R = len - 1; R <= N;L += len,R += len){
            for(int k = L;k < L + M;k ++){
                Z x = a[k],y = a[k + M];
                a[k] = x + y;a[k + M] = x - y;
                if(opt == -1)a[k] = a[k] * inv2,a[k + M] = a[k + M] * inv2;
            }
        }
    }// ifwt 等于 fwt 后除 N
}
```

OGF

基本运算考虑两个序列 a, b 的普通生成函数，分别为 $F(x), G(x)$。那么有

$$F(x) \pm G(x) = \sum_n (a_n \pm b_n) x^n$$

因此 $F(x) \pm G(x)$ 是序列 $\langle a_n \pm b_n \rangle$ 的普通生成函数。考虑乘法运算，也就是卷积:

$$F(x)G(x) = \sum_n x^n \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

因此 $F(x)G(x)$ 是序列 $\langle \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \rangle$ 的普通生成函数。

常见互化手段求导，二项式定理展开

$\langle 1, p, p^2, p^3, p^4, \cdots \rangle$ 的生成函数 $F(x) = \sum_{n\ge 0} p^n x^n = \frac{1}{1-px}$

$\langle 1^{\underline{k}}, 2^{\underline{k}}, 3^{\underline{k}}, 4^{\underline{k}}, \cdots \rangle$ 的生成函数 $F(x) = \sum_{n\ge 0} (n+1)^{\underline{k}} x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

$F(x) = \sum_{n\ge 0} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$

$F(x) = \sum_{n\ge 0} \binom{m+n}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$

斐波那契数列生成函数 $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n\ge 0} (1 - 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1}) x^n$

五边形数

$$\prod_{i\ge 1} (1 - x^i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{k(3k-1)}{2}}$$

EGF

在 OGF 的基础上考虑有序，形式上基本和泰勒展开等价

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

常用公式

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

基本运算

指数生成函数的加减法与普通生成函数是相同的，也就是对应项系数相加。

考虑指数生成函数的乘法运算。对于两个序列 a,b，设它们的指数生成函数分别为 $\hat{F}(x),\hat{G}(x)$，那么

$$\begin{aligned}\hat{F}(x)\hat{G}(x)&=\sum_{i\ge 0}a_i\frac{x^i}{i!}\sum_{j\ge 0}b_j\frac{x^j}{j!}\\&=\sum_{n\ge 0}x^n\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\frac{1}{i!(n-i)!}\\&=\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_ib_{n-i}\end{aligned}$$

因此 $\hat{F}(x)\hat{G}(x)$ 是序列

$$\left\langle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_ib_{n-i}\right\rangle$$

的指数生成函数。

多项式 exp 组合意义：将 n 个互异元素分到若干**非空的无序集合**中，大小为 i 的集合内有 f_i 种方案，记最后的总方案数为 g_n。则两者的 EGF 满足 $G(x)=e^{F(x)}$。

集合幂级数

计算 $\prod(1+x^{a_i})$ 这里为或卷积。

由于点值一定为 1^x2^{n-x} 的形式，所以可以通过一次 fwt 解出 x，然后再将点值序列 ifwt 回去解出答案。

计算 $\prod(x^U+x^{a_i})$ 这里为与卷积。

点值同样为 1^x2^{n-x} 的形式

计算 $\prod(1+a_ix^i)$ 这里为异或卷积。

等价于对每个 x 求 $\prod(1+(-1)^{x\oplus i}a_i)$，分治求解，最后再 ifwt 回去。$a_i$ 为定值则可套用上面的方式。

```
void solve(vector<int> &a,int N) {
    vector<int> A(N),B(N);
    for(int i = 0;i < N;i ++){
        A[i] = (1 + a[i]) % mo;
        B[i] = (1 - a[i] + mo) % mo;
    }
    for(int i = 1;i < N;i <<= 1)
```

```cpp
        for(int len = i << 1,j = 0;j < N;j += len)
            for(int k = 0;k < i;k ++){
                int a0 = A[j + k],a1 = A[j + k + i];
                int b0 = B[j + k],b1 = B[j + k + i];
                A[j + k] = 1ll * a0 * a1 % mo;
                B[j + k] = 1ll * b0 * b1 % mo;
                A[j + k + i] = 1ll * a0 * b1 % mo;
                B[j + k + i] = 1ll * a1 * b0 % mo;
            }
    for(int i = 0;i < N;i ++)a[i] = A[i];
}
```

FFT

```cpp
constexpr double PI = std::atan2(0, -1);
std::vector<int> rev;
std::vector<std::complex<double>> roots {0, 1};
void dft(std::vector<std::complex<double>> &a) {
    int n = a.size();
    if (int(rev.size()) != n) {
        int k = __builtin_ctz(n) - 1;
        rev.resize(n);
        for (int i = 0; i < n; ++i)
            rev[i] = rev[i >> 1] >> 1 | (i & 1) << k;
    }
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        if (rev[i] < i)
            swap(a[i], a[rev[i]]);
    if (int(roots.size()) < n) {
        int k = __builtin_ctz(roots.size());
        roots.resize(n);
        while ((1 << k) < n) {
            std::complex<double> e = {cos(PI / (1 << k)), sin(PI / (1 << k))};
            for (int i = 1 << (k - 1); i < (1 << k); ++i) {
                roots[2 * i] = roots[i];
                roots[2 * i + 1] = roots[i] * e;
            }
            ++k;
        }
    }
    for (int k = 1; k < n; k *= 2) {
        for (int i = 0; i < n; i += 2 * k) {
            for (int j = 0; j < k; ++j) {
                auto u = a[i + j], v = a[i + j + k] * roots[k + j];
                a[i + j] = u + v;
                a[i + j + k] = u - v;
            }
        }
    }
}
void idft(std::vector<std::complex<double>> &a) {
    int n = a.size();
    reverse(a.begin() + 1, a.end());
    dft(a);
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        a[i] /= n;
}
std::vector<ll> operator*(std::vector<ll> a, std::vector<ll> b) {
    int sz = 1, tot = a.size() + b.size() - 1;
    while (sz < tot)
        sz *= 2;
    std::vector<std::complex<double>> ca(sz), cb(sz);
    //copy(a.begin(), a.end(), ca.begin());
    //copy(b.begin(), b.end(), cb.begin());
    for(int i = 0;i < sz;i ++){
        if(i < a.size())ca[i].real(a[i]);
        if(i < b.size())ca[i].imag(b[i]);
    }
    dft(ca);
    //dft(cb);
    for (int i = 0; i < sz; ++i)
```

```cpp
        ca[i] *= ca[i];
    idft(ca);
    a.resize(tot);
    for (int i = 0; i < tot; ++i)
        a[i] = std::floor(ca[i].imag() / 2 + 0.5);
    return a;
}

```

多项式全家桶

```cpp
using namespace std;
using i64 = long long;
constexpr int P = 998244353;
int norm(int x) {
    if (x < 0) x += P;
    if (x >= P) x -= P;
    return x;
}
template<class T>
T qp(T a, int b) {
    T res = 1;
    for (; b; b /= 2, a *= a) {
        if (b % 2) {
            res *= a;
        }
    }
    return res;
}
struct Z{
    int x;
    Z(): x{} {}
    Z(int x) : x{norm(x)} {}
    Z(i64 x) : x{norm(int(x % P))} {}
    friend std::istream &operator>>(std::istream &is,Z &a) {
        i64 v;
        is >> v;
        a = Z(v);
        return is;
    }
    friend std::ostream &operator<<(std::ostream &os, const Z &a) {
        return os << a.x;
    }
    Z inv() const {
        return qp(Z(x),P - 2);
    }
};
bool operator==(const Z a,const Z b) { return a.x == b.x; }
bool operator!=(const Z a,const Z b) { return a.x != b.x; }
Z operator+(const Z a, const Z b) { return norm(a.x + b.x); }
Z operator-(const Z a, const Z b) { return norm(a.x + P - b.x); }
Z operator-(const Z x) { return x.x ? P - x.x : 0; }
Z operator*(const Z a, const Z b) { return i64(a.x) * b.x % P; }
Z operator/(const Z a, const Z b) { return a * b.inv(); }
Z &operator+=(Z &a, const Z b) { return a = a + b; }
Z &operator-=(Z &a, const Z b) { return a = a - b; }
Z &operator*=(Z &a, const Z b) { return a = a * b; }
Z &operator/=(Z &a, const Z b) { return a = a / b; }

std::vector<int> rev;
std::vector<Z> roots{0, 1};
void dft(std::vector<Z> &a) {
    int n = a.size();
    if (int(rev.size()) != n) {
        int k = __builtin_ctz(n) - 1;
        rev.resize(n);
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            rev[i] = rev[i >> 1] >> 1 | (i & 1) << k;
        }
    }
    for (int i = 0; i < n; i++) if (rev[i] < i) swap(a[i], a[rev[i]]);
```

```
    if (int(roots.size()) < n) {
        int k = __builtin_ctz(roots.size());
        roots.resize(n);
        while ((1 << k) < n) {
            Z e = qp(Z(3), (P - 1) >> (k + 1));
            for (int i = 1 << (k - 1); i < (1 << k); i++) {
                roots[2 * i] = roots[i];
                roots[2 * i + 1] = roots[i] * e;
            }
            k++;
        }
    }
    for (int k = 1; k < n; k *= 2) {
        for (int i = 0; i < n; i += 2 * k) {
            for (int j = 0; j < k; j++) {
                Z u = a[i + j];
                Z v = a[i + j + k] * roots[k + j];
                a[i + j] = u + v;
                a[i + j + k] = u - v;
            }
        }
    }
}
void idft(std::vector<Z> &a) {
    int n = a.size();
    std::reverse(a.begin() + 1, a.end());
    dft(a);
    Z inv = (1 - P) / n;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        a[i] *= inv;
    }
}
struct Poly {
    std::vector<Z> a;
    Poly() {}
    Poly(const std::vector<Z> &a) : a(a) {}
    Poly(const std::initializer_list<Z> &a) : a(a) {}
    int size() const {
        return a.size();
    }
    void resize(int n) {
        a.resize(n);
    }
    Z operator[](int idx) const {
        if (idx < size()) {
            return a[idx];
        } else {
            return 0;
        }
    }
    Z &operator[](int idx) {
        return a[idx];
    }
    Poly mulxk(int k) const {
        auto b = a;
        b.insert(b.begin(), k, 0);
        return Poly(b);
    }
    Poly modxk(int k) const {
        k = std::min(k, size());
        return Poly(std::vector<Z>(a.begin(), a.begin() + k));
    }
    Poly divxk(int k) const {
        if (size() <= k) {
            return Poly();
        }
        return Poly(std::vector<Z>(a.begin() + k, a.end()));
    }
    friend Poly operator+(const Poly &a, const Poly &b) {
        std::vector<Z> res(std::max(a.size(), b.size()));
        for (int i = 0; i < int(res.size()); i++) {
```

```cpp
            res[i] = a[i] + b[i];
        }
        return Poly(res);
    }
    friend Poly operator-(const Poly &a, const Poly &b) {
        std::vector<Z> res(std::max(a.size(), b.size()));
        for (int i = 0; i < int(res.size()); i++) {
            res[i] = a[i] - b[i];
        }
        return Poly(res);
    }
    friend Poly operator*(Poly a, Poly b) {
        if (a.size() == 0 || b.size() == 0) {
            return Poly();
        }
        int sz = 1, tot = a.size() + b.size() - 1;
        while (sz < tot) {
            sz *= 2;
        }
        a.a.resize(sz);
        b.a.resize(sz);
        dft(a.a);
        dft(b.a);
        for (int i = 0; i < sz; ++i) {
            a.a[i] = a[i] * b[i];
        }
        idft(a.a);
        a.resize(tot);
        return a;
    }
    friend Poly operator*(Z a, Poly b) {
        for (int i = 0; i < int(b.size()); i++) {
            b[i] *= a;
        }
        return b;
    }
    friend Poly operator*(Poly a, Z b) {
        for (int i = 0; i < int(a.size()); i++) {
            a[i] *= b;
        }
        return a;
    }
    Poly &operator+=(Poly b) {
        return (*this) = (*this) + b;
    }
    Poly &operator-=(Poly b) {
        return (*this) = (*this) - b;
    }
    Poly &operator*=(Poly b) {
        return (*this) = (*this) * b;
    }
    Poly deriv() const {
        if (a.empty()) {
            return Poly();
        }
        std::vector<Z> res(size() - 1);
        for (int i = 0; i < size() - 1; ++i) {
            res[i] = (i + 1) * a[i + 1];
        }
        return Poly(res);
    }//求导
    Poly integr() const {
        std::vector<Z> res(size() + 1);
        for (int i = 0; i < size(); ++i) {
            res[i + 1] = a[i] / (i + 1);
        }
        return Poly(res);
    }//积分
    Poly inv(int m) const {
        Poly x{a[0].inv()};
        int k = 1;
```

```
        while (k < m) {
            k *= 2;
            x = (x * (Poly{2} - modxk(k) * x)).modxk(k);
        }
        return x.modxk(m);
    }//求逆
    Poly log(int m) const {
        return (deriv() * inv(m)).integr().modxk(m);
    }
    Poly exp(int m) const {
        Poly x{1};
        int k = 1;
        while (k < m) {
            k *= 2;
            x = (x * (Poly{1} - x.log(k) + modxk(k))).modxk(k);
        }
        return x.modxk(m);
    }
    Poly pow(int k, int m) const {
        int i = 0;
        while (i < size() && a[i] == 0) {
            i++;
        }
        if (i == size() || 1LL * i * k >= m) {
            return Poly(std::vector<Z>(m));
        }
        Z v = a[i];
        auto f = divxk(i) * v.inv();
        return (f.log(m - i * k) * k).exp(m - i * k).mulxk(i * k) * qp(v, k);
//          Poly res = {1};
//          Poly base = *this;
//          while(k){
//              if(k & 1) res = res * base;
//              if(res.size() > m)res.modxk(m);
//              base = base * base;
//              if(base.size() > m)base.modxk(m);
//              k >>= 1;
//          }
//          return res;
    }
    Poly sqrt(int m) const {
        Poly x{1};
        int k = 1;
        while (k < m) {
            k *= 2;
            x = (x + (modxk(k) * x.inv(k)).modxk(k)) * ((P + 1) / 2);
        }
        return x.modxk(m);
    }
    Poly mulT(Poly b) const {
        if (b.size() == 0) {
            return Poly();
        }
        int n = b.size();
        std::reverse(b.a.begin(), b.a.end());
        return ((*this) * b).divxk(n - 1);
    }
    std::vector<Z> eval(std::vector<Z> x) const {
        if (size() == 0) {
            return std::vector<Z>(x.size(), 0);
        }
        const int n = std::max(int(x.size()), size());
        std::vector<Poly> q(4 * n);
        std::vector<Z> ans(x.size());
        x.resize(n);
        std::function<void(int, int, int)> build = [&](int p, int l, int r) {
            if (r - l == 1) {
                q[p] = Poly{1, -x[l]};
            } else {
                int m = (l + r) / 2;
                build(2 * p, l, m);
```

```cpp
                build(2 * p + 1, m, r);
                q[p] = q[2 * p] * q[2 * p + 1];
            }
        };
        build(1, 0, n);
        std::function<void(int, int, int, const Poly &)> work = [&](int p, int l, int r, const Poly &num) {
            if (r - l == 1) {
                if (l < int(ans.size())) {
                    ans[l] = num[0];
                }
            } else {
                int m = (l + r) / 2;
                work(2 * p, l, m, num.mulT(q[2 * p + 1]).modxk(m - l));
                work(2 * p + 1, m, r, num.mulT(q[2 * p]).modxk(r - m));
            }
        };
        work(1, 0, n, mulT(q[1].inv(n)));
        return ans;
    }//多点求值
};
Poly S2_row;// 第二类斯特林数行
void S2_row_init(int n) {
    vector<Z> f(n + 1), g(n + 1);
    for (int i = 0; i <= n; i ++) {
        f[i] = qp(Z(i), n) * inv[i];
        g[i] = Z(i & 1 ? -1 : 1) * inc[i];
    }
    S2_row = Poly(f) * Poly(g);
}
Poly S2_col;// 第二类斯特林数列
void S2_col_init(int n, int k) {
    n ++;
    vector<Z> f(n);
    for (int i = 1; i < n; i ++) {
        f[i] = inv[i];
    }
    auto ans = Poly(f).pow(k, n);
    S2_col.resize(n + 1);
    for (int i = 0; i < n; i ++) {
        S2_col[i] = ans[i] * fc[i] * inv[k];
    }
}
Poly Bell;
void Bell_init(int n) {
    vector<Z> f(n + 1);
    for (int i = 1; i <= n; i ++) {
        f[i] = inv[i];
    }
    auto ans = Poly(f).exp(n + 1);
    Bell.resize(n + 1);
    for (int i = 0; i <= n; i ++) {
        Bell[i] = ans[i] * fc[i];
    }
}
```

```cpp
const int mod = 998244353, gen = 3;

int add(int x, int y) {
    return x + y >= mod ? x + y - mod : x + y;
}
int sub(int x, int y) {
    return x - y >= 0 ? x - y : x - y + mod;
}
int power(int x, int y) {
    int res = 1;
    for (; y; y >>= 1, x = 1ll * x * x % mod) {
        if (y & 1) { res = 1ll * res * x % mod; }
    }
    return res;
}

namespace Combin {
```

```
    vector<int> inv, fac, invf;

    void getCombin(int n) {
        if (inv.empty()) { inv = fac = invf = vector<int> (2, 1); }
        int m = inv.size(); n++;
        if (m < n) {
            inv.resize(n); fac.resize(n); invf.resize(n);
            for (int i = m; i < n; i++) {
                inv[i] = 1ll * (mod - mod / i) * inv[mod % i] % mod;
                fac[i] = 1ll * fac[i - 1] * i % mod;
                invf[i] = 1ll * invf[i - 1] * inv[i] % mod;
            }
        }
    }
    inline int binom(int n, int m) {
        if (n < m || m < 0) { return 0; }
        getCombin(n);
        return 1ll * fac[n] * invf[m] % mod * invf[n - m] % mod;
    }
}

using namespace Combin;

namespace Polynom {
    vector<int> rev, rt;

    void getRevRoot(int n) {
        int m = __lg(n);
        rev.resize(n);
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            rev[i] = rev[i >> 1] >> 1 | (i & 1) << m - 1;
        }
        static int len = 1;
        if (len < n) {
            rt.resize(n);
            for (; len < n; len *= 2) {
                int uni = power(gen, (mod - 1) / (len * 2));
                rt[len] = 1;
                for (int i = 1; i < len; i++) {
                    rt[i + len] = 1ll * rt[i + len - 1] * uni % mod;
                }
            }
        }
    }
    void ntt(vector<int> &f, int n) {
        f.resize(n);
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (i < rev[i]) { swap(f[i], f[rev[i]]); }
        }
        for (int len = 1; len < n; len *= 2) {
            for (int i = 0; i < n; i += len * 2) {
                for (int j = 0; j < len; j++) {
                    int x = f[i + j], y = 1ll * f[i + j + len] * rt[j + len] % mod;
                    f[i + j] = add(x, y); f[i + j + len] = sub(x, y);
                }
            }
        }
    }
    vector<int> operator *(vector<int> f, vector<int> g) {
        int n = 1, m = f.size() + g.size(); m--;
        while (n < m) { n *= 2; }
        int invn = power(n, mod - 2);
        getRevRoot(n); ntt(f, n); ntt(g, n);
        for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % mod; }
        reverse(f.begin() + 1, f.end()); ntt(f, n); f.resize(m);
        for (int i = 0; i < m; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * invn % mod; }
        return f;
    }

    vector<int> polyInv(vector<int> f, int n) {
        if (n == 1) { return vector<int>(1, power(f[0], mod - 2)); }
```

```cpp
        f.resize(n);
        vector<int> g = polyInv(f, n / 2), h(n);
        g.resize(n);
        for (int i = 0; i < n / 2; i++) { h[i] = g[i]; }
        int invn = power(n, mod - 2);
        getRevRoot(n); ntt(f, n); ntt(g, n);
        for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % mod; }
        reverse(f.begin() + 1, f.end()); ntt(f, n);
        for (int i = 1; i < n / 2; i++) { f[i] = 0; }
        for (int i = n / 2; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * invn % mod; }
        f[0] = 1; ntt(f, n);
        for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % mod; }
        reverse(f.begin() + 1, f.end()); ntt(f, n);
        for (int i = n / 2; i < n; i++) { h[i] = sub(0, 1ll * f[i] * invn % mod); }
        return h;
    }
    vector<int> operator ~(vector<int> f) { // qiuni
        if (f.empty()) { return f; }
        int n = 1, m = f.size();
        while (n < m) { n *= 2; }
        f = polyInv(f, n); f.resize(m);
        return f;
    }
    vector<int> polyDeri(vector<int> f) { // qiudao
        if (f.empty()) { return f; }
        int m = f.size();
        for (int i = 1; i < m; i++) { f[i - 1] = 1ll * f[i] * i % mod; }
        f.pop_back();
        return f;
    }
    vector<int> polyInte(vector<int> f) { // jifen
        f.push_back(0);
        int m = f.size();
        getCombin(m);
        for (int i = m - 1; i >= 1; i--) { f[i] = 1ll * f[i - 1] * inv[i] % mod; }
        f[0] = 0;
        return f;
    }

    vector<int> polyLn(vector<int> f) {
        if (f.empty()) { return f; }
        int m = f.size();
        f = (~f) * polyDeri(f);
        f.resize(m); f = polyInte(f); f.pop_back();
        return f;
    }
    vector<int> polyExp(vector<int> f, int n) {
        if (n == 1) { return vector<int> (1, 1); }
        f.resize(n);
        vector<int> g = polyExp(f, n / 2), h(n), g0;
        g.resize(n); g0 = polyLn(g);
        for (int i = 0; i < n / 2; i++) { h[i] = g[i]; }
        for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = sub(g0[i], f[i]); }
        int invn = power(n, mod - 2);
        getRevRoot(n); ntt(f, n); ntt(g, n);
        for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % mod; }
        reverse(f.begin() + 1, f.end()); ntt(f, n);
        for (int i = n / 2; i < n; i++) { h[i] = sub(0, 1ll * f[i] * invn % mod); }
        return h;
    }
    vector<int> polyExp(vector<int> f) {
        if (f.empty()) { return f; }
        int n = 1, m = f.size();
        while (n < m) { n *= 2; }
        f = polyExp(f, n); f.resize(m);
        return f;
    }
    vector<int> polyPow(vector<int> f,int k) {
        auto g = polyLn(f);
        for(int i = 0;i < g.size();i ++) {
          g[i] = 1ll * g[i] * k % mod;
```

```
        }
        g = polyExp(g);
        return g;
    }
}
```

计算几何

tips:

直线上两点整点坐标范围在 $[-10^6, 10^6]$，直线交点范围在 $[-10^{18}, 10^{18}]$

Pick 定理：给定顶点均为整点的简单多边形，其面积 A 和内部格点数目 i、边上格点数目 b 的关系为 $A = i + \frac{b}{2} - 1$

曼哈顿转切比雪夫：(x, y) 变为 $(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$

二维计算几何

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
constexpr double eps = 1e-7;
constexpr double PI = acos(-1);
constexpr double inf = 1e9;
struct Point { double x, y; };        // 点
using Vec = Point;                    // 向量
struct Line { Point P; Vec v; };      // 直线（点向式），射线时为 A->B
struct Seg { Point A, B; };           // 线段（存两个端点）
struct Circle { Point O; double r; }; // 圆（存圆心和半径）
using Points = std::vector<Point>;
using ConvexHull = std::vector<Point>;
const Point O = {0, 0};                         // 原点
const Line Ox = {O, {1, 0}}, Oy = {O, {0, 1}}; // 坐标轴

bool eq(double a, double b) { return abs(a - b) < eps; } // ==
bool gt(double a, double b) { return a - b > eps; }      // >
bool lt(double a, double b) { return a - b < -eps; }     // <
bool ge(double a, double b) { return a - b > -eps; }     // >=
bool le(double a, double b) { return a - b < eps; }      // <=
Vec operator + (const Vec &a,const Vec &b){return (Vec){a.x + b.x,a.y + b.y};}
Vec operator - (const Vec &a,const Vec &b){return (Vec){a.x - b.x,a.y - b.y};}
Vec operator * (const Vec &a,const double &b){return (Vec){b * a.x,b * a.y};}
Vec operator * (const double &a,const Vec &b){return (Vec){a * b.x,a * b.y};}
Vec operator / (const Vec &a,const double &b){return (Vec){a.x / b,a.y / b};}
double operator * (const Point &a,const Point &b){return a.x * b.x + a.y * b.y;}// dot // 点乘
double operator ^ (const Point &a,const Point &b){return a.x * b.y - a.y * b.x;}// cross  // 叉乘
bool operator < (const Point& a, const Point& b) {return a.x < b.x || (a.x == b.x && a.y < b.y);}
double len(const Vec &a){return sqrt(a * a);}

ll cross(Point a,Point b){return (ll)a.x * (ll)b.y - (ll)a.y * (ll)b.x;}
ll dot(Point a,Point b){return (ll)a.x * (ll)b.x + (ll)a.y * (ll)b.y;}

double angle(const Vec &a,const Vec &b){return acos(a * b / len(a)/len(b));}

double Polar_angle(Vec &v){return atan2(v.y,v.x);}

int sgn(double x){
    if(abs(x) < eps)
        return 0;
    if(x < 0)
        return -1;
    return 1;
}

Vec r90a(Vec v) { return {-v.y, v.x}; }  // 逆时针旋转 90 度的向量
Vec r90c(Vec v) { return {v.y, -v.x}; }  // 顺时针旋转 90 度的向量

// 两向量的夹角余弦
// DEPENDS len, V*V
```

```cpp
double cos_t(Vec u, Vec v) { return u * v / len(u) / len(v); }

// 归一化向量（与原向量方向相同的单位向量）
// DEPENDS len
Vec norm(Vec v) { return {v.x / len(v), v.y / len(v)}; }

// 与原向量平行且横坐标大于等于 0 的单位向量
// DEPENDS d*V, len
Vec pnorm(Vec v) { return (v.x < 0 ? -1 : 1) / len(v) * v; }

// 线段的方向向量
// DEPENDS V-V
// NOTE 直线的方向向量直接访问属性 v
Vec dvec(Seg l) { return l.B - l.A; }
//----------------------------------------------------------//
Line line(Point A, Point B) { return {A, B - A}; }

// 斜截式直线
Line line(double k, double b) { return {{0, b}, {1, k}}; }

// 点斜式直线
Line line(Point P, double k) { return {P, {1, k}}; }

// 线段所在直线
// DEPENDS V-V
Line line(Seg l) { return {l.A, l.B - l.A}; }

// 给定直线的横坐标求纵坐标
// NOTE 请确保直线不与 y 轴平行
double at_x(Line l, double x) { return l.P.y + (x - l.P.x) * l.v.y / l.v.x; }

// 给定直线的纵坐标求横坐标
// NOTE 请确保直线不与 x 轴平行
double at_y(Line l, double y) { return l.P.x - (y + l.P.y) * l.v.x / l.v.y; }

// 点到直线的垂足
// DEPENDS V-V, V*V, d*V
Point pedal(Point P, Line l) { return l.P - (l.P - P) * l.v / (l.v * l.v) * l.v; }

// 过某点作直线的垂线
// DEPENDS r90c
Line perp(Line l, Point P) { return {P, r90c(l.v)}; }

// 角平分线
// DEPENDS V+V, len, norm
Line bisec(Point P, Vec u, Vec v) { return {P, norm(u) + norm(v)}; }

//seg------------------------------------------//

// 线段的方向向量
// DEPENDS V-V
// NOTE 直线的方向向量直接访问属性 v
//Vec dvec(Seg l) { return l.B - l.A; }

// 线段中点
Point midp(Seg l) { return {(l.A.x + l.B.x) / 2, (l.A.y + l.B.y) / 2}; }

// 线段中垂线
// DEPENDS r90c, V-V, midp
Line perp(Seg l) { return {midp(l), r90c(l.B - l.A)}; }
//--------------------------------------------------------------//
// 向量是否互相垂直
// DEPENDS eq, V*V
bool verti(Vec u, Vec v) { return eq(u * v, 0); }

// 向量是否互相平行
// DEPENDS eq, V^V
bool paral(Vec u, Vec v) { return eq(u ^ v, 0); }

// 向量是否与 x 轴平行
// DEPENDS eq
```

```
bool paral_x(Vec v) { return eq(v.y, 0); }

// 向量是否与 y 轴平行
// DEPENDS eq
bool paral_y(Vec v) { return eq(v.x, 0); }

// 点是否在直线上
// DEPENDS eq
bool on(Point P, Line l) { return eq((P.x - l.P.x) * l.v.y, (P.y - l.P.y) * l.v.x); }


// 点是否在射线上
// DEPENDS eq
bool on_ray(Point P, Line l) { return on(P,l) && ((P - l.P) * l.v) >= 0; }

// 点是否在线段上
// DEPENDS eq, len, V-V
bool on(Point P, Seg l) { return eq(len(P - l.A) + len(P - l.B), len(l.A - l.B)); }

// 两个点是否重合
// DEPENDS eq
bool operator==(Point A, Point B) { return eq(A.x, B.x) && eq(A.y, B.y); }

// 两条直线是否重合
// DEPENDS eq, on(L)
bool operator==(Line a, Line b) { return on(a.P, b) && on(a.P + a.v, b); }

// 两条线段是否重合
// DEPENDS eq, P==P
bool operator==(Seg a, Seg b) { return (a.A == b.A && a.B == b.B) || (a.A == b.B && a.B == b.A); }

// 以横坐标为第一关键词、纵坐标为第二关键词比较两个点
// DEPENDS eq, lt
//bool operator<(Point A, Point B) { return lt(A.x, B.x) || (eq(A.x, B.x) && lt(A.y, B.y)); }

// 直线与圆是否相切
// DEPENDS eq, V^V, len
bool tangency(Line l, Circle C) { return eq(abs((C.O ^ l.v) - (l.P ^ l.v)), C.r * len(l.v)); }

// 圆与圆是否相切
// DEPENDS eq, V-V, len
bool tangency(Circle C1, Circle C2) { return eq(len(C1.O - C2.O), C1.r + C2.r); }
//-------------------------------------------------//
// 两点间的距离
// DEPENDS len, V-V
double dis(Point A, Point B) { return len(A - B); }

// 点到直线的距离
// DEPENDS V^V, len
double dis(Point P, Line l) { return abs((P ^ l.v) - (l.P ^ l.v)) / len(l.v); }

// 点到线段的距离
double dis(Point P,Seg l) {
    if(((P - l.A) * (l.B - l.A)) < 0 || ((P - l.B) * (l.A - l.B)) < 0){
        return min(dis(P,l.A),dis(P,l.B));
    }else {
        Line ll = line(l);
        return dis(P,l);
    }
}
// 平行直线间的距离
// DEPENDS d*V, V^V, len, pnorm
// NOTE 请确保两直线是平行的
double dis(Line a, Line b) { return abs((a.P ^ pnorm(a.v)) - (b.P ^ pnorm(b.v))); }


// 平移
// DEPENDS V+V
Line operator+(Line l, Vec v) { return {l.P + v, l.v}; }
Seg operator+(Seg l, Vec v) { return {l.A + v, l.B + v}; }
```

```
// 旋转 逆时针
// DEPENDS V+V, V-V
Point rotate(Point P, double rad) { return {cos(rad) * P.x - sin(rad) * P.y, sin(rad) * P.x + cos(rad) * P.y}; }
Point rotate(Point P, double rad, Point C) { return C + rotate(P - C, rad); }                          // DEPENDS ^1
Line rotate(Line l, double rad, Point C = O) { return {rotate(l.P, rad, C), rotate(l.v, rad)}; }  // DEPENDS ^1, ^2
Seg rotate(Seg l, double rad, Point C = O) { return {rotate(l.A, rad, C), rotate(l.B, rad, C)}; } // DEPENDS ^1, ^2

// 直线与直线交点
// DEPENDS eq, d*V, V*V, V+V, V^V
Points inter(Line a, Line b){
    double c = a.v ^ b.v;
    if (eq(c, 0)) {return {};}
    Vec v = 1 / c * Vec{a.P ^ (a.P + a.v), b.P ^ (b.P + b.v)};
    return {{v * Vec{-b.v.x, a.v.x}, v * Vec{-b.v.y, a.v.y}}};
}

// 线段与线段是否相交
bool cross_seg(Seg A,Seg B){ // 严格不交（不算端点）
    Point a = A.A,b = A.B,c = B.A,d = B.B;
    double c1 = (b - a) ^ (c - a),c2 = (b - a) ^ (d - a);
    double d1 = (d - c) ^ (a - c),d2 = (d - c) ^ (b - c);
    return sgn(c1) * sgn(c2) < 0 && sgn(d1) * sgn(d2) < 0;
}

// 直线与线段相交 => 直线与直线相交 + 点是否在线段上
// bool cross_line_seg(Line A,Seg B){
//     Line BB = {B.A,B.B};
//     Points tmp = inter(A,BB);
//     if(tmp.size() == 0)return false;
//     return on(tmp[0],B);
// }
bool cross_line_seg(Line A,Seg B){
    if(abs(A.v ^ (B.A - B.B)) < eps)return false;// 平行
    Vec v1 = B.A - A.P,v2 = B.B - A.P;
    if((v2 ^ v1) < 0){
        swap(v1,v2);
    }else if(abs(v2 ^ v1) < eps){
        if((v1 * v2) <= 0)return true;
        else return false;
    }// 保证 v2 在 v1 下面
    int d1 = sgn(A.v ^ v1);
    int d2 = sgn(A.v ^ v2);
    if(d1 * d2 <= 0)return true;
    return false;
}

// 射线与射线交
// bool cross_ray_ray(Line A,Line B){
//     Points tmp = inter(A,B);
//     if(tmp.size() == 0)return false;//注意重合
//     int d1 = sgn((tmp[0] - A.P) * A.v);
//     int d2 = sgn((tmp[0] - B.P) * B.v);
//     return d1 >= 0 && d2 >= 0;
// }

int cross_ray_ray(Line A,Line B) {
    if(fabs(A.v ^ B.v) < eps) {
       if(fabs((A.P - B.P) ^ A.v) < eps) {
           if(sgn(A.v * (B.P - A.P)) < 0 && sgn(B.v * (A.P - B.P)) < 0) return -1;
           else return 0;
       }else return -1;
    }
    Vec v = B.P - A.P;
    double c1 = v ^ A.v;
    double c2 = v ^ B.v;
    double c = A.v ^ B.v;
    if(sgn(c1) * sgn(c) >= 0 && sgn(c2) * sgn(c) >= 0) return 1; // 交
    return -1;
}
// 射线与线段交
```

```cpp
// bool cross_ray_seg(Line A,Seg B){
//     Line BB = {B.A,B.B};
//     Points tmp = inter(A,BB);
//     if(tmp.size() == 0)return false;//注意重合
//     int d = sgn((tmp[0] - A.P) * A.v);
//     return on(tmp[0],B) && d >= 0;
// }
bool cross_ray_seg(Line A,Seg B){
    if(abs(A.v ^ (B.A - B.B)) < eps)return false;// 平行
    Vec v1 = B.A - A.P,v2 = B.B - A.P;
    if((v2 ^ v1) < 0){
        swap(v1,v2);
    }else if(abs(v2 ^ v1) < eps){
        if((v1 * v2) <= 0)return true;
        else return false;
    }// 保证 v2 在 v1 下面
    int d1 = sgn(A.v ^ v1);
    int d2 = sgn(A.v ^ v2);
    if(d1 >= 0 && d2 <= 0)return true;
    return false;
}

// 射线与直线交
// bool cross_ray_line(Line A,Line B) { // A 为射线
//     Points tmp = inter(A,B);
//     if(tmp.size() == 0)return false;
//     int d = sgn((tmp[0] - A.P) * A.v);
//     return d >= 0;
// }
int cross_ray_line(Line A,Line B) {
    Line B1 = B;
    Line B2 = {B.P,O - B.v};
    int p1 = cross_ray_ray(A,B1);
    int p2 = cross_ray_ray(A,B2);
    if(p1 == 0 || p2 == 0) return 0; // 重合
    else if(p1 == 1 || p2 == 1) return 1; // 交
    return -1;// 不交
}
// 直线与圆交点
// DEPENDS eq, gt, V+V, V-V, V*V, d*V, len, pedal
std::vector<Point> inter(Line l, Circle C){
    Point P = pedal(C.O, l);
    double h = len(P - C.O);
    if (gt(h, C.r)) return {};
    if (eq(h, C.r)) return {P};
    double d = sqrt(C.r * C.r - h * h);
    Vec vec = d / len(l.v) * l.v;
    return {P + vec, P - vec};
}

// 圆与圆的交点
// DEPENDS eq, gt, V+V, V-V, d*V, len, r90c
std::vector<Point> inter(Circle C1, Circle C2){
    Vec v1 = C2.O - C1.O, v2 = r90c(v1);
    double d = len(v1);
    if (gt(d, C1.r + C2.r) || gt(abs(C1.r - C2.r), d)) return {};
    if (eq(d, C1.r + C2.r) || eq(d, abs(C1.r - C2.r))) return {C1.O + C1.r / d * v1};
    double a = ((C1.r * C1.r - C2.r * C2.r) / d + d) / 2;
    double h = sqrt(C1.r * C1.r - a * a);
    Vec av = a / len(v1) * v1, hv = h / len(v2) * v2;
    return {C1.O + av + hv, C1.O + av - hv};
}



// 三角形的重心
Point barycenter(Point A, Point B, Point C){
    return {(A.x + B.x + C.x) / 3, (A.y + B.y + C.y) / 3};
}

// 三角形的外心
```

```
// DEPENDS r90c, V*V, d*V, V-V, V+V
// NOTE 给定圆上三点求圆，要先判断是否三点共线
Point circumcenter(Point A, Point B, Point C){
    double a = A * A, b = B * B, c = C * C;
    double d = 2 * (A.x * (B.y - C.y) + B.x * (C.y - A.y) + C.x * (A.y - B.y));
    return 1 / d * r90c(a * (B - C) + b * (C - A) + c * (A - B));
}

// 三角形的内心
// DEPENDS len, d*V, V-V, V+V
Point incenter(Point A, Point B, Point C){
    double a = len(B - C), b = len(A - C), c = len(A - B);
    double d = a + b + c;
    return 1 / d * (a * A + b * B + c * C);
}

// 三角形的垂心
// DEPENDS V*V, d*V, V-V, V^V, r90c
Point orthocenter(Point A, Point B, Point C){
    double n = B * (A - C), m = A * (B - C);
    double d = (B - C) ^ (A - C);
    return 1 / d * r90c(n * (C - B) - m * (C - A));
}


// Graham 扫描法

// DEPENDS eq, lt, cross, V-V, P<P

// double theta(Point p) { return p == O ? -1 / 0. : atan2(p.y, p.x); } // 求极角
// void psort(Points &ps, Point c = O) { // 极角排序
//     sort(ps.begin(), ps.end(), [&](auto a, auto b) {
//         return lt(theta(a - c), theta(b - c));
//     });
// }

//极角排序
int qua(const Point &P) {
  if(P.x == 0 && P.y == 0) return 0;
  if(P.x >= 0 && P.y >= 0) return 1;
  if(P.x < 0&& P.y >= 0) return 2;
  if(P.x < 0 && P.y < 0) return 3;
  if(P.x >= 0 && P.y < 0) return 4;
  exit(-1);
}
void psort(Points &ps, Point c = O) { // 极角排序
    sort(ps.begin(), ps.end(), [&](auto p1, auto p2) {
        return qua(p1 - c) < qua(p2 - c) || qua(p1 - c) == qua(p2 - c) && ((p1 - c) ^(p2 - c)) > 0;
    });
}

bool check(Point p, Point q, Point r) { // 检查三个点组成的两个向量的旋转方向是否为逆时针
    return lt(0, (q - p) ^ (r - q));
}
ConvexHull Andrew(Points &ps) {
    if(ps.size() == 1){
        return ps;
    }
    sort(ps.begin(), ps.end());
    std::vector<int> I{0}, used(ps.size());
    for (int i = 1; i < ps.size(); i++){
        //std::cout << ps[i].x << " " <<ps[i].y <<"\n";
        while (I.size() > 1 && !check(ps[I[I.size() - 2]], ps[I.back()], ps[i]))
            used[I.back()] = 0, I.pop_back();
        used[i] = 1, I.push_back(i);
    }// 下凸壳
    int tmp = I.size();
    for (int i = ps.size() - 2; i >= 0; i--){
        if (used[i])
            continue;
        while (I.size() > tmp && !check(ps[I[I.size() - 2]], ps[I.back()], ps[i]))
```

```
            used[I.back()] = 0, I.pop_back();
        used[i] = 1, I.push_back(i);
    }// 上凸壳 特别注意上凸壳最后一段如果是垂直 x 轴的，则不会完全记录进上凸壳内
    Points H;
    for (int i = 0; i < I.size() - 1; i++)
        H.push_back(ps[I[i]]);
    return H;
}//逆时针
ConvexHull chull(Points &ps){
    psort(ps, *min_element(ps.begin(), ps.end())); // 以最左下角的点为极角排序
    Points H{ps[0]};
    for (int i = 1; i < ps.size(); i++){
        while (H.size() > 1 && !check(H[H.size() - 2], H.back(), ps[i]))
            H.pop_back();
        H.push_back(ps[i]);
    }
    return H;
}
ConvexHull operator+(const ConvexHull &A,const ConvexHull B){
    int n = A.size();
    int m = B.size();
    std::vector<Point> v1(n),v2(m);
    for(int i = 0;i < n;i ++){
        v1[i] = A[(i + 1) % n] - A[i];
    }
    for(int i = 0;i < m;i ++){
        v2[i] = B[(i + 1) % m] - B[i];
    }
    ConvexHull C;
    C.push_back(A[0] + B[0]);
    int p1 = 0,p2 = 0;
    while(p1 < n && p2 < m){
        C.push_back(C.back() + ((v1[p1] ^ v2[p2]) >= 0 ? v1[p1 ++] : v2[p2 ++]));
    }// 对上凸壳做闵可夫斯基和时将 >= 改为 <= 并且合并凸包时不需要排序
    while(p1 < n)C.push_back(C.back() + v1[p1 ++]);
    while(p2 < m)C.push_back(C.back() + v2[p2 ++]);
    C = Andrew(C);
    return C;
}// 要求凸包起点必须为左下

void test(Points a,Point b){
    int n = a.size();
    int r = 0;
    for(int l = 0;l < n;l ++){
        auto nxt = [&](int x){
            return (x + 1) % n;
        };
        while(nxt(r) != l && check(a[l],a[nxt(r)],b)){
            // b 为轴点
            r = nxt(r);

            if(l == r)break;
        }
    }//极角排序 转半平面
}

// 半平面交
int sgn(Point a) {
    return a.y > 0 || (a.y == 0 && a.x > 0) ? 1 : -1;
}
bool pointOnLineLeft(Point p, Line l) {
    return (l.v ^ (p - l.P)) > eps;
}
Point lineIntersection(Line l1, Line l2) {
    return l1.P + l1.v * ((l2.v ^ (l1.P - l2.P)) / (l2.v ^ (O - l1.v)));
}
std::vector<Point> hp(std::vector<Line> lines) {
    std::sort(lines.begin(), lines.end(), [&](auto l1, auto l2) {
        auto d1 = l1.v;
        auto d2 = l2.v;

```

```cpp
        if (sgn(d1) != sgn(d2)) {
            return sgn(d1) == 1;
        }

        return (d1 ^ d2) > 0;
    });
    std::deque<Line> ls;
    std::deque<Point> ps;
    for (auto l : lines) {
        if (ls.empty()) {
            ls.push_back(l);
            continue;
        }
        while (!ps.empty() && !pointOnLineLeft(ps.back(), l)) {
            ps.pop_back();ls.pop_back();
        }

        while (!ps.empty() && !pointOnLineLeft(ps[0], l)) {
            ps.pop_front();ls.pop_front();
        }
        if (abs(cross(l.v, ls.back().v)) < eps) {

            if ((l.v * ls.back().v) > eps) {
                //continue;
                if (!pointOnLineLeft(ls.back().P, l)) {
                    assert(ls.size() == 1);
                    ls[0] = l;
                }
                continue;
            }
            return {};
        }
        auto now = inter(ls.back(),l);
        ps.push_back(now[0]);
        // ps.push_back(lineIntersection(ls.back(), l));
        ls.push_back(l);
    }

    while (!ps.empty() && !pointOnLineLeft(ps.back(), ls[0])) {
        ps.pop_back();ls.pop_back();
    }
    if (ls.size() <= 2) {
        return {};
    }
    auto now = inter(ls[0],ls.back());
    ps.push_back(now[0]);
    // ps.push_back(lineIntersection(ls[0], ls.back()));
    return std::vector(ps.begin(), ps.end());
}//逆时针平面，使用时，可以给最外面套个值域的正方形框，来减少精度错误

double get_longest(vector<Point> A) {  // 求凸包直径
  int j = 2,n = A.size();
  double mx = 0;
  if(n == 1) return 0;
  if (n < 3) {
    mx = dis(A[0], A[1]);
    return mx;
  }
  auto sqr = [&](Point A,Point B,Point C) {
    return abs((B - A) ^ (C - B));
  };
  for(int i = 0;i < A.size();i ++) {
    while (sqr(A[i], A[(i + 1) % n], A[j]) <=
           sqr(A[i], A[(i + 1) % n], A[(j + 1) % n]))
      j = (j + 1) % n;
    mx = max(mx, max(dis(A[(i + 1) % n], A[j]), dis(A[i], A[j])));
  }
  return mx;
}

bool check_v_in_AB(Vec v,Vec A,Vec B) {// 判断向量 v 在向量 A 和 B 之间
```

```cpp
    if(sgn(A ^ B) < 0)swap(A,B);
    return sgn(A ^ v) >= 0 && sgn(v ^ B) >= 0;
}
bool Point_in_Triangle(Point x,Point A,Point B,Point C) {
    if(check_v_in_AB(x - A,B - A,C - A) && check_v_in_AB(x - B,A - B,C - B) && check_v_in_AB(x - C,A - C,B - C)) {
        return true;
    }return false;
}
bool Point_in_ConvexHull(Point A,ConvexHull &a) {
    int n = a.size();
    if(n < 3) exit(-1);
    int l = 2,r = n - 1;
    int x = -1;
    while(l <= r) {
        int mid = l + r >> 1;
        if(check_v_in_AB(A - a[0],a[1] - a[0],a[mid] - a[0])) {
            r = mid - 1;
            x = mid;
        }else l = mid + 1;
    }
    if(x == -1) return false;
    return Point_in_Triangle(A,a[0],a[x - 1],a[x]);
}
```

动态凸包

```cpp
struct Item {
    P p;
    mutable P vec;
    int q = 0;
};

bool operator<(const Item &a, const Item &b) {
    if (!b.q) {
        return a.p.x < b.p.x;
    }
    return dot(a.vec, b.p) > 0;
}

struct Hull {
    std::set<Item> s;
    i128 dx = 0;
    i128 dy = 0;
};

void print(const Hull &h) {
    for (auto it : h.s) {
        std::cerr << "(" << i64(it.p.x + h.dx) << ", " << i64(it.p.y + h.dy) << ") ";
    }
    std::cerr << "\n";
}

constexpr i64 inf = 2E18;

void insert(Hull &h, P p) {
    p.x -= h.dx;
    p.y -= h.dy;
    h.s.insert({p});
    auto it = h.s.lower_bound({p});
    if (it != h.s.end() && it->p.x == p.x) {
        if (it->p.y > p.y) {
            return;
        }
        it = h.s.erase(it);
    }
    if (it != h.s.begin() && it != h.s.end()
        && cross(p - std::prev(it)->p, it->p - p) >= 0) {
        return;
    }
    it = h.s.insert({p}).first;
    auto r = std::next(it);
```

```cpp
    if (r != h.s.end()) {
        while (cross(r->p - p, r->vec) >= 0) {
            r = h.s.erase(r);
        }
        it->vec = r->p - p;
    } else {
        it->vec = P(0, -inf);
    }

    if (it != h.s.begin()) {
        auto l = std::prev(it);
        while (l != h.s.begin()) {
            auto a = std::prev(l);
            if (cross(a->vec, p - l->p) < 0) {
                break;
            }
            h.s.erase(l);
            l = a;
        }
        l->vec = p - l->p;
    }
}

i64 query(const Hull &h, i64 x) {
    if (h.s.empty()) {
        return 0LL;
    }
    auto it = h.s.lower_bound({P(x, 1), P{}, 1});
    assert(it != h.s.end());
    auto p = it->p;
    p.x += h.dx;
    p.y += h.dy;
    return p.x * x + p.y;
}
```

最小圆覆盖

```cpp
int n;
double r;

struct point {
  double x, y;
} p[100005], o;

double sqr(double x) { return x * x; }

double dis(point a, point b) { return sqrt(sqr(a.x - b.x) + sqr(a.y - b.y)); }

bool cmp(double a, double b) { return fabs(a - b) < 1e-8; }

point geto(point a, point b, point c) {
  double a1, a2, b1, b2, c1, c2;
  point ans;
  a1 = 2 * (b.x - a.x), b1 = 2 * (b.y - a.y),
  c1 = sqr(b.x) - sqr(a.x) + sqr(b.y) - sqr(a.y);
  a2 = 2 * (c.x - a.x), b2 = 2 * (c.y - a.y),
  c2 = sqr(c.x) - sqr(a.x) + sqr(c.y) - sqr(a.y);
  if (cmp(a1, 0)) {
    ans.y = c1 / b1;
    ans.x = (c2 - ans.y * b2) / a2;
  } else if (cmp(b1, 0)) {
    ans.x = c1 / a1;
    ans.y = (c2 - ans.x * a2) / b2;
  } else {
    ans.x = (c2 * b1 - c1 * b2) / (a2 * b1 - a1 * b2);
    ans.y = (c2 * a1 - c1 * a2) / (b2 * a1 - b1 * a2);
  }
  return ans;
}

int main() {
```

```
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 1; i <= n; i++) scanf("%lf%lf", &p[i].x, &p[i].y);
  for (int i = 1; i <= n; i++) swap(p[rand() % n + 1], p[rand() % n + 1]);
  o = p[1];
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    if (dis(o, p[i]) < r || cmp(dis(o, p[i]), r)) continue;
    o.x = (p[i].x + p[1].x) / 2;
    o.y = (p[i].y + p[1].y) / 2;
    r = dis(p[i], p[1]) / 2;
    for (int j = 2; j < i; j++) {
      if (dis(o, p[j]) < r || cmp(dis(o, p[j]), r)) continue;
      o.x = (p[i].x + p[j].x) / 2;
      o.y = (p[i].y + p[j].y) / 2;
      r = dis(p[i], p[j]) / 2;
      for (int k = 1; k < j; k++) {
        if (dis(o, p[k]) < r || cmp(dis(o, p[k]), r)) continue;
        o = geto(p[i], p[j], p[k]);
        r = dis(o, p[i]);
      }
    }
  }
  printf("%.10lf\n%.10lf %.10lf", r, o.x, o.y);
  return 0;
}
```

其他人的板子

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

// using point_t=long long;
using point_t=long double;  //全局数据类型

constexpr point_t eps=1e-8;
constexpr point_t INF=numeric_limits<point_t>::max();
constexpr long double PI=3.1415926535897932384l;

// 点与向量
template<typename T> struct point
{
    T x,y;

    bool operator==(const point &a) const {return (abs(x-a.x)<=eps && abs(y-a.y)<=eps);}
    bool operator<(const point &a) const {if (abs(x-a.x)<=eps) return y<a.y-eps; return x<a.x-eps;}
    bool operator>(const point &a) const {return !(*this<a || *this==a);}
    point operator+(const point &a) const {return {x+a.x,y+a.y};}
    point operator-(const point &a) const {return {x-a.x,y-a.y};}
    point operator-() const {return {-x,-y};}
    point operator*(const T k) const {return {k*x,k*y};}
    point operator/(const T k) const {return {x/k,y/k};}
    T operator*(const point &a) const {return x*a.x+y*a.y;}  // 点积
    T operator^(const point &a) const {return x*a.y-y*a.x;}  // 叉积, 注意优先级
    int toleft(const point &a) const {const auto t=(*this)^a; return (t>eps)-(t<-eps);}  // to-left 测试
    T len2() const {return (*this)*(*this);}  // 向量长度的平方
    T dis2(const point &a) const {return (a-(*this)).len2();}  // 两点距离的平方

    // 涉及浮点数
    long double len() const {return sqrtl(len2());}  // 向量长度
    long double dis(const point &a) const {return sqrtl(dis2(a));}  // 两点距离
    long double ang(const point &a) const {return acosl(max(-1.0l,min(1.0l,((*this)*a)/(len()*a.len()))));}  // 向量夹角
    point rot(const long double rad) const {return {x*cos(rad)-y*sin(rad),x*sin(rad)+y*cos(rad)};}  // 逆时针旋转（给定角度）
    point rot(const long double cosr,const long double sinr) const {return {x*cosr-y*sinr,x*sinr+y*cosr};}  // 逆时针旋转（给定角度的正弦与余弦）
};

using Point=point<point_t>;

// 极角排序
struct argcmp
```

```cpp
{
    bool operator()(const Point &a,const Point &b) const
    {
        const auto quad=[](const Point &a)
        {
            if (a.y<-eps) return 1;
            if (a.y>eps) return 4;
            if (a.x<-eps) return 5;
            if (a.x>eps) return 3;
            return 2;
        };
        const int qa=quad(a),qb=quad(b);
        if (qa!=qb) return qa<qb;
        const auto t=a^b;
        // if (abs(t)<=eps) return a*a<b*b-eps;  // 不同长度的向量需要分开
        return t>eps;
    }
};

// 直线
template<typename T> struct line
{
    point<T> p,v;  // p 为直线上一点，v 为方向向量

    bool operator==(const line &a) const {return v.toleft(a.v)==0 && v.toleft(p-a.p)==0;}
    int toleft(const point<T> &a) const {return v.toleft(a-p);}  // to-left 测试
    bool operator<(const line &a) const  // 半平面交算法定义的排序
    {
        if (abs(v^a.v)<=eps && v*a.v>=-eps) return toleft(a.p)==-1;
        return argcmp()(v,a.v);
    }

    // 涉及浮点数
    point<T> inter(const line &a) const {return p+v*((a.v^(p-a.p))/(v^a.v));}  // 直线交点
    long double dis(const point<T> &a) const {return abs(v^(a-p))/v.len();}  // 点到直线距离
    point<T> proj(const point<T> &a) const {return p+v*((v*(a-p))/(v*v));}  // 点在直线上的投影
};

using Line=line<point_t>;

//线段
template<typename T> struct segment
{
    point<T> a,b;

    bool operator<(const segment &s) const {return make_pair(a,b)<make_pair(s.a,s.b);}

    // 判定性函数建议在整数域使用

    // 判断点是否在线段上
    // -1 点在线段端点 | 0 点不在线段上 | 1 点严格在线段上
    int is_on(const point<T> &p) const
    {
        if (p==a || p==b) return -1;
        return (p-a).toleft(p-b)==0 && (p-a)*(p-b)<-eps;
    }

    // 判断线段直线是否相交
    // -1 直线经过线段端点 | 0 线段和直线不相交 | 1 线段和直线严格相交
    int is_inter(const line<T> &l) const
    {
        if (l.toleft(a)==0 || l.toleft(b)==0) return -1;
        return l.toleft(a)!=l.toleft(b);
    }

    // 判断两线段是否相交
    // -1 在某一线段端点处相交 | 0 两线段不相交 | 1 两线段严格相交
    int is_inter(const segment<T> &s) const
    {
        if (is_on(s.a) || is_on(s.b) || s.is_on(a) || s.is_on(b)) return -1;
        const line<T> l{a,b-a},ls{s.a,s.b-s.a};
```

```cpp
        return l.toleft(s.a)*l.toleft(s.b)==-1 && ls.toleft(a)*ls.toleft(b)==-1;
    }

    // 点到线段距离
    long double dis(const point<T> &p) const
    {
        if ((p-a)*(b-a)<-eps || (p-b)*(a-b)<-eps) return min(p.dis(a),p.dis(b));
        const line<T> l{a,b-a};
        return l.dis(p);
    }

    // 两线段间距离
    long double dis(const segment<T> &s) const
    {
        if (is_inter(s)) return 0;
        return min({dis(s.a),dis(s.b),s.dis(a),s.dis(b)});
    }
};

using Segment=segment<point_t>;

// 多边形
template<typename T> struct polygon
{
    vector<point<T>> p;  // 以逆时针顺序存储

    size_t nxt(const size_t i) const {return i==p.size()-1?0:i+1;}
    size_t pre(const size_t i) const {return i==0?p.size()-1:i-1;}

    // 回转数
    // 返回值第一项表示点是否在多边形边上
    // 对于狭义多边形，回转数为 0 表示点在多边形外，否则点在多边形内
    pair<bool,int> winding(const point<T> &a) const
    {
        int cnt=0;
        for (size_t i=0;i<p.size();i++)
        {
            const point<T> u=p[i],v=p[nxt(i)];
            if (abs((a-u)^(a-v))<=eps && (a-u)*(a-v)<=eps) return {true,0};
            if (abs(u.y-v.y)<=eps) continue;
            const Line uv={u,v-u};
            if (u.y<v.y-eps && uv.toleft(a)<=0) continue;
            if (u.y>v.y+eps && uv.toleft(a)>=0) continue;
            if (u.y<a.y-eps && v.y>=a.y-eps) cnt++;
            if (u.y>=a.y-eps && v.y<a.y-eps) cnt--;
        }
        return {false,cnt};
    }

    // 多边形面积的两倍
    // 可用于判断点的存储顺序是顺时针或逆时针
    T area() const
    {
        T sum=0;
        for (size_t i=0;i<p.size();i++) sum+=p[i]^p[nxt(i)];
        return sum;
    }

    // 多边形的周长
    long double circ() const
    {
        long double sum=0;
        for (size_t i=0;i<p.size();i++) sum+=p[i].dis(p[nxt(i)]);
        return sum;
    }
};

using Polygon=polygon<point_t>;

//凸多边形
template<typename T> struct convex: polygon<T>
```

```
{
    // 闵可夫斯基和
    convex operator+(const convex &c) const
    {
        const auto &p=this->p;
        vector&lt;Segment&gt; e1(p.size()),e2(c.p.size()),edge(p.size()+c.p.size());
        vector<point<T>> res; res.reserve(p.size()+c.p.size());
        const auto cmp=[](const Segment &u,const Segment &v) {return argcmp()(u.b-u.a,v.b-v.a);};
        for (size_t i=0;i<p.size();i++) e1[i]={p[i],p[this->nxt(i)]};
        for (size_t i=0;i<c.p.size();i++) e2[i]={c.p[i],c.p[c.nxt(i)]};
        rotate(e1.begin(),min_element(e1.begin(),e1.end(),cmp),e1.end());
        rotate(e2.begin(),min_element(e2.begin(),e2.end(),cmp),e2.end());
        merge(e1.begin(),e1.end(),e2.begin(),e2.end(),edge.begin(),cmp);
        const auto check=[](const vector<point<T>> &res,const point<T> &u)
        {
            const auto back1=res.back(),back2=*prev(res.end(),2);
            return (back1-back2).toleft(u-back1)==0 && (back1-back2)*(u-back1)>=-eps;
        };
        auto u=e1[0].a+e2[0].a;
        for (const auto &v:edge)
        {
            while (res.size()>1 && check(res,u)) res.pop_back();
            res.push_back(u);
            u=u+v.b-v.a;
        }
        if (res.size()>1 && check(res,res[0])) res.pop_back();
        return {res};
    }

    // 旋转卡壳
    // 例: 凸多边形的直径的平方
    T rotcaliper() const
    {
        const auto &p=this->p;
        if (p.size()==1) return 0;
        if (p.size()==2) return p[0].dis2(p[1]);
        const auto area=[](const point<T> &u,const point<T> &v,const point<T> &w){return (w-u)^(w-v);};
        T ans=0;
        for (size_t i=0,j=1;i<p.size();i++)
        {
            const auto nxti=this->nxt(i);
            ans=max({ans,p[j].dis2(p[i]),p[j].dis2(p[nxti])});
            while (area(p[this->nxt(j)],p[i],p[nxti])>=area(p[j],p[i],p[nxti]))
            {
                j=this->nxt(j);
                ans=max({ans,p[j].dis2(p[i]),p[j].dis2(p[nxti])});
            }
        }
        return ans;
    }

    // 判断点是否在凸多边形内
    // 复杂度 O(logn)
    // -1 点在多边形边上 | 0 点在多边形外 | 1 点在多边形内
    int is_in(const point<T> &a) const
    {
        const auto &p=this->p;
        if (p.size()==1) return a==p[0]?-1:0;
        if (p.size()==2) return segment<T>{p[0],p[1]}.is_on(a)?-1:0;
        if (a==p[0]) return -1;
        if ((p[1]-p[0]).toleft(a-p[0])==-1 || (p.back()-p[0]).toleft(a-p[0])==1) return 0;
        const auto cmp=[&](const point<T> &u,const point<T> &v){return (u-p[0]).toleft(v-p[0])==1;};
        const size_t i=lower_bound(p.begin()+1,p.end(),a,cmp)-p.begin();
        if (i==1) return segment<T>{p[0],p[i]}.is_on(a)?-1:0;
        if (i==p.size()-1 && segment<T>{p[0],p[i]}.is_on(a)) return -1;
        if (segment<T>{p[i-1],p[i]}.is_on(a)) return -1;
        return (p[i]-p[i-1]).toleft(a-p[i-1])>0;
    }

    // 凸多边形关于某一方向的极点
    // 复杂度 O(logn)
```

```cpp
    // 参考资料: https://codeforces.com/blog/entry/48868
    template<typename F> size_t extreme(const F &dir) const
    {
        const auto &p=this->p;
        const auto check=[&](const size_t i){return dir(p[i]).toleft(p[this->nxt(i)]-p[i])>=0;};
        const auto dir0=dir(p[0]); const auto check0=check(0);
        if (!check0 && check(p.size()-1)) return 0;
        const auto cmp=[&](const point<T> &v)
        {
            const size_t vi=&v-p.data();
            if (vi==0) return 1;
            const auto checkv=check(vi);
            const auto t=dir0.toleft(v-p[0]);
            if (vi==1 && checkv==check0 && t==0) return 1;
            return checkv^(checkv==check0 && t<=0);
        };
        return partition_point(p.begin(),p.end(),cmp)-p.begin();
    }

    // 过凸多边形外一点求凸多边形的切线, 返回切点下标
    // 复杂度 O(logn)
    // 必须保证点在多边形外
    pair<size_t,size_t> tangent(const point<T> &a) const
    {
        const size_t i=extreme([&](const point<T> &u){return u-a;});
        const size_t j=extreme([&](const point<T> &u){return a-u;});
        return {i,j};
    }

    // 求平行于给定直线的凸多边形的切线, 返回切点下标
    // 复杂度 O(logn)
    pair<size_t,size_t> tangent(const line<T> &a) const
    {
        const size_t i=extreme([&](...){return a.v;});
        const size_t j=extreme([&](...){return -a.v;});
        return {i,j};
    }
};

using Convex=convex<point_t>;

// 圆
struct Circle
{
    Point c;
    long double r;

    bool operator==(const Circle &a) const {return c==a.c && abs(r-a.r)<=eps;}
    long double circ() const {return 2*PI*r;}  // 周长
    long double area() const {return PI*r*r;}  // 面积

    // 点与圆的关系
    // -1 圆上 | 0 圆外 | 1 圆内
    int is_in(const Point &p) const {const long double d=p.dis(c); return abs(d-r)<=eps?-1:d<r-eps;}

    // 直线与圆关系
    // 0 相离 | 1 相切 | 2 相交
    int relation(const Line &l) const
    {
        const long double d=l.dis(c);
        if (d>r+eps) return 0;
        if (abs(d-r)<=eps) return 1;
        return 2;
    }

    // 圆与圆关系
    // -1 相同 | 0 相离 | 1 外切 | 2 相交 | 3 内切 | 4 内含
    int relation(const Circle &a) const
    {
        if (*this==a) return -1;
        const long double d=c.dis(a.c);
```

```
        if (d>r+a.r+eps) return 0;
        if (abs(d-r-a.r)<=eps) return 1;
        if (abs(d-abs(r-a.r))<=eps) return 3;
        if (d<abs(r-a.r)-eps) return 4;
        return 2;
    }

    // 直线与圆的交点
    vector<Point> inter(const Line &l) const
    {
        const long double d=l.dis(c);
        const Point p=l.proj(c);
        const int t=relation(l);
        if (t==0) return vector<Point>();
        if (t==1) return vector<Point>{p};
        const long double k=sqrt(r*r-d*d);
        return vector<Point>{p-(l.v/l.v.len())*k,p+(l.v/l.v.len())*k};
    }

    // 圆与圆交点
    vector<Point> inter(const Circle &a) const
    {
        const long double d=c.dis(a.c);
        const int t=relation(a);
        if (t==-1 || t==0 || t==4) return vector<Point>();
        Point e=a.c-c; e=e/e.len()*r;
        if (t==1 || t==3)
        {
            if (r*r+d*d-a.r*a.r>=-eps) return vector<Point>{c+e};
            return vector<Point>{c-e};
        }
        const long double costh=(r*r+d*d-a.r*a.r)/(2*r*d),sinth=sqrt(1-costh*costh);
        return vector<Point>{c+e.rot(costh,-sinth),c+e.rot(costh,sinth)};
    }

    // 圆与圆交面积
    long double inter_area(const Circle &a) const
    {
        const long double d=c.dis(a.c);
        const int t=relation(a);
        if (t==-1) return area();
        if (t<2) return 0;
        if (t>2) return min(area(),a.area());
        const long double costh1=(r*r+d*d-a.r*a.r)/(2*r*d),costh2=(a.r*a.r+d*d-r*r)/(2*a.r*d);
        const long double sinth1=sqrt(1-costh1*costh1),sinth2=sqrt(1-costh2*costh2);
        const long double th1=acos(costh1),th2=acos(costh2);
        return r*r*(th1-costh1*sinth1)+a.r*a.r*(th2-costh2*sinth2);
    }

    // 过圆外一点圆的切线
    vector<Line> tangent(const Point &a) const
    {
        const int t=is_in(a);
        if (t==1) return vector<Line>();
        if (t==-1)
        {
            const Point v={-(a-c).y,(a-c).x};
            return vector<Line>{{a,v}};
        }
        Point e=a-c; e=e/e.len()*r;
        const long double costh=r/c.dis(a),sinth=sqrt(1-costh*costh);
        const Point t1=c+e.rot(costh,-sinth),t2=c+e.rot(costh,sinth);
        return vector<Line>{{a,t1-a},{a,t2-a}};
    }

    // 两圆的公切线
    vector<Line> tangent(const Circle &a) const
    {
        const int t=relation(a);
        vector<Line> lines;
        if (t==-1 || t==4) return lines;
```

```
        if (t==1 || t==3)
        {
            const Point p=inter(a)[0],v={-(a.c-c).y,(a.c-c).x};
            lines.push_back({p,v});
        }
        const long double d=c.dis(a.c);
        const Point e=(a.c-c)/(a.c-c).len();
        if (t<=2)
        {
            const long double costh=(r-a.r)/d,sinth=sqrt(1-costh*costh);
            const Point d1=e.rot(costh,-sinth),d2=e.rot(costh,sinth);
            const Point u1=c+d1*r,u2=c+d2*r,v1=a.c+d1*a.r,v2=a.c+d2*a.r;
            lines.push_back({u1,v1-u1}); lines.push_back({u2,v2-u2});
        }
        if (t==0)
        {
            const long double costh=(r+a.r)/d,sinth=sqrt(1-costh*costh);
            const Point d1=e.rot(costh,-sinth),d2=e.rot(costh,sinth);
            const Point u1=c+d1*r,u2=c+d2*r,v1=a.c-d1*a.r,v2=a.c-d2*a.r;
            lines.push_back({u1,v1-u1}); lines.push_back({u2,v2-u2});
        }
        return lines;
    }

    // 圆的反演
    tuple<int,Circle,Line> inverse(const Line &l) const
    {
        const Circle null_c={{0.0,0.0},0.0};
        const Line null_l={{0.0,0.0},{0.0,0.0}};
        if (l.toleft(c)==0) return {2,null_c,l};
        const Point v=l.toleft(c)==1?Point{l.v.y,-l.v.x}:Point{-l.v.y,l.v.x};
        const long double d=r*r/l.dis(c);
        const Point p=c+v/v.len()*d;
        return {1,{(c+p)/2,d/2},null_l};
    }

    tuple<int,Circle,Line> inverse(const Circle &a) const
    {
        const Circle null_c={{0.0,0.0},0.0};
        const Line null_l={{0.0,0.0},{0.0,0.0}};
        const Point v=a.c-c;
        if (a.is_in(c)==-1)
        {
            const long double d=r*r/(a.r+a.r);
            const Point p=c+v/v.len()*d;
            return {2,null_c,{p,{-v.y,v.x}}};
        }
        if (c==a.c) return {1,{c,r*r/a.r},null_l};
        const long double d1=r*r/(c.dis(a.c)-a.r),d2=r*r/(c.dis(a.c)+a.r);
        const Point p=c+v/v.len()*d1,q=c+v/v.len()*d2;
        return {1,{(p+q)/2,p.dis(q)/2},null_l};
    }
};

// 圆与多边形面积交
long double area_inter(const Circle &circ,const Polygon &poly)
{
    const auto cal=[](const Circle &circ,const Point &a,const Point &b)
    {
        if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==0) return 0.0l;
        const auto ina=circ.is_in(a),inb=circ.is_in(b);
        const Line ab={a,b-a};
        if (ina && inb) return ((a-circ.c)^(b-circ.c))/2;
        if (ina && !inb)
        {
            const auto t=circ.inter(ab);
            const Point p=t.size()==1?t[0]:t[1];
            const long double ans=((a-circ.c)^(p-circ.c))/2;
            const long double th=(p-circ.c).ang(b-circ.c);
            const long double d=circ.r*circ.r*th/2;
            if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==1) return ans+d;
```

```cpp
            return ans-d;
        }
        if (!ina && inb)
        {
            const Point p=circ.inter(ab)[0];
            const long double ans=((p-circ.c)^(b-circ.c))/2;
            const long double th=(a-circ.c).ang(p-circ.c);
            const long double d=circ.r*circ.r*th/2;
            if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==1) return ans+d;
            return ans-d;
        }
        const auto p=circ.inter(ab);
        if (p.size()==2 && Segment{a,b}.dis(circ.c)<=circ.r+eps)
        {
            const long double ans=((p[0]-circ.c)^(p[1]-circ.c))/2;
            const long double th1=(a-circ.c).ang(p[0]-circ.c),th2=(b-circ.c).ang(p[1]-circ.c);
            const long double d1=circ.r*circ.r*th1/2,d2=circ.r*circ.r*th2/2;
            if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==1) return ans+d1+d2;
            return ans-d1-d2;
        }
        const long double th=(a-circ.c).ang(b-circ.c);
        if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==1) return circ.r*circ.r*th/2;
        return -circ.r*circ.r*th/2;
    };

    long double ans=0;
    for (size_t i=0;i<poly.p.size();i++)
    {
        const Point a=poly.p[i],b=poly.p[poly.nxt(i)];
        ans+=cal(circ,a,b);
    }
    return ans;
}

// 点集的凸包
// Andrew 算法，复杂度 O(nlogn)
Convex convexhull(vector<Point> p)
{
    vector<Point> st;
    if (p.empty()) return Convex{st};
    sort(p.begin(),p.end());
    const auto check=[](const vector<Point> &st,const Point &u)
    {
        const auto back1=st.back(),back2=*prev(st.end(),2);
        return (back1-back2).toleft(u-back1)<=0;
    };
    for (const Point &u:p)
    {
        while (st.size()>1 && check(st,u)) st.pop_back();
        st.push_back(u);
    }
    size_t k=st.size();
    p.pop_back(); reverse(p.begin(),p.end());
    for (const Point &u:p)
    {
        while (st.size()>k && check(st,u)) st.pop_back();
        st.push_back(u);
    }
    st.pop_back();
    return Convex{st};
}

// 半平面交
// 排序增量法，复杂度 O(nlogn)
// 输入与返回值都是用直线表示的半平面集合
vector<Line> halfinter(vector<Line> l, const point_t lim=1e9)
{
    const auto check=[](const Line &a,const Line &b,const Line &c){return a.toleft(b.inter(c))<0;};
    // 无精度误差的方法，但注意取值范围会扩大到三次方
    /*const auto check=[](const Line &a,const Line &b,const Line &c)
    {
```

```cpp
        const Point p=a.v*(b.v^c.v),q=b.p*(b.v^c.v)+b.v*(c.v^(b.p-c.p))-a.p*(b.v^c.v);
        return p.toleft(q)<0;
    };*/
    l.push_back({{-lim,0},{0,-1}}); l.push_back({{0,-lim},{1,0}});
    l.push_back({{lim,0},{0,1}}); l.push_back({{0,lim},{-1,0}});
    sort(l.begin(),l.end());
    deque<Line> q;
    for (size_t i=0;i<l.size();i++)
    {
        if (i>0 && l[i-1].v.toleft(l[i].v)==0 && l[i-1].v*l[i].v>eps) continue;
        while (q.size()>1 && check(l[i],q.back(),q[q.size()-2])) q.pop_back();
        while (q.size()>1 && check(l[i],q[0],q[1])) q.pop_front();
        if (!q.empty() && q.back().v.toleft(l[i].v)<=0) return vector<Line>();
        q.push_back(l[i]);
    }
    while (q.size()>1 && check(q[0],q.back(),q[q.size()-2])) q.pop_back();
    while (q.size()>1 && check(q.back(),q[0],q[1])) q.pop_front();
    return vector<Line>(q.begin(),q.end());
}

// 点集形成的最小最大三角形
// 极角序扫描线，复杂度 O(n^2logn)
// 最大三角形问题可以使用凸包与旋转卡壳做到 O(n^2)
pair<point_t,point_t> minmax_triangle(const vector<Point> &vec)
{
    if (vec.size()<=2) return {0,0};
    vector<pair<int,int>> evt;
    evt.reserve(vec.size()*vec.size());
    point_t maxans=0,minans=INF;
    for (size_t i=0;i<vec.size();i++)
    {
        for (size_t j=0;j<vec.size();j++)
        {
            if (i==j) continue;
            if (vec[i]==vec[j]) minans=0;
            else evt.push_back({i,j});
        }
    }
    sort(evt.begin(),evt.end(),[&](const pair<int,int> &u,const pair<int,int> &v)
    {
        const Point du=vec[u.second]-vec[u.first],dv=vec[v.second]-vec[v.first];
        return argcmp()({du.y,-du.x},{dv.y,-dv.x});
    });
    vector<size_t> vx(vec.size()),pos(vec.size());
    for (size_t i=0;i<vec.size();i++) vx[i]=i;
    sort(vx.begin(),vx.end(),[&](int x,int y){return vec[x]<vec[y];});
    for (size_t i=0;i<vx.size();i++) pos[vx[i]]=i;
    for (auto [u,v]:evt)
    {
        const size_t i=pos[u],j=pos[v];
        const size_t l=min(i,j),r=max(i,j);
        const Point vecu=vec[u],vecv=vec[v];
        if (l>0) minans=min(minans,abs((vec[vx[l-1]]-vecu)^(vec[vx[l-1]]-vecv)));
        if (r<vx.size()-1) minans=min(minans,abs((vec[vx[r+1]]-vecu)^(vec[vx[r+1]]-vecv)));
        maxans=max({maxans,abs((vec[vx[0]]-vecu)^(vec[vx[0]]-vecv)),abs((vec[vx.back()]-vecu)^(vec[vx.back()]-vecv))});
        if (i<j) swap(vx[i],vx[j]),pos[u]=j,pos[v]=i;
    }
    return {minans,maxans};
}

// 平面最近点对
// 扫描线，复杂度 O(nlogn)
point_t closest_pair(vector<Point> points)
{
    sort(points.begin(),points.end());
    const auto cmpy=[](const Point &a,const Point &b){if (abs(a.y-b.y)<=eps) return a.x<b.x-eps; return a.y<b.y-eps;};
    multiset<Point,decltype(cmpy)> s{cmpy};
    point_t ans=INF;
    for (size_t i=0,l=0;i<points.size();i++)
```

```
    {
        const point_t sqans=sqrtl(ans)+1;  // 整数情况
        // const point_t sqans=sqrtl(ans)+1;  // 浮点数情况
        while (l<i && points[i].x-points[l].x>=sqans) s.erase(s.find(points[l++]));
        for (auto it=s.lower_bound(Point{-INF,points[i].y-sqans});it!=s.end()&&it->y-points[i].y<=sqans;it++)
        {
            ans=min(ans,points[i].dis2(*it));
        }
        s.insert(points[i]);
    }
    return ans;
}

// 判断多条线段是否有交点
// 扫描线，复杂度 O(nlogn)
bool segs_inter(const vector&lt;Segment&gt; &segs)
{
    if (segs.empty()) return false;
    using seq_t=tuple<point_t,int,Segment>;
    const auto seqcmp=[](const seq_t &u, const seq_t &v)
    {
        const auto [u0,u1,u2]=u;
        const auto [v0,v1,v2]=v;
        if (abs(u0-v0)<=eps) return make_pair(u1,u2)<make_pair(v1,v2);
        return u0<v0-eps;
    };
    vector<seq_t> seq;
    for (auto seg:segs)
    {
        if (seg.a.x>seg.b.x+eps) swap(seg.a,seg.b);
        seq.push_back({seg.a.x,0,seg});
        seq.push_back({seg.b.x,1,seg});
    }
    sort(seq.begin(),seq.end(),seqcmp);
    point_t x_now;
    auto cmp=[&](const Segment &u, const Segment &v)
    {
        if (abs(u.a.x-u.b.x)<=eps || abs(v.a.x-v.b.x)<=eps) return u.a.y<v.a.y-eps;
        return ((x_now-u.a.x)*(u.b.y-u.a.y)+u.a.y*(u.b.x-u.a.x))*(v.b.x-v.a.x)<((x_now-v.a.x)*(v.b.y-
↪   v.a.y)+v.a.y*(v.b.x-v.a.x))*(u.b.x-u.a.x)-eps;
    };
    multiset&lt;Segment,decltype(cmp)&gt; s{cmp};
    for (const auto [x,o,seg]:seq)
    {
        x_now=x;
        const auto it=s.lower_bound(seg);
        if (o==0)
        {
            if (it!=s.end() && seg.is_inter(*it)) return true;
            if (it!=s.begin() && seg.is_inter(*prev(it))) return true;
            s.insert(seg);
        }
        else
        {
            if (next(it)!=s.end() && it!=s.begin() && (*prev(it)).is_inter(*next(it))) return true;
            s.erase(it);
        }
    }
    return false;
}

// 多边形面积并
// 轮廓积分，复杂度 O(n^2logn)，n 为边数
// ans[i] 表示被至少覆盖了 i+1 次的区域的面积
vector<long double> area_union(const vector<Polygon> &polys)
{
    const size_t siz=polys.size();
    vector<vector<pair<Point,Point>>> segs(siz);
    const auto check=[](const Point &u,const Segment &e){return !((u<e.a && u<e.b) || (u>e.a && u>e.b));};

    auto cut_edge=[&](const Segment &e,const size_t i)
```

```
    {
        const Line le{e.a,e.b-e.a};
        vector<pair<Point,int>> evt;
        evt.push_back({e.a,0}); evt.push_back({e.b,0});
        for (size_t j=0;j<polys.size();j++)
        {
            if (i==j) continue;
            const auto &pj=polys[j];
            for (size_t k=0;k<pj.p.size();k++)
            {
                const Segment s={pj.p[k],pj.p[pj.nxt(k)]};
                if (le.toleft(s.a)==0 && le.toleft(s.b)==0)
                {
                    evt.push_back({s.a,0});
                    evt.push_back({s.b,0});
                }
                else if (s.is_inter(le))
                {
                    const Line ls{s.a,s.b-s.a};
                    const Point u=le.inter(ls);
                    if (le.toleft(s.a)<0 && le.toleft(s.b)>=0) evt.push_back({u,-1});
                    else if (le.toleft(s.a)>=0 && le.toleft(s.b)<0) evt.push_back({u,1});
                }
            }
        }
        sort(evt.begin(),evt.end());
        if (e.a>e.b) reverse(evt.begin(),evt.end());
        int sum=0;
        for (size_t i=0;i<evt.size();i++)
        {
            sum+=evt[i].second;
            const Point u=evt[i].first,v=evt[i+1].first;
            if (!(u==v) && check(u,e) && check(v,e)) segs[sum].push_back({u,v});
            if (v==e.b) break;
        }
    };

    for (size_t i=0;i<polys.size();i++)
    {
        const auto &pi=polys[i];
        for (size_t k=0;k<pi.p.size();k++)
        {
            const Segment ei={pi.p[k],pi.p[pi.nxt(k)]};
            cut_edge(ei,i);
        }
    }
    vector<long double> ans(siz);
    for (size_t i=0;i<siz;i++)
    {
        long double sum=0;
        sort(segs[i].begin(),segs[i].end());
        int cnt=0;
        for (size_t j=0;j<segs[i].size();j++)
        {
            if (j>0 && segs[i][j]==segs[i][j-1]) segs[i+(++cnt)].push_back(segs[i][j]);
            else cnt=0,sum+=segs[i][j].first^segs[i][j].second;
        }
        ans[i]=sum/2;
    }
    return ans;
}

// 圆面积并
// 轮廓积分，复杂度 O(n^2logn)
// ans[i] 表示被至少覆盖了 i+1 次的区域的面积
vector<long double> area_union(const vector<Circle> &circs)
{
    const size_t siz=circs.size();
    using arc_t=tuple<Point,long double,long double,long double>;
    vector<vector<arc_t>> arcs(siz);
    const auto eq=[](const arc_t &u,const arc_t &v)
```

```
    {
        const auto [u1,u2,u3,u4]=u;
        const auto [v1,v2,v3,v4]=v;
        return u1==v1 && abs(u2-v2)<=eps && abs(u3-v3)<=eps && abs(u4-v4)<=eps;
    };

    auto cut_circ=[&](const Circle &ci,const size_t i)
    {
        vector<pair<long double,int>> evt;
        evt.push_back({-PI,0}); evt.push_back({PI,0});
        int init=0;
        for (size_t j=0;j<circs.size();j++)
        {
            if (i==j) continue;
            const Circle &cj=circs[j];
            if (ci.r<cj.r-eps && ci.relation(cj)>=3) init++;
            const auto inters=ci.inter(cj);
            if (inters.size()==1) evt.push_back({atan2l((inters[0]-ci.c).y,(inters[0]-ci.c).x),0});
            if (inters.size()==2)
            {
                const Point dl=inters[0]-ci.c,dr=inters[1]-ci.c;
                long double argl=atan2l(dl.y,dl.x),argr=atan2l(dr.y,dr.x);
                if (abs(argl+PI)<=eps) argl=PI;
                if (abs(argr+PI)<=eps) argr=PI;
                if (argl>argr+eps)
                {
                    evt.push_back({argl,1}); evt.push_back({PI,-1});
                    evt.push_back({-PI,1}); evt.push_back({argr,-1});
                }
                else
                {
                    evt.push_back({argl,1});
                    evt.push_back({argr,-1});
                }
            }
        }
        sort(evt.begin(),evt.end());
        int sum=init;
        for (size_t i=0;i<evt.size();i++)
        {
            sum+=evt[i].second;
            if (abs(evt[i].first-evt[i+1].first)>eps) arcs[sum].push_back({ci.c,ci.r,evt[i].first,evt[i+1].first});
            if (abs(evt[i+1].first-PI)<=eps) break;
        }
    };

    const auto oint=[](const arc_t &arc)
    {
        const auto [cc,cr,l,r]=arc;
        if (abs(r-l-PI-PI)<=eps) return 2.0l*PI*cr*cr;
        return cr*cr*(r-l)+cc.x*cr*(sin(r)-sin(l))-cc.y*cr*(cos(r)-cos(l));
    };

    for (size_t i=0;i<circs.size();i++)
    {
        const auto &ci=circs[i];
        cut_circ(ci,i);
    }
    vector<long double> ans(siz);
    for (size_t i=0;i<siz;i++)
    {
        long double sum=0;
        sort(arcs[i].begin(),arcs[i].end());
        int cnt=0;
        for (size_t j=0;j<arcs[i].size();j++)
        {
            if (j>0 && eq(arcs[i][j],arcs[i][j-1])) arcs[i+(++cnt)].push_back(arcs[i][j]);
            else cnt=0,sum+=oint(arcs[i][j]);
        }
        ans[i]=sum/2;
    }
```

```
    return ans;
}
```