生成函数

By Yuekai Jia

【定义】

对于一个无穷项的序列$\{g_0, g_1, g_2, \ldots\}$，用如下方法把它们和一个无穷级数联系起来：

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i$$

则称函数$G(x)$为序列$\{g_i\}$的生成函数(也叫母函数)。

这里的x无实际意义，可以根据不同的情况取任意值。当级数收敛时，可得到生成函数的闭形式。例如，序列$\{1,1,1,1,\ldots\}$的生成函数为

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

当取$0 < x < 1$时，闭形式为$\frac{1}{1-x}$。

举一个简单的例子：在4个不同的数中选出n个数的不同方案数有多少？显然答案为$\binom{4}{n}$。用一个序列表示n从0开始取的答案，即$\{1,4,6,4,1,0,0,\ldots\}$，这个序列的生成函数就是$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$，即$(1+x)^4$。

【基本操作】

- **放缩：**

$$cG(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c g_i x^i \Leftrightarrow \{c g_0, c g_1, c g_2, \ldots\}$$

$$G(cx)=\sum_{i=0}^{\infty}c^i g_i x^i \Leftrightarrow \{g_0, cg_1, c^2 g_2, \dots\}$$

- **加减法：**

$$F(x)\pm G(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(f_i+g_i)x^i \Leftrightarrow \{f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \dots\}$$

- **右移：**

  将序列向右平移k位，并在前k位补0：

$$x^k G(x)=\sum_{i=0}^{\infty}g_i x^{i+k} \Leftrightarrow \{\underbrace{0,0,\dots,0}_{k\text{个}\ 0}, g_0, g_1, g_2, \dots\}$$

- **求导：**

  将序列第i项乘i，并左移一位：

$$G'(x)=\sum_{i=1}^{\infty}ig_i x^{i-1} \Leftrightarrow \{g_1, 2g_2, 3g_3, 4g_4, \dots\}$$

- **积分：**

  将序列第i项除以$i+1$，并右移一位：

$$\int G(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}g_i x^{i+1} \Leftrightarrow \{0, g_0, \frac{1}{2}g_1, \frac{1}{3}g_2, \frac{1}{4}g_3, \dots\}$$

- **乘法：**

$$\begin{aligned}F(x)G(x)&=(f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots)(g_0+g_1x+g_2x^2+\cdots)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i}f_k g_{i-k}\right)x^i\\&\Leftrightarrow \{h_i\}\end{aligned}$$

  其中序列$\{h_i\}$为序列$\{f_i\}$和$\{g_i\}$的卷积。

【常见序列的生成函数】

- **序列$\{1,1,1,1,\dots\}$：**

$$G(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

- **序列$\{1,2,3,4,\dots\}$：**

$$\begin{aligned}G(x)&=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\\&=(1+x+x^2+x^3)'\\&=\left(\frac{1}{1-x}\right)'\\&=\frac{1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

- **组合数序列$\left\{1,\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3},\dots\right\}$：**

$$\begin{aligned}G(x)&=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}x^i\\&=(1+x)^n\end{aligned}$$

- **Fibonacci 数列$\{0,1,1,2,3,5,8,\dots\}$：**

$$G(x)=x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+\cdots$$

右移一位，得

$$xG(x)=x^2+x^3+2x^4+3x^5+5x^6+8x^7+\cdots$$

两式相加，得

$$\begin{aligned}G(x)+xG(x)&=x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+\cdots\\&=\frac{G(x)}{x}-1\end{aligned}$$

所以有

$$(1-x-x^2)G(x)=x$$

$$G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

- **常见生成函数对应的序列：**

考虑这样一个生成函数：

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n\\&=\frac{1}{(1-x)^n}\end{aligned}$$

$$= (1-x)^{-n}$$

它所对应的序列是什么，即它的展开式中每一项的系数。

来看一个定理：

■ **扩展二项式定理：**

对于任意实数c，对任意满足$0 \le |x| < |y|$的x, y，有：

$$(x+y)^c = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{c}{i} x^i y^{c-i}$$

其中

$$\binom{c}{i} = \frac{c(c-1)(c-2)\cdots(c-i+1)}{i!}$$

当c为正整数n，对于$i > n$，$\binom{n}{i} = 0$，上式变为

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

即普通的二项式定理。

当c为负整数$-n$，有

$$\binom{-n}{i} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-i+1)}{i!}$$
$$= (-1)^i \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+i-1)}{i!}$$
$$= (-1)^i \binom{n+i-1}{i}$$

于是就有

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

$$\Leftrightarrow \{1, \binom{n}{1}, \binom{n+1}{2}, \binom{n+2}{3}, \ldots\}$$

由此得到一个重要的公式：

$$\frac{1}{(1-cx)^n} = 1 + c\binom{n}{1}x + c^2\binom{n+1}{2}x^2 + c^3\binom{n+2}{3}x^3 + \cdots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} c^i \binom{n+i-1}{i} x^i$$

根据这个生成函数可以轻松解决一个经典问题：求不定方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$的非负整数解的个数。答案等于它的生成函数$G(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$中$x^m$项的系数，即$\binom{n+m-1}{m}$。

【指数型生成函数】

在有些排列组合问题中，不仅要考虑选出了哪些元素，还要考虑选出的元素是怎样排列的。上述一般的生成函数适用于组合问题，而下面的指数型生成函数适用于排列问题。

- **定义：**

对于一个无穷项的序列$\{g_0,g_1,g_2,\ldots\}$，它的指数型生成函数为：

$$G_e(x)=g_0+g_1\frac{x}{1!}+g_2\frac{x^2}{2!}+g_3\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}g_i\frac{x^i}{i!}$$

例如，序列$\{1,1,1,1,\ldots\}$的指数型生成函数为

$$G_e(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

根据 Taylor 展开式，$G_e(x)=e^x$。

- **基本操作：**

类似地，指数型生成函数的左移(右移)可以通过求导(积分)来做，这里不作展开，只讨论两个指数型生成函数的乘积：

$$\begin{aligned}F_e(x)G_e(x)&=\left(f_0+f_1\frac{x}{1!}+f_2\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(g_0+g_1\frac{x}{1!}+g_2\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i}\frac{f_k}{k!}\frac{g_{i-k}}{(i-k)!}i!\right)\frac{x^i}{i!}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}f_kg_{i-k}\right)\frac{x^i}{i!}\end{aligned}$$

相当于在做卷积时，乘上了一个系数$\binom{i}{k}$，所以指数型生成函数适用于排列问题。

【应用】

- **求递推数列的通项公式：**
  - **例 1：**

求递推数列$\{f_n\}$的通项公式，其中$f_0 = 1, f_1 = -2$，$f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2}$。

设$F(x)$为数列$\{f_n\}$的生成函数，有：

$$F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots$$
$$-5xF(x) = -5f_0x - 5f_1x^2 - 5f_2x^3 - 5f_3x^4 - \cdots$$
$$6x^2F(x) = 6f_0x^2 + 6f_1x^3 + 6f_2x^4 + 6f_3x^5 + \cdots$$

相加得

$$(1-5x+6x^2)F(x) = f_0 + (f_1 - 5f_0)x + (f_2 - 5f_1 + 6f_0)x^2 + (f_3 - 5f_2 + 6f_1)x^3 + \cdots + (f_n - 5f_{n-1} + 6f_{n-2})x^n + \cdots$$

由已知条件得

$$(1-5x+6x^2)F(x) = f_0 + (f_1 - 5f_0)x = 1 - 7x$$
$$F(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2}$$

由于$1-5x+6x^2 = (1-2x)(1-3x)$，所以一定有

$$\frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{c_1}{1-2x} + \frac{c_2}{1-3x}$$

解得$c_1 = 5, c_2 = -4$，

$$F(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

而

$$\frac{5}{1-2x} = 5(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots + 2^nx^n + \cdots)$$
$$\frac{4}{1-3x} = 4(1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots + 3^nx^n + \cdots)$$
$$F(x) = 5(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots) - 4(1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots)$$
$$= 1 + (-2)x + (-16)x^2 + \cdots + (5 \times 2^n - 4 \times 3^n)x^n + \cdots$$

所以数列$\{f_n\}$的通项公式为$f_n = 5 \times 2^n - 4 \times 3^n$。

- **生成函数形式的 Pólya 定理：**

Pólya 计数法是解决在置换群作用下本质不同的染色方案的好方法。但是它只能求出总方案，无法针对某一种特殊的染色状态求方案。用生成函数形式的 Pólya 定理可以就能很好地解决。

- **例 2：**

有一个长度为4的环形序列，在每个位置涂上黑色或白色，对于某一种黑白状态(如 3 黑 1 白等)，求本质不同的方案数。

由于只考虑黑色和白色的个数，所以，例如方案 wbbw 就可以用两个变量的单项式b^2w^2表示。

如果不考虑循环同构，则所有方案可以表示成$(b+w)^4=b^4+4b^3w+6b^2w^2+4bw^3+w^4$，即全黑、全白有 1 种，3 白 1 黑、3 黑 1 白有 4 种，2 黑 2 白有 6 种。

如果只求本质不同的方案数，则只要用 Pólya 定理

$$\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} m^{c(f)}$$

即可。

现在把两者结合，即把 Pólya 定理中的$m^{c(f)}$替换成

$$(b_1+b_2+\cdots+b_m)^{c_1(f)}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2)^{c_2(f)}\cdots(b_1^n+b_2^n+\cdots+b_m^n)^{c_n(f)}$$

其中$c_i(f)$表示置换f的长度为i的循环节个数，b_i为m个颜色变量。于是生成函数形式的 Pólya 定理就可以表示成

$$P(b_1,b_2,\dots b_m)=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}\prod_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} b_j^i\right)^{c_i(f)}$$

对于本题，共有4个置换，分别为$(1)(2)(3)(4)$, $(2\ 3\ 4\ 1)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, $(4\ 1\ 2\ 3)$，两种颜色变量为b,w，用生成函数形式的 Pólya 定理，得

$$P(b,w)=\frac{1}{4}\left((b+w)^4+(b^4+w^4)+(b^2+w^2)^2+(b^4+w^4)\right)$$
$$=b^4+b^3w+2b^2w^2+bw^3+w^4$$

即全黑、全白有 1 种，3 白 1 黑、3 黑 1 白有 1 种，2 黑 2 白有 2 种。

- **其他例题：**
  - **例 3：**

有4种 BG，颜色分别为红、黄、蓝、绿，每种 BG 个数无限。现要求选出n只 BG，要求红色 BG 只能有偶数只，黄色 BG 个数要为5的倍数，蓝色 BG 最多选出4只，绿色 BG 要么不选，要么只选1只。求方案数。

$n\le 10^{1\,000\,000}$

常规算法似乎很难处理，考虑用生成函数来做。对于每种颜色的 BG，可选个数的集合分别为$\{0,2,4,6\dots\}$, $\{0,5,10,15,\dots\}$, $\{0,1,2,3,4\}$, $\{0,1\}$写成生成函数的形式，即

$$1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots=\frac{1}{1-x^5}$$

$$1+x+x^2+x^3+x^4=\frac{1-x^5}{1-x}$$

$$1+x$$

相乘后得到原问题的生成函数

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x)\\&=\frac{1}{(1-x)^2}\\&=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\end{aligned}$$

所以原问题的答案即为$n+1$。

■ **例 4：**

求满足下列条件的十进制n位数的个数：

1. 每位数字都是奇数；
2. 其中数字 1 和数字 3 只出现偶数次。

答案模$1\,000\,000\,007$。

$n \le 10^{1\,000\,000}$

常规算法似乎很难处理，考虑用生成函数来做。由于是一个十进制数，所以要考虑选出的数之间的排列情况，要用指数型生成函数来做。可用数字只有$1,3,5,7,9$这 5 种，每种的个数集合也已知了，原问题的指数型生成函数为

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2e^{3x}$$

$$=\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)^2e^x$$

$$=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{\infty}5^i\frac{x^i}{i!}+2\sum_{i=0}^{\infty}3^i\frac{x^i}{i!}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(5^i+2\times 3^i+1\right)\frac{x^i}{i!}$$

所以原问题的答案即为$\frac{1}{4}(5^n+2\times 3^n+1)$。

【作业】

1. 认真理解上述性质和例题；
2. 用生成函数推导 Fibonacci 数列的通项公式；
3. 求如下递推数列$\{f_n\}$的通项公式：

$$f_n=\begin{cases}1 & n=0\\ \sum_{i=0}^{n-1}f_i f_{n-i-1} & n>0\end{cases}$$

4. http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3142
5. http://www.spoj.com/problems/TSUM/
6. 参考资料 1 第 11 页 Chocolate；
7. 参考资料 1 第 17 页 Polygon；

如果想得到更多关于生成函数的知识，请阅读参考资料中的某些部分。

【参考资料】

1. 国家集训队 2009 论文《母函数的性质及应用》
2. 冬令营 2008 周源讲稿
3. 《组合数学》
4. 《具体数学》
5. 《算法艺术与信息学竞赛》