【解题报告】网络流24题

1.飞行员配对方案问题

链接：[「网络流 24 题」搭配飞行员]

题意：每架飞机需要两个驾驶员，一个正驾驶员和一个副驾驶员。由于种种原因，有些驾驶员不能在同一架飞机上飞行，问如何搭配驾驶员才能使出航的飞机最多。两个正驾驶员或两个副驾驶员都不能同机飞行。

分析：二分图最大匹配裸题。

View Code

2.太空飞行计划问题

链接：[「网络流 24 题」太空飞行计划]

题意：现已确定了一个可供选择的实验集合 $E=\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$，和进行这些实验需要使用的全部仪器的集合 $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$。实验 E_j 需要用到的仪器是 I 的子集 $R_j\subseteq I$。 配置仪器 I_k 的费用为 c_k 美元。实验 E_j 的赞助商已同意为该实验结果支付 p_j 美元。对于给定的实验和仪器配置情况，找出净收益最大的试验计划。

分析：最大权闭合子图。从 S 向每个实验连一条容量为 p_i 的边，每个实验向所需要的仪器连一条容量为 inf 的边，每个仪器向 T 连一条容量为 c_i 的边。答案为 $\sum p_i-maxflow$ 。

View Code

3.最小路径覆盖问题

链接：[「网络流 24 题」最小路径覆盖]

题意：给定有向图 $G=(V,E)$。设 P 是 G 的一个简单路（顶点不相交）的集合。如果 V 中每个顶点恰好在 P 的一条路上，则称 P 是 G 的一个路径覆盖。 P 中路径可以从 V 的任何一个顶点开始，长度也是任意的，特别地，可以为 0。G 的最小路径覆盖是 G 的所含路径条数最少的路径覆盖。 求一个有向无环图 G 的最小路径覆盖。

分析：二分图最大匹配。将每个点拆为两个点，在新图中对应连边。二分图的每一个合法匹配都可以视为一种路径覆盖的方式，路径条数为总点数-匹配数。最小不相交路径覆盖即为总点数-二分图最大匹配。（建图方式仅限DAG）

View Code

4.魔术球问题

链接：[「网络流 24 题」魔术球]

题意：假设有 n 根柱子，按下述规则在这 n 根柱子中依次放入编号为 $1,2,3,4,\cdots$ 的球：每次只能在某根柱子的最上面放球；在同一根柱子中，任何 2 个相邻球的编号之和为完全平方数。 试计算出在 n 根柱子上最多能放多少个球。

分析：二分图最大匹配。题目限制了在放置好每个 x 之前，需先放置好 $1,2,3,\cdots x-1$ 的球。考虑枚举答案 x ， 建立关于 $1,2,3,\cdots x$ 的图：若 $i<j$ 且 $i+j$ 为完全平方数，则连接边 (i,j)。原图是一个DAG，问题转化为求DAG的最小不相交路径覆盖。按顺序枚举 x ， 当最小路径覆盖数大于 n 时结束。

View Code

5.圆桌问题

链接：[「网络流 24 题」圆桌聚餐]

题意：假设有来自 n 个不同单位的代表参加一次国际会议。每个单位的代表数分别为 r_i 。会议餐厅共有 m 张餐桌，每张餐桌可容纳 c_i 个代表就餐。 为了使代表们充分交流，希望从同一个单位来的代表不在同一个餐桌就餐。 试给出满足要求的代表就餐方案。

分析：最大流。从 S 向每个单位连一条容量为人数的边，从餐桌向 T 连接一条容量为餐桌容量的边，从单位向每个餐桌连一条容量为 1 的边。直接跑最大流求解。（或者是贪心+线段树，餐桌和人数都从大到小排序，每次安排时按餐桌剩余容量从大到小安排。为

维护单调性，对于最后一段相等的区间，需要减线段树上靠后的部分。）

⊞ View Code

6.最长递增子序列问题

链接：[「网络流 24 题」最长递增子序列]

题意：给定正整数序列 $x_1 \sim x_n$ ，以下递增均为非严格递增。 计算其最长递增子序列的长度 s。 计算从给定的序列中最多可取出多少个长度为 s 的递增子序列。 如果允许在取出的序列中多次使用 x_1 和 x_n ，则从给定序列中最多可取出多少个长度为 s 的递增子序列。

分析：令 f_i 表示以第 i 位开头的最长递增子序列长度，可用dp求解。若 $f_i = s$ ，则从 S 向 i 连一条容量为 1 的边；若 $f_i = 1$ ，则从 i 向 T 连一条容量为 1 的边；限定每个点只选一次，拆点，连一条容量为 1 的边；若 $i < j$ 且 $x_i <= x_j$ 且 $f_i = f_j + 1$ ，则从 i 向 j 连一条容量为 1 的边。直接跑最大流求解即可。回答第三问时，把对应边的限制放成 inf ，再跑一次最大流。

⊞ View Code

7.试题库问题

链接：[「网络流 24 题」试题库]

题意：假设一个试题库中有 n 道试题。每道试题都标明了所属类别。同一道题可能有多个类别属性。现要从题库中抽取 m 道题组成试卷。并要求试卷包含指定类型的试题。试设计一个满足要求的组卷算法。

分析：最大流。从 S 向每种类别连一条容量为需求的边，从题目向 T 连接一条容量为 1 的边，从每个类别向题目连一条容量为 1 的边。直接跑最大流求解即可。

⊞ View Code

8.机器人路径规划问题

链接：[PowerOJ1743: 机器人路径规划问题]

题意：给定树状路径上的起点 s 和终点 t，机器人要从 s 运动到 t 。树状路径上有若干可移动的障碍物。由于路径狭窄，任何时刻在路径的任何位置不能同时容纳 2 个物体。每一步可以将障碍物或机器人移到相邻的空顶点上。设计一个有效算法用最少移动次数使机器人从 s 运动到 t。 编程任务：对于给定的树，以及障碍物在树中的分布情况，计算机器人的最少移动次数。

分析：网络流的复杂度是 $O(n^9)$ 的，ImmortalCO给出了一种 $O(n^6)$ 的动态规划解法。参考[《机器人路径规划问题(TMP1R)题解》]。

9.方格取数问题

链接：[「网络流 24 题」方格取数]

题意：在一个有 $m \times n$ 个方格的棋盘中，每个方格中有一个正整数。 现要从方格中取数，使任意 2 个数所在方格没有公共边，且取出的数的总和最大。试设计一个满足要求的取数算法。

分析：最大点权独立集。先将棋盘黑白染色，从 S 向每个黑点连一条容量为黑点数值的边，从白点向 T 连接一条容量为白点数值的边，从每个黑点向白点连一条容量为 inf 的边。答案为总价值-最小割。

10.餐巾计划问题

链接：[「网络流 24 题」餐巾计划]

题意：一个餐厅在相继的 n 天里，每天需用的餐巾数不尽相同。假设第 i 天需要 r_i 块餐巾。餐厅可以购买新的餐巾，每块餐巾的费用为 P 分；或者把旧餐巾送到快洗部，洗一块需 M 天，其费用为 F 分；或者送到慢洗部，洗一块需 N 天，其费用为 S 分（ $S < F$ ）。 每天结束时，餐厅必须决定将多少块脏的餐巾送到快洗部，多少块餐巾送到慢洗部，以及多少块保存起来延期送洗。但是每天洗好的餐巾和购买的新餐巾数之和，要满足当天的需求量。 试设计一个算法为餐厅合理地安排好 n 天中餐巾使用计划,使总的花费最小。

分析：把每一天都拆成一对点 x_i 和 y_i ，x_i 表示脏的餐巾，y_i 表示干净的餐巾。从 S 向 y_i 连一条容量为 inf 费用为 P 的边，代表购买决策；从 y_i 向 T 连一条容量为 r_i 费用为 0 的边，代表每天需求；从 S 向 x_i 连一条容量为 r_i 费用为 0 的边，代表每天剩余的未洗餐巾；从 x_i 向 x_i+1 连一条容量为 inf 费用为 0 的边，代表将脏餐巾屯到下一天；从 x_i 向 y_i+m 连一条容量为 inf 费用为 F 的边，代表快洗决策；从 x_i 向 y_i+n 连一条容量为 inf 费用为 S 的边，代表慢洗决策。直接跑最小费用最大流即可。

11.航空路线问题

链接：「网络流 24 题」航空路线问题

题意：给定一张航空图，图中顶点代表城市，边代表两个城市间的直通航线。现要求找出一条满足下述限制条件的且途经城市最多的旅行路线：从最西端城市出发，单向从西向东途经若干城市到达最东端城市，然后再单向从东向西飞回起点（可途经若干城市）；除起点城市外，任何城市只能访问一次。对于给定的航空图，试设计一个算法找出一条满足要求的最佳航空旅行路线。

分析：问题转化为求两条不相交的路径且路径之和最长。考虑拆点，连一条容量为 1 费用为 -1 的边（1 和 n 的容量为 2 ）。跑最小费用最大流求解，若最大流不等于 2 则无解。

12.软件补丁问题

链接：「网络流 24 题」软件补丁

题意：某公司发现其研制的一个软件中有 n 个错误，随即为该软件发放了一批共 m 个补丁程序。对于每一个补丁 i ，都有 2 个与之相应的错误集合 $B_1(i)$ 和 $B_2(i)$ ，使得仅当软件包含 $B_1(i)$ 中的所有错误，而不包含 $B_2(i)$ 中的任何错误时，才可以使用补丁 i。补丁 i 将修复软件中的某些错误 $F_1(i)$ ，而同时加入另一些错误 $F_2(i)$。另外，每个补丁都耗费一定的时间。 试设计一个算法，利用公司提供的 m 个补丁程序将原软件修复成一个没有错误的软件，并使修复后的软件耗时最少。

分析：将bug状态压成二进制之后跑最短路。

13.星际转移问题

链接：「网络流 24 题」星际转移

题意：现有 n 个太空站位于地球与月球之间，且有 m 艘公共交通太空船在其间来回穿梭。每个太空站可容纳无限多的人，而每艘太空船 i 只可容纳 H_i 个人。每艘太空船将周期性地停靠一系列的太空站，例如：$1,3,4$ 表示该太空船将周期性地停靠太空站 $134134134\cdots$ 每一艘太空船从一个太空站驶往任一太空站耗时均为 1。人们只能在太空船停靠太空站（或月球、地球）时上、下船。初始时所有人全在地球上，太空船全在初始站。试设计一个算法，找出让所有人尽快地全部转移到月球上的运输方案。

分析：建立分层图。从 S 向每一天的地球连一条容量为 inf 的边；从每一天的月球向 T 连一条容量为 inf 的边；从每一天的节点向下一天的对应节点连一条容量为 inf 的边；对于每一艘飞船，从每一天的位置向下一天的位置连一条容量为 H_i 的边。枚举天数建图，跑最大流直到不小于总人数即可。

14.孤岛营救问题

链接：「网络流 24 题」孤岛营救问题

题意：迷宫的外形是一个长方形，其南北方向被划分为 n 行，东西方向被划分为 m 列， 于是整个迷宫被划分为 $n\times m$ 个单元。南北或东西方向相邻的 2 个单元之间可能互通，也可能有一扇锁着的门，或者是一堵不可逾越的墙。迷宫中有一些单元存放着钥匙，并且所有的门被分成 p 类， 打开同一类的门的钥匙相同，不同类门的钥匙不同。 大兵瑞恩被关押在 (n,m) 单元里，并已经昏迷。迷宫只有一个入口， 在 $(1,1)$ 单元。麦克从一个单元移动到另一个 相邻单元的时间为 1，拿取所在单元的钥匙的时间以及用钥匙开门的时间可忽略不计。 试设计一个算法，帮助麦克以最快的方式到达瑞恩所在单元，营救大兵瑞恩。

分析：将获得钥匙的状态压成二进制，对每一个状态建一层图，跑分层图最短路。

15.汽车加油驾驶问题

链接：「网络流 24 题」汽车加油行驶问题

题意：给定一个 $N\times N$ 的方形网格，设其左上角为起点，坐标为 $(1,1)$ ， X 轴向右为正， Y 轴向下为正，每个方格边长为 1 。 一辆汽车从起点出发驶向右下角终点 (N,N) 。 在若干个网格交叉点处，设置了油库。汽车在行驶过程中应遵守如下规则：汽车只能沿网格边行驶，装满油后能行驶 K 条网格边；出发时汽车已装满油，在起点与终点处不设油库； 汽车经过一条网格边时，若其 X 坐标

或 Y 坐标减小，则应付费用 B ，否则免付费用； 汽车在行驶过程中遇油库则应加满油并付加油费用 A；在需要时可在网格点处增设油库，并付增设油库费用 C (不含加油费用 A)。 求出汽车从起点出发到达终点的一条所付费用最少的行驶路线。

分析：令 $f(i,j,k)$ 为点 (i,j) 剩余油量为 k 的最小费用，跑最短路。

16.数字梯形问题

链接：「网络流 24 题」数字梯形

题意：给定一个由 n 行数字组成的数字梯形。梯形的第一行有 m 个数字。从梯形的顶部的 m 个数字开始，在每个数字处可以沿左下或右下方向移动，形成一条从梯形的顶至底的路径。 分别遵守以下规则： 从梯形的顶至底的 m 条路径互不相交； 从梯形的顶至底的 m 条路径仅在数字结点处相交； 从梯形的顶至底的 m 条路径允许在数字结点相交或边相交。将按照三个规则计算出的最大数字总和输出。

分析：从 S 向顶部的每一个点连一条容量为 1 费用为 0 的边。规则一：拆点之后跑费用流；规则二：不拆点，跑费用流；规则三：把边的容量改为 inf 。

17.运输问题

链接：「网络流 24 题」运输问题

题意：公司有 m 个仓库和 n 个零售商店。第 i 个仓库有 a_i 个单位的货物；第 j 个零售商店需要 b_j 个单位的货物。货物供需平衡，即 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ 。从第 i 个仓库运送每单位货物到第 j 个零售商店的费用为 c_{ij} 。试设计一个将仓库中所有货物运送到零售商店的运输方案，使总运输费用最少。

分析：从 S 向仓库连一条容量为 a_i 费用为 0 的边；从商店向 T 连一条容量为 b_j 费用为 0 的边；从仓库向商店连一条容量为 inf 费用为 c_{ij} 的边，跑费用流即可。

18.分配工作问题

链接：「网络流 24 题」分配问题

题意：有 n 件工作要分配给 n 个人做。第 i 个人做第 j 件工作产生的效益为 c_{ij} 。试设计一个将 n 件工作分配给 n 个人做的分配方案，使产生的总效益最大。

分析：二分图最大权匹配，常规建图跑费用流即可。

19.负载平衡问题

链接：「网络流 24 题」负载平衡

题意：公司有 n 个沿铁路运输线环形排列的仓库，每个仓库存储的货物数量不等。如何用最少搬运量可以使 n 个仓库的库存数量相同。搬运货物时，只能在相邻的仓库之间搬运。

分析：由于总量是固定的，我们可以得出每个仓库的最终储货量，令 a_i 表示原有储货量-最终储货量。对于每一个仓库，拆成两个点 x_i 和 y_i ，一个代表供应，一个代表需求。若 $a_i > 0$ ，从 S 向 x_i 连一条容量为 a_i 费用为 0 的边；若 $a_i < 0$ ，从 y_i 向 T 连一条容量为 $-a_i$ 费用为 0 的边；对于两个相邻的顶点 j ，从 x_i 分别向 x_j 和 y_j 连一条容量为 inf 费用为 1 的边。跑最小费用最大流即可。

20.深海机器人问题

链接：「网络流 24 题」深海机器人问题

题意：潜艇内有多个深海机器人。潜艇到达深海海底后，深海机器人将离开潜艇向预定目标移动。 深海机器人在移动中还必须沿途采集海底生物标本，沿途生物标本由最先遇到它的深海机器人完成采集。 每条预定路径上的生物标本的价值是已知的，而且生物标本只能被采集一次。 本题限定深海机器人只能从其出发位置沿着向北或向东的方向移动，而且多个深海机器人可以在同一时间占据同一位置。 用一个 $P \times Q$ 网格表示深海机器人的可移动位置。西南角的坐标为 $(0,0)$ ，东北角的坐标为 (Q,P) 。 给定每个深海机器人的出发位置和目标位置，以及每条网格边上生物标本的价值。 计算深海机器人的最优移动方案， 使深海机器人到达目的地后，采集到的生物标本的总价值最高。

分析：每条边的贡献只能计算一次，考虑拆边：一条边容量为 1 费用为价值，一条边容量为 inf 费用为 0 。跑最小费用最大流即可。

21.最长 k 可重区间集问题

链接：「网络流 24 题」最长 k 可重区间集

题意：给定实直线 L 上 n 个开区间组成的集合 I，和一个正整数 k，试设计一个算法，从开区间集合 I 中选取出开区间集合 $S \subseteq I$，使得在实直线 L 的任何一点 x，S 中包含点 x 的开区间个数不超过 k 。且 $\sum\limits_{z \in S} |z|$ 达到最大。这样的集合 S 称为开区间集合 I 的最长 k 可重区间集。 $\sum\limits_{z \in S} |z|$ 称为最长 k 可重区间集的长度。 对于给定的开区间集合 I 和正整数 k，计算开区间集合 I 的最长 k 可重区间集的长度。

分析：离散化区间的所有端点，从小到大为 $x_1, x_2, \cdots x_m$ 。从 S 向 1 连一条容量为 k 费用为 0 的边；从 m 向 T 连一条容量为 k 费用为 0 的边；从 i 向 $i+1$ 连一条容量为 k 费用为 0 的边；对于每一个区间，从其左端点的对应顶点向右端点的对应顶点连一条容量为 1 费用为区间长度的边。跑最小费用最大流即可。

22.最大 k 可重线段集问题

链接：「网络流 24 题」最长k可重线段集问题

题意：给定平面 xoy 上 n 个开线段组成的集合 I，和一个正整数 k 。 从开线段集合 I 中选取出开线段集合 $S \in I$，使得在 x 轴上的任何一点 p ，S 中与直线 $x = p$ 相交的开线段个数不超过 k ， 且 $\sum_{z \in S} |z|$ 达到最大。 这样的集合 S 称为开线段集合 I 的最长 k 可重线段集的长度。 对于任何开线段 z ，设其端点坐标为 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) ， 则开线段 z 的长度 $|z|$ 定义为：
$|z| = \lfloor \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \rfloor$。 对于给定的开线段集合 I 和正整数 k ，计算开线段集合 I 的最长 k 可重线段集的长度。

分析：和上一道题基本一致，为了避免线段与 x 轴垂直的情况，需要将所有的端点坐标 $\times 2$ ，然后左端点 -1 。

23.火星探险问题

链接：「网络流 24 题」火星探险问题

题意： 登陆舱着陆后，探测车将离开登陆舱向先期到达的传送器方向移动。 探测车在移动中还必须采集岩石标本，每一块岩石标本由最先遇到它的探测车完成采集。 每块岩石标本只能被采集一次。 岩石标本被采集后，其他探测车可以从原来岩石标本所在处通过。 探测车不能通过有障碍的地面。 本题限定探测车只能从登陆处沿着向南或向东的方向朝传送器移动，而且多个探测车可以在同一时间占据同一位置。 如果某个探测车在到达传送器以前不能继续前进，则该车所采集的岩石标本将全部损失。 用一个 $P \times Q$ 网格表示登陆舱与传送器之间的位置。登陆舱的位置在 (X_1, Y_1) 处，传送器 的位置在 (X_P, Y_Q) 处。 给定每个位置的状态，计算探测车的最优移动方案，使到达传送器的探测车的数量最多， 而且探测车采集到的岩石标本的数量最多。

分析：将原图中的每一个顶点拆成两个点：若其为岩石顶点，从 i 向 i' 连一条容量为 1 费用为 1 的边；若其为非障碍点，从 i 向 i' 连一条容量为 inf 费用为 0 的边；对于相邻的点 j ，从 i' 向 j 连一条容量为 inf 费用为 0 的边。从 S 向 (X_1, Y_1) 连一条容量为探测车数量费用为 0 的边；从 (X_P, Y_Q) 向 T 连一条容量为探测车数量费用为 0 的边。跑最小费用最大流即可。

24.骑士共存问题

链接：「网络流 24 题」骑士共存问题

题意：在一个 $n \times n$ 个方格的国际象棋棋盘上，马（骑士）可以攻击的棋盘方格为“日”字。棋盘上某些方格设置了障碍，骑士不得进入。对于给定的 $n \times n$ 个方格的国际象棋棋盘和障碍标志，计算棋盘上最多可以放置多少个骑士，使得它们彼此互不攻击。

分析：二分图最大独立集。将棋盘黑白染色，从 S 向每一个可用的黑格连一条容量为 1 的边，从每一个可用的白格向 T 连一条容量为 1 的边，每一个黑格向可以攻击的白格连一条容量为 inf 的边。答案为总的可用格数-最大流。