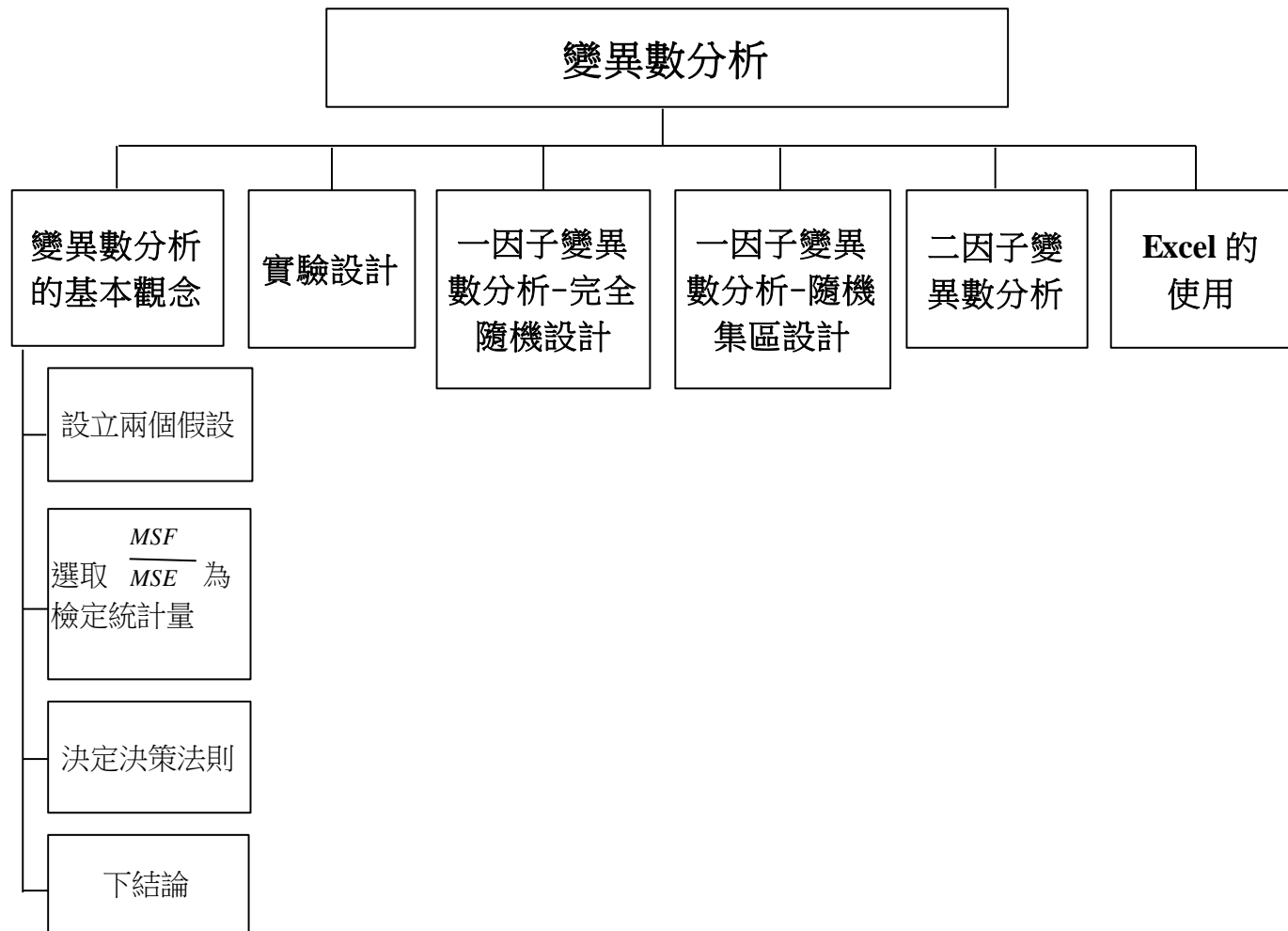


13 變異數分析

○ 學習目的

1. 討論變異數分析的一般觀念，變異數分析的方法與步驟。
2. 瞭解實驗設計的意義。
3. 學習一因子變異數分析-完全隨機設計方法。
4. 瞭解一因子變異數分析-隨機集區設計方法。
5. 瞭解二因子變異數分析的意義
6. 利用 Excel 統計軟體來做變異數分析

本章結構



變異數分析

○ 變異數分析的意義

變異數分析是檢定三個或三個以上的母體平均數是否相等的統計方法，或檢定因子對依變數是否有影響的統計方法。

變異數分析的基本概念

表13.1 可樂裝填機的測試結果

	A	B	C	D
1	樣本	廠牌A	廠牌B	廠牌C
2	1	106	107	100
3	2	80	112	104
4	3	104	115	95
5	4	110	104	100
6	5	90	117	106
7	樣本平均數	98	111	101
8	樣本變異數	158	29.5	18

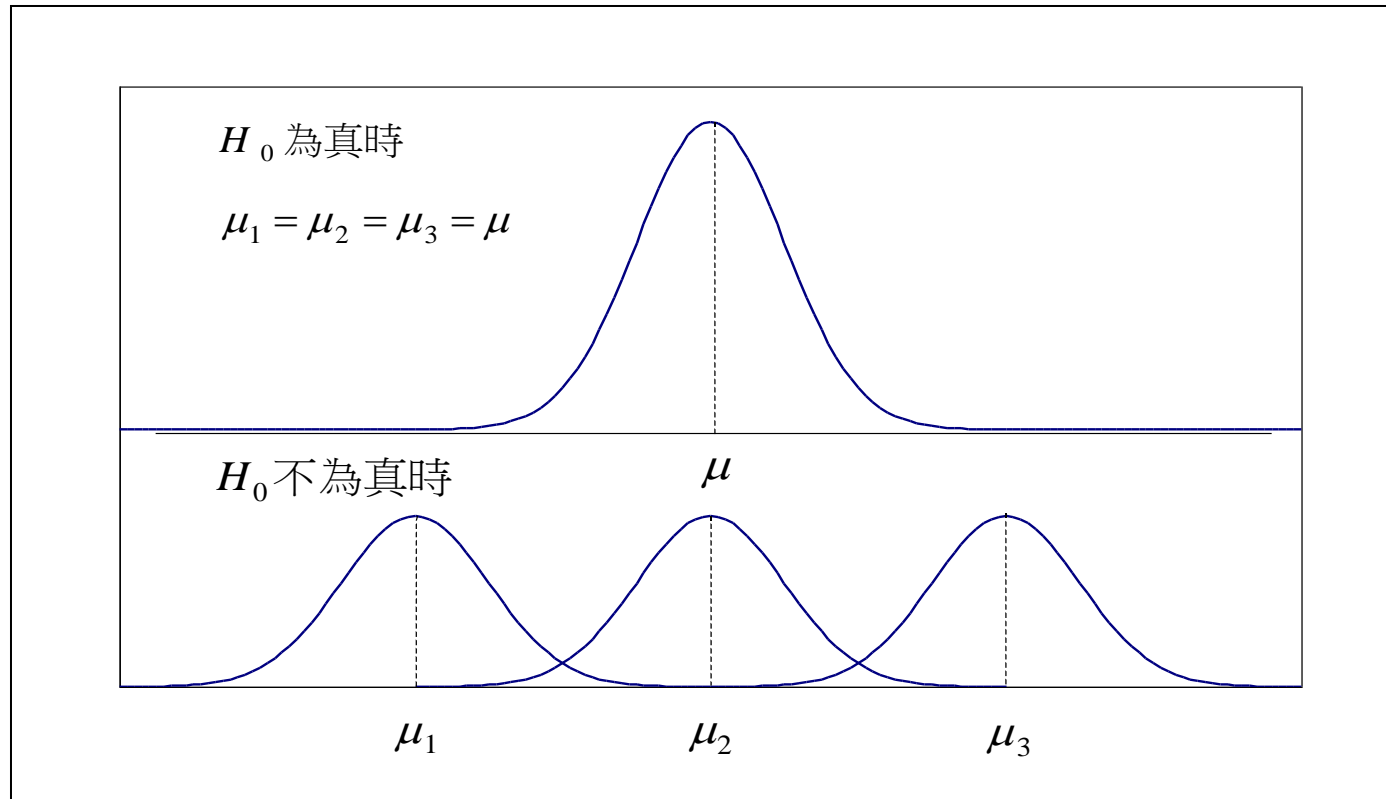
變異數分析的基本概念

○變異數分析的步驟

- (1) 設立兩個假設
- (2) 選取 $\frac{MSF}{MSE}$ 為檢定統計量
- (3) 決定決策法則
- (4) 下結論

變異數分析的基本概念

圖13.1 虛無假設與對立假設



變異數分析的基本概念

表13.2 因子與依變數

廠牌 [↗]	依變數 [↗]	
A [↗]	$Y_{11} \dots Y_{1n_1}$ [↗]	\bar{Y}_1 [↗]
B [↗]	$Y_{21} \dots Y_{2n_2}$ [↗]	\bar{Y}_2 [↗]
C [↗]	$Y_{31} \dots Y_{3n_3}$ [↗]	\bar{Y}_3 [↗]

變異數分析的基本概念

○ 總差異

總差異=因子引起的差異+隨機差異

$$SST = SSF + SSE$$

○ 因子引起的差異(組間差異)

$$SSF = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2 \quad \text{或} \quad SSF = \sum_{i=1}^k n_i ((\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2$$

○ 隨機差異(組內差異)

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \quad \text{或} \quad SSE = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2$$

變異數分析的基本概念

○因子引起的變異數（組間變異）

$$MSF = \frac{SSF}{k - 1}$$

○隨機變異數（組內變異）

$$MSE = \frac{SSE}{n - k}$$

變異數分析的基本概念

○ F 檢定統計量

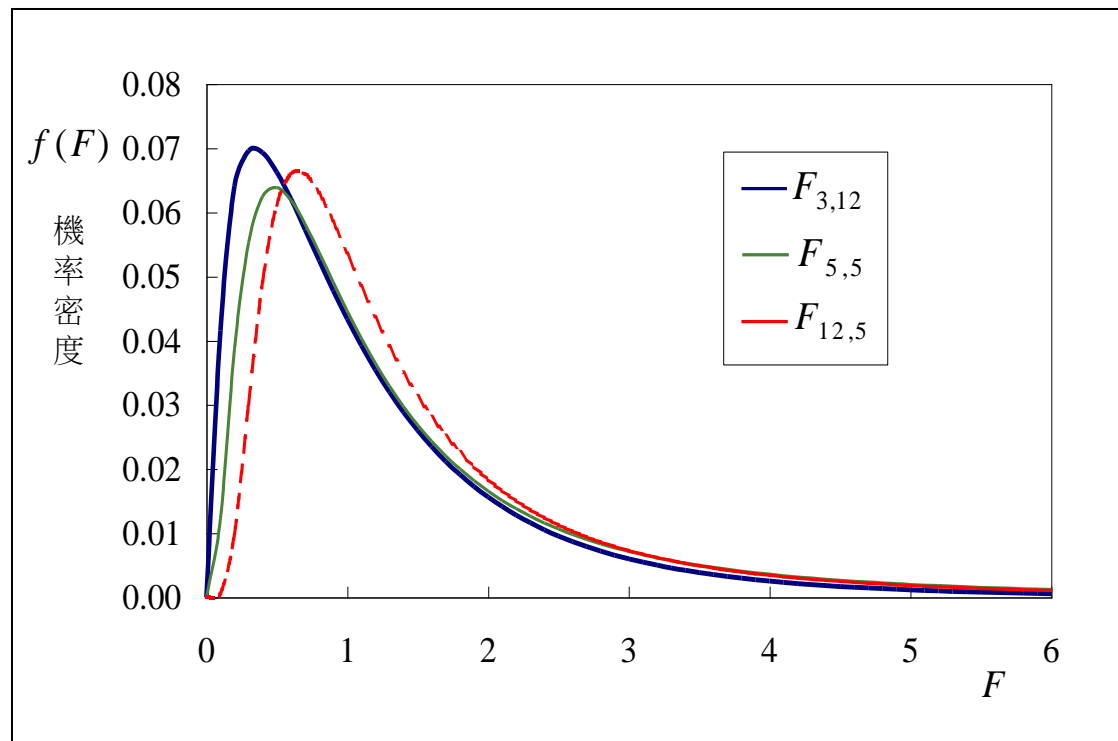
$$F = \frac{MSF}{MSE} \sim F_{k-1, \sum n-k}$$

○ 決策法則

- ① 若 $F > F_{k-1, \sum n-k, \alpha}$ ，則拒絕 H_0 。
- ② 若 $F \leq F_{k-1, \sum n-k, \alpha}$ ，則接受 H_0 。

變異數分析的基本概念

圖13.2 自由度不同的 F 分配



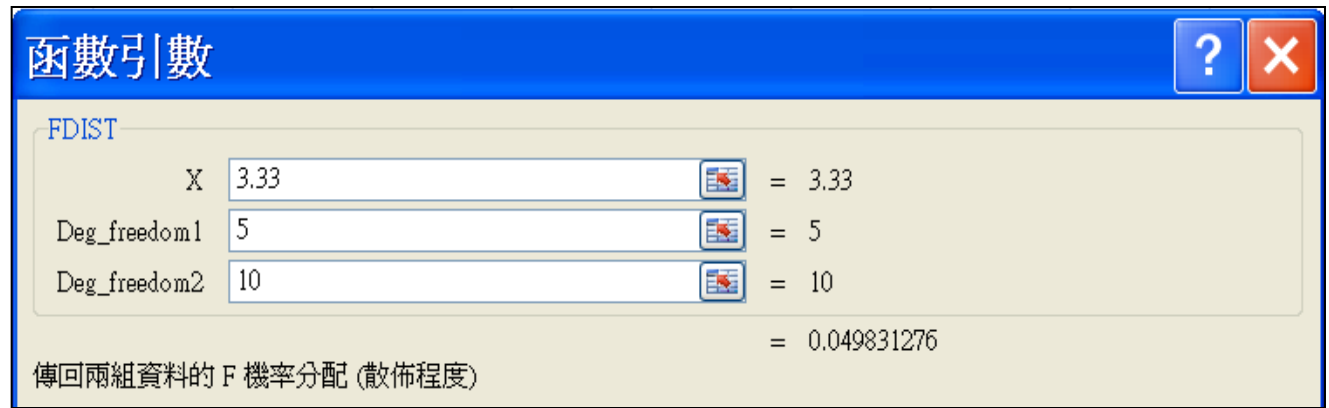
變異數分析的基本概念

表13.3 F 分配表 ($\alpha=0.05$)

v_2/v_1	1	2	3	4	5	...	9	10	...	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	...	240.5	241.9	...	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	...	19.38	19.40	...	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	...	8.81	8.79	...	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	...	6.00	5.96	...	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	...	4.77	4.74	...	4.40	4.36
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	...	3.02	2.98	...	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	...	2.90	2.85	...	2.45	2.40
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	...	1.88	1.83	...	1.22	1

變異數分析的基本概念

圖13.3 F 分配的對話方塊



The image shows the 'Function Arguments' (函數引數) dialog box for the FDIST function in Microsoft Excel. The dialog box has a blue title bar with the text '函數引數' and standard window controls (minimize, maximize, close). Below the title bar, the function name 'FDIST' is displayed. The arguments are listed in a table-like format with input fields and their corresponding values. The first argument 'X' is 3.33. The second argument 'Deg_freedom1' is 5. The third argument 'Deg_freedom2' is 10. To the right of these arguments, the calculated result is shown as 0.049831276. At the bottom of the dialog box, there is a descriptive text in Chinese: '傳回兩組資料的 F 機率分配 (散佈程度)'.

Argument	Value	Result
X	3.33	3.33
Deg_freedom1	5	5
Deg_freedom2	10	10
		0.049831276

傳回兩組資料的 F 機率分配 (散佈程度)

變異數分析的基本概念

圖13.4 F 值



The image shows the 'Function Wizard' (函數引數) dialog box in Microsoft Excel, specifically for the FINV function. The dialog has a blue title bar with a question mark and a close button. The main area is light yellow and contains the function name 'FINV' in blue. Below it, there are three input fields: 'Probability' with the value '0.05', 'Deg_freedom1' with the value '5', and 'Deg_freedom2' with the value '10'. Each input field has a small icon to its right. To the right of each input field is an equals sign followed by the value: '= 0.05', '= 5', and '= 10'. Below these fields, the result of the function is displayed: '= 3.325834529'. At the bottom of the dialog, there is a text box with the following description: '傳回 F 機率分配之反函數值: 如果 $p = \text{FDIST}(x, \dots)$, 則反函數為 $\text{FINV}(p, \dots) = x$ '.

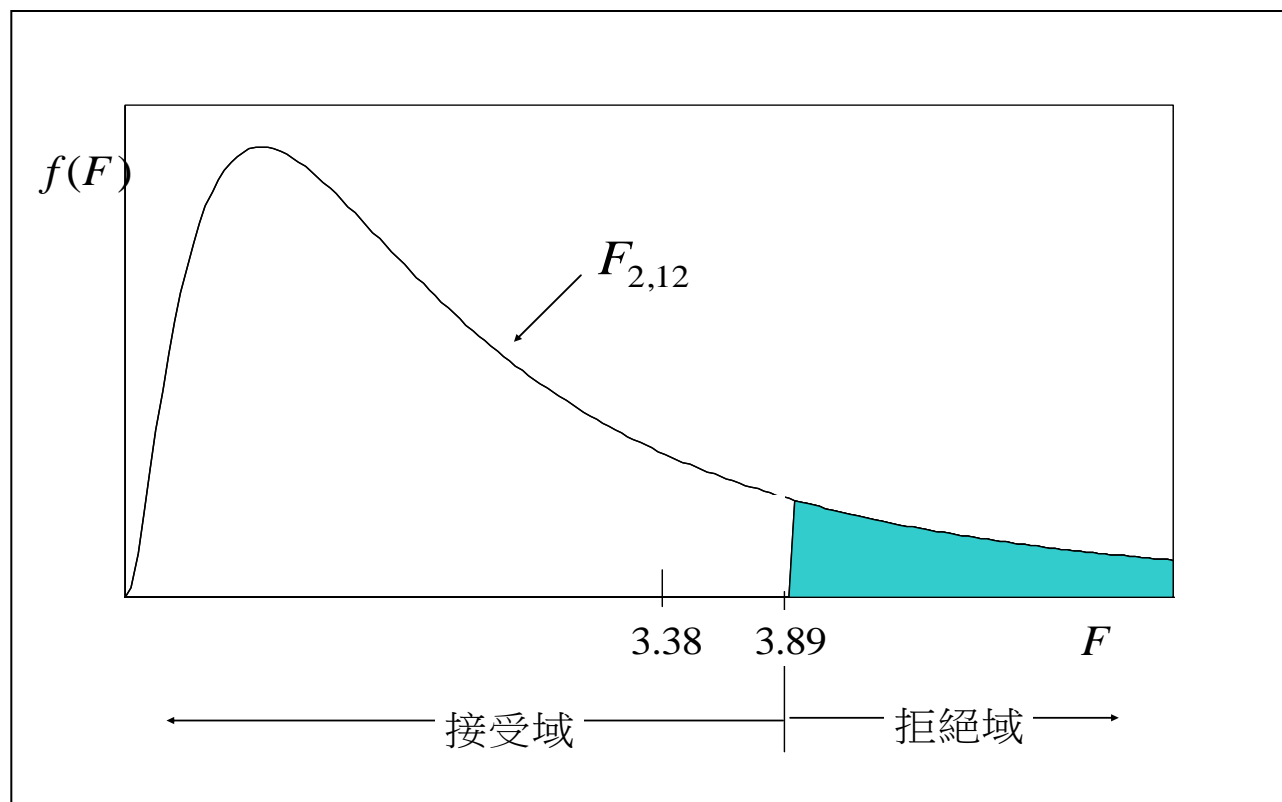
Parameter	Value	Result
Probability	0.05	= 0.05
Deg_freedom1	5	= 5
Deg_freedom2	10	= 10

= 3.325834529

傳回 F 機率分配之反函數值: 如果 $p = \text{FDIST}(x, \dots)$, 則反函數為 $\text{FINV}(p, \dots) = x$

變異數分析的基本概念

圖13.5 可樂裝填機裝填數量的檢定



變異數分析的基本概念

表13.4 變異數分析表

變異來源 [↗]	平方和(SS) [↗]	自由度(df) [↗]	平均平方和(MS) [↗]	F [↗]
因子(組間) [↗]	SSF [↗]	$k - 1$ [↗]	$MSF = \frac{SSF}{k - 1}$ [↗]	$\frac{MSF}{MSE}$ [↗]
隨機(組內) [↗]	SSE [↗]	$n - k$ [↗]	$MSE = \frac{SSE}{n - k}$ [↗]	[↗]
總和 [↗]	SST [↗]	$n - 1$ [↗]	[↗]	[↗]

變異數分析的基本概念

表13.5 變異數分析表

變異來源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平均平方和 (MS)	F 值
因子	463.33	2	231.66	3.38
隨機	822	12	68.5	
總和	1285.33	14		

變異數分析的基本概念

圖13.6 單因子變異數分析的對話方塊



單因子變異數分析

輸入

輸入範圍(I):

分組方式:

☒ 逐欄(C) ☐ 逐列(R)

☒ 類別軸標記在第一列上(L)

$\alpha(A)$:

確定 取消 說明(H)

變異數分析的基本概念

表13.6 可樂裝填機裝填量的變異數分析

	A	B	C	D	E	F	G
1	單因子變異數分析						
2							
3	摘要						
4	組	個數	總和	平均	變異數		
5	廠牌A	5	490	98	158		
6	廠牌B	5	555	111	29.5		
7	廠牌C	5	505	101	18		
8							
9							
10	ANOVA						
11	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
12	組間	463.3	2	231.6667	3.382	0.068413	3.885294
13	組內	822	12	68.5			
14							
15	總和	1285	14				

實驗設計

○實驗設計

在做研究時，有時候我們必需控制研究中的某些不是研究對象的因子，以便獲得某一所要研究的因子或變數的影響效果。此種研究方法稱為實驗研究（ experimental study ）或實驗設計（ experimental design ）。

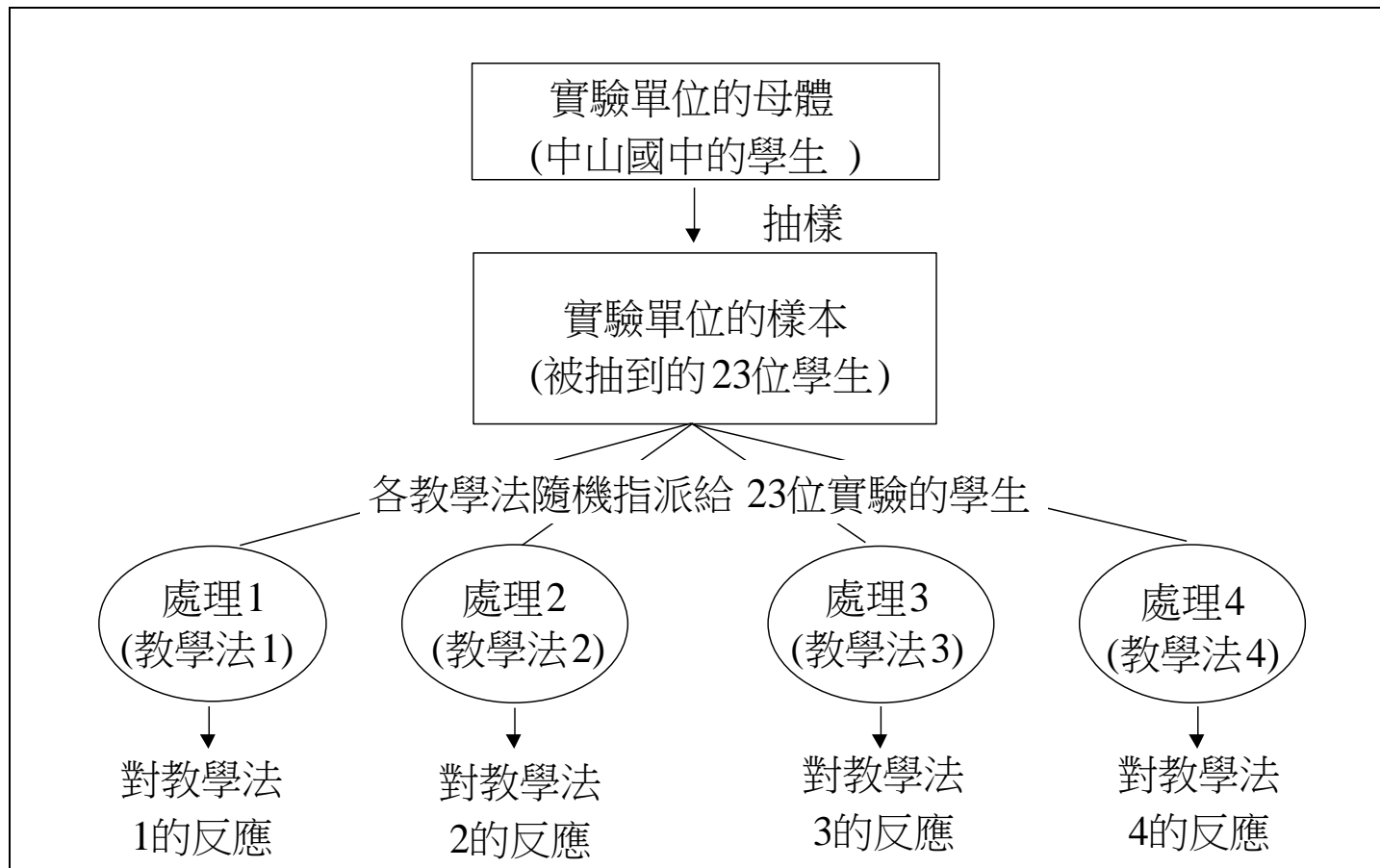
一因子變異數分析—完全隨機設計

○ 完全隨機設計的意義

完全隨機設計是將實驗單位隨機區分為 k 個處理，再從各個處理中隨機抽取 n 個樣本的方法，或將 k 個處理隨機分配於樣本中的實驗單位以搜集資料的方法。

一因子變異數分析—完全隨機設計

圖13.7 完全隨機實驗



一因子變異數分析—完全隨機設計

○ 總差異

總差異 = 處理間的差異 + 隨機差異

$$SST = SSTR + SSE$$

○ 處理間的差異(組間變異)

$$SSTR = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2 = \sum_{i=1}^k n_i ((\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2)$$

○ 隨機差異(組內變異)

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2$$

一因子變異數分析—完全隨機設計

○ 因子引起的變異數（組間變異）

$$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1}$$

○ 隨機變異數（組內變異）

$$MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k}$$

一因子變異數分析—完全隨機設計

○ F 檢定統計量

$$F = \frac{MSTR}{MSE}$$

一因子變異數分析—完全隨機設計

表13.7 變異數分析表

變異來源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平均平方和 (MS)	檢定統計量
處理 (因子)	$SSTR$	$k - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1}$	$F = \frac{MSTR}{MSE}$
隨機(組內)	SSE	$\sum n_i - k$	$MSE = \frac{SSE}{\sum n_i - k}$	
總和	SST	$\sum n_i - 1$		

一因子變異數分析—完全隨機設計

○ 決策法則

①若 $F > F_{k-1, n_T-k, \alpha}$, 則拒絕 H_0 。

②若 $F \leq F_{k-1, n_T-k, \alpha}$, 則接受 H_0 。

一因子變異數分析—完全隨機設計

表13.8 四種教學法的學習效果

樣本觀察值 _{<i>j</i>}	教學方法 _{<i>j</i>}			
	教學法 1 _{<i>j</i>}	教學法 2 _{<i>j</i>}	教學法 3 _{<i>j</i>}	教學法 4 _{<i>j</i>}
1 _{<i>j</i>}	65 _{<i>j</i>}	75 _{<i>j</i>}	59 _{<i>j</i>}	94 _{<i>j</i>}
2 _{<i>j</i>}	87 _{<i>j</i>}	69 _{<i>j</i>}	78 _{<i>j</i>}	89 _{<i>j</i>}
3 _{<i>j</i>}	73 _{<i>j</i>}	83 _{<i>j</i>}	67 _{<i>j</i>}	80 _{<i>j</i>}
4 _{<i>j</i>}	79 _{<i>j</i>}	81 _{<i>j</i>}	62 _{<i>j</i>}	88 _{<i>j</i>}
5 _{<i>j</i>}	81 _{<i>j</i>}	72 _{<i>j</i>}	83 _{<i>j</i>}	_{<i>j</i>}
6 _{<i>j</i>}	69 _{<i>j</i>}	79 _{<i>j</i>}	76 _{<i>j</i>}	_{<i>j</i>}
7 _{<i>j</i>}	_{<i>j</i>}	90 _{<i>j</i>}	_{<i>j</i>}	_{<i>j</i>}
樣本平均數 \bar{Y}_i _{<i>j</i>}	75.67 _{<i>j</i>}	78.43 _{<i>j</i>}	70.83 _{<i>j</i>}	87.75 _{<i>j</i>}
樣本變異數 S_i^2 _{<i>j</i>}	66.67 _{<i>j</i>}	50.62 _{<i>j</i>}	91.77 _{<i>j</i>}	33.58 _{<i>j</i>} I

一因子變異數分析—完全隨機設計

表13.9 三種魚類捕食埃及斑蚊幼蟲的數目

	A	B	C	D
1	樣本	魚類		
2		大肚魚	孔雀魚	蓋斑鬥魚
3	1	56	46	425
4	2	78	24	278
5	3	23	47	551
6	4	41	19	238
7	5	22	73	381
8	6	53		
9	7	35		
10	樣本平均數 \bar{Y}_i	44	41.8	374.6
11	樣本變異數 S_i^2	399.3	463.7	15,422.3

一因子變異數分析—完全隨機設計

表13.10 一因子變異數分析—完全隨機實驗

	A	B	C	D	E	F	G
1	單因子變異數分析						
2							
3	摘要						
4	組	個數	總和	平均	變異數		
5	大肚魚	7	308	44	399.3333		
6	孔雀魚	5	209	41.8	463.7		
7	蓋斑鬥魚	5	1873	374.6	15422.3		
8							
9							
10	ANOVA						
11	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
12	組間	387908.1	2	193954.1	41.17921	1.37E-06	3.738892
13	組內	65940	14	4710			
14							
15	總和	453848.1	16				

一因子變異數分析—完全隨機設計

表13.11 學習成績的ANOVA表

變異來源	平方和 (SS)	自由度	平均平方和 (MS)	檢定統計量 F
因子變異	712.8	3	237.6	3.77
隨機變異	1,196.66	19	62.98	
總變異	1,909.46	22		

一因子變異數分析—完全隨機設計

○ 隨機集區設計的意義

隨機集區設計是將實驗單位依據某一性質如時間、地理位置、實驗材料分成幾個集區 (block)。同一集區內的實驗單位具同類的性質，彼此間的差異較小，而不同集區的實驗單位差異較大，然後在每一集區中將 K 個處理隨機分配於實驗單位以搜集資料。

一因子變異數分析—隨機集區設計

圖13.8 隨機集區設計

B_1	A_3	A_1	A_2
B_2	A_3	A_2	A_1
B_3	A_1	A_3	A_2
B_4	A_2	A_3	A_1

一因子變異數分析—隨機集區設計

○ 總差異

$$SST = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{\bar{Y}})^2$$

○ 處理間的差異(組間變異)

$$SSTR = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_{.j} - \bar{\bar{Y}})^2 = b \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_{.j} - \bar{\bar{Y}})^2$$

○ 集區間的變異

$$SSBK = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_{i.} - \bar{\bar{Y}})^2 = k \sum_{i=1}^b (\bar{Y}_{i.} - \bar{\bar{Y}})^2$$

○ 隨機差異

$$SSE = SST - SSTR - SSBK$$

一因子變異數分析—隨機集區設計

○ 處理引起的變異數(組間變異)

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1}$$

式中： $k-1$ 為 $SSTR$ 的自由度。

○ 集區引起的變異數(集區變異)

$$MSBK = \frac{SSBK}{b-1}$$

式中： $b-1$ 為 $SSBK$ 的自由度。

○ 隨機變異數

$$MSE = \frac{SSE}{(k-1)(b-1)}$$

式中： $(k-1)(b-1)$ 為 SSE 的自由度(或表為 $kb-k-b+1$)。

一因子變異數分析—隨機集區設計

○ 檢定因子對依變數的影響

○ F 檢定統計量

$$\frac{MSTR}{MSE} \sim F_{k-1, (k-1)(b-1)}$$

○ 決策法則

①若 $F > F_{k-1, (k-1)(b-1), \alpha}$, 則拒絕 H_0 。

②若 $F \leq F_{k-1, (k-1)(b-1), \alpha}$, 則接受 H_0 。

一因子變異數分析—隨機集區設計

○ 檢定集區對依變數的影響

○ F 檢定統計量

$$\frac{MSTR}{MSE} \sim F_{b-1, (k-1)(b-1)}$$

○ 決策法則

①若 $F > F_{k-1, (k-1)(b-1), \alpha}$ ，則拒絕 H_0 。

②若 $F \leq F_{k-1, (k-1)(b-1), \alpha}$ ，則接受 H_0 。

一因子變異數分析—隨機集區設計

表13.12 隨機集區實驗的變異數分析表

變異來源 [◊]	平方和(SS) [◊]	自由度(df) [◊]	平均平方和(MS) [◊]	F 值 [◊]
處理（因子）	$SSTR$ [◊]	$k - 1$ [◊]	$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1}$ [◊]	$F_1 = \frac{MSTR}{MSE}$
集區 [◊]	$SSBK$ [◊]	$b - 1$ [◊]	$MSBK = \frac{SSBK}{b - 1}$ [◊]	$F_2 = \frac{MSBK}{MSE}$ [◊]
隨機 [◊]	SSE [◊]	$(k - 1)(b - 1)$ [◊]	$MSE = \frac{SSE}{(k - 1)(b - 1)}$ [◊]	[◊]
總合 [◊]	SST [◊]	$kb - 1$ [◊]	[◊]	[◊]

一因子變異數分析—隨機集區設計

表13.13 咖啡品質的評選

		處理（咖啡）			集區和	集區平均 \bar{Y}_i
		A	B	C		
集區	專家 1	24	26	25	75	25
	專家 2	27	27	26	80	26.67
	專家 3	19	22	20	61	20.33
	專家 4	24	27	25	76	25.33
	專家 5	22	25	22	69	23
	專家 6	26	27	24	77	25.67
	專家 7	27	26	22	75	25
	專家 8	25	27	24	76	25.33
	專家 9	22	23	20	65	21.67
	處理和	216	230	208		
	處理平均數 \bar{Y}_j	24	25.56	23.11		

一因子變異數分析—隨機集區設計

表13.15 台農67號稻種果實重量

	A	B	C	D	E
1		溫度（日間/夜間）			
2		20/15	30/25	35/30	區塊平均數 \bar{y}_i
3	區塊1	21.21	26.03	30.55	25.93
4	區塊2	12.27	26.82	27.73	22.27
5	區塊3	11.82	25	25	20.61
6	區塊4	15.10	25.95	27.76	22.94
7	溫度平均數 \bar{y}_j	15.10	25.95	27.76	$\bar{\bar{y}} = 22.94$

一因子變異數分析—隨機集區設計

表13.16 一因子變異數分析—集區設計

	A	B	C	D	E
1	雙因子變異數分析：無重複試驗				
2					
3	摘要	個數	總和	平均	變異數
4	區塊1	3	77.79	25.93	21.8164
5	區塊2	3	66.82	22.27333	75.25703
6	區塊3	3	61.82	20.60667	57.90413
7	區塊4	3	68.81	22.93667	46.87903
8					
9	溫度20/15	4	60.4	15.1	18.6998
10	溫度30/25	4	103.8	25.95	0.555267
11	溫度35/30	4	111.04	27.76	5.1342

一因子變異數分析—隨機集區設計

表13.17 一因子變異數分析集區設計ANOVA表

	A	B	C	D	E	F	G
14	ANOVA						
15	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
16	列(集區)	44.48687	3	14.82896	3.102191	0.110552	4.757063
17	欄(因子或處理)	375.0323	2	187.5161	39.22804	0.000359	5.143253
18	錯誤(隨機)	28.68093	6	4.780156			
19							
20	總和	448.2001	11				

一因子變異數分析—隨機集區設計

表13.18 隨機集區設計的ANOVA表

變源	SS	自由度	MS	F
處理	27.68	2	13.84	12.13
集區	104.73	8	13.09	11.47
隨機	18.26	16	1.141	
總和	150.67	26		

二因子變異數分析

○ 二因子變異數分析

考慮兩個或兩個以上因子的影響的實驗稱為因子實驗。

因子實驗包含多個因子，一般只介紹二因子實驗或二因子的變異數分析。

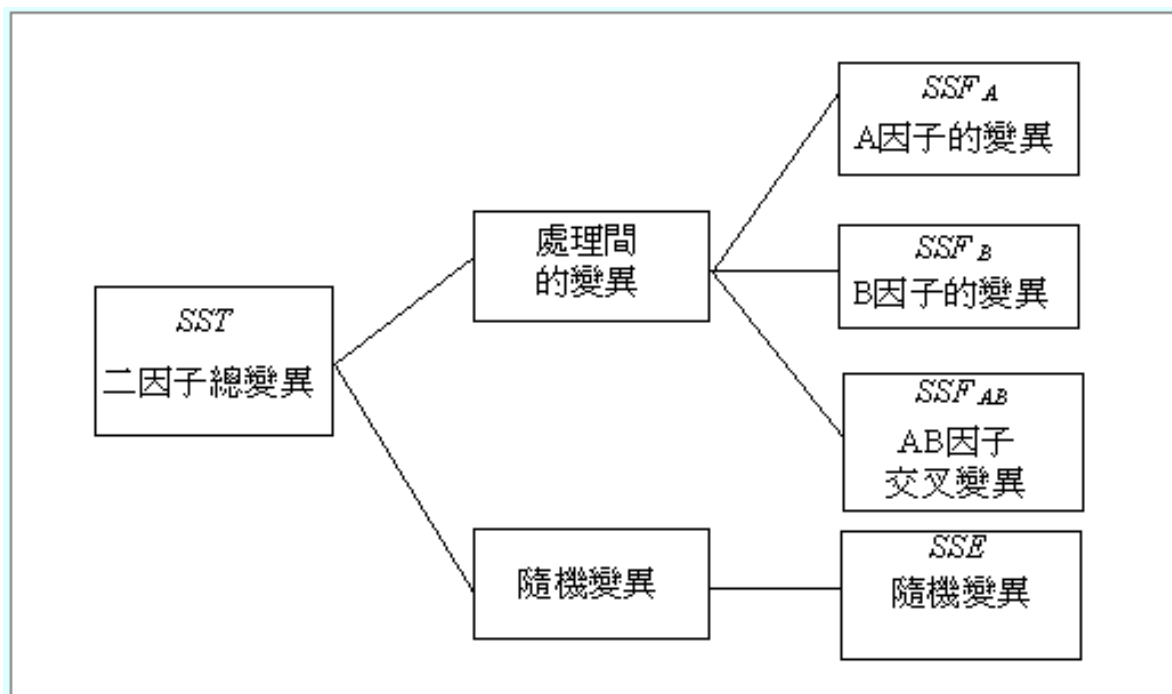
二因子變異數分析

圖13.11 二因子實驗

		因子B			
		處理1	處理2	...	處理C
因子A	處理1	<input type="text"/>	<input type="text"/>	...	<input type="text"/>
	處理2	<input type="text"/>	<input type="text"/>	...	<input type="text"/>
			
	處理	<input type="text"/>	<input type="text"/>	...	<input type="text"/>

二因子變異數分析

圖13.10 二因子變異數分析



二因子變異數分析

圖13.11 無交叉影響

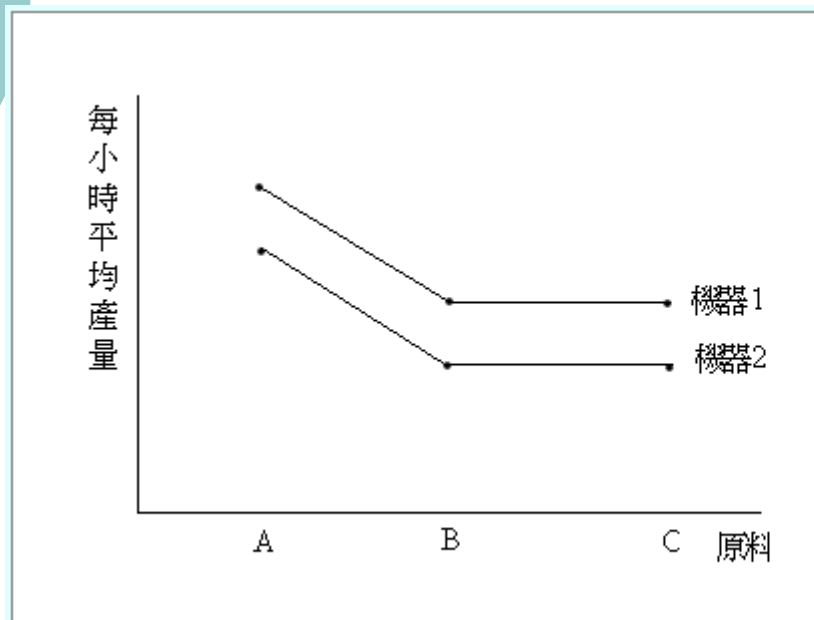
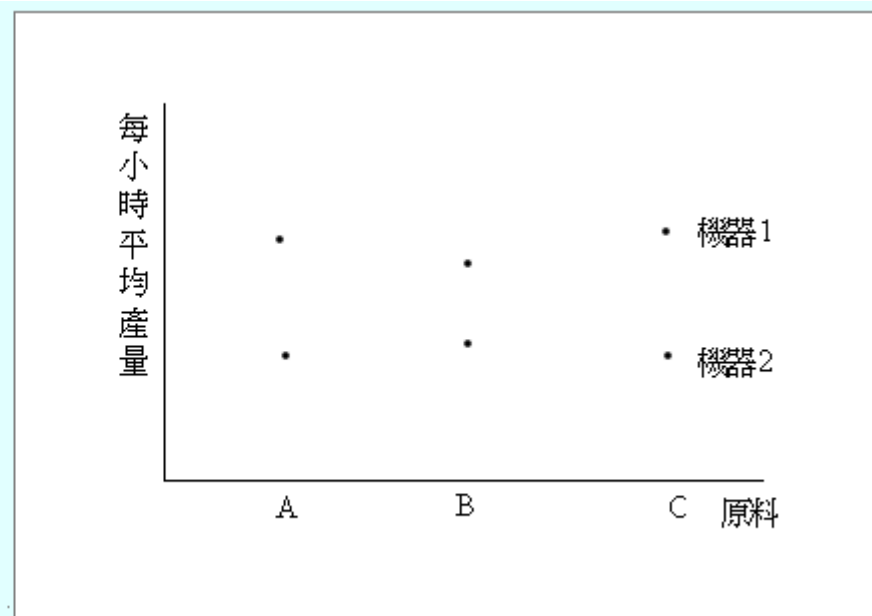


圖13.12 有交叉影響



Excel的使用

圖13.13 雙因子變異數分析的對話方塊

雙因子變異數分析：無重複試驗

輸入

輸入範圍(I):

☒ 標記(L)

α (A):

輸出選項

☐ 輸出範圍(O):

☒ 新工作表(P):

☐ 新活頁簿(W)

確定 取消 說明(H)