

Standard Code Library

SDU-TCS

Shandong University

October 14, 2024

Contents

一切的开始	4
数据结构	4
ST 表	4
线段树	5
树上动态直径	6
扫描线	8
Seg beats	10
树状数组	12
DSU	12
Splay	13
LCT	13
珂朵莉树	15
李超树	15
动态维护凸壳	16
线段树合并	17
图论	18
树链剖分	18
LCA	18
倍增求 LCA	18
dfn 求 LCA	19
树哈希	19
虚树	20
最小环	20
差分约束	20
最大流	21
最小费用最大流	22
二分图最大匹配	23
KM(二分图最大权匹配)	23
一般图最大匹配	25
缩点 SCC	27
割点与桥	27
边双缩点	28
圆方树	28
广义圆方树	29
2-SAT	29
环计数	29
字符串	30
manacher	30
SA	30
PAM	32
SAM	34
ACAM	36
KMP	37
KMP 自动机	38
Z 函数	38
LCP	38
Hash	39
数学	39
数论	39
扩展欧几里得 (线性同余方程, 斐蜀定理)	39
费马小定理 (逆元)	40
线性求逆元	40

CRT (中国剩余定理)	40
卢卡斯定理	40
原根	40
离散对数 (BSGS)	41
威尔逊定理	41
数论分块	41
积性函数	42
线性筛	42
欧拉函数	42
欧拉定理及扩展	43
狄利克雷卷积	43
莫比乌斯反演	43
欧拉反演	43
杜教筛	44
Min_25	44
素数测试与因式分解 (Miller-Rabin & Pollard-Rho)	46
公式	48
组合数学	48
组合化简技巧	48
鸽巢原理	50
容斥原理	50
二项式定理	50
多重集的排列数 多重组合数	50
多重集的组合数 1	50
多重集的组合数 2	51
圆排列	51
错排	52
Catalan 数	52
Stirling 数	52
高维前缀和	52
二项式反演	52
斯特林反演	53
子集反演	53
最值反演 (min-max 容斥)	53
线性代数	53
高斯消元	53
线性基	54
Prüfer 序列	55
LGV 引理	55
矩阵树定理	56
BEST 定理	56
博弈	56
多项式	57
拉格朗日插值	57
普通幂与上升幂和下降幂	57
多项式操作技巧	58
分治 FFT	58
循环卷积	58
差卷积	58
乘法卷积	58
ln 转 exp	58
FWT	59
OGF	59
EGF	60
集合幂级数	60
FFT	61

多项式全家桶	62
计算几何	69
二维计算几何	69
动态凸包	77
最小圆覆盖	78
其他人的板子	79

一切的开始

数据结构

ST 表

```
1  template<class T,  
2      class Cmp = std::less<T>>  
3  struct RMQ {  
4      const Cmp cmp = Cmp();  
5      static constexpr unsigned B = 64;  
6      using u64 = unsigned long long;  
7      int n;  
8      std::vector<std::vector<T>> a;  
9      std::vector<T> pre, suf, ini;  
10     std::vector<u64> stk;  
11     RMQ() {}  
12     RMQ(const std::vector<T> &v) {  
13         init(v);  
14     }  
15     void init(const std::vector<T> &v) {  
16         n = v.size();  
17         pre = suf = ini = v;  
18         stk.resize(n);  
19         if (!n) {  
20             return;  
21         }  
22         const int M = (n - 1) / B + 1;  
23         const int lg = std::__lg(M);  
24         a.assign(lg + 1, std::vector<T>(M));  
25         for (int i = 0; i < M; i++) {  
26             a[0][i] = v[i * B];  
27             for (int j = 1; j < B && i * B + j < n; j++) {  
28                 a[0][i] = std::min(a[0][i], v[i * B + j], cmp);  
29             }  
30         }  
31         for (int i = 1; i < n; i++) {  
32             if (i % B) {  
33                 pre[i] = std::min(pre[i], pre[i - 1], cmp);  
34             }  
35         }  
36         for (int i = n - 2; i >= 0; i--) {  
37             if (i % B != B - 1) {  
38                 suf[i] = std::min(suf[i], suf[i + 1], cmp);  
39             }  
40         }  
41         for (int j = 0; j < lg; j++) {  
42             for (int i = 0; i + (2 << j) <= M; i++) {  
43                 a[j + 1][i] = std::min(a[j][i], a[j][i + (1 << j)], cmp);  
44             }  
45         }  
46         for (int i = 0; i < M; i++) {  
47             const int l = i * B;  
48             const int r = std::min(1U * n, l + B);  
49             u64 s = 0;  
50             for (int j = l; j < r; j++) {  
51                 while (s && cmp(v[j], v[std::__lg(s) + l])) {  
52                     s ^= 1ULL << std::__lg(s);  
53                 }  
54                 s |= 1ULL << (j - l);  
55                 stk[j] = s;  
56             }  
57         }  
58     }  
59     T operator()(int l, int r) {  
60         if (l / B != (r - 1) / B) {  
61             T ans = std::min(suf[l], pre[r - 1], cmp);  
62             l = l / B + 1;  
63             r = r / B;  
64             if (l < r) {
```

```

65         int k = std::__lg(r - l);
66         ans = std::min({ans, a[k][l], a[k][r - (1 << k)]}, cmp);
67     }
68     return ans;
69 } else {
70     int x = B * (l / B);
71     return ini[__builtin_ctzll(stk[r - 1] >> (l - x)) + 1];
72 }
73 }
74 };
75

```

线段树

```

1  struct SegTree {
2      int l, r;
3      SegTree *ls, *rs;
4      int sum;
5      int mx;
6      int mn;
7      int plus = 0;
8      SegTree(const int L, const int R) : l(L), r(R) {
9          plus = 0; mx = mn = 0;
10         if (L == R) {
11             /*Initial*/
12             // sum = 1;
13             ls = rs = nullptr;
14         } else {
15             int M = (L + R) >> 1;
16             ls = new SegTree(L, M);
17             rs = new SegTree(M + 1, R);
18             pushup();
19         }
20     }
21     void pushup() {
22         sum = ls->sum + rs->sum;
23         mn = min(ls->mn, rs->mn);
24         mx = max(ls->mx, rs->mx);
25     }
26     void make_tag(long long w) {
27         sum += (r - l + 1) * w;
28         mn += w;
29         mx += w;
30         plus += w;
31     }
32     void pushdown() {
33         if (plus == 0) return;
34         ls->make_tag(plus);
35         rs->make_tag(plus);
36         plus = 0;
37     }
38     void upd(const int L, const int R, const int w) {
39         if ((L > r) || (l > R)) return;
40         if ((L <= l) && (r <= R)) {
41             make_tag(w);
42         } else {
43             pushdown();
44             ls->upd(L, R, w);
45             rs->upd(L, R, w);
46             pushup();
47         }
48     }
49     void upd(const int x, const int w) {
50         if ((x > r) || (l > x)) return;
51         if (l == x && r == x) {
52             sum = w;
53         } else {
54             ls->upd(x, w);
55             rs->upd(x, w);
56             pushup();
57         }
58     }
59 }

```

```

58     }
59     int qry(const int L,const int R) {
60         if ((L > r) || (l > R)) return 0;
61         if ((L <= l) && (r <= R)) {
62             return sum;
63         } else {
64             pushdown();
65             return ls->qry(L, R) + rs->qry(L, R);
66         }
67     }
68     bool check(int w) {
69         if(mn < w - 1 || mx > w)return false;
70         return true;
71     }
72     int findR(int L,int R,int w) {
73         if ((L > r) || (l > R)) return -1;
74         if ((L <= l) && (r <= R)) {
75             if(check(w)) return -1;
76             if(l == r) {
77                 return l;
78             }
79         }
80         pushdown();
81         int res = ls->findR(L,R,w);
82         if(res == -1) {
83             res = rs->findR(L,R,w);
84         }
85         return res;
86     }
87 };

```

树上动态直径

```

1  #include<bits/stdc++.h>
2
3  using namespace std;
4
5  using ll = long long;
6  using pii = pair<int,int>;
7
8  const int maxn = 2e5 + 7;
9  int n,q;
10 ll w;
11 vector<pair<int,ll>> e[maxn];
12
13 ll c[maxn];
14 void add(int x,ll y) {
15     for(;x <= n;x += (x & (-x))) c[x] += y;
16 }
17 void change(int l,int r,ll x) { // [l,r]
18     add(l,x);add(r + 1,-x);
19 }
20 ll ask(int x) {
21     ll ans = 0;
22     for(;x > 0;x -= (x & (-x))) ans += c[x];
23     return ans;
24 }
25
26 int dfn[maxn],mi[22][maxn],id[maxn],siz[maxn],cnt;
27 int get(int x, int y) {return dfn[x] < dfn[y] ? x : y;}
28 void dfs(int x, int fa) {
29     mi[0][dfn[x] = ++cnt] = fa;
30     id[cnt] = x;siz[x] = 1;
31     for(auto [v,w] : e[x]) {
32         if(v == fa) continue;
33         dfs(v,x);
34         change(dfn[v],dfn[v] + siz[v] - 1,w);
35         siz[x] += siz[v];
36     }
37 }
38 int lca(int u, int v) {

```

```

39     if(u == v) return u;
40     if((u = dfn[u]) > (v = dfn[v])) swap(u, v);
41     int d = __lg(v - u++);
42     return get(mi[d][u], mi[d][v - (1 << d) + 1]);
43 }
44 ll dis(pii a) {
45     auto [u,v] = a;
46     return ask(dfn[u]) + ask(dfn[v]) - 2 * ask(dfn[lca(u,v)]);
47 }
48
49 pii tr[maxn << 2];
50 pii merge(pii &a,pii &b) {
51     pii p[6] = {a,b,{a.first,b.first},{a.first,b.second},{a.second,b.first},{a.second,b.second}};
52     vector<ll> d(6);
53     for(int i = 0;i < 6;i++) d[i] = dis(p[i]);
54     return p[max_element(d.begin(),d.end()) - d.begin()];
55 }
56 void build(int x,int l,int r) {
57     if(l == r) {
58         tr[x] = {id[l],id[l]};
59         return ;
60     }
61     int mid = l + r >> 1;
62     build(x << 1,l,mid);
63     build(x << 1 | 1,mid + 1,r);
64     tr[x] = merge(tr[x << 1],tr[x << 1 | 1]);
65 }
66 void update(int x,int L,int R,int l,int r) {
67     if(L == l && r == R) return ;
68     int mid = L + R >> 1;
69     if(r <= mid) update(x << 1,L,mid,l,r);
70     else if(l > mid) update(x << 1 | 1,mid + 1,R,l,r);
71     else update(x << 1,L,mid,l,mid),update(x << 1 | 1,mid + 1,R,mid + 1,r);
72     tr[x] = merge(tr[x << 1],tr[x << 1 | 1]);
73 }
74
75 int main() {
76     ios::sync_with_stdio(false);
77     cin.tie(0);
78     cin >> n >> q >> w;
79     vector<tuple<int,int,int>> edges;
80     for(int i = 0;i < n - 1;i++) {
81         int x,y;ll z;
82         cin >> x >> y >> z;
83         e[x].push_back({y,z});
84         e[y].push_back({x,z});
85         edges.emplace_back(x,y,z);
86     }
87     dfs(1, 0);
88     for(int i = 1; i <= __lg(n); i++)
89         for(int j = 1; j + (1 << i) - 1 <= n; j++)
90             mi[i][j] = get(mi[i - 1][j], mi[i - 1][j + (1 << i - 1)]);
91     ll lastans = 0;
92     build(1,1,n);
93     for(int i = 0;i < q;i++) {
94         int x;ll y;
95         cin >> x >> y;
96         x = (x + lastans) % (n - 1);
97         y = (y + lastans) % w;
98         auto [son,fa,ww] = edges[x];
99         if(dfn[son] < dfn[fa]) swap(son,fa);
100         change(dfn[son],dfn[son] + siz[son] - 1,y - ww);
101         update(1,1,n,dfn[son],dfn[son] + siz[son] - 1);
102         lastans = dis(tr[1]);
103         cout << lastans << "\n";
104         ww = y;
105         edges[x] = {son,fa,ww};
106     }
107 }

```


扫描线

```
1 //二维数点
2 struct Segment{
3     int l,r,h,add;
4     bool operator <(const Segment a)const{
5         return h < a.h;
6     }
7 };
8 struct SegTree {
9     int l, r;
10    SegTree *ls, *rs;
11    int mn,len;
12    int plus;
13    SegTree (const int L, const int R) : l(L), r(R) {
14        plus = 0;len = 0;
15        if (L == R) {
16            ls = rs = nullptr;
17        } else {
18            int M = (L + R) >> 1;
19            ls = new SegTree (L, M);
20            rs = new SegTree (M + 1, R);
21            pushup();
22        }
23    }
24    void pushup() {
25        if(plus) len = r - l + 1;
26        else if(l == r)len = 0;
27        else len = ls->len + rs->len;
28    }
29    void make_tag(int w) {
30        plus += w;
31    }
32    void pushdown() {
33        if (plus == 0) return;
34        ls->make_tag(plus);
35        rs->make_tag(plus);
36        plus = 0;
37    }
38    void update(const int L, const int R, const int w) {
39        if ((L > r) || (l > R)) {
40            return;
41        }
42        if ((L <= l) && (r <= R)) {
43            make_tag(w);
44            pushup();
45            return ;
46        } else {
47            ls->update(L, R, w);
48            rs->update(L, R, w);
49            pushup();
50        }
51    }
52 };
53 //矩形面积并
54 #include<bits/stdc++.h>
55
56 using namespace std;
57 typedef long long ll;
58 const double eps = 1e-8;
59 const int maxn = 2e5 + 7;
60 std::vector<int> x;
61 struct Segment{
62     int l,r,h,add;
63     bool operator <(const Segment a)const{
64         return h < a.h;
65     }
66 };
67 struct SegTree {
68     int l, r;
69     SegTree *ls, *rs;
```

```

70     int mn, len;
71     int plus;
72     SegTree (const int L, const int R) : l(L), r(R) {
73         plus = 0; len = 0;
74         if (L == R) {
75             ls = rs = nullptr;
76         } else {
77             int M = (L + R) >> 1;
78             ls = new SegTree (L, M);
79             rs = new SegTree (M + 1, R);
80             pushup();
81         }
82     }
83     void pushup() {
84         if(plus) len = x[r] - x[l - 1];
85         else if(l == r) len = 0;
86         else len = ls->len + rs->len;
87     }
88     void make_tag(int w) {
89         plus += w;
90     }
91     void pushdown() {
92         if (plus == 0) return;
93         ls->make_tag(plus);
94         rs->make_tag(plus);
95         plus = 0;
96     }
97     void update(const int L, const int R, const int w) {
98         if ((L >= x[r]) || (x[l - 1] >= R)) {
99             return;
100         }
101         if ((L <= x[l - 1]) && (x[r] <= R)) {
102             make_tag(w);
103             pushup();
104             return;
105         } else {
106             //pushdown();
107             ls->update(L, R, w);
108             rs->update(L, R, w);
109             pushup();
110         }
111     }
112 };
113 int main(){
114     ios::sync_with_stdio(false);
115     cin.tie(0);
116
117     vector<Segment> s;
118     int n;
119     cin >> n;
120     for(int i = 0; i < n; i++){
121         int xa, ya, xb, yb;
122         cin >> xa >> ya >> xb >> yb;
123         x.push_back(xa);
124         x.push_back(xb);
125         s.push_back({xa, xb, ya, 1});
126         s.push_back({xa, xb, yb, -1});
127     }
128     sort(s.begin(), s.end());
129     sort(x.begin(), x.end());
130     x.erase(unique(x.begin(), x.end()), x.end());
131     int N = x.size();
132     SegTree Seg(1, N - 1);
133     ll ans = 0;
134     if(s.size()){
135         Seg.update(s[0].l, s[0].r, s[0].add);
136         for(int i = 1; i < s.size(); i++){
137             ans += 1ll * Seg.len * (s[i].h - s[i - 1].h);
138             Seg.update(s[i].l, s[i].r, s[i].add);
139         }
140     }

```

```

141     cout << ans << "\n";
142     return 0;
143 }

```

Seg beats

本质上是维护了两棵线段树，A 树维护区间内最大值产生的贡献，B 树维护剩下树的贡献。注意 A 树某节点的孩子不一定全部能贡献到该节点，因为孩子的最大值不一定是父亲的最大值。所以要注意下传标记时，A 树的孩子下传的可能是 B 的标记。

beats 的部分是，每次让序列里每个数对另一个数 V 取 \min ，则直接暴力递归到 inRange 且 B 的最大值小于 V 的那些节点上，转化成对 A 那个节点的区间加法（加上 $V - \text{val}_A$ ）即可。这么做的均摊复杂度是 $O(\log n)$ 。

做区间历史最大值的方法是，维护两个标记 x, y ， x 是真正的加标记， y 是 x 在上次下传结束并清零后的历史最大值。下传时注意先下传 y 再下传 x 。实现历史最值是平凡的，不需要 beats。beats 解决的仅是取 \min 的操作。

下面五个操作分别是：区间加，区间对 k 取 \min ，区间求和，区间最大值，区间历史最大值。

```

1  #include <array>
2  #include <iostream>
3  #include <algorithm>
4
5  typedef long long int ll;
6
7  const int maxn = 500005;
8
9  ll a[maxn];
10
11 const ll inf = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;
12
13 struct Node {
14     Node *ls, *rs;
15     int l, r, maxCnt;
16     ll v, add, maxAdd, sum, maxV, maxHistory;
17
18     Node(const int L, const int R) :
19         ls(nullptr), rs(nullptr), l(L), r(R), maxCnt(0),
20         v(0), add(0), maxAdd(0), sum(0), maxV(-inf), maxHistory(-inf) {}
21
22     inline bool inRange(const int L, const int R) {
23         return L <= l && r <= R;
24     }
25     inline bool outRange(const int L, const int R) {
26         return l > R || L > r;
27     }
28
29     void addVal(const ll t, int len) {
30         add += t;
31         sum += len * t;
32         maxV += t;
33     }
34
35     void makeAdd(const ll t, int len) {
36         addVal(t, len);
37         maxHistory = std::max(maxHistory, maxV);
38         maxAdd = std::max(maxAdd, add);
39     }
40 };
41
42 void pushup(Node *x, Node *y) {
43     y->maxV = std::max(y->ls->maxV, y->rs->maxV);
44     y->sum = y->ls->sum + y->rs->sum;
45     y->maxHistory = std::max({y->maxHistory, y->ls->maxHistory, y->rs->maxHistory});
46     if (x->ls->maxV != x->rs->maxV) {
47         bool flag = x->ls->maxV < x->rs->maxV;
48         if (flag) std::swap(x->ls, x->rs);
49         x->maxV = x->ls->maxV;
50         x->maxCnt = x->ls->maxCnt;
51         y->maxV = std::max(y->maxV, x->rs->maxV);
52         y->sum += x->rs->sum;
53         x->sum = x->ls->sum;

```

```

54     if (flag) std::swap(x->ls, x->rs);
55 } else {
56     x->maxCnt = x->ls->maxCnt + x->rs->maxCnt;
57     x->sum = x->ls->sum + x->rs->sum;
58     x->maxV = x->ls->maxV;
59 }
60 x->maxHistory = std::max({x->ls->maxHistory, x->rs->maxHistory, x->maxHistory, y->maxHistory});
61 }
62
63 void New(Node *&u1, Node *&u2, int L, int R) {
64     u1 = new Node(L, R);
65     u2 = new Node(L, R);
66     if (L == R) {
67         u1->v = u1->sum = u1->maxV = u1->maxHistory = a[L];
68         u1->maxCnt = 1;
69     } else {
70         int M = (L + R) >> 1;
71         New(u1->ls, u2->ls, L, M);
72         New(u1->rs, u2->rs, M + 1, R);
73         pushup(u1, u2);
74     }
75 }
76
77 void pushdown(Node *x, Node *y) {
78     ll val = std::max(x->ls->maxV, x->rs->maxV);
79     std::array<Node*, 2> aim({y, x});
80     Node *curl = aim[x->ls->maxV == val], *curr = aim[x->rs->maxV == val];
81     x->ls->maxAdd = std::max(x->ls->maxAdd, x->ls->add + curl->maxAdd);
82     x->ls->maxHistory = std::max(x->ls->maxHistory, x->ls->maxV + curl->maxAdd);
83     x->ls->addVal(curl->add, x->ls->maxCnt);
84     x->rs->maxAdd = std::max(x->rs->maxAdd, x->rs->add + curr->maxAdd);
85     x->rs->maxHistory = std::max(x->rs->maxHistory, x->rs->maxV + curr->maxAdd);
86     x->rs->addVal(curr->add, x->rs->maxCnt);
87     y->ls->maxAdd = std::max(y->ls->maxAdd, y->ls->add + y->maxAdd);
88     y->rs->maxAdd = std::max(y->rs->maxAdd, y->rs->add + y->maxAdd);
89     y->ls->addVal(y->add, x->ls->r - x->ls->l + 1 - x->ls->maxCnt);
90     y->rs->addVal(y->add, x->rs->r - x->rs->l + 1 - x->rs->maxCnt);
91     x->add = y->add = x->maxAdd = y->maxAdd = 0;
92 }
93
94 void addV(Node *x, Node *y, int L, int R, ll k) {
95     if (x->inRange(L, R)) {
96         x->makeAdd(k, x->maxCnt);
97         y->makeAdd(k, x->r - x->l + 1 - x->maxCnt);
98     } else if (!x->outRange(L, R)) {
99         pushdown(x, y);
100         addV(x->ls, y->ls, L, R, k);
101         addV(x->rs, y->rs, L, R, k);
102         pushup(x, y);
103     }
104 }
105
106 std::array<ll, 3> qry(Node *x, Node *y, const int L, const int R) {
107     if (x->inRange(L, R)) return {x->sum + y->sum * ((x->r - x->l + 1) != x->maxCnt), x->maxV, x->maxHistory};
108     else if (x->outRange(L, R)) return {0, -inf, -inf};
109     else {
110         pushdown(x, y);
111         auto A = qry(x->ls, y->ls, L, R), B = qry(x->rs, y->rs, L, R);
112         return {A[0] + B[0], std::max(A[1], B[1]), std::max(A[2], B[2])};
113     }
114 }
115
116 void minV(Node *x, Node *y, const int L, const int R, int k) {
117     if (x->maxV <= k) return;
118     if (x->inRange(L, R) && y->maxV < k) {
119         ll delta = k - x->maxV;
120         x->makeAdd(delta, x->maxCnt);
121     } else if (!x->outRange(L, R)) {
122         pushdown(x, y);
123         minV(x->ls, y->ls, L, R, k);
124         minV(x->rs, y->rs, L, R, k);

```

```

125     pushup(x, y);
126 }
127 }
128
129 int main() {
130     std::ios::sync_with_stdio(false);
131     std::cin.tie(nullptr);
132     int n, m;
133     std::cin >> n >> m;
134     for (int i = 1; i <= n; ++i) std::cin >> a[i];
135     Node *rot1, *rot2;
136     New(rot1, rot2, 1, n);
137     for (int op, l, r; m; --m) {
138         std::cin >> op >> l >> r;
139         if (op == 1) {
140             std::cin >> op;
141             addV(rot1, rot2, l, r, op);
142         } else if (op == 2) {
143             std::cin >> op;
144             minV(rot1, rot2, l, r, op);
145         } else {
146             std::cout << qry(rot1, rot2, l, r)[op - 3] << '\n';
147         }
148     }
149 }

```

树状数组

```

1  template <typename T>
2  struct Fenwick {
3      int n;
4      std::vector<T> a;
5      Fenwick(int n) : n(n), a(n) {}
6      void add(int x, T v) {
7          for (int i = x + 1; i <= n; i += i & -i) {
8              a[i - 1] += v;
9          }
10     }
11     T sum(int x) {
12         T ans = 0;
13         for (int i = x; i > 0; i -= i & -i) {
14             ans += a[i - 1];
15         }
16         return ans;
17     }
18     T rangeSum(int l, int r) {
19         return sum(r) - sum(l);
20     }
21     int kth(T k) {
22         int x = 0;
23         // 先从高位开始取, 如果当前这一位可以取, 那么就考虑下一位是取 1 还是 0
24         // 到最后找到的就是最大的那个 pos 并且对应的 <=x 的
25         for (int i = 1 << std::lg(n); i; i /= 2) {
26             if (x + i <= n && k >= a[x + i - 1]) {
27                 x += i;
28                 k -= a[x - 1];
29             }
30         }
31         return x;
32     } // 树状数组上倍增本质上是通过倍增来快速找出对应的区间
33 };

```

DSU

```

1  struct DSU {
2      std::vector<int> f, siz;
3      DSU(int n) : f(n), siz(n, 1) { std::iota(f.begin(), f.end(), 0); }
4      int leader(int x) {
5          while (x != f[x]) x = f[x] = f[f[x]];
6          return x;

```

```

7     }
8     bool same(int x, int y) { return leader(x) == leader(y); }
9     bool merge(int x, int y) {
10         x = leader(x);
11         y = leader(y);
12         if (x == y) return false;
13         siz[x] += siz[y];
14         f[y] = x;
15         return true;
16     }
17     int size(int x) { return siz[leader(x)]; }
18 };

```

Splay

```

1 struct Node {
2     int v, sz, sm;
3     Node *ch[2], *fa;
4
5     Node(const int V, Node *const f) : v(V), sz(1), sm(1), fa(f) {
6         ch[0] = ch[1] = nullptr;
7     }
8
9     inline int GetRela(const int x) { return (v == x) ? -1 : (x > v); }
10
11     void pushup() { sm = (ch[0] ? ch[0]->sm : 0) + (ch[1] ? ch[1]->sm : 0) + sz; }
12
13     inline void rotate(const int x) {
14         auto nrt = ch[x];
15         ch[x] = nrt->ch[x ^ 1];
16         nrt->ch[x ^ 1] = this;
17         if (ch[x]) ch[x]->fa = this;
18         nrt->fa = fa; fa = nrt;
19         if (nrt->fa) nrt->fa->ch[nrt->fa->GetRela(nrt->v)] = nrt;
20         pushup(); nrt->pushup();
21     }
22
23     void splay(const Node *p) {
24         while (fa != p) {
25             auto pa = fa->fa;
26             if (pa == p) {
27                 fa->rotate(fa->GetRela(v));
28             } else {
29                 int k1 = fa->GetRela(v), k2 = pa->GetRela(fa->v);
30                 if (k1 == k2) {
31                     pa->rotate(k1);
32                     fa->rotate(k1);
33                 } else {
34                     fa->rotate(k1);
35                     fa->rotate(k2);
36                 }
37             }
38         }
39     }
40 };

```

LCT

```

1 struct Node {
2     int v, s;
3     bool tag;
4     Node *ch[2], *fa;
5
6     inline void maketag() {
7         tag = !tag;
8         std::swap(ch[0], ch[1]);
9     }
10    inline void pushup() {
11        s = v;
12        for (auto u : ch) if (u != nullptr) {

```

```

13     s ^= u->s;
14 }
15 }
16 inline void pushdown() {
17     if (tag) {
18         for (auto u : ch) if (u != nullptr) {
19             u->maketag();
20         }
21         tag = false;
22     }
23 }
24
25 inline int Getson() { return fa->ch[1] == this; }
26
27 inline bool IsRoot() { return (fa == nullptr) || (fa->ch[Getson()] != this); }
28
29 void rotate(const int x) {
30     auto nt = ch[x];
31     ch[x] = nt->ch[x ^ 1];
32     nt->ch[x ^ 1] = this;
33     if (ch[x]) ch[x]->fa = this;
34     nt->fa = fa;
35     if (!IsRoot()) { fa->ch[Getson()] = nt; }
36     fa = nt;
37     pushup(); nt->pushup();
38 }
39
40 void splay() {
41     static Node* stk[maxn];
42     int top = 0;
43     stk[++top] = this;
44     for (auto u = this; !u->IsRoot(); stk[++top] = u = u->fa);
45     while (top) stk[top--]->pushdown();
46     while (!IsRoot()) {
47         if (fa->IsRoot()) {
48             fa->rotate(Getson());
49         } else {
50             auto pa = fa->fa;
51             int l1 = Getson(), l2 = fa->Getson();
52             if (l1 == l2) {
53                 pa->rotate(l2);
54                 fa->rotate(l1);
55             } else {
56                 fa->rotate(l1);
57                 fa->rotate(l2);
58             }
59         }
60     }
61 }
62 };
63 Node *node[maxn], Mem[maxn];
64
65 void Cut(const int x, const int y);
66 void Link(const int x, const int y);
67 void Query(const int x, const int y);
68 void Update(const int x, const int y);
69
70 void access(Node *u) {
71     for (Node *v = nullptr; u; u = (v = u)->fa) {
72         u->splay();
73         u->ch[1] = v; u->pushup();
74     }
75 }
76
77 void makeroor(Node *const u) {
78     access(u);
79     u->splay();
80     u->maketag();
81 }
82
83 void Query(const int x, const int y) {

```

```

84     auto u = node[x], v = node[y];
85     makeroot(u);
86     access(v);
87     v->splay();
88     qw(v->s, '\n');
89 }
90
91 void Link(const int x, const int y) {
92     auto u = node[x], v = node[y];
93     makeroot(u);
94     access(v); v->splay();
95     if (u->IsRoot() == false) return;
96     u->fa = v;
97 }
98
99 void Cut(const int x, const int y) {
100     auto u = node[x], v = node[y];
101     makeroot(u); access(v); u->splay();
102     if ((u->ch[1] != v) || (v->ch[0] != nullptr)) return;
103     u->ch[1] = v->fa = nullptr;
104     u->pushup();
105 }
106
107 // w[x] -> y
108 void Update(const int x, const int y) {
109     auto u = node[x];
110     u->splay();
111     u->s ^= u->v;
112     u->s ^= (u->v = a[x] = y);
113 }

```

珂朵莉树

```

1  auto getPos(int pos) {
2      return --s.upper_bound({pos + 1, 0, 0});
3  }
4
5  void split(int pos) {
6      auto it = getPos(pos);
7      auto [l, r, v] = *it;
8      s.erase(it);
9      if (pos > l) s.insert({l, pos - 1, v});
10     s.insert({pos, r, v});
11 }
12
13 void add(int l, int r, int v) {
14     split(l); split(r + 1);
15     for (auto x = getPos(l), y = getPos(r + 1); x != y; ++x) {
16         x->v += v;
17     }
18 }
19
20 void upd(int l, int r, int v) {
21     split(l); split(r + 1);
22     s.erase(getPos(l), getPos(r + 1));
23     s.insert({l, r, v});
24 }

```

getPos(pos): 找到 pos 所在的迭代器 split(pos): 把 pos 所在的迭代器区间 [l, r] 分成 [l, pos - 1] 和 [pos, r] 两个

李超树

插入线段 $kx + b$ 求某点最值

```

1  constexpr long long INF = 1'000'000'000'000'000'000;
2  constexpr int C = 100'000;
3  struct Line {
4      ll k, b;
5      int id;
6      Line(ll k, ll b, int id) : k(k), b(b), id(id) {}

```



```

7   };
8   long long f(const Line &line, int x) {
9       return 1LL * line.k * x + line.b;
10  }
11  Line get(Line a, Line c, int x) {
12      ll b = f(a,x), d = f(c,x);
13      return b == d ? (a.id < c.id ? a : c) : b > d ? a : c;
14  }
15  struct Node {
16      Node *lc, *rc;
17      Line line;
18      Node(const Line &line) : lc(nullptr), rc(nullptr), line(line) {}
19  };
20  void modify(Node *&p, int l, int r, Line line) {
21      if (p == nullptr) {
22          p = new Node(Line(0,-1e18,0));
23      }
24      if(l == r) {
25          if(f(p -> line,l) <= f(line,l)) p -> line = line;
26          return ;
27      }
28      int m = (l + r) / 2;
29      if (f(p -> line, m) < f(line, m)) swap(p -> line, line);
30      if (f(p -> line, l) < f(line, l)) modify(p -> lc, l, m, line);
31      else if(f(p -> line, r) < f(line, r)) modify(p -> rc, m + 1, r, line);
32  }
33  Node *merge(Node *p, Node *q, int l, int r) {
34      if (p == nullptr)
35          return q;
36      if (q == nullptr)
37          return p;
38      int m = (l + r) / 2;
39      p -> lc = merge(p -> lc, q -> lc, l, m);
40      p -> rc = merge(p -> rc, q -> rc, m, r);
41      modify(p, l, r, q -> line);
42      return p;
43  }
44  Line query(Node *p, int l, int r, int x) {
45      if (p == nullptr)
46          return Line(0,-1e18,0);
47      if(l == r) return p -> line;
48      int m = (l + r) / 2;
49      if (x <= m) return get(query(p -> lc, l, m, x),p -> line,x);
50      return get(query(p -> rc, m + 1, r, x),p -> line,x);
51  }

```

动态维护凸壳

```

1  /**
2   * Author: Simon Lindholm
3   * Date: 2017-04-20
4   * License: CC0
5   * Source: own work
6   * Description: Container where you can add lines of the form  $kx+m$ , and query maximum values at points  $x$ .
7   * Useful for dynamic programming.
8   * Time:  $O(\log N)$ 
9   * Status: tested
10  */
11
12  struct Line {
13      mutable ll k, m, p;
14      bool operator<(const Line &o) const { return k < o.k; }
15      bool operator<(ll x) const { return p < x; }
16  };
17
18  struct LineContainer: multiset<Line, less<>> {
19      const ll inf = LLONG_MAX;
20      ll val_offset = 0;
21      void offset(ll x) {
22          val_offset += x; //整体加
23      }

```

```

24     ll div(ll a, ll b) {
25         return a / b - ((a^b) < 0 && a%b);
26     }
27     bool isect(iterator x, iterator y) {
28         if (y == end()) {
29             x->p = inf;
30             return 0;
31         }
32         if (x->k == y->k) {
33             x->p = (x->m > y->m)? inf: -inf;
34         } else {
35             x->p = div(y->m - x->m, x->k - y->k);
36         }
37         return x->p >= y->p;
38     }
39     void add(ll k, ll m) {
40         auto z = insert({k, m - val_offset, 0}), y = z++, x = y; //这里加减看情况
41         while (isect(y, z)) z = erase(z);
42         if (x != begin() && isect(--x, y)) isect(x, y = erase(y));
43         while ((y = x) != begin() && (--x)->p >= y->p) isect(x, erase(y));
44     }
45     ll query(ll x) {
46         assert(!empty());
47         auto l = *lower_bound(x);
48         return l.k * x + l.m + val_offset;
49     }
50 };
51
52 LineContainer* merge(LineContainer *S, LineContainer *T) {
53     if (S->size() > T->size())
54         swap(S, T);
55     for (auto l: *S) {
56         T->add(l.k, l.m + S->val_offset);
57     }
58     return T;
59 }

```

线段树合并

```

1     struct Info{
2         int mx = 0, id = 0;
3         Info() {}
4         Info(int mx, int id) :mx(mx), id(id) {}
5     };
6     Info operator+(const Info a, const Info b) {
7         if(a.mx > b.mx) return a;
8         if(b.mx > a.mx) return b;
9         if(a.id < b.id) return a;
10        else return b;
11    }
12    struct Node {
13        int l, r;
14        Node *ls, *rs;
15        Info t;
16        Node(int l, int r) : l(l), r(r), ls(nullptr), rs(nullptr) {}
17    };
18
19    void push_up(Node *&p) {
20        if(p->ls == nullptr) {
21            p->t = p->rs->t; return ;
22        }
23        if(p->rs == nullptr) {
24            p->t = p->ls->t; return ;
25        }
26        p->t = p->ls->t + p->rs->t;
27    }
28    void upd(Node *&p, int l, int r, int x, int w) {
29        if(p == nullptr) {
30            p = new Node(l, r);
31        }
32        if(l == r) {

```

```

33     p->t.mx += w;
34     p->t.id = x;
35     return ;
36 }
37 int mid = l + r >> 1;
38 if(x <= mid) upd(p->ls,l,mid,x,w);
39 else upd(p->rs,mid + 1,r,x,w);
40 push_up(p);
41 }
42
43 Node* merge(Node *p,Node *q,int l,int r) {
44     if(p == nullptr) return q;
45     if(q == nullptr) return p;
46     if(l == r) {
47         p->t.mx += q->t.mx;
48         return p;
49     }
50     int mid = l + r >> 1;
51     p->ls = merge(p->ls,q->ls,l,mid);
52     p->rs = merge(p->rs,q->rs,mid + 1,r);
53     push_up(p);
54     return p;
55 }

```

图论

树链剖分

```

1 // 重链剖分
2 void dfs1(int x) {
3     son[x] = -1;
4     siz[x] = 1;
5     for (auto v:e[x])
6         if (!dep[v]) {
7             dep[v] = dep[x] + 1;
8             fa[v] = x;
9             dfs1(v);
10            siz[x] += siz[v];
11            if (son[x] == -1 || siz[v] > siz[son[x]]) son[x] = v;
12        }
13 }
14
15 void dfs2(int x, int t) {
16     top[x] = t;
17     dfn[x] = ++ cnt;
18     rnk[cnt] = x;
19     if (son[x] == -1) return;
20     dfs2(son[x], t);
21     for (auto v:e[x])
22         if (v != son[x] && v != fa[x]) dfs2(v, v);
23 }
24 int lca(int u, int v) {
25     while (top[u] != top[v]) {
26         if (dep[top[u]] > dep[top[v]])
27             u = fa[top[u]];
28         else
29             v = fa[top[v]];
30     }
31     return dep[u] > dep[v] ? v : u;
32 }

```

LCA

倍增求 LCA

```

1 void dfs(int x){
2     for(int j = 1;j <= 19;j++){
3         f[x][j] = f[f[x][j - 1]][j - 1];
4     }

```

```

5     for(auto v:e[x]){
6         if(v == f[x][0])continue;
7         f[v][0] = x;
8         dep[v] = dep[x] + 1;
9         dfs(v);
10    }
11 }
12 int lca(int u,int v){
13     if(dep[u] < dep[v])swap(u,v);
14     for(int i = 0;i <= 19;i++){
15         if((dep[u] - dep[v]) & (1 << i))u = f[u][i];
16     }
17     if(u == v)return u;
18     for(int j = 19;j >= 0; j--){
19         if(f[u][j] != f[v][j]){
20             u = f[u][j];
21             v = f[v][j];
22         }
23     }
24     return f[u][0];
25 }
26 int kth(int x,int k){
27     for(int i = 0;i <= 19;i++){
28         if(k & (1 << i))x = f[x][i];
29     }
30     return x;
31 }

```

dfn 求 LCA

```

1 int get(int x, int y) {return dfn[x] < dfn[y] ? x : y;}
2 void dfs(int id, int f) {
3     mi[0][dfn[id] = ++dn] = f;
4     for(int it : e[id]) if(it != f) dfs(it, id);
5 }
6 int lca(int u, int v) {
7     if(u == v) return u;
8     if((u = dfn[u]) > (v = dfn[v])) swap(u, v);
9     int d = __lg(v - u++);
10    return get(mi[d][u], mi[d][v - (1 << d) + 1]);
11 }
12 dfs(R, 0);
13 for(int i = 1; i <= __lg(n); i++)
14     for(int j = 1; j + (1 << i) - 1 <= n; j++)
15         mi[i][j] = get(mi[i - 1][j], mi[i - 1][j + (1 << i - 1)]);

```

树哈希

```

1 typedef unsigned long long ull;
2 struct TreeHash{
3     std::vector<int> hs;
4     TreeHash(int n){
5         hs.resize(n,0);
6     }
7     mt19937_64 rnd(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
8     ull bas = rnd();
9     ull H(ull x){
10        return x*x*x*19890535+19260817;
11    }
12    ull F(ull x){
13        return H(x & ((1ll << 32) - 1)) + H(x >> 32);
14    }
15    int flag,n;
16    void dfs(int u,int fa){
17        hs[u] = bas;
18        for(auto v:e[u]){
19            if(v == fa) continue;
20            dfs(v,u);
21            hs[u] += F(hs[v]);
22        }

```

```

23     }
24 };

```

虚树

```

1 void build_virtual_tree(vector<int> &h) {
2     vector<int> a;
3     sort(h.begin(), h.end(), [&](int &a, int &b){
4         return dfn[a] < dfn[b];
5     }); // 把关键点按照 dfn 序排序
6     for (int i = 0; i < h.size(); ++i) {
7         a.push_back(h[i]);
8         if(i + 1 != h.size()) a.push_back(lca(h[i], h[i + 1])); // 插入 lca
9     }
10    sort(a.begin(), a.end(), [&](int &a, int &b){
11        return dfn[a] < dfn[b];
12    }); // 把所有虚树上的点按照 dfn 序排序
13    a.erase(unique(a.begin(), a.end()), a.end());
14    for (int i = 0; i < a.size() - 1; ++i) {
15        int lc = lca(a[i], a[i + 1]);
16        add(lc, a[i + 1]); // 连边, 如有边权 就是 distance(lc, a[i+1])
17    }
18 }

```

最小环

```

1 //floyd 找最小环
2 //dijkstra 暴力删边跑最短路-
3 int floyd(const int &n) {
4     for (int i = 1; i <= n; ++i)
5         for (int j = 1; j <= n; ++j)
6             dis[i][j] = f[i][j]; // 初始化最短路矩阵
7     int ans = inf;
8     for (int k = 1; k <= n; ++k) {
9         for (int i = 1; i < k; ++i)
10            for (int j = 1; j < i; ++j)
11                ans = std::min(ans, dis[i][j] + f[i][k] + f[k][j]); // 更新答案
12        for (int i = 1; i <= n; ++i)
13            for (int j = 1; j <= n; ++j)
14                dis[i][j] = std::min(dis[i][j], dis[i][k] + dis[k][j]); // 正常的 floyd 更新最短路矩阵
15    }
16    return ans;
17 }

```

差分约束

$x_i + C \geq x_j$, 最短路->最大解; 最长路->最小解; 判负环或正环即可

```

1 bool spfa(){
2     queue<int> q;
3     vector<int> vis(n + 1), cnt(n + 1), dis(n + 1, 1e9);
4     dis[1] = 0;
5     cnt[1] = 1;
6     q.push(1);
7     while(!q.empty()){
8         int u = q.front();
9         q.pop();
10        vis[u] = 0;
11        if(cnt[u] >= n) return 1;
12        for(auto v:e[u]){
13            if(dis[v] > dis[u] + len[p]){
14                dis[v] = dis[u] + len[p];
15                if(vis[v] == 0){
16                    vis[v] = 1;
17                    q.push(v);
18                    cnt[v] ++;
19                }
20            }
21        }
22    }
23 }

```

```

22     }
23     return 0;
24 }

```

最大流

```

1  struct Flow {
2      static constexpr int INF = 1e9;
3      int n;
4      struct Edge {
5          int to, cap;
6          Edge(int to, int cap) : to(to), cap(cap) {}
7      };
8      vector<Edge> e;
9      vector<vector<int>> g;
10     vector<int> cur, h;
11     Flow(int n) : n(n), g(n) {}
12     void init(int n) {
13         for (int i = 0; i < n; i++) g[i].clear();
14         e.clear();
15     }
16     bool bfs(int s, int t) {
17         h.assign(n, -1);
18         queue<int> que;
19         h[s] = 0;
20         que.push(s);
21         while (!que.empty()) {
22             int u = que.front();
23             que.pop();
24             for (int i : g[u]) {
25                 int v = e[i].to;
26                 int c = e[i].cap;
27                 if (c > 0 && h[v] == -1) {
28                     h[v] = h[u] + 1;
29                     if (v == t)
30                         return true;
31                     que.push(v);
32                 }
33             }
34         }
35         return false;
36     }
37     int dfs(int u, int t, int f) {
38         if (u == t)
39             return f;
40         int r = f;
41         for (int &i = cur[u]; i < int(g[u].size()); ++i) {
42             int j = g[u][i];
43             int v = e[j].to;
44             int c = e[j].cap;
45             if (c > 0 && h[v] == h[u] + 1) {
46                 int a = dfs(v, t, std::min(r, c));
47                 e[j].cap -= a;
48                 e[j ^ 1].cap += a;
49                 r -= a;
50                 if (r == 0)
51                     return f;
52             }
53         }
54         return f - r;
55     }
56     void addEdge(int u, int v, int c) {
57         g[u].push_back(e.size());
58         e.push_back({v, c});
59         g[v].push_back(e.size());
60         e.push_back({u, 0});
61     }
62     int maxFlow(int s, int t) {
63         int ans = 0;
64         while (bfs(s, t)) {
65             cur.assign(n, 0);

```

```

66         ans += dfs(s, t, INF);
67     }
68     return ans;
69 }
70 };

```

最小费用最大流

```

1  using i64 = long long;
2  struct MCFGraph {
3      struct Edge {
4          int v, c, f;
5          Edge(int v, int c, int f) : v(v), c(c), f(f) {}
6      };
7      const int n;
8      std::vector<Edge> e;
9      std::vector<std::vector<int>> g;
10     std::vector<i64> h, dis;
11     std::vector<int> pre;
12     bool dijkstra(int s, int t) {
13         dis.assign(n, std::numeric_limits<i64>::max());
14         pre.assign(n, -1);
15         priority_queue<pair<i64, int>, vector<pair<i64, int>>, greater<pair<i64, int>>> que;
16         dis[s] = 0;
17         que.emplace(0, s);
18         while (!que.empty()) {
19             i64 d = que.top().first;
20             int u = que.top().second;
21             que.pop();
22             if (dis[u] < d) continue;
23             for (int i : g[u]) {
24                 int v = e[i].v;
25                 int c = e[i].c;
26                 int f = e[i].f;
27                 if (c > 0 && dis[v] > d + h[u] - h[v] + f) {
28                     dis[v] = d + h[u] - h[v] + f;
29                     pre[v] = i;
30                     que.emplace(dis[v], v);
31                 }
32             }
33         }
34         return dis[t] != std::numeric_limits<i64>::max();
35     }
36     MCFGraph(int n) : n(n), g(n) {}
37     void addEdge(int u, int v, int c, int f) {
38         if (f < 0) {
39             g[u].push_back(e.size());
40             e.emplace_back(v, 0, f);
41             g[v].push_back(e.size());
42             e.emplace_back(u, c, -f);
43         } else {
44             g[u].push_back(e.size());
45             e.emplace_back(v, c, f);
46             g[v].push_back(e.size());
47             e.emplace_back(u, 0, -f);
48         }
49     }
50     std::pair<int, i64> flow(int s, int t) {
51         int flow = 0;
52         i64 cost = 0;
53         h.assign(n, 0);
54         while (dijkstra(s, t)) {
55             for (int i = 0; i < n; ++i) h[i] += dis[i];
56             int aug = std::numeric_limits<int>::max();
57             for (int i = t; i != s; i = e[pre[i] ^ 1].v) aug = std::min(aug, e[pre[i]].c);
58             for (int i = t; i != s; i = e[pre[i] ^ 1].v) {
59                 e[pre[i]].c -= aug;
60                 e[pre[i] ^ 1].c += aug;
61             }
62             flow += aug;
63             cost += i64(aug) * h[t];

```

```

64     }
65     return std::make_pair(flow, cost);
66 }
67 };

1  const int N = 5e3 + 5, M = 5e4 + 5;
2  struct flow {
3      int cnt = 1, hd[N], nxt[M << 1], to[M << 1], limit[M << 1], cst[M << 1];
4      void add(int u, int v, int w, int c) {
5          nxt[++cnt] = hd[u], hd[u] = cnt, to[cnt] = v, limit[cnt] = w, cst[cnt] = c;
6          nxt[++cnt] = hd[v], hd[v] = cnt, to[cnt] = u, limit[cnt] = 0, cst[cnt] = -c;
7      }
8      int fr[N], fl[N], in[N], dis[N];
9      pair<int, int> mincost(int s, int t) {
10         int flow = 0, cost = 0;
11         while(1) {
12             queue<int> q;
13             memset(dis, 0x3f, sizeof(dis));
14             memset(in, 0, sizeof(in));
15             fl[s] = 1e9, dis[s] = 0, q.push(s);
16             while(!q.empty()) {
17                 int t = q.front();
18                 q.pop(), in[t] = 0;
19                 for(int i = hd[t]; i; i = nxt[i]) {
20                     int it = to[i], d = dis[t] + cst[i];
21                     if(limit[i] && d < dis[it]) {
22                         fl[it] = min(limit[i], fl[t]), fr[it] = i, dis[it] = d;
23                         if(!in[it]) in[it] = 1, q.push(it);
24                     }
25                 }
26             }
27             if(dis[t] > 1e9) return make_pair(flow, cost);
28             flow += fl[t], cost += dis[t] * fl[t];
29             for(int u = t; u != s; u = to[fr[u] ^ 1]) limit[fr[u]] -= fl[t], limit[fr[u] ^ 1] += fl[t];
30         }
31     }
32 } g;

```

二分图最大匹配

```

1  auto dfs = [&](auto &&dfs, int u, int tag) -> bool {
2      if (vistime[u] == tag) return false;
3      vistime[u] = tag;
4      for (auto v : e[u]) if (!mtch[v] || dfs(dfs, mtch[v], tag)) {
5          mtch[v] = u;
6          return true;
7      }
8      return false;
9  };

```

KM(二分图最大权匹配)

```

1  template <typename T>
2  struct hungarian { // km
3      int n;
4      vector<int> matchx; // 左集合对应的匹配点
5      vector<int> matchy; // 右集合对应的匹配点
6      vector<int> pre; // 连接右集合的左点
7      vector<bool> visx; // 拜访数组 左
8      vector<bool> visy; // 拜访数组 右
9      vector<T> lx;
10     vector<T> ly;
11     vector<vector<T>> > g;
12     vector<T> slack;
13     T inf;
14     T res;
15     queue<int> q;
16     int org_n;
17     int org_m;
18

```



```

19  hungarian(int _n, int _m) {
20      org_n = _n;
21      org_m = _m;
22      n = max(_n, _m);
23      inf = numeric_limits<T>::max();
24      res = 0;
25      g = vector<vector<T> >(n, vector<T>(n));
26      matchx = vector<int>(n, -1);
27      matchy = vector<int>(n, -1);
28      pre = vector<int>(n);
29      visx = vector<bool>(n);
30      visy = vector<bool>(n);
31      lx = vector<T>(n, -inf);
32      ly = vector<T>(n);
33      slack = vector<T>(n);
34  }
35
36  void addEdge(int u, int v, int w) {
37      g[u][v] = max(w, 0); // 负值还不如不匹配 因此设为 0 不影响
38  }
39
40  bool check(int v) {
41      visy[v] = true;
42      if (matchy[v] != -1) {
43          q.push(matchy[v]);
44          visx[matchy[v]] = true; // in S
45          return false;
46      }
47      // 找到新的未匹配点 更新匹配点 pre 数组记录着"非匹配边"上与之相连的点
48      while (v != -1) {
49          matchy[v] = pre[v];
50          swap(v, matchx[pre[v]]);
51      }
52      return true;
53  }
54
55  void bfs(int i) {
56      while (!q.empty()) {
57          q.pop();
58      }
59      q.push(i);
60      visx[i] = true;
61      while (true) {
62          while (!q.empty()) {
63              int u = q.front();
64              q.pop();
65              for (int v = 0; v < n; v++) {
66                  if (!visy[v]) {
67                      T delta = lx[u] + ly[v] - g[u][v];
68                      if (slack[v] >= delta) {
69                          pre[v] = u;
70                          if (delta) {
71                              slack[v] = delta;
72                          } else if (check(v)) { // delta=0 代表有机会加入相等子图 找增广路
73                              // 找到就 return 重建交错树
74                              return;
75                          }
76                      }
77                  }
78              }
79          }
80          // 没有增广路 修改顶标
81          T a = inf;
82          for (int j = 0; j < n; j++) {
83              if (!visy[j]) {
84                  a = min(a, slack[j]);
85              }
86          }
87          for (int j = 0; j < n; j++) {
88              if (visx[j]) { // S
89                  lx[j] -= a;

```

```

90     }
91     if (visy[j]) { // T
92         ly[j] += a;
93     } else { // T'
94         slack[j] -= a;
95     }
96 }
97 for (int j = 0; j < n; j++) {
98     if (!visy[j] && slack[j] == 0 && check(j)) {
99         return;
100    }
101 }
102 }
103 }
104
105 void solve() {
106     // 初始顶标
107     for (int i = 0; i < n; i++) {
108         for (int j = 0; j < n; j++) {
109             lx[i] = max(lx[i], g[i][j]);
110         }
111     }
112
113     for (int i = 0; i < n; i++) {
114         fill(slack.begin(), slack.end(), inf);
115         fill(visx.begin(), visx.end(), false);
116         fill(visy.begin(), visy.end(), false);
117         bfs(i);
118     }
119
120     // custom
121     for (int i = 0; i < n; i++) {
122         if (g[i][matchx[i]] > 0) {
123             res += g[i][matchx[i]];
124         } else {
125             matchx[i] = -1;
126         }
127     }
128     cout << res << "\n";
129     for (int i = 0; i < org_n; i++) {
130         cout << matchx[i] + 1 << " ";
131     }
132     cout << "\n";
133 }
134 };

```

一般图最大匹配

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  struct Graph {
3      int n;
4      std::vector<std::vector<int>>> e;
5      Graph(int n) : n(n), e(n + 1) {}
6      void addEdge(int u, int v) {
7          e[u].push_back(v);
8          e[v].push_back(u);
9      }
10     std::vector<int> findMatching() {
11         std::vector<int> match(n + 1, -1), vis(n + 1), link(n + 1), f(n + 1), dep(n + 1);
12         // disjoint set union
13         auto find = [&](int u) {
14             while (f[u] != u)
15                 u = f[u] = f[f[u]];
16             return u;
17         };
18         auto lca = [&](int u, int v) {
19             u = find(u);
20             v = find(v);
21             while (u != v) {
22                 if (dep[u] < dep[v])
23                     std::swap(u, v);

```

```

24         u = find(link[match[u]]);
25     }
26     return u;
27 };
28 std::queue<int> q;
29 auto blossom = [&](int u, int v, int p) {
30     while (find(u) != p) {
31         link[u] = v;
32         v = match[u];
33         if (vis[v] == 0) {
34             vis[v] = 1;
35             q.push(v);
36         }
37         f[u] = f[v] = p;
38         u = link[v];
39     }
40 };
41 // find an augmenting path starting from u and augment (if exist)
42 auto augment = [&](int u) {
43     while (!q.empty())
44         q.pop();
45     std::iota(f.begin(), f.end(), 0);
46     // vis = 0 corresponds to inner vertices, vis = 1 corresponds to outer vertices
47     std::fill(vis.begin(), vis.end(), -1);
48
49     q.push(u);
50     vis[u] = 1;
51     dep[u] = 0;
52
53     while (!q.empty()){
54         int u = q.front();
55         q.pop();
56         for (auto v : e[u]) {
57             if (vis[v] == -1) {
58                 vis[v] = 0;
59                 link[v] = u;
60                 dep[v] = dep[u] + 1;
61                 // found an augmenting path
62                 if (match[v] == -1) {
63                     for (int x = v, y = u, temp; y != -1; x = temp, y = x == -1 ? -1 : link[x]){
64                         temp = match[y];
65                         match[x] = y;
66                         match[y] = x;
67                     }
68                     return;
69                 }
70                 vis[match[v]] = 1;
71                 dep[match[v]] = dep[u] + 2;
72                 q.push(match[v]);
73             } else if (vis[v] == 1 && find(v) != find(u)) {
74                 // found a blossom
75                 int p = lca(u, v);
76                 blossom(u, v, p);
77                 blossom(v, u, p);
78             }
79         }
80     }
81 }
82
83 };
84 // find a maximal matching greedily (decrease constant)
85 auto greedy = [&]() {
86     for (int u = 1; u <= n; ++u) {
87         if (match[u] != -1)
88             continue;
89         for (auto v : e[u]) {
90             if (match[v] == -1) {
91                 match[u] = v;
92                 match[v] = u;
93                 break;
94             }
95         }
96     }
97 }

```

```

95         }
96     }
97 };
98 greedy();
99 for (int u = 1; u <= n; ++u)
100     if (match[u] == -1)
101         augment(u);
102
103     return match;
104 }
105 };
106 int main() {
107     std::ios::sync_with_stdio(false);
108     std::cin.tie(nullptr);
109     int n, m;
110     std::cin >> n >> m;
111     Graph g(n);
112     for (int i = 0; i < m; ++i) {
113         int u, v;
114         std::cin >> u >> v;
115         g.addEdge(u, v);
116     }
117     auto match = g.findMatching();
118     int ans = 0;
119     for (int u = 1; u <= n; ++u)
120         if (match[u] != -1)
121             ++ans;
122     std::cout << ans / 2 << "\n";
123     for (int u = 1; u <= n; ++u)
124         if (match[u] != -1) std::cout << match[u] << " ";
125         else std::cout << 0 << " ";
126     return 0;
127 }

```

缩点 SCC

```

1 void dfs(const int u) {
2     low[u] = dfn[u] = ++cnt;
3     ins[stk[++top] = u] = true;
4     for (auto v : e[u]) if (dfn[v] == 0) {
5         dfs(v);
6         low[u] = std::min(low[u], low[v]);
7     } else if (ins[v]) {
8         low[u] = std::min(low[u], dfn[v]);
9     }
10    if (low[u] == dfn[u]) {
11        ++scnt; int v;
12        do {
13            ins[v = stk[top--]] = false;
14            w[bel[v] = scnt] += a[v];
15        } while (u != v);
16    }
17 }

```

割点与桥

```

1 //割点
2 void tarjan(int u, int fa){
3     dfn[u] = low[u] = ++cnt; int du = 0;
4     for (for v:e[x]){
5         if (v == fa) continue;
6         if (!dfn[v]){ ++du;
7             tarjan(v, u); low[u] = min(low[u], low[v]);
8             if (low[v] >= dfn[u] && fa) vis[u] = 1;
9         }
10        else low[u] = min(low[u], dfn[v]);
11    }
12    if (!fa && du > 1) vis[u] = 1;
13 }
14 //桥

```

```

15 void tarjan(int u, int fa) {
16     f[u] = fa;
17     low[u] = dfn[u] = ++cnt;
18     for (auto v:e[u]) {
19         if (!dfn[v]) {
20             tarjan(v, u);
21             low[u] = min(low[u], low[v]);
22             if (low[v] > dfn[u]) {
23                 isbridge[v] = true;
24                 ++cnt_bridge;
25             }
26         } else if (dfn[v] < dfn[u] && v != fa) {
27             low[u] = min(low[u], dfn[v]);
28         }
29     }
30 }

```

边双缩点

```

1 void form(int x){
2     std::vector<int> tmp;
3     int now = 0;
4     do{
5         now = s[top --];
6         tmp.push_back(now);
7     }while(now != x);
8     ans.push_back(tmp);
9 }
10 void tarjan(int x,int now){
11     dfn[x] = low[x] = ++cnt;
12     s[++ top] = x;
13     for(auto [v,_]:e[x]){
14         if(_ == now)continue;
15         if(!dfn[v]){
16             tarjan(v,_);
17             low[x] = min(low[x],low[v]);
18             if(low[v] > dfn[x]){
19                 form(v);
20             }
21         } else low[x] = min(low[x],dfn[v]);
22     }
23 }
24 }
25 for(int i = 1;i <= n;i ++){
26     if(dfn[i] == 0){
27         tarjan(i,0);
28         form(i);
29     }
30 }
31 cout << ans.size() << "\n";
32 for(auto A:ans){
33     cout << A.size() << " ";
34     for(auto x:A){
35         cout << x << " ";
36     }cout << "\n";
37 }

```

圆方树

```

1 void dfs(int u) {
2     static int cnt = 0;
3     dfn[u] = low[u] = ++cnt;
4     for (auto [v,w]:e[u]) {
5         if (v == fa[u]) continue;
6         if (!dfn[v]) {
7             fa[v] = u; fr[v] = w;
8             dfs(v); low[u] = min(low[u], low[v]);
9         }
10        else low[u] = min(low[u], dfn[v]);
11        if (low[v] > dfn[u]) add(u, v, w); // 圆 - 圆

```

```

12     }
13     for (auto [v,w]:e[u]) {
14         if (u == fa[v] || dfn[v] < dfn[u]) continue;
15         add(u, v, w); // 圆 - 方
16     }
17 }

```

广义圆方树

跟普通圆方树没有太大的区别，大概就是对于每个点双新建一个方点，然后将点双中的所有点向方点连边

需要注意的是我的写法中，两个点一条边也视为一个点双

性质

1. 树上的每一条边都连接了一个圆点和一个方点
2. 每个点双有唯一的方点
3. 一条从圆点到圆点的树上简单路径代表原图的中的一堆路径，其中圆点是必须经过的，而方点 (指的是与方点相连的点双) 是可以随便走的，也可以理解成原图中两点简单路径的并

```

1 void dfs(int x) {
2     stk.push_back(x);
3     dfn[x] = low[x] = cur++;
4
5     for (auto y : adj[x]) {
6         if (dfn[y] == -1) {
7             dfs(y);
8             low[x] = std::min(low[x], low[y]);
9             if (low[y] == dfn[x]) {
10                 int v;
11                 do {
12                     v = stk.back();
13                     stk.pop_back();
14                     edges.emplace_back(n + cnt, v);
15                 } while (v != y);
16                 edges.emplace_back(x, n + cnt);
17                 cnt++;
18             }
19         } else {
20             low[x] = std::min(low[x], dfn[y]);
21         }
22     }
23 }

```

2-SAT

输出方案时可以通过变量在图中的拓扑序确定该变量的取值。如果变量 x 的拓扑序在 $\neg x$ 之后，那么取 x 值为真。应用到 Tarjan 算法的缩点，即 x 所在 SCC 编号在 $\neg x$ 之前时，取 x 为真。因为 Tarjan 算法求强连通分量时使用了栈，所以 Tarjan 求得的 SCC 编号相当于反拓扑序。

环计数

```

1 //三元环
2 for (int u, v; m; --m) {
3     u = A[m]; v = B[m];
4     if (d[u] > d[v]) {
5         std::swap(u, v);
6     } else if ((d[u] == d[v]) && (u > v)) {
7         std::swap(u, v);
8     }
9     e[u].push_back(v);
10 }
11 for (int u = 1; u <= n; ++u) {
12     for (auto v : e[u]) vis[v] = u;
13     for (auto v : e[u]) {
14         for (auto w : e[v]) if (vis[w] == u) {
15             ++ans;
16         }
17     }
18 }

```

```

17     }
18 }
19 // 四元环
20 auto cmp = [&](int &a,int &b){
21     if(d[a] != d[b])return d[a] > d[b];
22     else return a < b;
23 }
24 for(int u = 1;u <= n;++ u) {
25     for(auto v: G[u])//G 为原图
26         for(auto w: e[v])
27             if(cmp(u,w)) (ans += vis[w]++)%MOD;
28     for(auto v: G[u])
29         for(auto w: e[v])
30             if(cmp(u,w)) vis[w] = 0;
31 }

```

字符串

manacher

```

1 struct Manacher {
2     int n, l, f[maxn * 2], Len;
3     char s[maxn * 2];
4
5     void init(char *c) {
6         l = strlen(c + 1); s[0] = '~';
7         for (int i = 1, j = 2; i <= l; ++i, j += 2)
8             s[j] = c[i], s[j - 1] = '#';
9         n = 2 * l + 1; s[n] = '#'; s[n + 1] = '\0';
10    }
11    void manacher() {
12        int p = 0, mr = 0;
13        for (int i = 1; i <= n; ++i) f[i] = 0;
14        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
15            if (i < mr) f[i] = min(f[2 * p - i], mr - i);
16            while (s[i + f[i]] == s[i - f[i]]) ++f[i]; --f[i];
17            if (f[i] + i > mr) mr = i + f[i], p = i;
18            Len = max(Len, f[i]);
19        }
20    }
21
22    void solve() {
23        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
24            // [1, l]
25            int L = i - f[i] + 1 >> 1, R = i + f[i] - 1 >> 1;
26            if (!f[i]) continue;
27
28            // [1, 2 * l + 1]
29            L = i - f[i], R = i + f[i];
30        }
31    }
32 } M;

```

SA

sa_i 表示排名为 i 的后缀。

rnk_i 表示 $[i, n]$ 这个后缀的排名（在 SA 里的下标）。

$height_i$ 是 sa_i 和 sa_{i-1} 的 LCP 长度。换句话说，向求排名为 i 的后缀和排名为 $i-1$ 的后缀的 LCP 直接就是 $height_i$ ；求 $[i, n]$ 这个后缀和它在 sa 里前一个串的 LCP 就是 $height_{rnk_i}$

```

1 const int maxn = 1000005;
2
3 int sa[maxn], rnk[maxn], tax[maxn], tp[maxn], height[maxn];
4 void SA(string s) {
5     int n = s.size();
6     s = '#' + s;
7     m = SIGMA_SIZE;

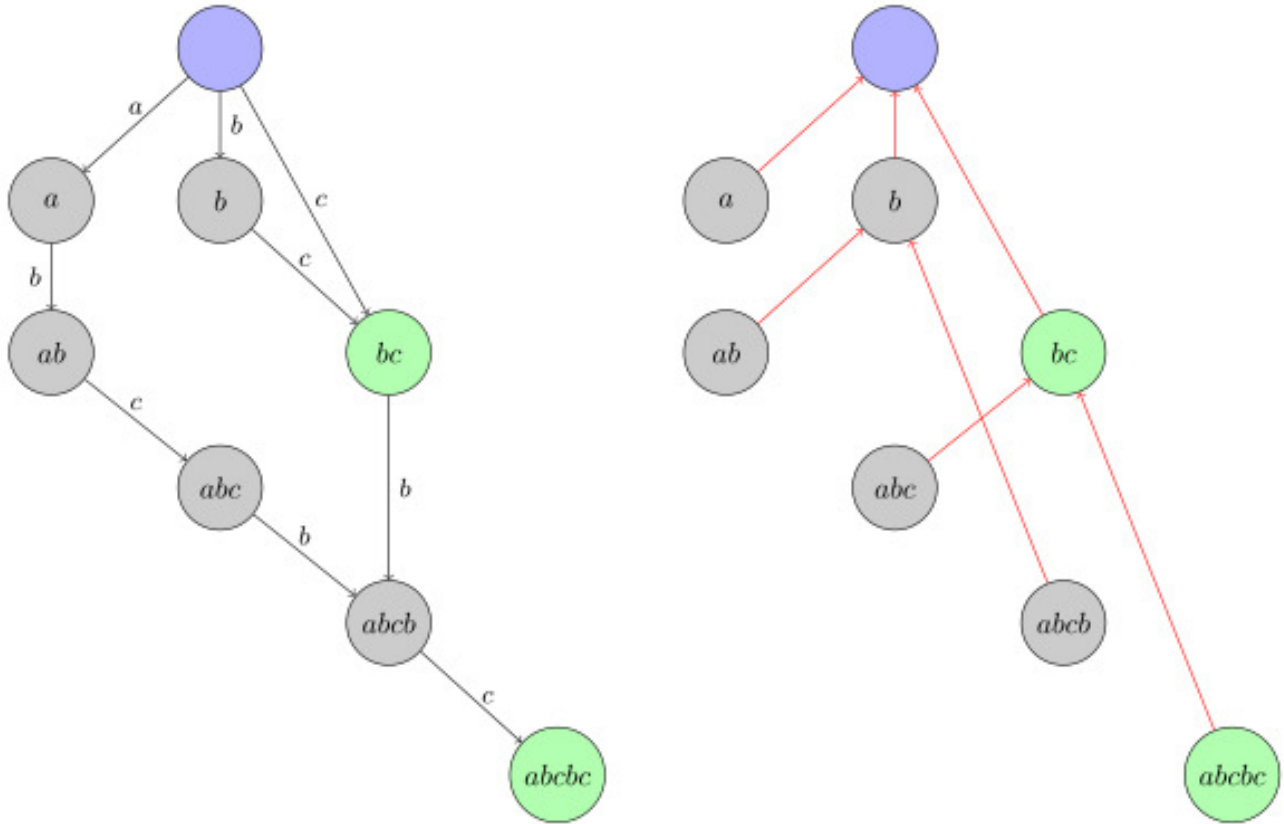
```

```

8     vector<int> S(n + 1);
9     auto RadixSort = [&]() {
10         for (int i = 0; i <= m; ++i) tax[i] = 0;
11         for (int i = 1; i <= n; ++i) ++tax[rnk[i]];
12         for (int i = 1; i <= m; ++i) tax[i] += tax[i - 1];
13         for (int i = n; i; --i) sa[tax[rnk[tp[i]]] - 1] = tp[i];
14     };
15     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
16         S[i] = s[i] - '0';
17         tp[i] = i;
18         rnk[i] = S[i];
19     }
20     RadixSort();
21     for (int len = 1, p = 0; p != n; m = p, len <= 1) {
22         p = 0;
23         for (int i = n - len + 1; i <= n; ++i) tp[+p] = i;
24         for (int i = 1; i <= n; ++i) if (sa[i] > len) tp[+p] = sa[i] - len;
25         RadixSort();
26         std::swap(rnk, tp);
27         p = 0;
28         for (int i = 1; i <= n; ++i)
29             rnk[sa[i]] = ((tp[sa[i]] == tp[sa[i-1]]) && (tp[sa[i] + len] == tp[sa[i-1] + len])) ? p : ++p;
30     }
31     for (int i = 1, p = 0; i <= n; ++i) {
32         int pre = sa[rnk[i] - 1];
33         if (p) --p;
34         while (S[pre + p] == S[i + p]) ++p;
35         h[0][rnk[i]] = height[rnk[i]] = p;
36     }
37     for (int i = 1; i <= 20; ++i) {
38         memset(h[i], 0x3f, n * 4 + 4);
39         for (int j = 1; j + (1 << i - 1) <= n; ++j)
40             h[i][j] = min(h[i - 1][j], h[i - 1][j + (1 << i - 1)]);
41     }
42 }
43 int Q(int l, int r) {
44     if (l > r) swap(l, r);
45     ++l;
46     int k = __lg(r - l + 1);
47     return min(h[k][l], h[k][r - (1 << k) + 1]);
48 }
49 int lcp(int i, int j) {
50     if (i == j) return n - i + 1;
51     return Q(rnk[i], rnk[j]);
52 }

```


PAM



转移边表示的是在原回文串的两边各加一个字符，得到长度加 2 的新回文串；**fail** 指针则指向该回文串的最长回文后缀。和其他自动机有所不同，它有两个根节点，分别代表长度为偶数的串和长度为奇数的串。它们的长度分别为 0 和 -1（注意不是 1，为了添加 2 的长度可以得到长为 1 的回文串），以下分别称为奇根和偶根。值得注意的是，偶根的 **fail** 指针指向的是奇根，而奇根的 **fail** 并不需在意，它的儿子中总会有长为 1 的回文串，因而不可能会失配。

```

1 struct PAM {
2     static constexpr int ALPHABET_SIZE = 28;
3     struct Node {
4         int len; // 当前节点最长回文长度
5         int fail; // 该回文串的最长回文后缀
6         int scnt; // 当前节点表示的回文后缀的本质不同回文串个数
7         int pcnt; // 当前节点回文串在字符串中出现次数，每个点代表一个不同的回文串
8         std::array<int, ALPHABET_SIZE> next; // 转移边
9         Node() : len{0}, fail{-1}, scnt{0}, next{}, pcnt{0} {}
10    };
11    std::vector<Node> t;
12    int last;
13    std::string s;
14    PAM() {
15        init();
16    }
17    void init() {
18        t.assign(2, Node());
19        t[1].len = -1;
20        last = 0;
21        t[0].fail = 1;
22        s = "$";
23    }
24    int newNode() {
25        t.emplace_back();
26        return t.size() - 1;
27    }
28    int get_fail(int x) {

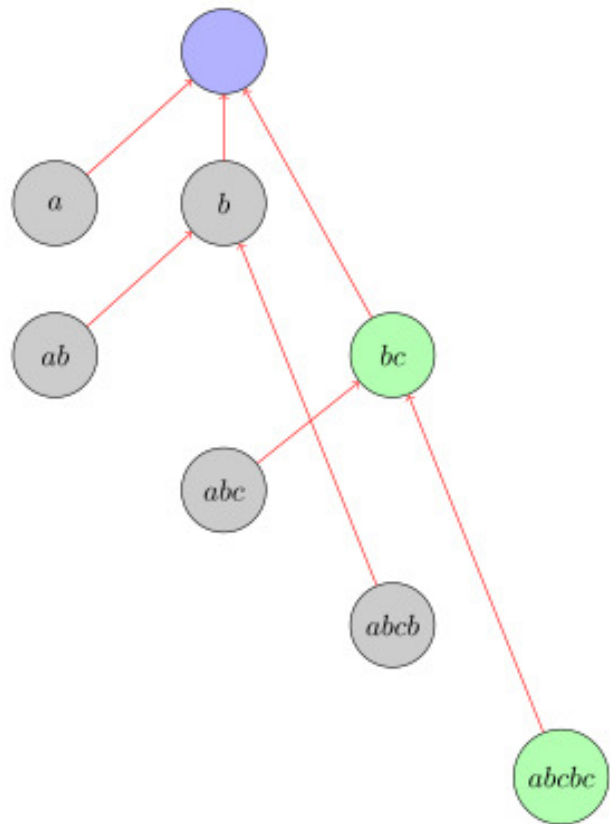
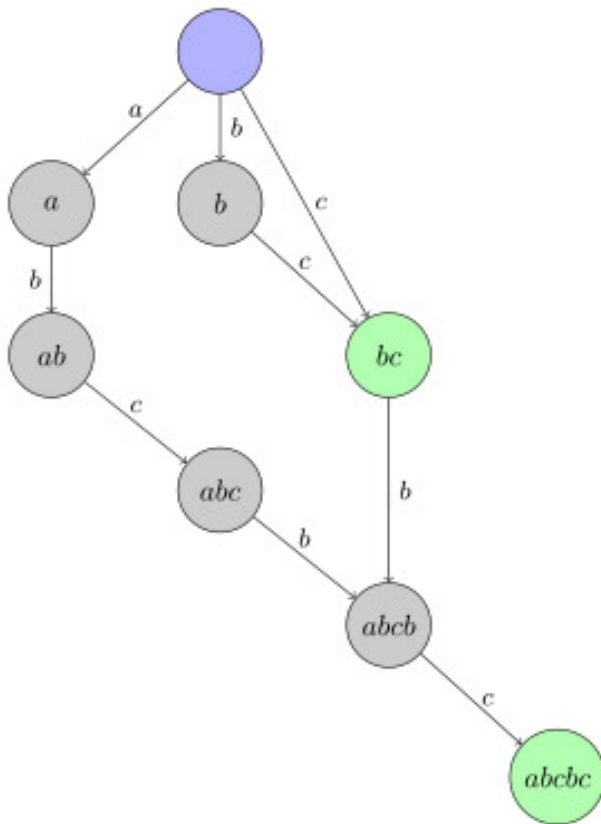
```

```

29     int pos = s.size() - 1;
30     while(s[pos - t[x].len - 1] != s[pos]) x = t[x].fail;
31     return x;
32 }
33 void add(char c, char offset = 'a') {
34     s += c;
35     int let = c - offset;
36     int x = get_fail(last);
37     if (!t[x].next[let]) {
38         int now = newNode();
39         t[now].len = t[x].len + 2;
40         t[now].fail = t[get_fail(t[x].fail)].next[let];
41         t[x].next[let] = now;
42         t[now].scnt = t[t[now].fail].scnt + 1;
43     }
44     last = t[x].next[let];
45     t[last].pcnt ++;
46 }
47 };
48 int main() {
49     ios::sync_with_stdio(false);
50     cin.tie(0);
51     string s;
52     cin >> s;
53     PAM pam;
54     pam.init();
55     for(int i = 0; i < s.size(); i++) {
56         pam.add(s[i]);
57         int ans = pam.t[pam.last].scnt;
58         cout << ans << " ";
59         if(i + 1 != s.size()) {
60             s[i + 1] = (s[i + 1] - 97 + ans) % 26 + 97;
61         }
62     }
63 }

```

SAM



fa 为 parent 树上的父亲，nxt 为自动机上的指向。

```

1 struct SAM {
2     static constexpr int ALPHABET_SIZE = 26, rt = 1;
3     struct Node {
4         int len, fa, siz;
5         std::array<int, ALPHABET_SIZE> nxt;
6         Node() : len{}, fa{}, siz{}, nxt{} {}
7     };
8     std::vector<Node> t;
9     SAM() {
10         init();
11     }
12     void init() {
13         t.assign(2, Node());
14     }
15     int newNode() {
16         t.emplace_back();
17         return t.size() - 1;
18     }
19     int getfa(int x){
20         return t[x].fa;
21     }
22     int getlen(int x){
23         return t[x].len; //表示该状态能够接受的最长的字符串长度。
24     }
25     int size(){
26         return t.size();
27     }
28     int extend(int p, int ch) {
29         int np = newNode();
30         t[np].len = t[p].len + 1; t[np].siz = 1;
31         while(p && !t[p].nxt[ch]) t[p].nxt[ch] = np, p = t[p].fa;
32         if(!p){t[np].fa = rt; return np;}

```

```

33     int q = t[p].nxt[ch];
34     if(t[q].len == t[p].len + 1){
35         t[np].fa = q;
36     }else {
37         int nq = newNode();t[nq].len = t[p].len + 1;t[nq].fa = t[q].fa;
38         for(int i = 0;i < 26;i ++ )t[nq].nxt[i] = t[q].nxt[i];
39         while(p && t[p].nxt[ch] == q)t[p].nxt[ch] = nq,p = t[p].fa;
40         t[np].fa = t[q].fa = nq;
41     }
42     return np;
43 }
44 int extend_(int p, int ch) {///义
45     if(t[p].nxt[ch]){
46         int q = t[p].nxt[ch];
47         if(t[q].len == t[p].len + 1)return q;
48         int nq = newNode();t[nq].len = t[p].len + 1;t[nq].fa = t[q].fa;
49         for(int i = 0;i < 26;i ++ )t[nq].nxt[i] = t[q].nxt[i];
50         while(p && t[p].nxt[ch] == q)t[p].nxt[ch] = nq,p = t[p].fa;
51         t[q].fa = nq;return nq;
52     }
53     int np = newNode();
54     t[np].len = t[p].len + 1;
55     while(p && !t[p].nxt[ch])t[p].nxt[ch] = np,p = t[p].fa;
56     if(!p){t[np].fa = rt;return np;}
57     int q = t[p].nxt[ch];
58     if(t[q].len == t[p].len + 1){
59         t[np].fa = q;
60     }else {
61         int nq = newNode();t[nq].len = t[p].len + 1;t[nq].fa = t[q].fa;
62         for(int i = 0;i < 26;i ++ )t[nq].nxt[i] = t[q].nxt[i];
63         while(p && t[p].nxt[ch] == q)t[p].nxt[ch] = nq,p = t[p].fa;
64         t[np].fa = t[q].fa = nq;
65     }
66     return np;
67 }
68 void build(vector<vector<int>> &e){
69     e.resize(t.size());
70     for(int i = 2;i < t.size();i ++ ){
71         e[t[i].fa].push_back(i);
72     }
73 }
74 };
75 int main(){
76     string s;
77     cin >> s;
78     int n = s.size();
79     SAM sam;
80     vector<int> pos(n + 1);
81     pos[0] = 1;
82     for(int i = 0;i < n;i ++ ){
83         pos[i + 1] = sam.extend(pos[i],s[i] - 'a');
84     }
85     std::vector<std::vector<int>> e;
86     sam.build(e);
87     long long ans = 0;
88     auto dfs = [&](auto&& self,int x)->void{
89         for(auto v:e[x]){
90             self(self,v);
91             sam.t[x].siz += sam.t[v].siz;
92         }
93         if(sam.t[x].siz != 1){
94             ans = max(ans,1ll * sam.t[x].siz * sam.t[x].len);
95         }
96     };
97     dfs(dfs,1);
98     cout << ans << "\n";
99 }

```

1. 本质不同的子串个数

这个显然就是所有状态所对应的 endpos 集合的大小的和也等价于每个节点的 len 减去 parent 树上的父亲的 len

2. 求两个串的最长公共子串

```
1  int p = 1, len = 0, ans = 0;
2  std::vector<int> l(m), L(m);
3  for(int i = 0; i < m; i++){
4      int ch = s[i] - 'a';
5      if(sam.t[p].nxt[ch]){
6          p = sam.t[p].nxt[ch]; len++;
7      }else {
8          while(p && sam.t[p].nxt[ch] == 0){
9              p = sam.t[p].fa;
10         }
11         if(!p) p = 1, len = 0;
12         else len = sam.t[p].len + 1, p = sam.t[p].nxt[ch];
13     } //其中 p 为前缀最长能匹配到的后缀所在的节点
14     l[i] = len;
15     L[i] = i - len + 1;
16 }
```

3. 广义 SAM

```
1  int main(){
2      SAM sam;
3      int n;
4      cin >> n;
5      std::vector<std::vector<int>> pos(n);
6      for(int i = 0; i < n; i++){
7          string s;
8          cin >> s;
9          pos[i].resize(s.size() + 1);
10         pos[i][0] = 1;
11         for(int j = 0; j < s.size(); j++){
12             pos[i][j + 1] = sam.extend_(pos[i][j], s[j] - 'a');
13         }
14     }
15     ll ans = 0;
16     for(int i = 2; i < sam.t.size(); i++){
17         ans += sam.getlen(i) - sam.getlen(sam.getfa(i));
18     }
19     cout << ans << "\n";
20     cout << sam.t.size() - 1 << "\n";
21 }
```

parent 树上每个节点维护了一个区间，若 p 是 q 的父节点则有 $\max p = \min q - 1$

每个节点的 endpos 集合为该节点 parent 树上的子树 siz 大小

反串的 SAM 的 parent 树是原串的后缀树

ACAM

AC 自动机的失配指针指向所有模式串的前缀中匹配当前状态的最长后缀。

fail 树上 u 和 v 的 lca 为 u 和 v 的最长公共 border。

```
1  const int maxn = 2e5 + 7;
2  #define ch s[i] - 'a'
3  struct AC_automaton {
4      int nxt[26], cnt, fail;
5  } T[maxn];
6  int tot = 1, rt = 1, id[maxn];
7  void insert(string &s, int k) {
8      int now = rt, l = s.size();
9      for (int i = 0; i < l; ++i) {
10         if (!T[now].nxt[ch]) T[now].nxt[ch] = ++tot;
11         now = T[now].nxt[ch];
12     } id[k] = now;
13 }
14 void init_fail() { // Trie 图
15     queue<int> q;
16     for (int i = 0; i < 26; ++i) {
17         int &u = T[rt].nxt[i];
```

```

18     if (!u) { u = rt; continue; }
19     T[u].fail = rt; q.push(u);
20 }
21 while (!q.empty()) {
22     int u = q.front(); q.pop();
23     for (int i = 0; i < 26; ++i) {
24         int &v = T[u].nxt[i];
25         if (!v) { v = T[T[u].fail].nxt[i]; continue; }
26         T[v].fail = T[T[u].fail].nxt[i]; q.push(v);
27     }
28 }
29 }
30 int siz[maxn];
31 int main() {
32     ios::sync_with_stdio(false);
33     cin.tie(0);
34     int n;
35     cin >> n;
36     for (int i = 0; i < n; i++) {
37         string t;
38         cin >> t;
39         insert(t, i);
40     }
41     init_fail();
42     string s;
43     cin >> s;
44     for (int u = rt, i = 0; i < s.size(); i++) {
45         u = T[u].nxt[ch];
46         ++siz[u];
47     }
48     vector<vector<int>> e(tot + 1);
49     for (int i = 2; i <= tot; i++) e[T[i].fail].push_back(i);
50     auto dfs = [&](auto self, int x) -> void {
51         for (auto v : e[x]) {
52             self(self, v);
53             siz[x] += siz[v];
54         }
55     };
56     dfs(dfs, 1);
57     for (int i = 0; i < n; i++) cout << siz[id[i]] << "\n";
58 }

```

KMP

```

1 struct KMP{
2     string s2; // add '#'
3     std::vector<int> nxt;
4     int m;
5     KMP(string y) : s2(y){
6         m = s2.size() - 1;
7         nxt.resize(m + 1, 0);
8         for (int i = 2, p = 0; i <= m; i++){
9             while (p && s2[i] != s2[p + 1]) p = nxt[p];
10            if (s2[i] == s2[p + 1]) p++;
11            nxt[i] = p;
12        }
13    }
14    void match(string s1){
15        int n = s1.size() - 1;
16        for (int i = 1, p = 0; i <= n; i++){
17            while (p && s1[i] != s2[p + 1]) p = nxt[p];
18            if (s1[i] == s2[p + 1]){
19                p++;
20                if (p == m){
21                    //cout << i - m + 1 << endl;
22                    p = nxt[p];
23                }
24            }
25        }
26    }
27    std::vector<int> find_border(){

```

```

28         std::vector<int> v;
29         for(int i = nxt[m]; i; i = nxt[i]) v.push_back(i);
30         return v;
31     } // 找该串所有的周期
32     std::vector<int> calc_prefixes() {
33         std::vector<int> cnt(m + 1, 1);
34         for(int i = m; i >= 1; i--) cnt[nxt[i]] += cnt[i];
35         return cnt;
36     } // 每个前缀出现次数
37 };

```

KMP 自动机

```

1  for(int i = 1, fail = 0; i <= n; i++) {
2      fail = nxt[fail][s[i]]; // 注意这一行不能和下一行互换
3      nxt[i - 1][s[i]] = i;
4      for(int j = 0; j < m; j++)
5          nxt[i][j] = nxt[fail][j];
6  }

```

Z 函数

对于一个长度为 n 字符串 s , 定义函数 $z[i]$ 表示和 $s[i, n - 1]$ (即以 $s[i]$ 开头的后缀) 的最长公共前缀 (LCP) 的长度, 特别地, $z[0] = 0$ 。

```

1  std::vector<int> getZ(const std::string &s) {
2      int n = s.size();
3      std::vector<int> Z(n);
4      Z[0] = n;
5      for (int i = 1, l = 0, r = 0; i < n; ++i) {
6          if (i <= r && Z[i - l] < r - i + 1) {
7              Z[i] = Z[i - l];
8          } else {
9              Z[i] = std::max(0, r - i + 1);
10             while (i + Z[i] < n && s[Z[i]] == s[i + Z[i]]) ++Z[i];
11         }
12         if (i + Z[i] - 1 > r) r = i + Z[l = i] - 1;
13     }
14     return Z;
15 }

16
17 std::vector<int> match(const std::string &s, const std::string &t) {
18     auto Z = getZ(t);
19     int n = s.size(), m = t.size();
20     std::vector<int> ret(n);
21     while (ret[0] < n && ret[0] < m && s[ret[0]] == t[ret[0]]) ++ret[0];
22     for (int l = 0, r = ret[0] - 1, i = 1; i < n; ++i) {
23         if (i <= r && Z[i - l] < r - i + 1) {
24             ret[i] = Z[i - l];
25         } else {
26             ret[i] = std::max(0, r - i + 1);
27             while (i + ret[i] < n && s[i + ret[i]] == t[ret[i]]) ++ret[i];
28         }
29         if (i + ret[i] - 1 > r) r = i + ret[l = i] - 1;
30     }
31     return ret;
32 }

```

LCP

```

1  for(int i = n; i >= 1; i--) {
2      for(int j = n; j >= 1; j--) {
3          if(s[i] == s[j]) {
4              f[i][j] = f[i + 1][j + 1] + 1; // i-n 和 j-n 的 lcp
5          }
6      }
7  }

```

Hash

```
1 struct Hash {
2     string s;
3     using ull = unsigned long long;
4     ull P1 = 998255347;
5     ull P2 = 1018253347;
6     ull base = 131;
7     vector<ull> hs1,hs2;
8     vector<ull> ps1,ps2;
9     Hash(string s): s(s) {
10         int n = s.size();
11         hs1.resize(n);
12         hs2.resize(n);
13         ps1.resize(n);
14         ps2.resize(n);
15         ps1[0] = ps2[0] = 1;
16         hs1[0] = hs2[0] = (s[0] - 'a' + 1);
17         for(int i = 1; i < n; i++) {
18             hs1[i] = hs1[i - 1] * base % P1 + (s[i] - 'a' + 1);
19             hs2[i] = hs2[i - 1] * base % P2 + (s[i] - 'a' + 1);
20             ps1[i] = (ps1[i - 1] * base) % P1;
21             ps2[i] = (ps2[i - 1] * base) % P2;
22         }
23     }
24     pair<ull,ull> query(int l,int r) {
25         ull res1 = (hs1[r] - (l == 0 ? 0 : hs1[l - 1]) * ps1[r - l + 1] % P1 + P1) % P1;
26         ull res2 = (hs2[r] - (l == 0 ? 0 : hs2[l - 1]) * ps2[r - l + 1] % P2 + P2) % P2;
27         return {res1,res2};
28     } // [l,r]
29 };
```

数学

数论

扩展欧几里得（线性同余方程，斐蜀定理）

扩展欧几里得: $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \% b)$, $ax + by = bx + (a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor)b$

斐蜀定理: $ax + by = c$ 若有解, 则有 $(a, b) | c$

线性同余方程: $ax \equiv c \pmod{b} \Rightarrow ax + by = c$

```
1 ll exgcd(ll a,ll b,ll &x,ll &y){
2     if(b == 0){
3         x = 1 , y = 0; return a;
4     }
5     ll d = exgcd(b,a % b,x,y);
6     ll tmp = x;
7     x = y;
8     y = tmp - (a / b) * y;
9     return d;
10 }
11 void solve(){
12     ll a,b,c;
13     cin >> a >> b >> c;
14     ll x0,y0;
15     ll d = exgcd(a,b,x0,y0);
16     if(c % d){
17         cout << -1 << "\n";
18         return ;
19     }
20     ll p = a / d, q = b / d;
21     ll x = ((c / d) % q * x0 % q + q) % q;
22     if(x == 0) x = q;
23     ll y = (c - a * x) / b;
24     if(y <= 0){
25         y = ((c / d) % p * y0 % p + p) % p;
26         cout << (x == 0 ? q : x) << " " << (y == 0 ? p : y) << "\n";
```



```

27     return ;
28 }
29 ll ans_x_mn = x;
30 ll ans_y_mx = y;
31 y = ((c / d) % p * y0 % p + p) % p;
32 if(y == 0) y = p;
33 x = (c - b * y) / a;
34 ll ans_x_mx = x;
35 ll ans_y_mn = y;
36 ll sum = min((ans_x_mx - ans_x_mn) / q, (ans_y_mx - ans_y_mn) / p);
37 cout << sum + 1 << " " << ans_x_mn << " " << ans_y_mn << " " << ans_x_mx << " " << ans_y_mx << "\n";
38 // 正整数解总数
39 }

```

费马小定理 (逆元)

若 p 为素数, $\gcd(a, p) = 1$, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

线性求逆元

```

1 inv[0] = inv[1] = 1;
2 for(int i = 2 ; i <= n ; i++) inv[i] = (p - p/i) * inv[p % i] % p;

```

CRT (中国剩余定理)

$$\begin{cases} x = b_1 \pmod{a_1} \\ x = b_2 \pmod{a_2} \\ \dots \\ x = b_n \pmod{a_n} \end{cases}$$

若 a_1, a_2, \dots, a_n 两两互质:

令 $M = \prod_{i=1}^n a_i, m'_i = \frac{M}{a_i}, t_i \times m'_i \equiv 1 \pmod{a_i}$ 则有 $x = \sum_{i=1}^n b_i \times m'_i \times t_i$ (此解为唯一解)

若 a_1, a_2, \dots, a_n 两两不互质:

合并两个方程组 $x = a_1 p + b_1 = a_2 q + b_2$

则可将方程依次两两合并为 $x \equiv a_1 p + b_1 \pmod{\text{lcm}(a_1, a_2)}$, 其中先求解 p , 再带入求 x 。

```

1 ll r1 = B[1], m1 = A[1], r2, m2;
2 for(int i = 1; i < n ; i++) {
3     r2 = B[i + 1], m2 = A[i + 1];
4     ll a = m1, b = m2, c = r2 - r1;
5     ll d = exgcd(a, b, x, y);
6     if(c % d) {
7         cout << 0; return 0;
8     }
9     ll p = a / d, q = b / d;
10    x = ((x * c / d) + q) % q;
11    ll mod = lcm(m2, m1);
12    ll x0 = (m1 * x + r1) % mod;
13    r1 = x0 < 0 ? x0 + mod : x0;
14    m1 = mod;
15 }
16 cout << r1 % m1 << "\n";

```

卢卡斯定理

$C_n^m = C_{n \bmod p}^m \cdot C_{\lfloor n/p \rfloor}^{\lfloor m/p \rfloor}$, 其中 p 为质数。

原根

满足同余式 $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ 的最小正整数 n 存在, 这个 n 称作 a 模 m 的阶, 记作 $\delta_m(a)$, $a, a^2, \dots, a^{\delta_m(a)}$ 模 m 两两不同余。

设 $m \in \mathbb{N}^*$, $g \in \mathbb{Z}$. 若 $(g, m) = 1$, 且 $\delta_m(g) = \varphi(m)$, 则称 g 为模 m 的原根。

即 g 满足 $\delta_m(g) = |\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$. 当 m 是质数时, 我们有 $g^i \bmod m, 0 < i < m$ 的结果互不相同。

原根判定定理:

设 $m \geq 3, (g, m) = 1$, 则 g 是模 m 的原根的充要条件是, 对于 $\varphi(m)$ 的每个素因数 p , 都有 $g^{\frac{\varphi(m)}{p}} \not\equiv 1 \pmod{m}$ 。

若一个数 m 有原根, 则它原根的个数为 $\varphi(\varphi(m))$, 每一个原根都形如 g^k 的形式, 要求满足 $\gcd(k, \varphi(m)) = 1$ 。

原根存在定理:

一个数 m 存在原根当且仅当 $m = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$, 其中 p 为奇素数, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ 。

离散对数 (BSGS)

$$a^x = b \pmod{m}$$

此处只解决 m 为质数, 将 x 分解为 $i \times t - p$, 则有 $a^{i \times t} = b \times a^p \pmod{m}$

$t = \sqrt[t]{m}$ 时均摊复杂度最小

$0 < p < t$ 枚举 p 计算出每一个 a^p 的值存入 hash 表

再枚举 i , 算出 $a^{i \times t}$ 的值在 hash 表中查找

```
1 ll bsgs(ll a, ll b, ll p){
2     map<ll, ll> hsh; hsh.clear();
3     ll t = sqrt(p) + 1, j;
4     b %= p;
5     for(int i = 0; i < t; i++){
6         ll tmp = b * qp(a, i, p) % p;
7         hsh[tmp] = i;
8     }
9     a = qp(a, t, p);
10    if(a == 0){
11        if(b == 0) return 1;
12        else return -1;
13    }
14    for(int i = 0; i <= t; i++){
15        ll tmp = qp(a, i, p);
16        if(hsh.find(tmp) == hsh.end()) j = -1;
17        else j = hsh[tmp];
18        if(i * t - j >= 0 && j >= 0) return i*t-j;
19    }
20    return -1;
21 }
```

威尔逊定理

对于素数 p 有 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ 。

数论分块

```
1 ll up(ll x, ll y){
2     return (x + y - 1) / y;
3 }
4 ll calc_up(ll x){
5     ll l = 1, r; ll ans = 1e18;
6     while(l <= x){
7         ll m = up(x, l);
8         if(m == 1) r = x; else r = (x - 1) / (m - 1);
9         l = r + 1;
10    }
11    return ans;
12 }
13 ll calc_down(ll x){
14     ll l = 1, r; ll ans = 1;
15     while(l <= x){
16         r = x / (x / l);
17         l = r + 1;
18    }
```

```

19     return ans;
20 }

```

积性函数

数论函数：在所有正整数上的函数被称为算术函数（数论函数）

加性函数：如果数论函数 f 对于任意两个互素的正整数 p, q 均有 $f(pq) = f(p) + f(q)$ ，称为加性函数

积性函数：如果数论函数 f 对于任意两个互素的正整数 p, q 均有 $f(pq) = f(p)f(q)$ ，称为积性函数

完全积性函数：在积性函数的基础上， p, q 对于任意正整数均成立，称为完全积性函数

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为积性函数，不难证明下列函数均为积性函数：

$$h(x) = f(x^p), h(x) = f^p(x), h(x) = \sum_{d|x} f(d), h(x) = f(x)g(x)$$

常见积性函数：

- 单位函数： $\varepsilon(n) = [n = 1]$ 。（完全积性）
- 恒等函数： $\text{id}_k(n) = n^k$ ， $\text{id}_1(n)$ 通常简记作 $\text{id}(n)$ 。（完全积性）
- 常数函数： $1(n) = 1$ 。（完全积性）
- 除数函数： $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ 。 $\sigma_0(n)$ 通常简记作 $d(n)$ 或 $\tau(n)$ ， $\sigma_1(n)$ 通常简记作 $\sigma(n)$ 。
- 欧拉函数： $\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [\text{gcd}(i, n) = 1]$
- 莫比乌斯函数：
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \exists d > 1, d^2 | n, \text{ 其中 } \omega(n) \text{ 表示 } n \text{ 的本质不同质因子个数，它是一个加性函数。} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

线性筛

一般情况下可通过线性筛快速筛出积性函数

```

1 void init(const int n){
2     mu[1] = 1; phi[1] = 1;
3     for(int i = 2; i <= n; i++){
4         if(!vis[i]){
5             p[++tot] = i;
6             mu[i] = -1; phi[i] = i - 1;
7         }
8         for(int j = 1; j <= tot && i * p[j] <= n; j++){
9             vis[i * p[j]] = 1;
10            if(i % p[j] == 0){
11                phi[i * p[j]] = phi[i] * p[j];
12                mu[i * p[j]] = 0;
13                break;
14            }
15            mu[i * p[j]] = -mu[i];
16            phi[i * p[j]] = phi[i] * phi[p[j]];
17        }
18    }
19 }

```

欧拉函数

欧拉函数（Euler's totient function），即 $\varphi(n)$ ，表示的是小于等于 n 和 n 互质的数的个数。 $\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [\text{gcd}(i, n) = 1]$

由唯一分解定理，设 $n = \prod_{i=1}^s p_i^{k_i}$ ，其中 p_i 是质数，有 $\varphi(n) = n \times \prod_{i=1}^s \frac{p_i - 1}{p_i}$ 。

如果 $(a, b) = 1$ ， $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ 如果 a 或 b 为质数 $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ 如果 $(a, b) \neq 1$ ， $\varphi(a * b) = \varphi(a) * b$

欧拉定理及扩展

如果 $(a, m), a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ 当 $b \geq \varphi(p)$ 时 $a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(p) + \varphi(p)} \pmod{p}$ 当 $b < \varphi(p)$ 时 $a^b \equiv a^b \pmod{p}$

狄利克雷卷积

对于两个数论函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 则它们的狄利克雷卷积得到的结果 $h(x)$ 定义为: $h(x) = \sum_{d|x} f(d)g\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{ab=x} f(a)g(b)$ 上式可以简记为: $h = f * g$

狄利克雷卷积满足交换律, 结合律, 分配律

单位函数 ε 是 Dirichlet 卷积运算中的单位元, 即对于任何数论函数 f , 都有 $f * \varepsilon = f$

对于任何一个满足 $f(x) \neq 0$ 的数论函数, 如果有另一个数论函数 $g(x)$ 满足 $f * g = \varepsilon$, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的逆元。由等式的性质可知, 逆元是唯一的

常见数论卷积

$$\phi * 1 = id$$

$$\mu * 1 = \varepsilon$$

$$\mu * id = \phi$$

两个积性函数的 Dirichlet 卷积也是积性函数

积性函数的逆元也是积性函数, 且 $f(1) \neq 0$

莫比乌斯反演

莫比乌斯函数

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \text{ 含有平方因子} \\ (-1)^k & k \text{ 为 } n \text{ 的本质不同质因子} \end{cases}$$

$$\mu * 1 = \varepsilon$$

形式一:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Rightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

形式二:

$$f(n) = \sum_{n|d} g(d) \Rightarrow g(n) = \sum_{n|d} \mu\left(\frac{d}{n}\right) f(d)$$

上两式的证明可通过等价替换和交换求和号来推导

此外我们也可以通过狄利克雷卷积来理解

$$f = g * 1, g = f * \mu$$

实际应用中我们常使用 $\varepsilon(\gcd) = \sum_{d|\gcd} \mu(d)$, 即 $\mu * 1 = \varepsilon$

同时也是形式 1 中 $f = \varepsilon$ 的情况

欧拉反演

$$\varphi * 1 = id$$

展开形式同莫比乌斯反演, 本质上是莫比乌斯反演的进一步推导, 卷积式也可用 $\mu * 1 = \varepsilon$ 推出

实际应用中常使用 $\gcd = \sum_{d|\gcd} \varphi(d)$

杜教筛

对于数论函数 f , 要计算 $S(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$

找到一个数论函数 g , 有 $\sum_{i=1}^n (f * g)(i) = \sum_{i=1}^n g(i) S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

得到 $g(1)S(n) = S(n) = \sum_{i=1}^n (f * g)(i) - \sum_{i=2}^n g(i) S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

```
1  const int maxn = 3e6 + 7;
2  int mu[maxn], p[maxn], vis[maxn], tot;
3  int sum_mu[maxn];
4  int phi[maxn];
5  ll sum_phi[maxn];
6  map<ll, ll> mp_mu, mp_phi;
7  void init(const int n){
8      mu[1] = 1; phi[1] = 1;
9      for(int i = 2; i <= n; i++){
10         if(!vis[i]){
11             p[++tot] = i;
12             mu[i] = -1; phi[i] = i - 1;
13         }
14         for(int j = 1; j <= tot && i * p[j] <= n; j++){
15             vis[i * p[j]] = 1;
16             if(i % p[j] == 0){
17                 phi[i * p[j]] = phi[i] * p[j];
18                 mu[i * p[j]] = 0;
19                 break;
20             }
21             mu[i * p[j]] = -mu[i];
22             phi[i * p[j]] = phi[i] * phi[p[j]];
23         }
24     }
25     for(int i = 1; i < n; i++) sum_mu[i] = sum_mu[i - 1] + mu[i], sum_phi[i] = sum_phi[i - 1] + phi[i];
26 }
27 ll calc_mu(ll x){
28     if(x < maxn) return sum_mu[x];
29     if(mp_mu[x]) return mp_mu[x];
30     ll l = 2, r; ll ans = 1;
31     while(l <= x){
32         r = x / (x / l);
33         ans -= 1ll * (r - l + 1) * calc_mu(x / l);
34         l = r + 1;
35     }
36     return mp_mu[x] = ans;
37 }
38 ll calc_phi(ll x){
39     if(x < maxn) return sum_phi[x];
40     if(mp_phi[x]) return mp_phi[x];
41     ll l = 2, r; ll ans = 1ll * x * (x + 1) >> 1;
42     while(l <= x){
43         r = x / (x / l);
44         ans -= 1ll * (r - l + 1) * calc_phi(x / l);
45         l = r + 1;
46     }
47     return mp_phi[x] = ans;
48 }
```

由于符合数论反演实际意义的函数不多所以大部分数论反演题目基本上都是对上述两种反演的卷积式的应用, 变形之后进行求和号交换, 换元等数学手段处理等到可以快速求解的算式

Min_25

第一步

目标: 求 $g(n) = \sum_{p \leq n} f(p)$ 。

不妨设 $f(p)$ 是完全积性函数, 如果不是可以尝试拆成若干项完全积性函数, 分别求然后相加。

首先要线性筛求出 \sqrt{n} 以内的质数。

$g(n)$ 很难直接求解, 考虑用 DP 计算。设 $g(n, j) = \sum_{i=1}^n f(i)[i \text{ 是质数或其最小质因子} > p_j]$, 其中 p_j 表示第 j 个质数, 那么我们要的就是 $g(n, k)$, k 为最小的满足 $p_k \geq \sqrt{n}$ 。考虑从 $j-1$ 变到 j , 那么最小质因子为 p_j 的合数会被筛掉, 那么它们的贡献要减去。则有转移

$$g(n, j) = g(n, j-1) - f(p_j) \left(g\left(\left\lfloor \frac{n}{p_j} \right\rfloor, j-1\right) - g(p_{j-1}, j-1) \right)$$

系数 $f(p_j)$ 表示由于 $f(p)$ 是完全积性函数, 所以可以把它从后面提出来。 $g\left(\left\lfloor \frac{n}{p_j} \right\rfloor, j-1\right)$ 表示考虑所有 p_j 的倍数, 它们除以 p_j 之后, 最小质因子 $> p_{j-1}$ 的合数以及所有质数的贡献, 应当减去。但是, 这些质数中可能有 $\leq p_{j-1}$ 的, 它们在之前就被筛掉过了, 所以要加回来, 也就是 $g(p_{j-1}, j-1)$ 。

由于有公式 $\left\lfloor \frac{\frac{a}{b}}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor$, 因此容易发现上述式子只会用到形如 $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor, x \leq n$ 的点处的 DP 值, 即第一项的状态数是 $O(\sqrt{n})$ (实际实现的时候注意状态数是 $2\sqrt{n}$)。我们预处理出这 $O(\sqrt{n})$ 个数, 把他们离散化, 顺带求出 $g(x, 0)$, 然后 DP 即可。

第二步

目标: 求 $S(n) = \sum_{i \leq n} f(i)$ 。与第一步类似, 设 $S(n, j) = \sum_{i=1}^n f(i)[i \text{ 的最小质因子} > p_j]$ 。但此处 f 不需要再拆分成单项式, 直接是原函数即可 (因为不需要依赖于完全积性, 只需要积性即可) (但要能快速计算 $f(p^k)$ 的值)。

考虑把贡献拆成质数的和合数的, 合数枚举最小质因子以及次数, 于是有转移:

$$S(n, j) = g(n) - g(p_j) + \sum_{j < k, p_k \leq \sqrt{n}, 1 \leq e, p_k^e \leq n} f(p_k^e) \left(S\left(\left\lfloor \frac{n}{p_k^e} \right\rfloor, k\right) + [e \neq 1] \right)$$

最后一项 $[e \neq 1]$ 的意思是, 对于 $e = 1$ 的情况, S 没有计算 1 贡献, 刚好, 因为此时 $p_k \times 1$ 是质数, 其贡献在之前计算过; 对于 $e > 1$ 的情况, $p_k^e \times 1$ 是合数, 贡献算漏了, 要补上。直接暴力递归计算 (并且不需要记忆化)。

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2
3  using namespace std;
4  using ll = long long;
5  const int mo = 1e9 + 7;
6  std::vector<int> minp, primes;
7  void sieve(int n) {
8      minp.assign(n + 1, 0);
9      primes.clear();
10     for (int i = 2; i <= n; i++) {
11         if (minp[i] == 0) {
12             minp[i] = i;
13             primes.push_back(i);
14         }
15         for (auto p : primes) {
16             if (i * p > n) break;
17             minp[i * p] = p;
18             if (p == minp[i]) {
19                 break;
20             }
21         }
22     }
23 }
24 int qp(int a, int b) {
25     int ans = 1, base = a;
26     while (b != 0) {
27         if (b & 1) ans = 1ll * ans * base % mo;
28         base = 1ll * base * base % mo;
29         b >>= 1;
30     }
31     return ans;
32 }
33 int main() {
34     ios::sync_with_stdio(false);
35     cin.tie(0);
36     ll n;
37     cin >> n;
38     ll s = sqrt(n);
39     sieve(s);

```

```

40     vector<ll> v;
41     for(ll l = 1, r; l <= n; l = r + 1) {
42         v.push_back(n / l);
43         r = n / (n / l);
44     }
45     int inv2 = qp(2, mo - 2);
46     int inv6 = qp(6, mo - 2);
47     auto calc1 = [&](ll x) -> ll {
48         x %= mo;
49         return (x * (x + 1) % mo) * inv2 % mo;
50     };
51     auto calc2 = [&](ll x) -> ll {
52         x %= mo;
53         return (x * (x + 1) % mo * (2 * x + 1) % mo) * inv6 % mo;
54     };
55     vector<ll> f1(v.size() + 1), f2(v.size() + 1);
56     auto getid = [&](ll x) -> ll {
57         if(x <= s) return v.size() - x;
58         else return n / x - 1;
59     };
60     for(int i = 0; i < v.size(); i++) {
61         ll x = v[i];
62         x %= mo;
63         f1[i] = (calc1(x) + mo - 1) % mo; // \sum_2^n i^k = \sum_1^n i^k - 1
64         f2[i] = (calc2(x) + mo - 1) % mo;
65     }
66     ll ps1 = 0, ps2 = 0;
67     for(auto p : primes) {
68         for(int i = 0; i < v.size(); i++) {
69             if(1ll * p * p > v[i]) break;
70             f1[i] -= 1ll * p * (f1[getid(v[i] / p)] - ps1 + mo) % mo;
71             f1[i] += mo; f1[i] %= mo;
72             f2[i] -= 1ll * p * p * mo * (f2[getid(v[i] / p)] - ps2 + mo) % mo;
73             f2[i] += mo; f2[i] %= mo;
74         }
75         ps1 += p; ps1 %= mo;
76         ps2 += 1ll * p * p % mo; ps2 %= mo;
77     }
78     auto F = [&](ll x) -> ll { // targeted function
79         x %= mo;
80         return (x * x % mo - x + mo) % mo;
81     };
82     auto S = [&](auto self, ll x, int y) -> ll {
83         int p = y == 0 ? 0 : primes[y - 1];
84         if(p >= x) return 0ll;
85         ll res = (f2[getid(x)] - f2[getid(p)] - (f1[getid(x)] - f1[getid(p)])) + mo + mo % mo;
86         for(int i = y; i < primes.size() && primes[i] <= x / primes[i]; i++) {
87             ll w = primes[i];
88             for(int j = 1; w <= x; j++, w = w * primes[i]) {
89                 res = (res + F(w) * (self(self, x / w, i + 1) % mo + (j != 1)) % mo) % mo;
90             }
91         }
92         return res;
93     };
94     cout << (S(S, n, 0) + 1) % mo << "\n";
95 }

```

素数测试与因式分解 (Miller-Rabin & Pollard-Rho)

```

1  i64 mul(i64 a, i64 b, i64 m) {
2      return static_cast<__int128>(a) * b % m;
3  }
4  i64 power(i64 a, i64 b, i64 m) {
5      i64 res = 1 % m;
6      for (; b; b >>= 1, a = mul(a, a, m))
7          if (b & 1)
8              res = mul(res, a, m);
9      return res;
10 }
11 bool isprime(i64 n) {
12     if (n < 2)

```

```

13     return false;
14     static constexpr int A[] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23};
15     int s = __builtin_ctzll(n - 1);
16     i64 d = (n - 1) >> s;
17     for (auto a : A) {
18         if (a == n)
19             return true;
20         i64 x = power(a, d, n);
21         if (x == 1 || x == n - 1)
22             continue;
23         bool ok = false;
24         for (int i = 0; i < s - 1; ++i) {
25             x = mul(x, x, n);
26             if (x == n - 1) {
27                 ok = true;
28                 break;
29             }
30         }
31         if (!ok)
32             return false;
33     }
34     return true;
35 }
36 std::vector<i64> factorize(i64 n) {
37     std::vector<i64> p;
38     std::function<void(i64)> f = [&](i64 n) {
39         if (n <= 10000) {
40             for (int i = 2; i * i <= n; ++i)
41                 for (; n % i == 0; n /= i)
42                     p.push_back(i);
43             if (n > 1)
44                 p.push_back(n);
45             return;
46         }
47         if (isprime(n)) {
48             p.push_back(n);
49             return;
50         }
51         auto g = [&](i64 x) {
52             return (mul(x, x, n) + 1) % n;
53         };
54         i64 x0 = 2;
55         while (true) {
56             i64 x = x0;
57             i64 y = x0;
58             i64 d = 1;
59             i64 power = 1, lam = 0;
60             i64 v = 1;
61             while (d == 1) {
62                 y = g(y);
63                 ++lam;
64                 v = mul(v, std::abs(x - y), n);
65                 if (lam % 127 == 0) {
66                     d = std::gcd(v, n);
67                     v = 1;
68                 }
69                 if (power == lam) {
70                     x = y;
71                     power *= 2;
72                     lam = 0;
73                     d = std::gcd(v, n);
74                     v = 1;
75                 }
76             }
77             if (d != n) {
78                 f(d);
79                 f(n / d);
80                 return;
81             }
82             ++x0;
83         }

```



```

84     };
85     f(n);
86     std::sort(p.begin(), p.end());
87     return p;
88 }

```

公式

一些数论公式

- 当 $x \geq \phi(p)$ 时有 $a^x \equiv a^{x \bmod \phi(p) + \phi(p)} \pmod{p}$
- $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$
- $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$
- $\sum_{d|n} 2^{\omega(d)} = \sigma_0(n^2)$, 其中 ω 是不同素因子个数
- $\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{\omega(n)}$

一些数论函数求和的例子

- $\sum_{i=1}^n i[\gcd(i, n) = 1] = \frac{n\varphi(n) + [n=1]}{2}$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gcd(i, j) = x] = \sum_d \mu(d) \lfloor \frac{n}{dx} \rfloor \lfloor \frac{m}{dx} \rfloor$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gcd(i, j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{d|\gcd(i, j)} \varphi(d) = \sum_d \varphi(d) \lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$
- $S(n) = \sum_{i=1}^n \mu(i) = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{d|i, d < i} \mu(d) \stackrel{t=\frac{i}{d}}{=} 1 - \sum_{t=2}^n S(\lfloor \frac{n}{t} \rfloor)$
- 利用 $[n=1] = \sum_{d|n} \mu(d)$
- $S(n) = \sum_{i=1}^n \varphi(i) = \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n \sum_{d|i, d < i} \varphi(i) \stackrel{t=\frac{i}{d}}{=} \frac{i(i+1)}{2} - \sum_{t=2}^n S(\frac{n}{t})$
- 利用 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- $\sum_{i=1}^n \mu^2(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(d) \lfloor \frac{n}{d^2} \rfloor$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gcd^2(i, j) = \sum_d d^2 \sum_t \mu(t) \lfloor \frac{n}{dt} \rfloor^2$
 $\stackrel{x=dt}{=} \sum_{x=1}^n \lfloor \frac{n}{x} \rfloor^2 \sum_{d|x} d^2 \mu(\frac{x}{d})$
- $\sum_{i=1}^n \varphi(i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [i \perp j] - 1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu(i) \cdot \lfloor \frac{n}{i} \rfloor^2 - 1$

斐波那契数列性质

- $F_{a+b} = F_{a-1} \cdot F_b + F_a \cdot F_{b+1}$
- $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}, F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
- $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $F_n^2 = (-1)^{n-1} + F_{n-1} \cdot F_{n+1}$
- $\gcd(F_a, F_b) = F_{\gcd(a, b)}$
- 模 n 周期 (皮萨诺周期)
 - $\pi(p^k) = p^{k-1} \pi(p)$
 - $\pi(nm) = \text{lcm}(\pi(n), \pi(m)), \forall n \perp m$
 - $\pi(2) = 3, \pi(5) = 20$
 - $\forall p \equiv \pm 1 \pmod{10}, \pi(p) | p - 1$
 - $\forall p \equiv \pm 2 \pmod{5}, \pi(p) | 2p + 2$

组合数学

组合化简技巧

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \quad (1)$$

相当于将选出的集合对全集取补集, 故数值不变。(对称性)

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad (2)$$

由定义导出的递推式。

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \quad (3)$$

组合数的递推式（杨辉三角的公式表达）。我们可以利用这个式子，在 $O(n^2)$ 的复杂度下推导组合数。

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n \quad (4)$$

这是二项式定理的特殊情况。取 $a = b = 1$ 就得到上式。

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = [n = 0] \quad (5)$$

二项式定理的另一种特殊情况，可取 $a = 1, b = -1$ 。式子的特殊情况是取 $n = 0$ 时答案为 1。

$$\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{m-i} = \binom{m+n}{m} \quad (n \geq m) \quad (6)$$

拆组合数的式子，在处理某些数据结构题时会用到。

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad (7)$$

这是 (6) 的特殊情况，取 $n = m$ 即可。

$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n 2^{n-1} \quad (8)$$

带权和的一个式子，通过对 (3) 对应的多项式函数求导可以得证。

$$\sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} = n(n+1) 2^{n-2} \quad (9)$$

与上式类似，可以通过对多项式函数求导证明。

$$\sum_{l=0}^n \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (10)$$

通过组合分析——考虑 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ 的 $k+1$ 子集数可以得证，在恒等式证明中比较常用。

$$\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k} \quad (11)$$

通过定义可以证明。

$$\sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} = F_{n+1} \quad (12)$$

其中 F 是斐波那契数列。

鸽巢原理

把 $n+1$ 个物品放进 n 个盒子，至少有一个盒子包含两个或更多的物品

加强形式：

令 q_1, q_2, \dots, q_n 为正整数，如果将 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物品放入 n 个盒子，那么，或者第 1 个盒子至少含有 q_1 个物品，或者第 2 个盒子至少含有 q_2 个物品， \dots ，或者第 n 个盒子至少含有 q_n 个物品。

容斥原理

$$\bigcup_{i=1}^n S_i = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{a_i < a_{i+1}} \bigcap_{i=1}^m S_{a_i}$$

二项式定理

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$$

多重集的排列数 | 多重组合数

请大家一定要区分 **多重组合数** 与 **多重集的排列数**！两者是完全不同的概念！

多重集是指包含重复元素的广义集合。设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1 , n_2 个 a_2 , \dots , n_k 个 a_k 组成的多重集， S 的全排列个数为

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

相当于把相同元素的排列数除掉了。具体地，你可以认为你有 k 种不一样的球，每种球的个数分别是 n_1, n_2, \dots, n_k ，且 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 。这 n 个球的全排列数就是 **多重集的排列数**。多重集的排列数常被称作 **多重组合数**。我们可以用多重组合数的符号表示上式：

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

可以看出， $\binom{n}{m}$ 等价于 $\binom{n}{m, n-m}$ ，只不过后者较为繁琐，因而不采用。

多重集的组数 1

设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1 , n_2 个 a_2 , \dots , n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于整数 $r (r < n_i, \forall i \in [1, k])$ ，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数就是 **多重集的组数**。这个问题等价于 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 的非负整数解的数目，可以用插板法解决，答案为

$$\binom{r+k-1}{k-1}$$

多重集的组合数 2

考虑这个问题：设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1 , n_2 个 a_2 , ..., n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于正整数 r , 从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数。

这样就限制了每种元素的取的个数。同样的，我们可以把这个问题转化为带限制的线性方程求解：

$$\forall i \in [1, k], x_i \leq n_i, \sum_{i=1}^k x_i = r$$

于是很自然地想到了容斥原理。容斥的模型如下：

1. 全集： $\sum_{i=1}^k x_i = r$ 的非负整数解。
2. 属性： $x_i \leq n_i$ 。

于是设满足属性 i 的集合是 S_i , $\overline{S_i}$ 表示不满足属性 i 的集合，即满足 $x_i \geq n_i + 1$ 的集合（转化为上面插板法的问题三）。那么答案即为

$$\left| \bigcap_{i=1}^k S_i \right| = |U| - \left| \bigcup_{i=1}^k \overline{S_i} \right|$$

根据容斥原理，有：

$$\left| \bigcup_{i=1}^k \overline{S_i} \right| = \sum_i |\overline{S_i}| - \sum_{i,j} |\overline{S_i} \cap \overline{S_j}| + \sum_{i,j,k} |\overline{S_i} \cap \overline{S_j} \cap \overline{S_k}| - \dots \quad (1)$$

$$+ (-1)^{k-1} \left| \bigcap_{i=1}^k \overline{S_i} \right| \quad (2)$$

$$= \sum_i \binom{k+r-n_i-2}{k-1} - \sum_{i,j} \binom{k+r-n_i-n_j-3}{k-1} + \sum_{i,j,k} \binom{k+r-n_i-n_j-n_k-4}{k-1} - \dots \quad (3)$$

$$+ (-1)^{k-1} \binom{k+r-\sum_{i=1}^k n_i-k-1}{k-1} \quad (4)$$

拿全集 $|U| = \binom{k+r-1}{k-1}$ 减去上式，得到多重集的组合数

$$Ans = \sum_{p=0}^k (-1)^p \sum_A \binom{k+r-1-\sum_A n_{A_i}-p}{k-1}$$

其中 A 是充当枚举子集的作用，满足 $|A| = p$, $A_i < A_{i+1}$ 。

圆排列

n 个人全部来围成一圈，所有的排列数记为 Q_n^n 。考虑其中已经排好的一圈，从不同位置断开，又变成不同的队列。所以有

$$Q_n^n \times n = A_n^n \implies Q_n = \frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$$

由此可知部分圆排列的公式：

$$Q_n^r = \frac{A_n^r}{r} = \frac{n!}{r \times (n-r)!}$$

错排

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

Catalan 数

$$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$$

Stirling 数

第一类斯特林数（感觉 useless）

把 n 个不同元素分配到 k 个圆排列里，圆不能为空

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \times s_{n-1,k}$$

第二类斯特林数

将 n 个物体划分成 k 个非空的没有区别的集合的方法数，等同于把 n 个不同的小球放入 m 个相同的盒子中（且盒子不能为空）的方案数。递推公式为

$$s_{i,j} = s_{i-1,j} \times j + s_{i-1,j-1} \quad (s_{i,j} \text{ 表示前 } i \text{ 个小球放到前 } j \text{ 个盒子里的方案数})$$

我们可以这样理解：对于一个 $s_{i,j}$ ，你接下来要再放一个小球，你可以放到前 j 个盒子里，方案数为 $j \times s_{i-1,j-1}$ ，也可以放到下一个盒子里，方案数为 $s_{i,j+1}$ 。

此外这个部分还有一种做法。考虑容斥：枚举多少个盒子空了，然后剩下的部分就是第三种情况了。然后就可以得到下面这个式子：

$$S_{n,m} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

高维前缀和

对于所有的 $i, 0 \leq i \leq 2^n - 1$ ，求解 $\sum_{j \subseteq i} a_j$

去除原有二维前缀和的容斥求法，对每一维采用类似一维前缀和的方式依次累加进行计算，每次提高一个维度不断累加。实际上就等价于 f_i 加上 $f_{i \oplus (2^j)}$ ，类似 or 运算

```

1 for(int j = 0; j < n; j++)
2     for(int i = 0; i < 1 << n; i++)
3         if(i >> j & 1) f[i] += f[i ^ (1 << j)];

```

对超集求和，也为高维后缀和，类似 and 运算

```

1 for(int j = 0; j < n; j++)
2     for(int i = 0; i < 1 << n; i++)
3         if(!(i >> j & 1)) f[i] += f[i ^ (1 << j)];

```

二项式反演

三种形式

$$f(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(k)$$

至多和恰好的转换

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

至少和恰好的转换

$$f(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} f(k)$$

斯特林反演

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} f(k)$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} f(k)$$

子集反演

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T) \Rightarrow g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T)$$

最值反演 (min-max 容斥)

$$\max S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min T$$

$$\min S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \max T$$

拓展

$$k^{th} \max S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \min T$$

反之同理

此外上述两种 min-max 容斥在期望上仍然成立

线性代数

高斯消元

```
1  typedef long long ll;
2  const int mo = 1e9 + 7;
3  using i64 = long long;
4
5  template<typename T>
6  struct Gauss{
7      int n,m; // n 行 m 列
8      std::vector<std::vector<T>>> a;
9      Gauss(int n,int m,const vector<vector<T>>> &a):n(n),m(m),a(a){}
10     vector<double> gauss(){
11         std::vector<double> sol;
12         int r = 0;
13         for(int i = 0; i < m; i++){
14             if(n < m && i >= n) break;
15             int mx = i; //最大数的行号
16             for(int j = i + 1; j < n; j++){
17                 if(fabs(a[mx][i]) < fabs(a[j][i])) mx = j;
18             }
19             if(fabs(a[mx][i]) < eps) continue;
20             if(mx != i) swap(a[mx],a[i]);
21             double t = a[i][i];
22             for(int j = i; j < m + 1; j++){
23                 a[i][j] /= t;
24             }
25             for(int j = i + 1; j < n; j++){
26                 t = a[j][i];
27                 for(int k = i; k < m + 1; k++){
28                     a[j][k] -= a[i][k] * t;
29                 }
30             }
31             r++;
32         }
33     }
34 }
```

```

31     }
32     for(int i = m; i < n; i++){
33         if(fabs(a[i][m]) > eps) return sol; // 无解
34     }
35     if(r < m) return sol; // 无穷解
36     sol.resize(m);
37     sol[m - 1] = a[m - 1][m];
38     for(int i = n - 2; i >= 0; i--){
39         sol[i] = a[i][m];
40         for(int j = i + 1; j < m; j++){
41             sol[i] -= a[i][j] * sol[j];
42         }
43     }
44     return sol;
45 }
46 int gauss_det(){
47     assert(n == m);
48     int det = 1;
49     for(int i = 0; i < n; i++){
50         for(int j = i + 1; j < n; j++){
51             while(a[j][i] != 0){
52                 int k = a[i][i] / a[j][i];
53                 for(int h = i; h < n; h++){
54                     a[i][h] -= a[j][h] * k;
55                     std::swap(a[i][h], a[j][h]);
56                 }
57                 det = -det;
58             }
59         }
60     }
61     for(int i = 0; i < n; i++) det *= a[i][i];
62     return det;
63 }
64
65 T gauss_det_mod(int st = 0){
66     T det = T(1);
67     for(int i = st; i < n; i++){
68         det *= a[i][i];
69         //cerr << i << " " << a[i][i].a << " " << a[i][i].b << "\n";
70         T tmp = T(1) / a[i][i];
71         for(int j = i; j < n; j++) a[i][j] *= tmp;
72         for(int j = i + 1; j < n; j++){
73             tmp = a[j][i];
74             for(int k = i; k < n; k++) a[j][k] = a[j][k] - tmp * a[i][k];
75         }
76     }
77     return det;
78 }
79 };

```

线性基

```

1 struct LinearBasis {
2     static const int n = 60;
3     bool 0; ll a[n + 1]; int cnt;
4
5     void clear() { 0 = 0; cnt = 0; for (int i = 0; i <= n; ++i) a[i] = 0; }
6     void insert(ll v) {
7         for (int i = n; ~i; --i) {
8             if (!(v >> i & 1)) continue;
9             if (!a[i]) { a[i] = v; break; }
10            v ^= a[i];
11        } 0 |= !v;
12    }
13    void work() {
14        for (int i = 0; i <= n; cnt += a[i++] > 0)
15            for (int j = 0; j < i; ++j)
16                if (a[i] >> j & 1) a[i] ^= a[j];
17    }
18    ll get_max(ll v = 0) {
19        for (int i = n; ~i; --i) v = max(v, v ^ a[i]);
20    }
21 };

```

```

20     return v;
21 }
22 ll get_min() {
23     if (0) return 0;
24     for (int i = 0; i <= n; ++i)
25         if (a[i]) return a[i];
26 }
27 ll get_min(ll v) {
28     for (int i = n; ~i; --i) v = min(v, v ^ a[i]);
29     return v;
30 }
31 ll get_kth(ll k) {
32     ll ans = 0; k -= 0;
33     for (int i = 0; i <= n; ++i) {
34         if (!a[i]) continue;
35         if (k & 1) ans ^= a[i];
36         k >>= 1;
37     }
38     if (k > 0) return -1;
39     else return ans;
40 }
41 bool check(ll v) {
42     for (int i = n; ~i; --i) {
43         if (!(v >> i & 1)) continue;
44         if (!a[i]) return 0;
45         v ^= a[i];
46     } return 1;
47 }
48 };

```

Prüfer 序列

Prüfer 是这样建立的：每次选择一个编号最小的叶结点并删掉它，然后在序列中记录下它连接到的那个结点。重复 $n - 2$ 次后就只剩下两个结点。

- 重要性质：prufer 序列与无根树一一对应。
- 度数为 d_i 的节点会在 prufer 序列中出现 $d_i - 1$ 次。
- 一个 n 个节点的完全图的生成树个数为 n^{n-2} 。
- 对于给定度数为 d_1, \dots, d_n 的一棵无根树共有 $\frac{(n-2)!}{\prod (d_i-1)!}$ 种情况。
- n 个点 m 条边的带标号无向图有 k 个连通块。我们希望添加 $k - 1$ 条边使得整个图连通。方案数为 $n^{k-2} \prod_{i=1}^k s_i$ 。

LGV 引理

LGV 引理仅适用于 有向无环图。

定义

$\omega(P)$ 表示 P 这条路径上所有边的边权之积。（路径计数时，可以将边权都设为 1）（事实上，边权可以为生成函数）

$e(u, v)$ 表示 u 到 v 的 每一条路径 P 的 $\omega(P)$ 之和，即 $e(u, v) = \sum_{P: u \rightarrow v} \omega(P)$ 。

起点集合 A ，是有向无环图点集的一个子集，大小为 n 。

终点集合 B ，也是有向无环图点集的一个子集，大小也为 n 。

一组 $A \rightarrow B$ 的不相交路径 S ： S_i 是一条从 A_i 到 $B_{\sigma(S)_i}$ 的路径（ $\sigma(S)$ 是一个排列），对于任何 $i \neq j$ ， S_i 和 S_j 没有公共顶点。

$N(\sigma)$ 表示排列 σ 的逆序对个数。

引理

$$M = \begin{bmatrix} e(A_1, B_1) & e(A_1, B_2) & \cdots & e(A_1, B_n) \\ e(A_2, B_1) & e(A_2, B_2) & \cdots & e(A_2, B_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(A_n, B_1) & e(A_n, B_2) & \cdots & e(A_n, B_n) \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = \sum_{S: A \rightarrow B} (-1)^{N(\sigma(S))} \prod_{i=1}^n \omega(S_i)$$

其中 $\sum_{S: A \rightarrow B}$ 表示满足上文要求的 $A \rightarrow B$ 的每一组不相交路径 S 。

矩阵树定理

定理 1 (矩阵树定理, 无向图行列式形式) 对于任意的 i , 都有

$$t(G) = \det L(G) \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

其中记号 $L(G) \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n \end{pmatrix}$ 表示矩阵 $L(G)$ 的第 $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ 行与第 $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ 列构成的子矩阵。也就是说, 无向图的 Laplace 矩阵具有这样的性质, 它的所有 $n-1$ 阶主子式都相等。

定理 2 (矩阵树定理, 无向图特征值形式) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ 为 $L(G)$ 的 $n-1$ 个非零特征值, 那么有

$$t(G) = \frac{1}{n} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}$$

定理 3 (矩阵树定理, 有向图根向形式) 对于任意的 k , 都有

$$t^{root}(G, k) = \det L^{out}(G) \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

因此如果要统计一张图所有的根向树形图, 只要枚举所有的根 k 并对 $t^{root}(G, k)$ 求和即可。

定理 4 (矩阵树定理, 有向图叶向形式) 对于任意的 k , 都有

$$t^{leaf}(G, k) = \det L^{in}(G) \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

因此如果要统计一张图所有的叶向树形图, 只要枚举所有的根 k 并对 $t^{leaf}(G, k)$ 求和即可。

BEST 定理

定理 5 (BEST 定理) 设 G 是有向欧拉图, 那么 G 的不同欧拉回路总数 $ec(G)$ 是

$$ec(G) = t^{root}(G, k) \prod_{v \in V} (\deg(v) - 1)!$$

注意, 对欧拉图 G 的任意两个节点 k, k' , 都有 $t^{root}(G, k) = t^{root}(G, k')$, 且欧拉图 G 的所有节点的入度和出度相等。

博弈

Nim 游戏: 每轮从若干堆石子中的一堆取走若干颗。先手必胜条件为石子数量异或非零。

阶梯 Nim 游戏: 可以选择阶梯上某一堆中的若干颗向下推动一级, 直到全部推下去。先手必胜条件是奇数阶梯的异或非零 (对于偶数阶梯的操作可以模仿)。

Anti-SG: 无法操作者胜。先手必胜的条件是:

- SG 不为 0 且某个单一游戏的 SG 大于 1。
- SG 为 0 且没有单一游戏的 SG 大于 1。

Every-SG: 对所有单一游戏都要操作。先手必胜的条件是单一游戏中的最大 step 为奇数。

- 对于终止状态 step 为 0
- 对于 SG 为 0 的状态, step 是最大后继 step + 1
- 对于 SG 非 0 的状态, step 是最小后继 step + 1

树上删边: 叶子 SG 为 0, 非叶子结点为所有子结点的 SG 值加 1 后的异或和。

多项式

拉格朗日插值

$$f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```

1  vector<int> lagrange(const vector<int> &x, const vector<int> y){
2      assert(x.size() == y.size());
3      int n = x.size();
4      std::vector<int> a(n);
5      for(int i = 0; i < n; i++){
6          int A = 1;
7          for(int j = 0; j < n; j++){
8              if(i == j) continue;
9              assert(x[i] - x[j]);
10             A = 1ll * A * (x[i] - x[j] + mo) % mo;
11         }
12         a[i] = 1ll * y[i] * qp(A, mo - 2) % mo;
13     }
14     std::vector<int> b(n + 1), c(n), f(n);
15     b[0] = 1;
16     for(int i = 0; i < n; i++){
17         for(int j = i + 1; j >= 1; j--){
18             b[j] = (1ll * b[j] * (mo - x[i]) % mo + b[j - 1]) % mo;
19         }
20         b[0] = 1ll * b[0] * (mo - x[i]) % mo;
21     }
22     for(int i = 0; i < n; i++){
23         int inv = qp(mo - x[i], mo - 2);
24         if(!inv){
25             for(int j = 0; j < n; j++) c[j] = b[j + 1];
26         } else {
27             c[0] = 1ll * b[0] * inv % mo;
28             for(int j = 1; j < n; j++){
29                 c[j] = 1ll * (b[j] - c[j - 1] + mo) * inv % mo;
30             }
31         }
32         for(int j = 0; j < n; j++){
33             f[j] = (f[j] + 1ll * a[i] * c[j] % mo) % mo;
34         }
35     }
36     return f;
37 }

```

横坐标连续

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (x - j)}{(x - i) \cdot (-1)^{n+1-i} \cdot (i - 1)! \cdot (n + 1 - i)!}$$

普通幂与上升幂和下降幂

记上升阶乘幂 $x^{\overline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x + k)$ 。

则可以利用下面的恒等式将上升幂转化为普通幂:

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

如果将普通幂转化为上升幂，则有下面的恒等式：

$$x^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

记下降阶乘幂 $x^{\underline{n}} = \frac{x!}{(x-n)!} = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = n! \binom{x}{n}_o$

则可以利用下面的恒等式将普通幂转化为下降幂：

$$x^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}$$

如果将下降幂转化为普通幂，则有下面的恒等式：

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

多项式操作技巧

分治 FFT

$\prod_{i=1}^n f_i(x)$ ，分治两两合并即可，要求每个多项式次数较低

$f_i = \sum_{j=1}^i f_{i-j} g_j$ ，先求出左边 f_i 再将其与 g_i 相乘算出对右边 f_i 的贡献。

上式也可化为 $f(x) = (1 - g(x))^{-1}$

循环卷积

将其中一个序列复制一遍，再做卷积

差卷积

$$h_d = \sum f_i g_{i+d}$$

将其中一个序列翻转，就转化成了加法卷积

乘法卷积

$$h_k = \sum_{i \times j = k} f_i g_j$$

对下标取离散对数，转成加法卷积

ln 转 exp

对于形如 $\prod (1 + x^{a_i})$ 这种形式的，对其取 ln 将乘法转为加法，然后再 exp 回去。

FWT

or, and, xor 卷积

```
1 void FWT_or(vector<Z> a,int N,int opt){ // N = 2^n
2     for(int len = 2,M = 1;len <= N;M = len,len <= 1){
3         for(int L = 0,R = len - 1; R <= N;L += len,R += len){
4             for(int k = L;k < L + M;k ++){
5                 if(opt == 1)a[k + M] += a[k];
6                 else a[k + M] -= a[k];
7             }
8         }
9     }
10 }
11
12 void FWT_and(vector<Z> a,int N,int opt){
13     for(int len = 2,M = 1;len <= N;M = len,len <= 1){
14         for(int L = 0,R = len - 1; R <= N;L += len,R += len){
15             for(int k = L;k < L + M;k ++){
16                 if(opt == 1)a[k] += a[k + M];
17                 else a[k] -= a[k + M];
18             }
19         }
20     }
21 }
22 void FWT_xor(vector<Z> a,int N,int opt){
23     for(int len = 2,M = 1;len <= N;M = len,len <= 1){
24         for(int L = 0,R = len - 1; R <= N;L += len,R += len){
25             for(int k = L;k < L + M;k ++){
26                 Z x = a[k],y = a[k + M];
27                 a[k] = x + y;a[k + M] = x - y;
28                 if(opt == -1)a[k] = a[k] * inv2,a[k + M] = a[k + M] * inv2;
29             }
30         }
31     } // ifwt 等于 fwt 后除 N
32 }
```

OGF

基本运算考虑两个序列 a, b 的普通生成函数, 分别为 $F(x), G(x)$ 。那么有

$$F(x) \pm G(x) = \sum_n (a_n \pm b_n) x^n$$

因此 $F(x) \pm G(x)$ 是序列 $\langle a_n \pm b_n \rangle$ 的普通生成函数。考虑乘法运算, 也就是卷积:

$$F(x)G(x) = \sum_n x^n \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

因此 $F(x)G(x)$ 是序列 $\langle \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \rangle$ 的普通生成函数。

常见互化手段求导, 二项式定理展开

$$\langle 1, p, p^2, p^3, p^4, \dots \rangle \text{ 的生成函数 } F(x) = \sum_{n \geq 0} p^n x^n = \frac{1}{1-px}$$

$$\langle 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \dots \rangle \text{ 的生成函数 } F(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1)^k x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$$

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$$

$$\text{斐波那契数列生成函数 } F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n \geq 0} (1 - 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1}) x^n$$

五边形数

$$\prod_{i \geq 1} (1 - x^i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{k(3k-1)}{2}}$$

EGF

在 OGF 的基础上考虑有序，形式上基本和泰勒展开等价

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

常用公式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

基本运算

指数生成函数的加减法与普通生成函数是相同的，也就是对应项系数相加。

考虑指数生成函数的乘法运算。对于两个序列 a, b ，设它们的指数生成函数分别为 $\hat{F}(x), \hat{G}(x)$ ，那么

$$\begin{aligned}\hat{F}(x)\hat{G}(x) &= \sum_{i \geq 0} a_i \frac{x^i}{i!} \sum_{j \geq 0} b_j \frac{x^j}{j!} \\ &= \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \frac{1}{i!(n-i)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}\end{aligned}$$

因此 $\hat{F}(x)\hat{G}(x)$ 是序列

$$\left\langle \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \right\rangle$$

的指数生成函数。

多项式 exp 组合意义：将 n 个互异元素分到若干非空的无序集合中，大小为 i 的集合内有 f_i 种方案，记最后的总方案数为 g_n 。则两者的 EGF 满足 $G(x) = e^{F(x)}$ 。

集合幂级数

计算 $\prod(1+x^{a_i})$ 这里为或卷积。

由于点值一定为 $1^x 2^{n-x}$ 的形式，所以可以通过一次 fwt 解出 x ，然后再将点值序列 ifwt 回去解出答案。

计算 $\prod(x^U + x^{a_i})$ 这里为与卷积。

点值同样为 $1^x 2^{n-x}$ 的形式

计算 $\prod(1+a_i x^i)$ 这里为异或卷积。

等价于对每个 x 求 $\prod(1+(-1)^{x \oplus i} a_i)$ ，分治求解，最后再 ifwt 回去。 a_i 为定值则可套用上面的方式。

```
1 void solve(vector<int> &a,int N) {
2     vector<int> A(N),B(N);
3     for(int i = 0;i < N;i++){
4         A[i] = (1 + a[i]) % mo;
5         B[i] = (1 - a[i] + mo) % mo;
6     }
7     for(int i = 1;i < N;i <= 1)
```

```

8         for(int len = i << 1, j = 0; j < N; j += len)
9             for(int k = 0; k < i; k += len){
10                 int a0 = A[j + k], a1 = A[j + k + i];
11                 int b0 = B[j + k], b1 = B[j + k + i];
12                 A[j + k] = 1ll * a0 * a1 % mo;
13                 B[j + k] = 1ll * b0 * b1 % mo;
14                 A[j + k + i] = 1ll * a0 * b1 % mo;
15                 B[j + k + i] = 1ll * a1 * b0 % mo;
16             }
17         for(int i = 0; i < N; i++) a[i] = A[i];
18     }

```

FFT

```

1  constexpr double PI = std::atan2(0, -1);
2  std::vector<int> rev;
3  std::vector<std::complex<double>> roots {0, 1};
4  void dft(std::vector<std::complex<double>> &a) {
5      int n = a.size();
6      if (int(rev.size()) != n) {
7          int k = __builtin_ctz(n) - 1;
8          rev.resize(n);
9          for (int i = 0; i < n; ++i)
10              rev[i] = rev[i >> 1] >> 1 | (i & 1) << k;
11      }
12      for (int i = 0; i < n; ++i)
13          if (rev[i] < i)
14              swap(a[i], a[rev[i]]);
15      if (int(roots.size()) < n) {
16          int k = __builtin_ctz(roots.size());
17          roots.resize(n);
18          while ((1 << k) < n) {
19              std::complex<double> e = {cos(PI / (1 << k)), sin(PI / (1 << k))};
20              for (int i = 1 << (k - 1); i < (1 << k); ++i) {
21                  roots[2 * i] = roots[i];
22                  roots[2 * i + 1] = roots[i] * e;
23              }
24              ++k;
25          }
26      }
27      for (int k = 1; k < n; k *= 2) {
28          for (int i = 0; i < n; i += 2 * k) {
29              for (int j = 0; j < k; ++j) {
30                  auto u = a[i + j], v = a[i + j + k] * roots[k + j];
31                  a[i + j] = u + v;
32                  a[i + j + k] = u - v;
33              }
34          }
35      }
36  }
37  void idft(std::vector<std::complex<double>> &a) {
38      int n = a.size();
39      reverse(a.begin() + 1, a.end());
40      dft(a);
41      for (int i = 0; i < n; ++i)
42          a[i] /= n;
43  }
44  std::vector<ll> operator*(std::vector<ll> a, std::vector<ll> b) {
45      int sz = 1, tot = a.size() + b.size() - 1;
46      while (sz < tot)
47          sz *= 2;
48      std::vector<std::complex<double>> ca(sz), cb(sz);
49      //copy(a.begin(), a.end(), ca.begin());
50      //copy(b.begin(), b.end(), cb.begin());
51      for(int i = 0; i < sz; i++){
52          if(i < a.size())ca[i].real(a[i]);
53          if(i < b.size())ca[i].imag(b[i]);
54      }
55      dft(ca);
56      //dft(cb);
57      for (int i = 0; i < sz; ++i)

```

```

58     ca[i] *= ca[i];
59     idft(ca);
60     a.resize(tot);
61     for (int i = 0; i < tot; ++i)
62         a[i] = std::floor(ca[i].imag() / 2 + 0.5);
63     return a;
64 }
65

```

多项式全家桶

```

1  using namespace std;
2  using i64 = long long;
3  constexpr int P = 998244353;
4  int norm(int x) {
5      if (x < 0) x += P;
6      if (x >= P) x -= P;
7      return x;
8  }
9  template<class T>
10 T qp(T a, int b) {
11     T res = 1;
12     for (; b; b /= 2, a *= a) {
13         if (b % 2) {
14             res *= a;
15         }
16     }
17     return res;
18 }
19 struct Z{
20     int x;
21     Z(): x{} {}
22     Z(int x) : x{norm(x)} {}
23     Z(i64 x) : x{norm(int(x % P))} {}
24     friend std::istream &operator>>(std::istream &is, Z &a) {
25         i64 v;
26         is >> v;
27         a = Z(v);
28         return is;
29     }
30     friend std::ostream &operator<<(std::ostream &os, const Z &a) {
31         return os << a.x;
32     }
33     Z inv() const {
34         return qp(Z(x), P - 2);
35     }
36 };
37 bool operator==(const Z a, const Z b) { return a.x == b.x; }
38 bool operator!=(const Z a, const Z b) { return a.x != b.x; }
39 Z operator+(const Z a, const Z b) { return norm(a.x + b.x); }
40 Z operator-(const Z a, const Z b) { return norm(a.x + P - b.x); }
41 Z operator-(const Z x) { return x.x ? P - x.x : 0; }
42 Z operator*(const Z a, const Z b) { return i64(a.x) * b.x % P; }
43 Z operator/(const Z a, const Z b) { return a * b.inv(); }
44 Z &operator+=(Z &a, const Z b) { return a = a + b; }
45 Z &operator-=(Z &a, const Z b) { return a = a - b; }
46 Z &operator*=(Z &a, const Z b) { return a = a * b; }
47 Z &operator/=(Z &a, const Z b) { return a = a / b; }
48
49 std::vector<int> rev;
50 std::vector<Z> roots{0, 1};
51 void dft(std::vector<Z> &a) {
52     int n = a.size();
53     if (int(rev.size()) != n) {
54         int k = __builtin_ctz(n) - 1;
55         rev.resize(n);
56         for (int i = 0; i < n; i++) {
57             rev[i] = rev[i >> 1] >> 1 | (i & 1) << k;
58         }
59     }
60     for (int i = 0; i < n; i++) if (rev[i] < i) swap(a[i], a[rev[i]]);

```

```

61     if (int(rroots.size()) < n) {
62         int k = __builtin_ctz(rroots.size());
63         rroots.resize(n);
64         while ((1 << k) < n) {
65             Z e = qp(Z(3), (P - 1) >> (k + 1));
66             for (int i = 1 << (k - 1); i < (1 << k); i++) {
67                 roots[2 * i] = roots[i];
68                 roots[2 * i + 1] = roots[i] * e;
69             }
70             k++;
71         }
72     }
73     for (int k = 1; k < n; k *= 2) {
74         for (int i = 0; i < n; i += 2 * k) {
75             for (int j = 0; j < k; j++) {
76                 Z u = a[i + j];
77                 Z v = a[i + j + k] * roots[k + j];
78                 a[i + j] = u + v;
79                 a[i + j + k] = u - v;
80             }
81         }
82     }
83 }
84 void idft(std::vector<Z> &a) {
85     int n = a.size();
86     std::reverse(a.begin() + 1, a.end());
87     dft(a);
88     Z inv = (1 - P) / n;
89     for (int i = 0; i < n; i++) {
90         a[i] *= inv;
91     }
92 }
93 struct Poly {
94     std::vector<Z> a;
95     Poly() {}
96     Poly(const std::vector<Z> &a) : a(a) {}
97     Poly(const std::initializer_list<Z> &a) : a(a) {}
98     int size() const {
99         return a.size();
100     }
101     void resize(int n) {
102         a.resize(n);
103     }
104     Z operator[](int idx) const {
105         if (idx < size()) {
106             return a[idx];
107         } else {
108             return 0;
109         }
110     }
111     Z &operator[](int idx) {
112         return a[idx];
113     }
114     Poly mulxk(int k) const {
115         auto b = a;
116         b.insert(b.begin(), k, 0);
117         return Poly(b);
118     }
119     Poly modxk(int k) const {
120         k = std::min(k, size());
121         return Poly(std::vector<Z>(a.begin(), a.begin() + k));
122     }
123     Poly divxk(int k) const {
124         if (size() <= k) {
125             return Poly();
126         }
127         return Poly(std::vector<Z>(a.begin() + k, a.end()));
128     }
129     friend Poly operator+(const Poly &a, const Poly &b) {
130         std::vector<Z> res(std::max(a.size(), b.size()));
131         for (int i = 0; i < int(res.size()); i++) {

```



```

132         res[i] = a[i] + b[i];
133     }
134     return Poly(res);
135 }
136 friend Poly operator-(const Poly &a, const Poly &b) {
137     std::vector<Z> res(std::max(a.size(), b.size()));
138     for (int i = 0; i < int(res.size()); i++) {
139         res[i] = a[i] - b[i];
140     }
141     return Poly(res);
142 }
143 friend Poly operator*(Poly a, Poly b) {
144     if (a.size() == 0 || b.size() == 0) {
145         return Poly();
146     }
147     int sz = 1, tot = a.size() + b.size() - 1;
148     while (sz < tot) {
149         sz *= 2;
150     }
151     a.a.resize(sz);
152     b.a.resize(sz);
153     dft(a.a);
154     dft(b.a);
155     for (int i = 0; i < sz; ++i) {
156         a.a[i] = a[i] * b[i];
157     }
158     idft(a.a);
159     a.resize(tot);
160     return a;
161 }
162 friend Poly operator*(Z a, Poly b) {
163     for (int i = 0; i < int(b.size()); i++) {
164         b[i] *= a;
165     }
166     return b;
167 }
168 friend Poly operator*(Poly a, Z b) {
169     for (int i = 0; i < int(a.size()); i++) {
170         a[i] *= b;
171     }
172     return a;
173 }
174 Poly &operator+=(Poly b) {
175     return (*this) = (*this) + b;
176 }
177 Poly &operator-=(Poly b) {
178     return (*this) = (*this) - b;
179 }
180 Poly &operator*=(Poly b) {
181     return (*this) = (*this) * b;
182 }
183 Poly deriv() const {
184     if (a.empty()) {
185         return Poly();
186     }
187     std::vector<Z> res(size() - 1);
188     for (int i = 0; i < size() - 1; ++i) {
189         res[i] = (i + 1) * a[i + 1];
190     }
191     return Poly(res);
192 } //求导
193 Poly integr() const {
194     std::vector<Z> res(size() + 1);
195     for (int i = 0; i < size(); ++i) {
196         res[i + 1] = a[i] / (i + 1);
197     }
198     return Poly(res);
199 } //积分
200 Poly inv(int m) const {
201     Poly x{a[0].inv()};
202     int k = 1;

```

```

203     while (k < m) {
204         k *= 2;
205         x = (x * (Poly{2} - modxk(k) * x)).modxk(k);
206     }
207     return x.modxk(m);
208 } //求逆
209 Poly log(int m) const {
210     return (deriv() * inv(m)).integr().modxk(m);
211 }
212 Poly exp(int m) const {
213     Poly x{1};
214     int k = 1;
215     while (k < m) {
216         k *= 2;
217         x = (x * (Poly{1} - x.log(k) + modxk(k))).modxk(k);
218     }
219     return x.modxk(m);
220 }
221 Poly pow(int k, int m) const {
222     int i = 0;
223     while (i < size() && a[i] == 0) {
224         i++;
225     }
226     if (i == size() || 1LL * i * k >= m) {
227         return Poly(std::vector<Z>(m));
228     }
229     Z v = a[i];
230     auto f = divxk(i) * v.inv();
231     return (f.log(m - i * k) * k).exp(m - i * k).mulxk(i * k) * qp(v, k);
232     // Poly res = {1};
233     // Poly base = *this;
234     // while(k){
235     //     if(k & 1) res = res * base;
236     //     if(res.size() > m)res.modxk(m);
237     //     base = base * base;
238     //     if(base.size() > m)base.modxk(m);
239     //     k >= 1;
240     // }
241     // return res;
242 }
243 Poly sqrt(int m) const {
244     Poly x{1};
245     int k = 1;
246     while (k < m) {
247         k *= 2;
248         x = (x + (modxk(k) * x.inv(k)).modxk(k)) * ((P + 1) / 2);
249     }
250     return x.modxk(m);
251 }
252 Poly mult(Poly b) const {
253     if (b.size() == 0) {
254         return Poly();
255     }
256     int n = b.size();
257     std::reverse(b.a.begin(), b.a.end());
258     return ((*this) * b).divxk(n - 1);
259 }
260 std::vector<Z> eval(std::vector<Z> x) const {
261     if (size() == 0) {
262         return std::vector<Z>(x.size(), 0);
263     }
264     const int n = std::max(int(x.size()), size());
265     std::vector<Poly> q(4 * n);
266     std::vector<Z> ans(x.size());
267     x.resize(n);
268     std::function<void(int, int, int)> build = [&](int p, int l, int r) {
269         if (r - l == 1) {
270             q[p] = Poly{1, -x[l]};
271         } else {
272             int m = (l + r) / 2;
273             build(2 * p, l, m);

```

```

274         build(2 * p + 1, m, r);
275         q[p] = q[2 * p] * q[2 * p + 1];
276     }
277 };
278 build(1, 0, n);
279 std::function<void(int, int, int, const Poly &)> work = [&](int p, int l, int r, const Poly &num) {
280     if (r - l == 1) {
281         if (l < int(ans.size())) {
282             ans[l] = num[0];
283         }
284     } else {
285         int m = (l + r) / 2;
286         work(2 * p, l, m, num.mulT(q[2 * p + 1]).modxk(m - l));
287         work(2 * p + 1, m, r, num.mulT(q[2 * p]).modxk(r - m));
288     }
289 };
290 work(1, 0, n, mulT(q[1].inv(n)));
291 return ans;
292 } // 多点求值
293 };
294 Poly S2_row; // 第二类斯特林数行
295 void S2_row_init(int n) {
296     vector<Z> f(n + 1), g(n + 1);
297     for (int i = 0; i <= n; i++) {
298         f[i] = qp(Z(i), n) * inv[i];
299         g[i] = Z(i & 1 ? -1 : 1) * inc[i];
300     }
301     S2_row = Poly(f) * Poly(g);
302 }
303 Poly S2_col; // 第二类斯特林数列
304 void S2_col_init(int n, int k) {
305     n++;
306     vector<Z> f(n);
307     for (int i = 1; i < n; i++) {
308         f[i] = inv[i];
309     }
310     auto ans = Poly(f).pow(k, n);
311     S2_col.resize(n + 1);
312     for (int i = 0; i < n; i++) {
313         S2_col[i] = ans[i] * fc[i] * inv[k];
314     }
315 }
316 Poly Bell;
317 void Bell_init(int n) {
318     vector<Z> f(n + 1);
319     for (int i = 1; i <= n; i++) {
320         f[i] = inv[i];
321     }
322     auto ans = Poly(f).exp(n + 1);
323     Bell.resize(n + 1);
324     for (int i = 0; i <= n; i++) {
325         Bell[i] = ans[i] * fc[i];
326     }
327 }

1  const int mod = 998244353, gen = 3;
2
3  int add(int x, int y) {
4      return x + y >= mod ? x + y - mod : x + y;
5  }
6  int sub(int x, int y) {
7      return x - y >= 0 ? x - y : x - y + mod;
8  }
9  int power(int x, int y) {
10     int res = 1;
11     for (; y >= 1, x = 1ll * x * x % mod; y >>= 1) {
12         if (y & 1) { res = 1ll * res * x % mod; }
13     }
14     return res;
15 }
16
17 namespace Combin {

```

```

18     vector<int> inv, fac, invf;
19
20     void getCombin(int n) {
21         if (inv.empty()) { inv = fac = invf = vector<int> (2, 1); }
22         int m = inv.size(); n++;
23         if (m < n) {
24             inv.resize(n); fac.resize(n); invf.resize(n);
25             for (int i = m; i < n; i++) {
26                 inv[i] = 1ll * (mod - mod / i) * inv[mod % i] % mod;
27                 fac[i] = 1ll * fac[i - 1] * i % mod;
28                 invf[i] = 1ll * invf[i - 1] * inv[i] % mod;
29             }
30         }
31     }
32     inline int binom(int n, int m) {
33         if (n < m || m < 0) { return 0; }
34         getCombin(n);
35         return 1ll * fac[n] * invf[m] % mod * invf[n - m] % mod;
36     }
37 }
38
39 using namespace Combin;
40
41 namespace Polynom {
42     vector<int> rev, rt;
43
44     void getRevRoot(int n) {
45         int m = __lg(n);
46         rev.resize(n);
47         for (int i = 1; i < n; i++) {
48             rev[i] = rev[i >> 1] >> 1 | (i & 1) << m - 1;
49         }
50         static int len = 1;
51         if (len < n) {
52             rt.resize(n);
53             for (; len < n; len *= 2) {
54                 int uni = power(gen, (mod - 1) / (len * 2));
55                 rt[len] = 1;
56                 for (int i = 1; i < len; i++) {
57                     rt[i + len] = 1ll * rt[i] * uni % mod;
58                 }
59             }
60         }
61     }
62     void ntt(vector<int> &f, int n) {
63         f.resize(n);
64         for (int i = 0; i < n; i++) {
65             if (i < rev[i]) { swap(f[i], f[rev[i]]); }
66         }
67         for (int len = 1; len < n; len *= 2) {
68             for (int i = 0; i < n; i += len * 2) {
69                 for (int j = 0; j < len; j++) {
70                     int x = f[i + j], y = 1ll * f[i + j + len] * rt[j + len] % mod;
71                     f[i + j] = add(x, y); f[i + j + len] = sub(x, y);
72                 }
73             }
74         }
75     }
76     vector<int> operator *(vector<int> f, vector<int> g) {
77         int n = 1, m = f.size() + g.size(); m--;
78         while (n < m) { n *= 2; }
79         int invn = power(n, mod - 2);
80         getRevRoot(n); ntt(f, n); ntt(g, n);
81         for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % mod; }
82         reverse(f.begin() + 1, f.end()); ntt(f, n); f.resize(m);
83         for (int i = 0; i < m; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * invn % mod; }
84         return f;
85     }
86
87     vector<int> polyInv(vector<int> f, int n) {
88         if (n == 1) { return vector<int>(1, power(f[0], mod - 2)); }

```

```

89     f.resize(n);
90     vector<int> g = polyInv(f, n / 2), h(n);
91     g.resize(n);
92     for (int i = 0; i < n / 2; i++) { h[i] = g[i]; }
93     int invn = power(n, mod - 2);
94     getRevRoot(n); ntt(f, n); ntt(g, n);
95     for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % mod; }
96     reverse(f.begin() + 1, f.end()); ntt(f, n);
97     for (int i = 1; i < n / 2; i++) { f[i] = 0; }
98     for (int i = n / 2; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * invn % mod; }
99     f[0] = 1; ntt(f, n);
100    for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % mod; }
101    reverse(f.begin() + 1, f.end()); ntt(f, n);
102    for (int i = n / 2; i < n; i++) { h[i] = sub(0, 1ll * f[i] * invn % mod); }
103    return h;
104}
105vector<int> operator ~(vector<int> f) { // qiuni
106    if (f.empty()) { return f; }
107    int n = 1, m = f.size();
108    while (n < m) { n *= 2; }
109    f = polyInv(f, n); f.resize(m);
110    return f;
111}
112vector<int> polyDeri(vector<int> f) { // qiudao
113    if (f.empty()) { return f; }
114    int m = f.size();
115    for (int i = 1; i < m; i++) { f[i - 1] = 1ll * f[i] * i % mod; }
116    f.pop_back();
117    return f;
118}
119vector<int> polyInte(vector<int> f) { // jifen
120    f.push_back(0);
121    int m = f.size();
122    getCombin(m);
123    for (int i = m - 1; i >= 1; i--) { f[i] = 1ll * f[i - 1] * inv[i] % mod; }
124    f[0] = 0;
125    return f;
126}
127
128vector<int> polyLn(vector<int> f) {
129    if (f.empty()) { return f; }
130    int m = f.size();
131    f = (~f) * polyDeri(f);
132    f.resize(m); f = polyInte(f); f.pop_back();
133    return f;
134}
135vector<int> polyExp(vector<int> f, int n) {
136    if (n == 1) { return vector<int> (1, 1); }
137    f.resize(n);
138    vector<int> g = polyExp(f, n / 2), h(n), g0;
139    g.resize(n); g0 = polyLn(g);
140    for (int i = 0; i < n / 2; i++) { h[i] = g[i]; }
141    for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = sub(g0[i], f[i]); }
142    int invn = power(n, mod - 2);
143    getRevRoot(n); ntt(f, n); ntt(g, n);
144    for (int i = 0; i < n; i++) { f[i] = 1ll * f[i] * g[i] % mod; }
145    reverse(f.begin() + 1, f.end()); ntt(f, n);
146    for (int i = n / 2; i < n; i++) { h[i] = sub(0, 1ll * f[i] * invn % mod); }
147    return h;
148}
149vector<int> polyExp(vector<int> f) {
150    if (f.empty()) { return f; }
151    int n = 1, m = f.size();
152    while (n < m) { n *= 2; }
153    f = polyExp(f, n); f.resize(m);
154    return f;
155}
156vector<int> polyPow(vector<int> f, int k) {
157    auto g = polyLn(f);
158    for (int i = 0; i < g.size(); i++) {
159        g[i] = 1ll * g[i] * k % mod;

```

```

160     }
161     g = polyExp(g);
162     return g;
163 }
164 }

```

计算几何

tips:

直线上两点整点坐标范围在 $[-10^6, 10^6]$, 直线交点范围在 $[-10^{18}, 10^{18}]$

Pick 定理: 给定顶点均为整点的简单多边形, 其面积 A 和内部格点数目 i 、边上格点数目 b 的关系为 $A = i + \frac{b}{2} - 1$

曼哈顿转切比雪夫: (x, y) 变为 $(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$

二维计算几何

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  typedef long long ll;
4  constexpr double eps = 1e-7;
5  constexpr double PI = acos(-1);
6  constexpr double inf = 1e9;
7  struct Point { double x, y; }; // 点
8  using Vec = Point; // 向量
9  struct Line { Point P; Vec v; }; // 直线 (点向式), 射线时为 A->B
10 struct Seg { Point A, B; }; // 线段 (存两个端点)
11 struct Circle { Point O; double r; }; // 圆 (存圆心和半径)
12 using Points = std::vector<Point>;
13 using ConvexHull = std::vector<Point>;
14 const Point O = {0, 0}; // 原点
15 const Line Ox = {O, {1, 0}}, Oy = {O, {0, 1}}; // 坐标轴
16
17 bool eq(double a, double b) { return abs(a - b) < eps; } // ==
18 bool gt(double a, double b) { return a - b > eps; } // >
19 bool lt(double a, double b) { return a - b < -eps; } // <
20 bool ge(double a, double b) { return a - b > -eps; } // >=
21 bool le(double a, double b) { return a - b < eps; } // <=
22 Vec operator + (const Vec &a, const Vec &b) { return (Vec){a.x + b.x, a.y + b.y}; }
23 Vec operator - (const Vec &a, const Vec &b) { return (Vec){a.x - b.x, a.y - b.y}; }
24 Vec operator * (const Vec &a, const double &b) { return (Vec){b * a.x, b * a.y}; }
25 Vec operator * (const double &a, const Vec &b) { return (Vec){a * b.x, a * b.y}; }
26 Vec operator / (const Vec &a, const double &b) { return (Vec){a.x / b, a.y / b}; }
27 double operator * (const Point &a, const Point &b) { return a.x * b.x + a.y * b.y; } // dot // 点乘
28 double operator ^ (const Point &a, const Point &b) { return a.x * b.y - a.y * b.x; } // cross // 叉乘
29 bool operator < (const Point& a, const Point& b) { return a.x < b.x || (a.x == b.x && a.y < b.y); }
30 double len(const Vec &a) { return sqrt(a * a); }
31
32 ll cross(Point a, Point b) { return (ll)a.x * (ll)b.y - (ll)a.y * (ll)b.x; }
33 ll dot(Point a, Point b) { return (ll)a.x * (ll)b.x + (ll)a.y * (ll)b.y; }
34
35 double angle(const Vec &a, const Vec &b) { return acos(a * b / len(a) / len(b)); }
36
37 double Polar_angle(Vec &v) { return atan2(v.y, v.x); }
38
39 int sgn(double x) {
40     if (abs(x) < eps)
41         return 0;
42     if (x < 0)
43         return -1;
44     return 1;
45 }
46
47 Vec r90a(Vec v) { return {-v.y, v.x}; } // 逆时针旋转 90 度的向量
48 Vec r90c(Vec v) { return {v.y, -v.x}; } // 顺时针旋转 90 度的向量
49
50 // 两向量的夹角余弦
51 // DEPENDS len, V*V

```

```

52 double cos_t(Vec u, Vec v) { return u * v / len(u) / len(v); }
53
54 // 归一化向量 (与原向量方向相同的单位向量)
55 // DEPENDS len
56 Vec norm(Vec v) { return {v.x / len(v), v.y / len(v)}; }
57
58 // 与原向量平行且横坐标大于等于 0 的单位向量
59 // DEPENDS d*V, len
60 Vec pnorm(Vec v) { return (v.x < 0 ? -1 : 1) / len(v) * v; }
61
62 // 线段的方向向量
63 // DEPENDS V-V
64 // NOTE 直线的方向向量直接访问属性 v
65 Vec dvec(Seg l) { return l.B - l.A; }
66 //-----//
67 Line line(Point A, Point B) { return {A, B - A}; }
68
69 // 斜截式直线
70 Line line(double k, double b) { return {{0, b}, {1, k}}; }
71
72 // 点斜式直线
73 Line line(Point P, double k) { return {P, {1, k}}; }
74
75 // 线段所在直线
76 // DEPENDS V-V
77 Line line(Seg l) { return {l.A, l.B - l.A}; }
78
79 // 给定直线的横坐标求纵坐标
80 // NOTE 请确保直线不与 y 轴平行
81 double at_x(Line l, double x) { return l.P.y + (x - l.P.x) * l.v.y / l.v.x; }
82
83 // 给定直线的纵坐标求横坐标
84 // NOTE 请确保直线不与 x 轴平行
85 double at_y(Line l, double y) { return l.P.x - (y - l.P.y) * l.v.x / l.v.y; }
86
87 // 点到直线的垂足
88 // DEPENDS V-V, V*V, d*V
89 Point pedal(Point P, Line l) { return l.P - (l.P - P) * l.v / (l.v * l.v) * l.v; }
90
91 // 过某点作直线的垂线
92 // DEPENDS r90c
93 Line perp(Line l, Point P) { return {P, r90c(l.v)}; }
94
95 // 角平分线
96 // DEPENDS V+V, len, norm
97 Line bisec(Point P, Vec u, Vec v) { return {P, norm(u) + norm(v)}; }
98
99 //seg-----//
100
101 // 线段的方向向量
102 // DEPENDS V-V
103 // NOTE 直线的方向向量直接访问属性 v
104 //Vec dvec(Seg l) { return l.B - l.A; }
105
106 // 线段中点
107 Point midp(Seg l) { return {(l.A.x + l.B.x) / 2, (l.A.y + l.B.y) / 2}; }
108
109 // 线段中垂线
110 // DEPENDS r90c, V-V, midp
111 Line perp(Seg l) { return {midp(l), r90c(l.B - l.A)}; }
112 //-----//
113 // 向量是否互相垂直
114 // DEPENDS eq, V*V
115 bool verti(Vec u, Vec v) { return eq(u * v, 0); }
116
117 // 向量是否互相平行
118 // DEPENDS eq, V^V
119 bool paral(Vec u, Vec v) { return eq(u ^ v, 0); }
120
121 // 向量是否与 x 轴平行
122 // DEPENDS eq

```

```

123 bool paral_x(Vec v) { return eq(v.y, 0); }
124
125 // 向量是否与 y 轴平行
126 // DEPENDS eq
127 bool paral_y(Vec v) { return eq(v.x, 0); }
128
129 // 点是否在直线上
130 // DEPENDS eq
131 bool on(Point P, Line l) { return eq((P.x - l.P.x) * l.v.y, (P.y - l.P.y) * l.v.x); }
132
133
134 // 点是否在射线上
135 // DEPENDS eq
136 bool on_ray(Point P, Line l) { return on(P,l) && ((P - l.P) * l.v) >= 0; }
137
138 // 点是否在线段上
139 // DEPENDS eq, len, V-V
140 bool on(Point P, Seg l) { return eq(len(P - l.A) + len(P - l.B), len(l.A - l.B)); }
141
142 // 两个点是否重合
143 // DEPENDS eq
144 bool operator==(Point A, Point B) { return eq(A.x, B.x) && eq(A.y, B.y); }
145
146 // 两条直线是否重合
147 // DEPENDS eq, on(L)
148 bool operator==(Line a, Line b) { return on(a.P, b) && on(a.P + a.v, b); }
149
150 // 两条线段是否重合
151 // DEPENDS eq, P==P
152 bool operator==(Seg a, Seg b) { return (a.A == b.A && a.B == b.B) || (a.A == b.B && a.B == b.A); }
153
154 // 以横坐标为第一关键词、纵坐标为第二关键词比较两个点
155 // DEPENDS eq, lt
156 //bool operator<(Point A, Point B) { return lt(A.x, B.x) || (eq(A.x, B.x) && lt(A.y, B.y)); }
157
158 // 直线与圆是否相切
159 // DEPENDS eq, V^V, len
160 bool tangency(Line l, Circle C) { return eq(abs((C.O ^ l.v) - (l.P ^ l.v)), C.r * len(l.v)); }
161
162 // 圆与圆是否相切
163 // DEPENDS eq, V-V, len
164 bool tangency(Circle C1, Circle C2) { return eq(len(C1.O - C2.O), C1.r + C2.r); }
165 //-----//
166 // 两点间的距离
167 // DEPENDS len, V-V
168 double dis(Point A, Point B) { return len(A - B); }
169
170 // 点到直线的距离
171 // DEPENDS V^V, len
172 double dis(Point P, Line l) { return abs((P ^ l.v) - (l.P ^ l.v)) / len(l.v); }
173
174 // 点到线段的距离
175 double dis(Point P, Seg l) {
176     if(((P - l.A) * (l.B - l.A)) < 0 || ((P - l.B) * (l.A - l.B)) < 0){
177         return min(dis(P,l.A),dis(P,l.B));
178     }else {
179         Line ll = line(l);
180         return dis(P,ll);
181     }
182 }
183 // 平行直线间的距离
184 // DEPENDS d*V, V^V, len, pnorm
185 // NOTE 请确保两直线是平行的
186 double dis(Line a, Line b) { return abs((a.P ^ pnorm(a.v)) - (b.P ^ pnorm(b.v))); }
187
188
189 // 平移
190 // DEPENDS V+V
191 Line operator+(Line l, Vec v) { return {l.P + v, l.v}; }
192 Seg operator+(Seg l, Vec v) { return {l.A + v, l.B + v}; }
193

```



```

194 // 旋转 逆时针
195 // DEPENDS V+V, V-V
196 Point rotate(Point P, double rad) { return {cos(rad) * P.x - sin(rad) * P.y, sin(rad) * P.x + cos(rad) * P.y}; }
197 Point rotate(Point P, double rad, Point C) { return C + rotate(P - C, rad); } // DEPENDS ^1
198 Line rotate(Line l, double rad, Point C = 0) { return {rotate(l.P, rad, C), rotate(l.v, rad)}; } // DEPENDS ^1, ^2
199 Seg rotate(Seg l, double rad, Point C = 0) { return {rotate(l.A, rad, C), rotate(l.B, rad, C)}; } // DEPENDS ^1, ^2
200
201 // 直线与直线交点
202 // DEPENDS eq, d*v, v*v, v+v, v*v
203 Points inter(Line a, Line b){
204     double c = a.v ^ b.v;
205     if (eq(c, 0)) {return {};}
206     Vec v = 1 / c * Vec{a.P ^ (a.P + a.v), b.P ^ (b.P + b.v)};
207     return {{v * Vec{-b.v.x, a.v.x}, v * Vec{-b.v.y, a.v.y}};
208 }
209
210 // 线段与线段是否相交
211 bool cross_seg(Seg A, Seg B){ // 严格不交 (不算端点)
212     Point a = A.A, b = A.B, c = B.A, d = B.B;
213     double c1 = (b - a) ^ (c - a), c2 = (b - a) ^ (d - a);
214     double d1 = (d - c) ^ (a - c), d2 = (d - c) ^ (b - c);
215     return sgn(c1) * sgn(c2) < 0 && sgn(d1) * sgn(d2) < 0;
216 }
217
218 // 直线与线段相交 => 直线与直线相交 + 点是否在线段上
219 // bool cross_line_seg(Line A, Seg B){
220 //     Line BB = {B.A, B.B};
221 //     Points tmp = inter(A, BB);
222 //     if(tmp.size() == 0) return false;
223 //     return on(tmp[0], B);
224 // }
225
226 bool cross_line_seg(Line A, Seg B){
227     if(abs(A.v ^ (B.A - B.B)) < eps) return false; // 平行
228     Vec v1 = B.A - A.P, v2 = B.B - A.P;
229     if((v2 ^ v1) < 0){
230         swap(v1, v2);
231     } else if(abs(v2 ^ v1) < eps){
232         if((v1 * v2) <= 0) return true;
233         else return false;
234     } // 保证 v2 在 v1 下面
235     int d1 = sgn(A.v ^ v1);
236     int d2 = sgn(A.v ^ v2);
237     if(d1 * d2 <= 0) return true;
238     return false;
239 }
240
241 // 射线与射线交
242 // bool cross_ray_ray(Line A, Line B){
243 //     Points tmp = inter(A, B);
244 //     if(tmp.size() == 0) return false; // 注意重合
245 //     int d1 = sgn((tmp[0] - A.P) * A.v);
246 //     int d2 = sgn((tmp[0] - B.P) * B.v);
247 //     return d1 >= 0 && d2 >= 0;
248 // }
249
250 int cross_ray_ray(Line A, Line B) {
251     if(fabs(A.v ^ B.v) < eps) {
252         if(fabs((A.P - B.P) ^ A.v) < eps) {
253             if(sgn(A.v * (B.P - A.P)) < 0 && sgn(B.v * (A.P - B.P)) < 0) return -1;
254             else return 0;
255         } else return -1;
256     }
257     Vec v = B.P - A.P;
258     double c1 = v ^ A.v;
259     double c2 = v ^ B.v;
260     double c = A.v ^ B.v;
261     if(sgn(c1) * sgn(c) >= 0 && sgn(c2) * sgn(c) >= 0) return 1; // 交
262     return -1;
263 }
264 // 射线与线段交

```

```

265 // bool cross_ray_seg(Line A, Seg B){
266 //     Line BB = {B.A, B.B};
267 //     Points tmp = inter(A, BB);
268 //     if(tmp.size() == 0) return false; // 注意重合
269 //     int d = sgn((tmp[0] - A.P) * A.v);
270 //     return on(tmp[0], B) && d >= 0;
271 // }
272 bool cross_ray_seg(Line A, Seg B){
273     if(abs(A.v ^ (B.A - B.B)) < eps) return false; // 平行
274     Vec v1 = B.A - A.P, v2 = B.B - A.P;
275     if((v2 ^ v1) < 0){
276         swap(v1, v2);
277     } else if(abs(v2 ^ v1) < eps){
278         if((v1 * v2) <= 0) return true;
279         else return false;
280     } // 保证 v2 在 v1 下面
281     int d1 = sgn(A.v ^ v1);
282     int d2 = sgn(A.v ^ v2);
283     if(d1 >= 0 && d2 <= 0) return true;
284     return false;
285 }
286
287 // 射线与直线交
288 // bool cross_ray_line(Line A, Line B) { // A 为射线
289 //     Points tmp = inter(A, B);
290 //     if(tmp.size() == 0) return false;
291 //     int d = sgn((tmp[0] - A.P) * A.v);
292 //     return d >= 0;
293 // }
294 int cross_ray_line(Line A, Line B) {
295     Line B1 = B;
296     Line B2 = {B.P, 0 - B.v};
297     int p1 = cross_ray_ray(A, B1);
298     int p2 = cross_ray_ray(A, B2);
299     if(p1 == 0 || p2 == 0) return 0; // 重合
300     else if(p1 == 1 || p2 == 1) return 1; // 交
301     return -1; // 不交
302 }
303
304 // 直线与圆交点
305 // DEPENDS eq, gt, V+V, V-V, V*V, d*V, len, pedal
306 std::vector<Point> inter(Line l, Circle C){
307     Point P = pedal(C.O, l);
308     double h = len(P - C.O);
309     if(gt(h, C.r)) return {};
310     if(eq(h, C.r)) return {P};
311     double d = sqrt(C.r * C.r - h * h);
312     Vec vec = d / len(l.v) * l.v;
313     return {P + vec, P - vec};
314 }
315
316 // 圆与圆的交点
317 // DEPENDS eq, gt, V+V, V-V, d*V, len, r90c
318 std::vector<Point> inter(Circle C1, Circle C2){
319     Vec v1 = C2.O - C1.O, v2 = r90c(v1);
320     double d = len(v1);
321     if(gt(d, C1.r + C2.r) || gt(abs(C1.r - C2.r), d)) return {};
322     if(eq(d, C1.r + C2.r) || eq(d, abs(C1.r - C2.r))) return {C1.O + C1.r / d * v1};
323     double a = ((C1.r * C1.r - C2.r * C2.r) / d + d) / 2;
324     double h = sqrt(C1.r * C1.r - a * a);
325     Vec av = a / len(v1) * v1, hv = h / len(v2) * v2;
326     return {C1.O + av + hv, C1.O + av - hv};
327 }
328
329 // 三角形的重心
330 Point barycenter(Point A, Point B, Point C){
331     return {(A.x + B.x + C.x) / 3, (A.y + B.y + C.y) / 3};
332 }
333
334 // 三角形的外心

```

```

336 // DEPENDS r90c, V*V, d*V, V-V, V+V
337 // NOTE 给定圆上三点求圆, 要先判断是否三点共线
338 Point circumcenter(Point A, Point B, Point C){
339     double a = A * A, b = B * B, c = C * C;
340     double d = 2 * (A.x * (B.y - C.y) + B.x * (C.y - A.y) + C.x * (A.y - B.y));
341     return 1 / d * r90c(a * (B - C) + b * (C - A) + c * (A - B));
342 }
343
344 // 三角形的内心
345 // DEPENDS len, d*V, V-V, V+V
346 Point incenter(Point A, Point B, Point C){
347     double a = len(B - C), b = len(A - C), c = len(A - B);
348     double d = a + b + c;
349     return 1 / d * (a * A + b * B + c * C);
350 }
351
352 // 三角形的垂心
353 // DEPENDS V*V, d*V, V-V, V^V, r90c
354 Point orthocenter(Point A, Point B, Point C){
355     double n = B * (A - C), m = A * (B - C);
356     double d = (B - C) ^ (A - C);
357     return 1 / d * r90c(n * (C - B) - m * (C - A));
358 }
359
360 // Graham 扫描法
361 // DEPENDS eq, lt, cross, V-V, P<P
362
363 // double theta(Point p) { return p == 0 ? -1 / 0. : atan2(p.y, p.x); } // 求极角
364 // void psort(Points &ps, Point c = 0) { // 极角排序
365 //     sort(ps.begin(), ps.end(), [&](auto a, auto b) {
366 //         return lt(theta(a - c), theta(b - c));
367 //     });
368 // }
369 // }
370 // }
371
372 //极角排序
373 int qua(const Point &P) {
374     if(P.x == 0 && P.y == 0) return 0;
375     if(P.x >= 0 && P.y >= 0) return 1;
376     if(P.x < 0 && P.y >= 0) return 2;
377     if(P.x < 0 && P.y < 0) return 3;
378     if(P.x >= 0 && P.y < 0) return 4;
379     exit(-1);
380 }
381 void psort(Points &ps, Point c = 0) { // 极角排序
382     sort(ps.begin(), ps.end(), [&](auto p1, auto p2) {
383         return qua(p1 - c) < qua(p2 - c) || qua(p1 - c) == qua(p2 - c) && ((p1 - c) ^ (p2 - c)) > 0;
384     });
385 }
386
387 bool check(Point p, Point q, Point r) { // 检查三个点组成的两个向量的旋转方向是否为逆时针
388     return lt(0, (q - p) ^ (r - q));
389 }
390 ConvexHull Andrew(Points &ps) {
391     if(ps.size() == 1){
392         return ps;
393     }
394     sort(ps.begin(), ps.end());
395     std::vector<int> I{0}, used(ps.size());
396     for (int i = 1; i < ps.size(); i++){
397         //std::cout << ps[i].x << " " << ps[i].y << "\n";
398         while (I.size() > 1 && !check(ps[I[I.size() - 2]], ps[I.back()], ps[i]))
399             used[I.back()] = 0, I.pop_back();
400         used[i] = 1, I.push_back(i);
401     } // 下凸壳
402     int tmp = I.size();
403     for (int i = ps.size() - 2; i >= 0; i--){
404         if (used[i])
405             continue;
406         while (I.size() > tmp && !check(ps[I[I.size() - 2]], ps[I.back()], ps[i]))

```

```

407         used[I.back()] = 0, I.pop_back();
408         used[i] = 1, I.push_back(i);
409     } // 上凸壳 特别注意上凸壳最后一段如果是垂直 x 轴的, 则不会完全记录进上凸壳内
410     Points H;
411     for (int i = 0; i < I.size() - 1; i++)
412         H.push_back(ps[I[i]]);
413     return H;
414 } // 逆时针
415 ConvexHull chull(Points &ps){
416     psort(ps, *min_element(ps.begin(), ps.end())); // 以最左下角的点为极角排序
417     Points H{ps[0]};
418     for (int i = 1; i < ps.size(); i++){
419         while (H.size() > 1 && !check(H[H.size() - 2], H.back(), ps[i]))
420             H.pop_back();
421         H.push_back(ps[i]);
422     }
423     return H;
424 }
425 ConvexHull operator+(const ConvexHull &A, const ConvexHull B){
426     int n = A.size();
427     int m = B.size();
428     std::vector<Point> v1(n), v2(m);
429     for (int i = 0; i < n; i++){
430         v1[i] = A[(i + 1) % n] - A[i];
431     }
432     for (int i = 0; i < m; i++){
433         v2[i] = B[(i + 1) % m] - B[i];
434     }
435     ConvexHull C;
436     C.push_back(A[0] + B[0]);
437     int p1 = 0, p2 = 0;
438     while (p1 < n && p2 < m){
439         C.push_back(C.back() + ((v1[p1] ^ v2[p2]) >= 0 ? v1[p1++] : v2[p2++]));
440     } // 对上凸壳做闵可夫斯基和时将 >= 改为 <= 并且合并凸包时不需要排序
441     while (p1 < n) C.push_back(C.back() + v1[p1++]);
442     while (p2 < m) C.push_back(C.back() + v2[p2++]);
443     C = Andrew(C);
444     return C;
445 } // 要求凸包起点必须为左下
446
447 void test(Points a, Point b){
448     int n = a.size();
449     int r = 0;
450     for (int l = 0; l < n; l++){
451         auto nxt = [&](int x){
452             return (x + 1) % n;
453         };
454         while (nxt(r) != l && check(a[l], a[nxt(r)], b)){
455             // b 为轴点
456             r = nxt(r);
457         }
458         if (l == r) break;
459     }
460     } // 极角排序 转半平面
461 }
462
463 // 半平面交
464 int sgn(Point a) {
465     return a.y > 0 || (a.y == 0 && a.x > 0) ? 1 : -1;
466 }
467 bool pointOnLineLeft(Point p, Line l) {
468     return (l.v ^ (p - l.P)) > eps;
469 }
470 Point lineIntersection(Line l1, Line l2) {
471     return l1.P + l1.v * ((l2.v ^ (l1.P - l2.P)) / (l2.v ^ (0 - l1.v)));
472 }
473 std::vector<Point> hp(std::vector<Line> lines) {
474     std::sort(lines.begin(), lines.end(), [&](auto l1, auto l2) {
475         auto d1 = l1.v;
476         auto d2 = l2.v;
477

```

```

478         if (sgn(d1) != sgn(d2)) {
479             return sgn(d1) == 1;
480         }
481
482         return (d1 ^ d2) > 0;
483     });
484     std::deque<Line> ls;
485     std::deque<Point> ps;
486     for (auto l : lines) {
487         if (ls.empty()) {
488             ls.push_back(l);
489             continue;
490         }
491         while (!ps.empty() && !pointOnLineLeft(ps.back(), l)) {
492             ps.pop_back();ls.pop_back();
493         }
494
495         while (!ps.empty() && !pointOnLineLeft(ps[0], l)) {
496             ps.pop_front();ls.pop_front();
497         }
498         if (abs(cross(l.v, ls.back().v)) < eps) {
499
500             if ((l.v * ls.back().v) > eps) {
501                 //continue;
502                 if (!pointOnLineLeft(ls.back().P, l)) {
503                     assert(ls.size() == 1);
504                     ls[0] = l;
505                 }
506                 continue;
507             }
508             return {};
509         }
510         auto now = inter(ls.back(),l);
511         ps.push_back(now[0]);
512         // ps.push_back(lineIntersection(ls.back(), l));
513         ls.push_back(l);
514     }
515
516     while (!ps.empty() && !pointOnLineLeft(ps.back(), ls[0])) {
517         ps.pop_back();ls.pop_back();
518     }
519     if (ls.size() <= 2) {
520         return {};
521     }
522     auto now = inter(ls[0],ls.back());
523     ps.push_back(now[0]);
524     // ps.push_back(lineIntersection(ls[0], ls.back()));
525     return std::vector(ps.begin(), ps.end());
526 }//逆时针平面, 使用时, 可以给最外面套个值域的正方形框, 来减少精度错误
527
528 double get_longest(vector<Point> A) { // 求凸包直径
529     int j = 2,n = A.size();
530     double mx = 0;
531     if(n == 1) return 0;
532     if (n < 3) {
533         mx = dis(A[0], A[1]);
534         return mx;
535     }
536     auto sqr = [&](Point A,Point B,Point C) {
537         return abs((B - A) ^ (C - B));
538     };
539     for(int i = 0;i < A.size();i++) {
540         while (sqr(A[i], A[(i + 1) % n], A[j]) <=
541             sqr(A[i], A[(i + 1) % n], A[(j + 1) % n]))
542             j = (j + 1) % n;
543         mx = max(mx, max(dis(A[(i + 1) % n], A[j]), dis(A[i], A[j])));
544     }
545     return mx;
546 }
547
548 bool check_v_in_AB(Vec v,Vec A,Vec B) { // 判断向量 v 在向量 A 和 B 之间

```

```

549     if(sgn(A ^ B) < 0)swap(A,B);
550     return sgn(A ^ v) >= 0 && sgn(v ^ B) >= 0;
551 }
552 bool Point_in_Triangle(Point x,Point A,Point B,Point C) {
553     if(check_v_in_AB(x - A,B - A,C - A) && check_v_in_AB(x - B,A - B,C - B) && check_v_in_AB(x - C,A - C,B - C)) {
554         return true;
555     }return false;
556 }
557 bool Point_in_ConvexHull(Point A,ConvexHull &a) {
558     int n = a.size();
559     if(n < 3) exit(-1);
560     int l = 2,r = n - 1;
561     int x = -1;
562     while(l <= r) {
563         int mid = l + r >> 1;
564         if(check_v_in_AB(A - a[0],a[1] - a[0],a[mid] - a[0])) {
565             r = mid - 1;
566             x = mid;
567         }else l = mid + 1;
568     }
569     if(x == -1) return false;
570     return Point_in_Triangle(A,a[0],a[x - 1],a[x]);
571 }

```

动态凸包

```

1  struct Item {
2      P p;
3      mutable P vec;
4      int q = 0;
5  };
6
7  bool operator<(const Item &a, const Item &b) {
8      if (!b.q) {
9          return a.p.x < b.p.x;
10     }
11     return dot(a.vec, b.p) > 0;
12 }
13
14 struct Hull {
15     std::set<Item> s;
16     i128 dx = 0;
17     i128 dy = 0;
18 };
19
20 void print(const Hull &h) {
21     for (auto it : h.s) {
22         std::cerr << "(" << i64(it.p.x + h.dx) << ", " << i64(it.p.y + h.dy) << ") ";
23     }
24     std::cerr << "\n";
25 }
26
27 constexpr i64 inf = 2E18;
28
29 void insert(Hull &h, P p) {
30     p.x -= h.dx;
31     p.y -= h.dy;
32     h.s.insert({p});
33     auto it = h.s.lower_bound({p});
34     if (it != h.s.end() && it->p.x == p.x) {
35         if (it->p.y > p.y) {
36             return;
37         }
38         it = h.s.erase(it);
39     }
40     if (it != h.s.begin() && it != h.s.end()
41         && cross(p - std::prev(it)->p, it->p - p) >= 0) {
42         return;
43     }
44     it = h.s.insert({p}).first;
45     auto r = std::next(it);

```

```

46     if (r != h.s.end()) {
47         while (cross(r->p - p, r->vec) >= 0) {
48             r = h.s.erase(r);
49         }
50         it->vec = r->p - p;
51     } else {
52         it->vec = P(0, -inf);
53     }
54
55     if (it != h.s.begin()) {
56         auto l = std::prev(it);
57         while (l != h.s.begin()) {
58             auto a = std::prev(l);
59             if (cross(a->vec, p - l->p) < 0) {
60                 break;
61             }
62             h.s.erase(l);
63             l = a;
64         }
65         l->vec = p - l->p;
66     }
67 }
68
69 i64 query(const Hull &h, i64 x) {
70     if (h.s.empty()) {
71         return 0LL;
72     }
73     auto it = h.s.lower_bound({P(x, 1), P{}, 1});
74     assert(it != h.s.end());
75     auto p = it->p;
76     p.x += h.dx;
77     p.y += h.dy;
78     return p.x * x + p.y;
79 }

```

最小圆覆盖

```

1  int n;
2  double r;
3
4  struct point {
5      double x, y;
6  } p[100005], o;
7
8  double sqr(double x) { return x * x; }
9
10 double dis(point a, point b) { return sqrt(sqr(a.x - b.x) + sqr(a.y - b.y)); }
11
12 bool cmp(double a, double b) { return fabs(a - b) < 1e-8; }
13
14 point geto(point a, point b, point c) {
15     double a1, a2, b1, b2, c1, c2;
16     point ans;
17     a1 = 2 * (b.x - a.x), b1 = 2 * (b.y - a.y),
18     c1 = sqr(b.x) - sqr(a.x) + sqr(b.y) - sqr(a.y);
19     a2 = 2 * (c.x - a.x), b2 = 2 * (c.y - a.y),
20     c2 = sqr(c.x) - sqr(a.x) + sqr(c.y) - sqr(a.y);
21     if (cmp(a1, 0)) {
22         ans.y = c1 / b1;
23         ans.x = (c2 - ans.y * b2) / a2;
24     } else if (cmp(b1, 0)) {
25         ans.x = c1 / a1;
26         ans.y = (c2 - ans.x * a2) / b2;
27     } else {
28         ans.x = (c2 * b1 - c1 * b2) / (a2 * b1 - a1 * b2);
29         ans.y = (c2 * a1 - c1 * a2) / (b2 * a1 - b1 * a2);
30     }
31     return ans;
32 }
33
34 int main() {

```

```

35 scanf("%d", &n);
36 for (int i = 1; i <= n; i++) scanf("%lf%lf", &p[i].x, &p[i].y);
37 for (int i = 1; i <= n; i++) swap(p[rand() % n + 1], p[rand() % n + 1]);
38 o = p[1];
39 for (int i = 1; i <= n; i++) {
40     if (dis(o, p[i]) < r || cmp(dis(o, p[i]), r)) continue;
41     o.x = (p[i].x + p[1].x) / 2;
42     o.y = (p[i].y + p[1].y) / 2;
43     r = dis(p[i], p[1]) / 2;
44     for (int j = 2; j < i; j++) {
45         if (dis(o, p[j]) < r || cmp(dis(o, p[j]), r)) continue;
46         o.x = (p[i].x + p[j].x) / 2;
47         o.y = (p[i].y + p[j].y) / 2;
48         r = dis(p[i], p[j]) / 2;
49         for (int k = 1; k < j; k++) {
50             if (dis(o, p[k]) < r || cmp(dis(o, p[k]), r)) continue;
51             o = geto(p[i], p[j], p[k]);
52             r = dis(o, p[i]);
53         }
54     }
55 }
56 printf("%.10lf\n%.10lf %.10lf", r, o.x, o.y);
57 return 0;
58 }

```

其他人的板子

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3
4  // using point_t=long long;
5  using point_t=long double; //全局数据类型
6
7  constexpr point_t eps=1e-8;
8  constexpr point_t INF=numeric_limits<point_t>::max();
9  constexpr long double PI=3.14159265358979323841;
10
11 // 点与向量
12 template<typename T> struct point
13 {
14     T x,y;
15
16     bool operator==(const point &a) const {return (abs(x-a.x)<=eps && abs(y-a.y)<=eps);}
17     bool operator<(const point &a) const {if (abs(x-a.x)<=eps) return y<a.y-eps; return x<a.x-eps;}
18     bool operator>(const point &a) const {return !(*this<a || *this==a);}
19     point operator+(const point &a) const {return {x+a.x,y+a.y};}
20     point operator-(const point &a) const {return {x-a.x,y-a.y};}
21     point operator-() const {return {-x,-y};}
22     point operator*(const T k) const {return {k*x,k*y};}
23     point operator/(const T k) const {return {x/k,y/k};}
24     T operator*(const point &a) const {return x*a.x+y*a.y;} // 点积
25     T operator^(const point &a) const {return x*a.y-y*a.x;} // 叉积, 注意优先级
26     int toleft(const point &a) const {const auto t=(*this)^a; return (t>eps)-(t<-eps);} // to-left 测试
27     T len2() const {return (*this)*(*this);} // 向量长度的平方
28     T dis2(const point &a) const {return (a-(*this)).len2();} // 两点距离的平方
29
30     // 涉及浮点数
31     long double len() const {return sqrtl(len2());} // 向量长度
32     long double dis(const point &a) const {return sqrtl(dis2(a));} // 两点距离
33     long double ang(const point &a) const {return acosl(max(-1.0l,min(1.0l,(((*this)*a)/(len()*a.len()))));} // 向量夹
34     ↪ 角
35     point rot(const long double rad) const {return {x*cos(rad)-y*sin(rad),x*sin(rad)+y*cos(rad)};} // 逆时针旋转 (给定角
36     ↪ 度)
37     point rot(const long double cosr,const long double sinr) const {return {x*cosr-y*sinr,x*sinr+y*cosr};} // 逆时针
38     ↪ 旋转 (给定角度的正弦与余弦)
39 };
40
41 using Point=point<point_t>;
42
43 // 极角排序
44 struct argcmp

```



```

42 {
43     bool operator()(const Point &a,const Point &b) const
44     {
45         const auto quad=[](const Point &a)
46         {
47             if (a.y<-eps) return 1;
48             if (a.y>eps) return 4;
49             if (a.x<-eps) return 5;
50             if (a.x>eps) return 3;
51             return 2;
52         };
53         const int qa=quad(a),qb=quad(b);
54         if (qa!=qb) return qa<qb;
55         const auto t=a^b;
56         // if (abs(t)<=eps) return a*a<b*b-eps; // 不同长度的向量需要分开
57         return t>eps;
58     }
59 };
60
61 // 直线
62 template<typename T> struct line
63 {
64     point<T> p,v; // p 为直线上一点, v 为方向向量
65
66     bool operator==(const line &a) const {return v.toleft(a.v)==0 && v.toleft(p-a.p)==0;}
67     int toleft(const point<T> &a) const {return v.toleft(a-p);} // to-left 测试
68     bool operator<(const line &a) const // 半平面交算法定义的排序
69     {
70         if (abs(v^a.v)<=eps && v*a.v>=-eps) return toleft(a.p)==-1;
71         return argcmp()(v,a.v);
72     }
73
74     // 涉及浮点数
75     point<T> inter(const line &a) const {return p+v*((a.v^(p-a.p))/(v^a.v));} // 直线交点
76     long double dis(const point<T> &a) const {return abs(v^(a-p))/v.len();} // 点到直线距离
77     point<T> proj(const point<T> &a) const {return p+v*((v*(a-p))/(v*v));} // 点在直线上的投影
78 };
79
80 using Line=line<point_t>;
81
82 //线段
83 template<typename T> struct segment
84 {
85     point<T> a,b;
86
87     bool operator<(const segment &s) const {return make_pair(a,b)<make_pair(s.a,s.b);}
88
89     // 判定性函数建议在整数域使用
90
91     // 判断点是否在线段上
92     // -1 点在线段端点 | 0 点不在线段上 | 1 点严格在线段上
93     int is_on(const point<T> &p) const
94     {
95         if (p==a || p==b) return -1;
96         return (p-a).toleft(p-b)==0 && (p-a)*(p-b)<=eps;
97     }
98
99     // 判断线段直线是否相交
100     // -1 直线经过线段端点 | 0 线段和直线不相交 | 1 线段和直线严格相交
101     int is_inter(const line<T> &l) const
102     {
103         if (l.toleft(a)==0 || l.toleft(b)==0) return -1;
104         return l.toleft(a)!=l.toleft(b);
105     }
106
107     // 判断两线段是否相交
108     // -1 在某一线段端点处相交 | 0 两线段不相交 | 1 两线段严格相交
109     int is_inter(const segment<T> &s) const
110     {
111         if (is_on(s.a) || is_on(s.b) || s.is_on(a) || s.is_on(b)) return -1;
112         const line<T> l{a,b-a},ls{s.a,s.b-s.a};

```

```

113     return l.toleft(s.a)*l.toleft(s.b)==-1 && ls.toleft(a)*ls.toleft(b)==-1;
114 }
115
116 // 点到线段距离
117 long double dis(const point<T> &p) const
118 {
119     if ((p-a)*(b-a)<=-eps || (p-b)*(a-b)<=-eps) return min(p.dis(a),p.dis(b));
120     const line<T> l{a,b-a};
121     return l.dis(p);
122 }
123
124 // 两线段间距离
125 long double dis(const segment<T> &s) const
126 {
127     if (is_inter(s)) return 0;
128     return min({dis(s.a),dis(s.b),s.dis(a),s.dis(b)});
129 }
130 };
131
132 using Segment=segment<point_t>;
133
134 // 多边形
135 template<typename T> struct polygon
136 {
137     vector<point<T>> p; // 以逆时针顺序存储
138
139     size_t nxt(const size_t i) const {return i==p.size()-1?0:i+1;}
140     size_t pre(const size_t i) const {return i==0?p.size()-1:i-1;}
141
142     // 回转数
143     // 返回值第一项表示点是否在多边形边上
144     // 对于狭义多边形, 回转数为 0 表示点在多边形外, 否则点在多边形内
145     pair<bool,int> winding(const point<T> &a) const
146     {
147         int cnt=0;
148         for (size_t i=0;i<p.size();i++)
149         {
150             const point<T> u=p[i],v=p[nxt(i)];
151             if (abs((a-u)^(a-v))<=eps && (a-u)*(a-v)<=eps) return {true,0};
152             if (abs(u.y-v.y)<=eps) continue;
153             const Line uv={u,v-u};
154             if (u.y<v.y-eps && uv.toleft(a)<=0) continue;
155             if (u.y>v.y+eps && uv.toleft(a)>=0) continue;
156             if (u.y<a.y-eps && v.y>=a.y-eps) cnt++;
157             if (u.y>=a.y-eps && v.y<a.y-eps) cnt--;
158         }
159         return {false,cnt};
160     }
161
162     // 多边形面积的两倍
163     // 可用于判断点的存储顺序是顺时针或逆时针
164     T area() const
165     {
166         T sum=0;
167         for (size_t i=0;i<p.size();i++) sum+=p[i]^p[nxt(i)];
168         return sum;
169     }
170
171     // 多边形的周长
172     long double circ() const
173     {
174         long double sum=0;
175         for (size_t i=0;i<p.size();i++) sum+=p[i].dis(p[nxt(i)]);
176         return sum;
177     }
178 };
179
180 using Polygon=polygon<point_t>;
181
182 // 凸多边形
183 template<typename T> struct convex: polygon<T>

```

```

184 {
185 // 闵可夫斯基和
186 convex operator+(const convex &c) const
187 {
188     const auto &p=this->p;
189     vector<Segment> e1(p.size()),e2(c.p.size()),edge(p.size()+c.p.size());
190     vector<point<T>> res; res.reserve(p.size()+c.p.size());
191     const auto cmp=[](const Segment &u,const Segment &v) {return argcmp()(u.b-u.a,v.b-v.a)};
192     for (size_t i=0;i<p.size();i++) e1[i]={p[i],p[this->nxt(i)]};
193     for (size_t i=0;i<c.p.size();i++) e2[i]={c.p[i],c.p[c.nxt(i)]};
194     rotate(e1.begin(),min_element(e1.begin(),e1.end(),cmp),e1.end());
195     rotate(e2.begin(),min_element(e2.begin(),e2.end(),cmp),e2.end());
196     merge(e1.begin(),e1.end(),e2.begin(),e2.end(),edge.begin(),cmp);
197     const auto check=[](const vector<point<T>> &res,const point<T> &u)
198     {
199         const auto back1=res.back(),back2=*prev(res.end(),2);
200         return (back1-back2).toleft(u-back1)==0 && (back1-back2)*(u-back1)>=-eps;
201     };
202     auto u=e1[0].a+e2[0].a;
203     for (const auto &v:edge)
204     {
205         while (res.size()>1 && check(res,u)) res.pop_back();
206         res.push_back(u);
207         u=u+v.b-v.a;
208     }
209     if (res.size()>1 && check(res,res[0])) res.pop_back();
210     return {res};
211 }
212
213 // 旋转卡壳
214 // 例: 凸多边形的直径的平方
215 T rotcaliper() const
216 {
217     const auto &p=this->p;
218     if (p.size()==1) return 0;
219     if (p.size()==2) return p[0].dis2(p[1]);
220     const auto area=[](const point<T> &u,const point<T> &v,const point<T> &w){return (w-u)^(w-v)};
221     T ans=0;
222     for (size_t i=0,j=1;i<p.size();i++)
223     {
224         const auto nxti=this->nxt(i);
225         ans=max({ans,p[j].dis2(p[i]),p[j].dis2(p[nxti])});
226         while (area(p[this->nxt(j)],p[i],p[nxti])>=area(p[j],p[i],p[nxti]))
227         {
228             j=this->nxt(j);
229             ans=max({ans,p[j].dis2(p[i]),p[j].dis2(p[nxti])});
230         }
231     }
232     return ans;
233 }
234
235 // 判断点是否在凸多边形内
236 // 复杂度  $O(\log n)$ 
237 // -1 点在多边形边上 | 0 点在多边形外 | 1 点在多边形内
238 int is_in(const point<T> &a) const
239 {
240     const auto &p=this->p;
241     if (p.size()==1) return a==p[0]?-1:0;
242     if (p.size()==2) return segment<T>{p[0],p[1]}.is_on(a)?-1:0;
243     if (a==p[0]) return -1;
244     if ((p[1]-p[0]).toleft(a-p[0])==1 || (p.back()-p[0]).toleft(a-p[0])==1) return 0;
245     const auto cmp=[&](const point<T> &u,const point<T> &v){return (u-p[0]).toleft(v-p[0])==1};
246     const size_t i=lower_bound(p.begin()+1,p.end(),a,cmp)-p.begin();
247     if (i==1) return segment<T>{p[0],p[i]}.is_on(a)?-1:0;
248     if (i==p.size()-1 && segment<T>{p[0],p[i]}.is_on(a)) return -1;
249     if (segment<T>{p[i-1],p[i]}.is_on(a)) return -1;
250     return (p[i]-p[i-1]).toleft(a-p[i-1])>0;
251 }
252
253 // 凸多边形关于某一方向的极点
254 // 复杂度  $O(\log n)$ 

```

```

255 // 参考资料: https://codeforces.com/blog/entry/48868
256 template<typename F> size_t extreme(const F &dir) const
257 {
258     const auto &p=this->p;
259     const auto check=[&](const size_t i){return dir(p[i]).toleft(p[this->nxt(i)]-p[i])>=0;};
260     const auto dir0=dir(p[0]); const auto check0=check(0);
261     if (!check0 && check(p.size()-1)) return 0;
262     const auto cmp=[&](const point<T> &v)
263     {
264         const size_t vi=&v-p.data();
265         if (vi==0) return 1;
266         const auto checkv=check(vi);
267         const auto t=dir0.toleft(v-p[0]);
268         if (vi==1 && checkv==check0 && t==0) return 1;
269         return checkv^(checkv==check0 && t<=0);
270     };
271     return partition_point(p.begin(),p.end(),cmp)-p.begin();
272 }
273
274 // 过凸多边形外一点求凸多边形的切线, 返回切点下标
275 // 复杂度  $O(\log n)$ 
276 // 必须保证点在多边形外
277 pair<size_t,size_t> tangent(const point<T> &a) const
278 {
279     const size_t i=extreme([&](const point<T> &u){return u-a;});
280     const size_t j=extreme([&](const point<T> &u){return a-u;});
281     return {i,j};
282 }
283
284 // 求平行于给定直线的凸多边形的切线, 返回切点下标
285 // 复杂度  $O(\log n)$ 
286 pair<size_t,size_t> tangent(const line<T> &a) const
287 {
288     const size_t i=extreme([&](...){return a.v;});
289     const size_t j=extreme([&](...){return -a.v;});
290     return {i,j};
291 }
292 };
293
294 using Convex=convex<point_t>;
295
296 // 圆
297 struct Circle
298 {
299     Point c;
300     long double r;
301
302     bool operator==(const Circle &a) const {return c==a.c && abs(r-a.r)<=eps;}
303     long double circ() const {return 2*PI*r;} // 周长
304     long double area() const {return PI*r*r;} // 面积
305
306     // 点与圆的关系
307     // -1 圆上 | 0 圆外 | 1 圆内
308     int is_in(const Point &p) const {const long double d=p.dis(c); return abs(d-r)<=eps?-1:d<r-eps;}
309
310     // 直线与圆关系
311     // 0 相离 | 1 相切 | 2 相交
312     int relation(const Line &l) const
313     {
314         const long double d=l.dis(c);
315         if (d>r+eps) return 0;
316         if (abs(d-r)<=eps) return 1;
317         return 2;
318     }
319
320     // 圆与圆关系
321     // -1 相同 | 0 相离 | 1 外切 | 2 相交 | 3 内切 | 4 内含
322     int relation(const Circle &a) const
323     {
324         if (*this==a) return -1;
325         const long double d=c.dis(a.c);

```

```

326     if (d>r+a.r+eps) return 0;
327     if (abs(d-r-a.r)<=eps) return 1;
328     if (abs(d-abs(r-a.r))<=eps) return 3;
329     if (d<abs(r-a.r)-eps) return 4;
330     return 2;
331 }
332
333 // 直线与圆的交点
334 vector<Point> inter(const Line &l) const
335 {
336     const long double d=l.dis(c);
337     const Point p=l.proj(c);
338     const int t=relation(l);
339     if (t==0) return vector<Point>();
340     if (t==1) return vector<Point>{p};
341     const long double k=sqrt(r*r-d*d);
342     return vector<Point>{p-(l.v/l.v.len())*k,p+(l.v/l.v.len())*k};
343 }
344
345 // 圆与圆交点
346 vector<Point> inter(const Circle &a) const
347 {
348     const long double d=c.dis(a.c);
349     const int t=relation(a);
350     if (t== -1 || t==0 || t==4) return vector<Point>();
351     Point e=a.c-c; e=e/e.len()*r;
352     if (t==1 || t==3)
353     {
354         if (r*r+d*d-a.r*a.r>=-eps) return vector<Point>{c+e};
355         return vector<Point>{c-e};
356     }
357     const long double costh=(r*r+d*d-a.r*a.r)/(2*r*d),sinh=sqrt(1-costh*costh);
358     return vector<Point>{c+e.rot(costh,-sinh),c+e.rot(costh,sinh)};
359 }
360
361 // 圆与圆交面积
362 long double inter_area(const Circle &a) const
363 {
364     const long double d=c.dis(a.c);
365     const int t=relation(a);
366     if (t== -1) return area();
367     if (t<2) return 0;
368     if (t>2) return min(area(),a.area());
369     const long double costh1=(r*r+d*d-a.r*a.r)/(2*r*d),costh2=(a.r*a.r+d*d-r*r)/(2*a.r*d);
370     const long double sinh1=sqrt(1-costh1*costh1),sinh2=sqrt(1-costh2*costh2);
371     const long double th1=acos(costh1),th2=acos(costh2);
372     return r*r*(th1-costh1*sinh1)+a.r*a.r*(th2-costh2*sinh2);
373 }
374
375 // 过圆外一点圆的切线
376 vector<Line> tangent(const Point &a) const
377 {
378     const int t=is_in(a);
379     if (t==1) return vector<Line>();
380     if (t== -1)
381     {
382         const Point v={-(a-c).y,(a-c).x};
383         return vector<Line>{{a,v}};
384     }
385     Point e=a-c; e=e/e.len()*r;
386     const long double costh=r/c.dis(a),sinh=sqrt(1-costh*costh);
387     const Point t1=c+e.rot(costh,-sinh),t2=c+e.rot(costh,sinh);
388     return vector<Line>{{a,t1-a},{a,t2-a}};
389 }
390
391 // 两圆的公切线
392 vector<Line> tangent(const Circle &a) const
393 {
394     const int t=relation(a);
395     vector<Line> lines;
396     if (t== -1 || t==4) return lines;

```

```

397     if (t==1 || t==3)
398     {
399         const Point p=inter(a)[0],v={-(a.c-c).y,(a.c-c).x};
400         lines.push_back({p,v});
401     }
402     const long double d=c.dis(a.c);
403     const Point e=(a.c-c)/(a.c-c).len();
404     if (t<=2)
405     {
406         const long double costh=(r-a.r)/d,sinth=sqrt(1-costh*costh);
407         const Point d1=e.rot(costh,-sinth),d2=e.rot(costh,sinth);
408         const Point u1=c+d1*r,u2=c+d2*r,v1=a.c+d1*a.r,v2=a.c+d2*a.r;
409         lines.push_back({u1,v1-u1}); lines.push_back({u2,v2-u2});
410     }
411     if (t==0)
412     {
413         const long double costh=(r+a.r)/d,sinth=sqrt(1-costh*costh);
414         const Point d1=e.rot(costh,-sinth),d2=e.rot(costh,sinth);
415         const Point u1=c+d1*r,u2=c+d2*r,v1=a.c-d1*a.r,v2=a.c-d2*a.r;
416         lines.push_back({u1,v1-u1}); lines.push_back({u2,v2-u2});
417     }
418     return lines;
419 }
420
421 // 圆的反演
422 tuple<int,Circle,Line> inverse(const Line &l) const
423 {
424     const Circle null_c={{0.0,0.0},0.0};
425     const Line null_l={{0.0,0.0},{0.0,0.0}};
426     if (l.toleft(c)==0) return {2,null_c,l};
427     const Point v=l.toleft(c)==1?Point{l.v.y,-l.v.x}:Point{-l.v.y,l.v.x};
428     const long double d=r*r/l.dis(c);
429     const Point p=c+v/v.len()*d;
430     return {1,{(c+p)/2,d/2},null_l};
431 }
432
433 tuple<int,Circle,Line> inverse(const Circle &a) const
434 {
435     const Circle null_c={{0.0,0.0},0.0};
436     const Line null_l={{0.0,0.0},{0.0,0.0}};
437     const Point v=a.c-c;
438     if (a.is_in(c)==-1)
439     {
440         const long double d=r*r/(a.r+a.r);
441         const Point p=c+v/v.len()*d;
442         return {2,null_c,{p,{-v.y,v.x}}};
443     }
444     if (c==a.c) return {1,{c,r*r/a.r},null_l};
445     const long double d1=r*r/(c.dis(a.c)-a.r),d2=r*r/(c.dis(a.c)+a.r);
446     const Point p=c+v/v.len()*d1,q=c+v/v.len()*d2;
447     return {1,{(p+q)/2,p.dis(q)/2},null_l};
448 }
449 };
450
451 // 圆与多边形面积交
452 long double area_inter(const Circle &circ,const Polygon &poly)
453 {
454     const auto cal=[](const Circle &circ,const Point &a,const Point &b)
455     {
456         if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==0) return 0.0l;
457         const auto ina=circ.is_in(a),inb=circ.is_in(b);
458         const Line ab={a,b-a};
459         if (ina && inb) return ((a-circ.c)^(b-circ.c))/2;
460         if (ina && !inb)
461         {
462             const auto t=circ.inter(ab);
463             const Point p=t.size()==1?t[0]:t[1];
464             const long double ans=((a-circ.c)^(p-circ.c))/2;
465             const long double th=(p-circ.c).ang(b-circ.c);
466             const long double d=circ.r*circ.r*th/2;
467             if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==1) return ans+d;

```

```

468         return ans-d;
469     }
470     if (!ina && inb)
471     {
472         const Point p=circ.inter(ab)[0];
473         const long double ans=((p-circ.c)^(b-circ.c))/2;
474         const long double th=(a-circ.c).ang(p-circ.c);
475         const long double d=circ.r*circ.r*th/2;
476         if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==1) return ans+d;
477         return ans-d;
478     }
479     const auto p=circ.inter(ab);
480     if (p.size()==2 && Segment{a,b}.dis(circ.c)<=circ.r+eps)
481     {
482         const long double ans=((p[0]-circ.c)^(p[1]-circ.c))/2;
483         const long double th1=(a-circ.c).ang(p[0]-circ.c),th2=(b-circ.c).ang(p[1]-circ.c);
484         const long double d1=circ.r*circ.r*th1/2,d2=circ.r*circ.r*th2/2;
485         if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==1) return ans+d1+d2;
486         return ans-d1-d2;
487     }
488     const long double th=(a-circ.c).ang(b-circ.c);
489     if ((a-circ.c).toleft(b-circ.c)==1) return circ.r*circ.r*th/2;
490     return -circ.r*circ.r*th/2;
491 };
492
493 long double ans=0;
494 for (size_t i=0;i<poly.p.size();i++)
495 {
496     const Point a=poly.p[i],b=poly.p[poly.nxt(i)];
497     ans+=cal(circ,a,b);
498 }
499 return ans;
500 }
501
502 // 点集的凸包
503 // Andrew 算法, 复杂度  $O(n\log n)$ 
504 Convex convexhull(vector<Point> p)
505 {
506     vector<Point> st;
507     if (p.empty()) return Convex{st};
508     sort(p.begin(),p.end());
509     const auto check=[](const vector<Point> &st,const Point &u)
510     {
511         const auto back1=st.back(),back2=*prev(st.end(),2);
512         return (back1-back2).toleft(u-back1)<=0;
513     };
514     for (const Point &u:p)
515     {
516         while (st.size()>1 && check(st,u)) st.pop_back();
517         st.push_back(u);
518     }
519     size_t k=st.size();
520     p.pop_back(); reverse(p.begin(),p.end());
521     for (const Point &u:p)
522     {
523         while (st.size()>k && check(st,u)) st.pop_back();
524         st.push_back(u);
525     }
526     st.pop_back();
527     return Convex{st};
528 }
529
530 // 半平面交
531 // 排序增量法, 复杂度  $O(n\log n)$ 
532 // 输入与返回值都是用直线表示的半平面集合
533 vector<Line> halfinter(vector<Line> l, const point_t lim=1e9)
534 {
535     const auto check=[](const Line &a,const Line &b,const Line &c){return a.toleft(b.inter(c))<0;};
536     // 无精度误差的方法, 但注意取值范围会扩大到三次方
537     /*const auto check=[](const Line &a,const Line &b,const Line &c)
538     {

```

```

539     const Point p=a.v*(b.v^c.v),q=b.p*(b.v^c.v)+b.v*(c.v^(b.p-c.p))-a.p*(b.v^c.v);
540     return p.toleft(q)<0;
541 };*/
542 l.push_back({{-lim,0},{0,-1}}); l.push_back({{0,-lim},{1,0}});
543 l.push_back({{lim,0},{0,1}}); l.push_back({{0,lim},{-1,0}});
544 sort(l.begin(),l.end());
545 deque<Line> q;
546 for (size_t i=0;i<l.size();i++)
547 {
548     if (i>0 && l[i-1].v.toleft(l[i].v)==0 && l[i-1].v*l[i].v>eps) continue;
549     while (q.size()>1 && check(l[i],q.back(),q[q.size()-2])) q.pop_back();
550     while (q.size()>1 && check(l[i],q[0],q[1])) q.pop_front();
551     if (!q.empty() && q.back().v.toleft(l[i].v)<=0) return vector<Line>();
552     q.push_back(l[i]);
553 }
554 while (q.size()>1 && check(q[0],q.back(),q[q.size()-2])) q.pop_back();
555 while (q.size()>1 && check(q.back(),q[0],q[1])) q.pop_front();
556 return vector<Line>(q.begin(),q.end());
557 }
558
559 // 点集形成的最小最大三角形
560 // 极角序扫描线, 复杂度  $O(n^2 \log n)$ 
561 // 最大三角形问题可以使用凸包与旋转卡壳做到  $O(n^2)$ 
562 pair<point_t,point_t> minmax_triangle(const vector<Point> &vec)
563 {
564     if (vec.size()<=2) return {0,0};
565     vector<pair<int,int>> evt;
566     evt.reserve(vec.size()*vec.size());
567     point_t maxans=0,minans=INF;
568     for (size_t i=0;i<vec.size();i++)
569     {
570         for (size_t j=0;j<vec.size();j++)
571         {
572             if (i==j) continue;
573             if (vec[i]==vec[j]) minans=0;
574             else evt.push_back({i,j});
575         }
576     }
577     sort(evt.begin(),evt.end(),[&](const pair<int,int> &u,const pair<int,int> &v)
578     {
579         const Point du=vec[u.second]-vec[u.first],dv=vec[v.second]-vec[v.first];
580         return argcmp()({du.y,-du.x},{dv.y,-dv.x});
581     });
582     vector<size_t> vx(vec.size()),pos(vec.size());
583     for (size_t i=0;i<vec.size();i++) vx[i]=i;
584     sort(vx.begin(),vx.end(),[&](int x,int y){return vec[x]<vec[y];});
585     for (size_t i=0;i<vx.size();i++) pos[vx[i]]=i;
586     for (auto [u,v]:evt)
587     {
588         const size_t i=pos[u],j=pos[v];
589         const size_t l=min(i,j),r=max(i,j);
590         const Point vecu=vec[u],vecv=vec[v];
591         if (l>0) minans=min(minans,abs((vec[vx[l-1]]-vecu)^(vec[vx[l-1]]-vecv)));
592         if (r<vx.size()-1) minans=min(minans,abs((vec[vx[r+1]]-vecu)^(vec[vx[r+1]]-vecv)));
593
594         ↪ maxans=max({maxans,abs((vec[vx[0]]-vecu)^(vec[vx[0]]-vecv)),abs((vec[vx.back()]-vecu)^(vec[vx.back()]-vecv))});
595         if (i<j) swap(vx[i],vx[j]),pos[u]=j,pos[v]=i;
596     }
597     return {minans,maxans};
598 }
599
600 // 平面最近点对
601 // 扫描线, 复杂度  $O(n \log n)$ 
602 point_t closest_pair(vector<Point> points)
603 {
604     sort(points.begin(),points.end());
605     const auto cmpy=[](const Point &a,const Point &b){if (abs(a.y-b.y)<=eps) return a.x<b.x-eps; return
606     ↪ a.y<b.y-eps;};
607     multiset<Point,decltype(cmpy)> s{cmpy};
608     point_t ans=INF;
609     for (size_t i=0,l=0;i<points.size();i++)

```



```

608 {
609     const point_t sqans=sqrtl(ans)+1; // 整数情况
610     // const point_t sqans=sqrtl(ans)+1; // 浮点数情况
611     while (l<i && points[i].x-points[l].x>=sqans) s.erase(s.find(points[l++]));
612     for (auto it=s.lower_bound(Point{-INF,points[i].y-sqans});it!=s.end()&&it->y-points[i].y<=sqans;it++)
613     {
614         ans=min(ans,points[i].dis2(*it));
615     }
616     s.insert(points[i]);
617 }
618 return ans;
619 }
620
621 // 判断多条线段是否有交点
622 // 扫描线, 复杂度  $O(n\log n)$ 
623 bool segs_inter(const vector<Segment> &segs)
624 {
625     if (segs.empty()) return false;
626     using seq_t=tuple<point_t,int,Segment>;
627     const auto seqcmp=[](const seq_t &u, const seq_t &v)
628     {
629         const auto [u0,u1,u2]=u;
630         const auto [v0,v1,v2]=v;
631         if (abs(u0-v0)<=eps) return make_pair(u1,u2)<make_pair(v1,v2);
632         return u0<v0-eps;
633     };
634     vector<seq_t> seq;
635     for (auto seg:segs)
636     {
637         if (seg.a.x>seg.b.x+eps) swap(seg.a,seg.b);
638         seq.push_back({seg.a.x,0,seg});
639         seq.push_back({seg.b.x,1,seg});
640     }
641     sort(seq.begin(),seq.end(),seqcmp);
642     point_t x_now;
643     auto cmp=[&](const Segment &u, const Segment &v)
644     {
645         if (abs(u.a.x-u.b.x)<=eps || abs(v.a.x-v.b.x)<=eps) return u.a.y<v.a.y-eps;
646         return ((x_now-u.a.x)*(u.b.y-u.a.y)+u.a.y*(u.b.x-u.a.x))*(v.b.x-v.a.x)<((x_now-v.a.x)*(v.b.y-
↪ v.a.y)+v.a.y*(v.b.x-v.a.x))*(u.b.x-u.a.x)-eps;
647     };
648     multiset<Segment,decltype(cmp)> s(cmp);
649     for (const auto [x,o,seg]:seq)
650     {
651         x_now=x;
652         const auto it=s.lower_bound(seg);
653         if (o==0)
654         {
655             if (it!=s.end() && seg.is_inter(*it)) return true;
656             if (it!=s.begin() && seg.is_inter(*prev(it))) return true;
657             s.insert(seg);
658         }
659         else
660         {
661             if (next(it)!=s.end() && it!=s.begin() && (*prev(it)).is_inter(*next(it))) return true;
662             s.erase(it);
663         }
664     }
665     return false;
666 }
667
668 // 多边形面积并
669 // 轮廓积分, 复杂度  $O(n^2\log n)$ ,  $n$  为边数
670 //  $ans[i]$  表示被至少覆盖了  $i+1$  次的区域的面积
671 vector<long double> area_union(const vector<Polygon> &polys)
672 {
673     const size_t siz=polys.size();
674     vector<vector<pair<Point,Point>>> segs(siz);
675     const auto check=[](const Point &u,const Segment &e){return !((u<e.a && u<e.b) || (u>e.a && u>e.b));};
676
677     auto cut_edge=[](const Segment &e,const size_t i)

```

```

678 {
679     const Line le{e.a,e.b-e.a};
680     vector<pair<Point,int>> evt;
681     evt.push_back({e.a,0}); evt.push_back({e.b,0});
682     for (size_t j=0;j<polys.size();j++)
683     {
684         if (i==j) continue;
685         const auto &pj=polys[j];
686         for (size_t k=0;k<pj.p.size();k++)
687         {
688             const Segment s={pj.p[k],pj.p[pj.nxt(k)]};
689             if (le.toleft(s.a)==0 && le.toleft(s.b)==0)
690             {
691                 evt.push_back({s.a,0});
692                 evt.push_back({s.b,0});
693             }
694             else if (s.is_inter(le))
695             {
696                 const Line ls{s.a,s.b-s.a};
697                 const Point u=le.inter(ls);
698                 if (le.toleft(s.a)<0 && le.toleft(s.b)>=0) evt.push_back({u,-1});
699                 else if (le.toleft(s.a)>=0 && le.toleft(s.b)<0) evt.push_back({u,1});
700             }
701         }
702     }
703     sort(evt.begin(),evt.end());
704     if (e.a>e.b) reverse(evt.begin(),evt.end());
705     int sum=0;
706     for (size_t i=0;i<evt.size();i++)
707     {
708         sum+=evt[i].second;
709         const Point u=evt[i].first,v=evt[i+1].first;
710         if (! (u==v) && check(u,e) && check(v,e)) segs[sum].push_back({u,v});
711         if (v==e.b) break;
712     }
713 };
714
715 for (size_t i=0;i<polys.size();i++)
716 {
717     const auto &pi=polys[i];
718     for (size_t k=0;k<pi.p.size();k++)
719     {
720         const Segment ei={pi.p[k],pi.p[pi.nxt(k)]};
721         cut_edge(ei,i);
722     }
723 }
724 vector<long double> ans(siz);
725 for (size_t i=0;i<siz;i++)
726 {
727     long double sum=0;
728     sort(segs[i].begin(),segs[i].end());
729     int cnt=0;
730     for (size_t j=0;j<segs[i].size();j++)
731     {
732         if (j>0 && segs[i][j]==segs[i][j-1]) segs[i+(++cnt)].push_back(segs[i][j]);
733         else cnt=0,sum+=segs[i][j].first^segs[i][j].second;
734     }
735     ans[i]=sum/2;
736 }
737 return ans;
738 }
739
740 // 圆面积并
741 // 轮廓积分, 复杂度  $O(n^2 \log n)$ 
742 // ans[i] 表示被至少覆盖了 i+1 次的区域的面积
743 vector<long double> area_union(const vector<Circle> &circs)
744 {
745     const size_t siz=circs.size();
746     using arc_t=tuple<Point,long double,long double,long double>;
747     vector<vector<arc_t>> arcs(siz);
748     const auto eq=[](const arc_t &u,const arc_t &v)

```

```

749 {
750     const auto [u1,u2,u3,u4]=u;
751     const auto [v1,v2,v3,v4]=v;
752     return u1==v1 && abs(u2-v2)<=eps && abs(u3-v3)<=eps && abs(u4-v4)<=eps;
753 };
754
755 auto cut_circ=[&](const Circle &ci,const size_t i)
756 {
757     vector<pair<long double,int>> evt;
758     evt.push_back({-PI,0}); evt.push_back({PI,0});
759     int init=0;
760     for (size_t j=0;j<circs.size();j++)
761     {
762         if (i==j) continue;
763         const Circle &cj=circs[j];
764         if (ci.r<cj.r-eps && ci.relation(cj)>=3) init++;
765         const auto inters=ci.inter(cj);
766         if (inters.size()==1) evt.push_back({atan2l((inters[0]-ci.c).y,(inters[0]-ci.c).x),0});
767         if (inters.size()==2)
768         {
769             const Point dl=inters[0]-ci.c,dr=inters[1]-ci.c;
770             long double argl=atan2l(dl.y,dl.x),argr=atan2l(dr.y,dr.x);
771             if (abs(argl+PI)<=eps) argl=PI;
772             if (abs(argr+PI)<=eps) argr=PI;
773             if (argl>argr+eps)
774             {
775                 evt.push_back({argl,1}); evt.push_back({PI,-1});
776                 evt.push_back({-PI,1}); evt.push_back({argr,-1});
777             }
778             else
779             {
780                 evt.push_back({argl,1});
781                 evt.push_back({argr,-1});
782             }
783         }
784     }
785     sort(evt.begin(),evt.end());
786     int sum=init;
787     for (size_t i=0;i<evt.size();i++)
788     {
789         sum+=evt[i].second;
790         if (abs(evt[i].first-evt[i+1].first)>eps) arcs[sum].push_back({ci.c,ci.r,evt[i].first,evt[i+1].first});
791         if (abs(evt[i+1].first-PI)<=eps) break;
792     }
793 };
794
795 const auto oint=[&](const arc_t &arc)
796 {
797     const auto [cc,cr,l,r]=arc;
798     if (abs(r-l-PI-PI)<=eps) return 2.0l*PI*cr*cr;
799     return cr*cr*(r-l)+cc.x*cr*(sin(r)-sin(l))-cc.y*cr*(cos(r)-cos(l));
800 };
801
802 for (size_t i=0;i<circs.size();i++)
803 {
804     const auto &ci=circs[i];
805     cut_circ(ci,i);
806 }
807 vector<long double> ans(siz);
808 for (size_t i=0;i<siz;i++)
809 {
810     long double sum=0;
811     sort(arcs[i].begin(),arcs[i].end());
812     int cnt=0;
813     for (size_t j=0;j<arcs[i].size();j++)
814     {
815         if (j>0 && eq(arcs[i][j],arcs[i][j-1])) arcs[i+(++cnt)].push_back(arcs[i][j]);
816         else cnt=0,sum+=oint(arcs[i][j]);
817     }
818     ans[i]=sum/2;
819 }

```

```
820     return ans;
821 }
```