

有限单元法程序设计报告

516021910356 吴启元

Version 1. 空间桁架结构计算程序

程序功能

分析空间或平面桁架结构，计算节点位移、约束反力、单元内力与应力。

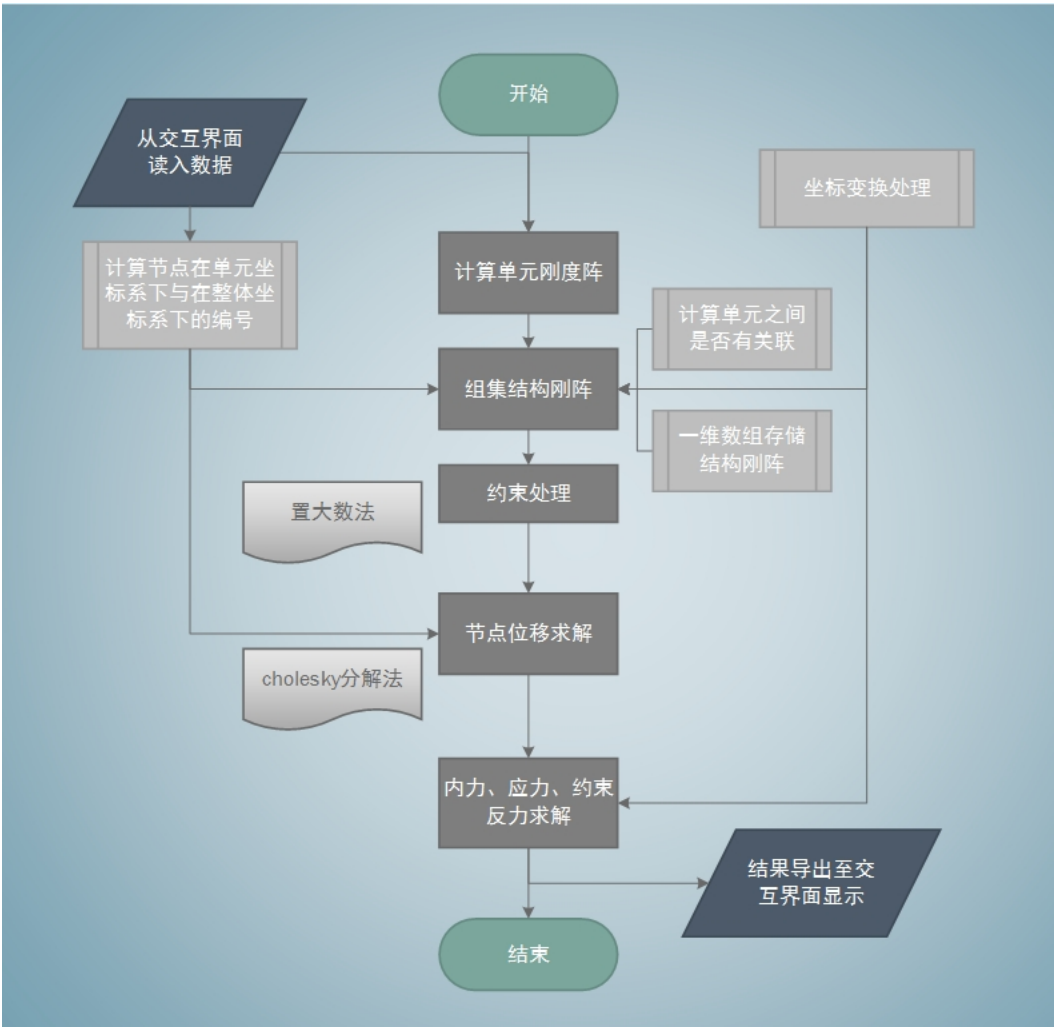
程序原理

使用杆单元为基本单元，假设杆单元单向受力。其单元刚度阵可表为

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

经过坐标变换，单元刚度阵组集得到结构刚度阵。在组集结构刚阵时，搜寻每个单元与其相关的编号最小单元，以便在一维存储时略去行头的零元素，大大减小存储容量的需求。

约束处理使用的方法是置大数法，对已知的位移对应的 K 阵主对角元赋 10^{25} 值。



求解节点位移的方法是Cholesky分解法。求出节点位移后，按式 $\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}$ 求出每个单元的节点力与内力，最后将每个节点在不同单元中算出的节点力叠加，结合外加载荷数据，可以求得约束反力。

变量说明

N_node_unit	单元节点数	no_constraint	约束位移号
N_DOF_node	单个节点自由度	LD	一维存储的指针
N_node	节点数	EA	弹性模量与面积
N_unit	单元数	P ,P1,PP	外载荷、节点力、约束力
N_constraint	约束自由度数	K_1D	一维存储的整体刚阵
NM	单元类别数	TK	单元刚阵
N	总自由度数	T	坐标变换阵
CAP_AK	一维存储AK的总容量	KU_structaxis	变换后的单元刚度阵
no_node_unit	单元节点的全局序号	IS	单元位移的全局编号

源程序文件

C#版本：杆单元最终版.txt

其中void cal()为计算函数，其余部分是交互界面的设计。

程序运行环境：Windows7 以上系统， .NET Framework 4.6.1

直接打开 “空间桁架计算程序.exe ” 运行即可。

附： .NET Framework4.5.2安装包（可兼容4.6.1）

“NDP452-KB2901907-x86-x64-AllOS-ENU.exe”（下载自官网）

算例

课本^[1]第五章5-1图所示8节点14单元桁架结构。交互界面的默认输入值即为此算例的输入，具体内容可以参见文件“输入数据.txt”。

结果

第1节点第1约束力	-5.12E-13	第1节点第1位移	0.000345222
第1节点第2约束力	0	第1节点第2位移	1.00E-22
第1节点第3约束力	3.98E-13	第1节点第3位移	7.79E-05
第2节点第1约束力	-4.55E-13	第2节点第1位移	0.000191147
第2节点第2约束力	1.14E-13	第2节点第2位移	4.85E-05
第2节点第3约束力	-1.02E-12	第2节点第3位移	6.82E-05
第3节点第1约束力	1000	第3节点第1位移	0.000207105
第3节点第2约束力	2.27E-13	第3节点第2位移	-4.85E-05
第3节点第3约束力	0	第3节点第3位移	-6.13E-05
第4节点第1约束力	1000	第4节点第1位移	0.000362497
第4节点第2约束力	0	第4节点第2位移	-1.00E-22
第4节点第3约束力	-3.98E-13	第4节点第3位移	-7.89E-05
第5节点第1约束力	-1027.144654	第5节点第1位移	1.03E-22
第5节点第2约束力	-1000	第5节点第2位移	1.00E-22
第5节点第3约束力	750	第5节点第3位移	-7.50E-23
第6节点第1约束力	0	第6节点第1位移	0
第6节点第2约束力	-1000	第6节点第2位移	1.00E-22
第6节点第3约束力	0	第6节点第3位移	0
第7节点第1约束力	0	第7节点第1位移	0
第7节点第2约束力	1000	第7节点第2位移	-1.00E-22
第7节点第3约束力	0	第7节点第3位移	0
第8节点第1约束力	-972.8553458	第8节点第1位移	9.73E-23
第8节点第2约束力	1000	第8节点第2位移	-1.00E-22
第8节点第3约束力	-750	第8节点第3位移	7.50E-23

Version 2. 平面三角形单元计算程序

程序功能

分析平面结构，计算节点位移、约束反力、应力。

程序原理

使用三角形线性单元为基本单元，每个单元三个角点为节点。其单元刚度阵可如下计算

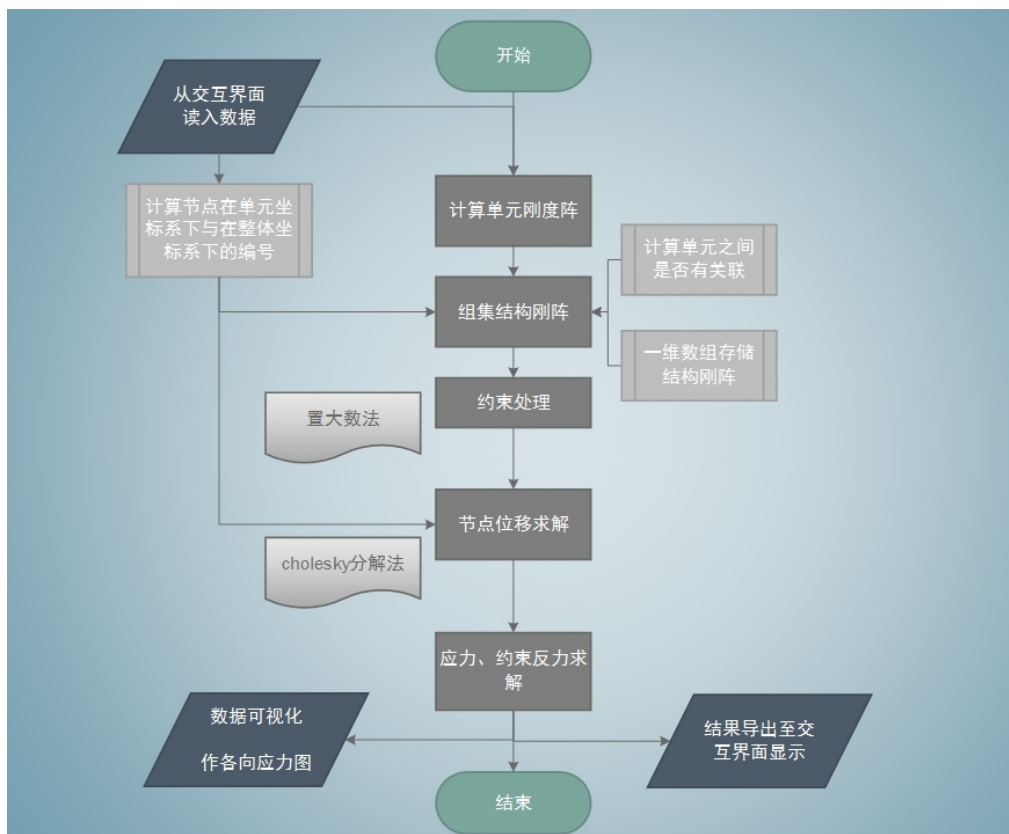
$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \cdot t \cdot A$$

其中：t为单元厚度

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3], \quad \mathbf{B}_i = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_i = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

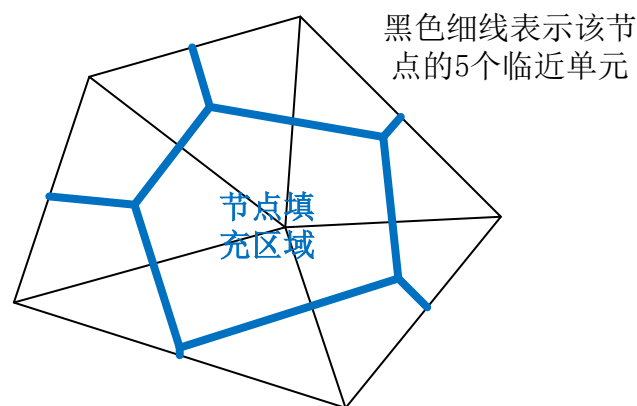


程序的原理与空间桁架结构计算程序基本一致，只不过无需坐标变换的步骤以及计算内力。仍然，在组集结构刚阵时，搜寻每个单元与其相关的编号最小单元，以便在一维存储时略去行头的零元素；约束处理使用置大数法，对已知的位移对应的 K 阵主对角元赋 10^{25} 值；求解节点位移用 Cholesky 分解法。

求出位移后，用 $\sigma = DBd$ 式求单元的正应力、切应力。按式 $F = K \cdot d$ 求出每个单元的节点力与内力，将每个节点在不同单元中算出的节点力叠加，结合外加载荷数据，可以求得约束反力。

在结果显示的环节，需要设计算法作应力图，有 2 中不同的方法。其一是按单元作图，这种方法实现较为简单。基本思路如下：1) 按单元循环，依照每个单元三个节点的坐标绘制三角形轮廓；2) 将所有单元的应力作归一化处理，不同的应力大小对应不同 RGB 颜色参数；3) 对每个单元进行相应的颜色填充。

第二种方法是按节点作图，这种方法得到的图形对应的应力关系较为准确。1) 计算每个单元的外心（垂直平分线交点），并将外心与三条边的中点连结；2) 绘制边界的轮廓线；3) 以算数平均相邻单元应力的方式计算每个节点的应力；4) 按照归一化应力对节点进行相应颜色填充。



本程序采用的第一种方法，较为方便。第二种方法经过尝试，发现运算过于复杂。

变量说明

N_node_unit	单元节点数	LD	一维存储的指针
N_DOF_node	单个节点自由度	E,u,t	弹性模量、泊松比、厚度
N_node	节点数	P ,P1,PP	外载荷、节点力、约束力
N_unit	单元数	K_1D	一维存储的整体刚阵
N_constraint	约束自由度数	TK	单元刚阵
NM	单元类别数	IS	单元位移的全局编号

N	总自由度数	plot	绘图参数
CAP_AK	一维存储AK的总容量	SIGNODE	节点应力
no_node_unit	单元节点的全局序号	SIGUNIT	单元应力
no_constraint	约束位移号		

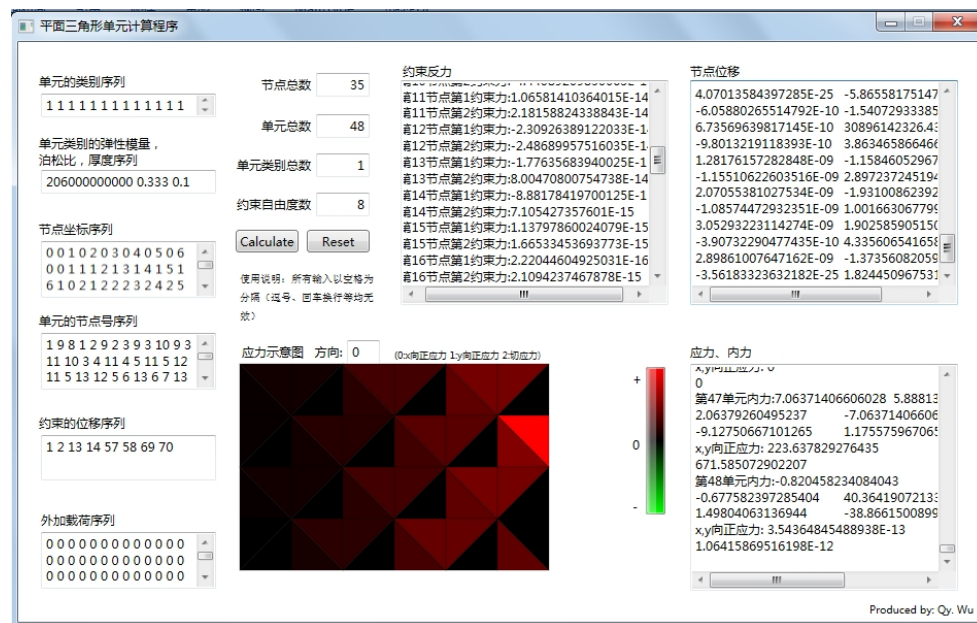
源程序文件

C#版本：三角形单元最终版.txt

其中void cal()为计算函数，其余部分是交互界面的设计。

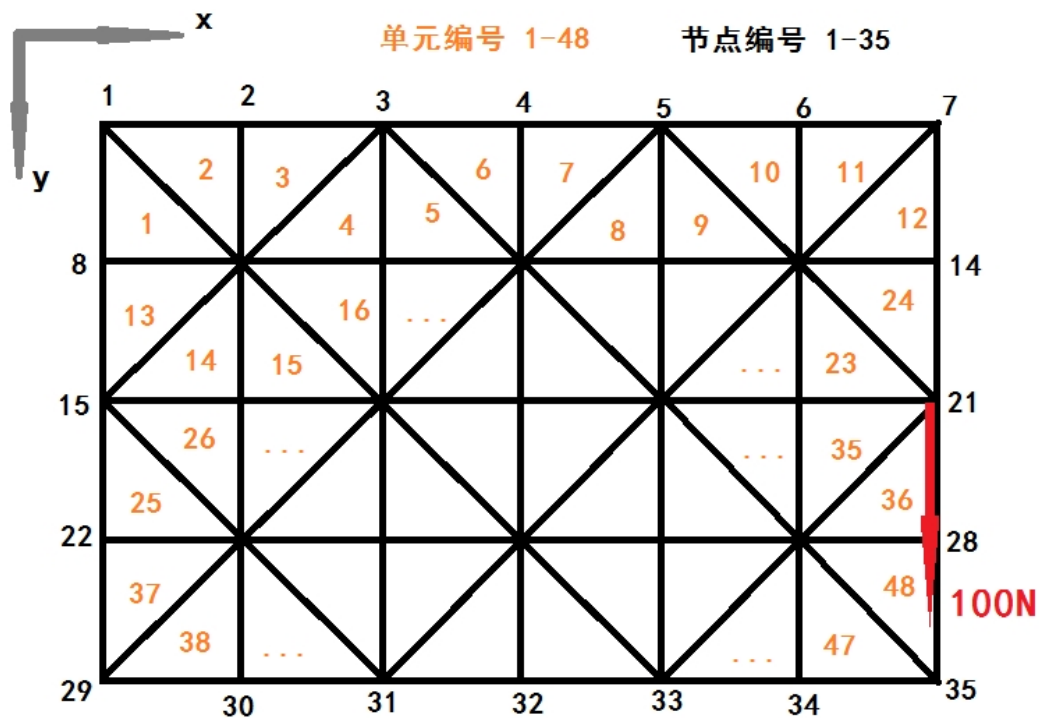
程序运行环境：Windows7 以上系统， .NET Framework 4.6.1

安装.NET Framework后，直接打开“平面三角形单元计算程序.exe”即可运行。



算例

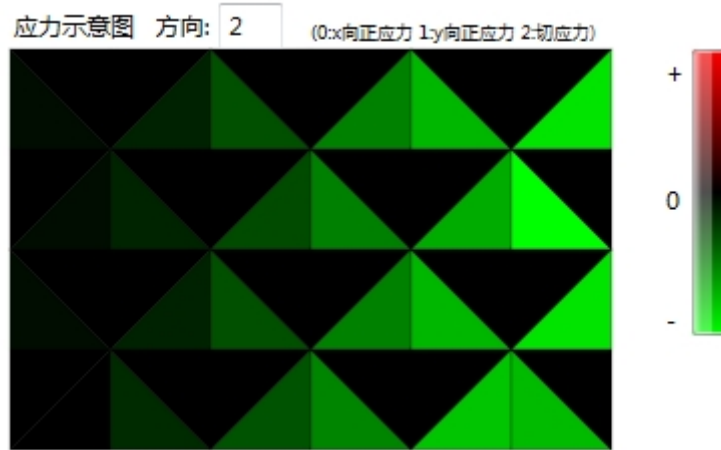
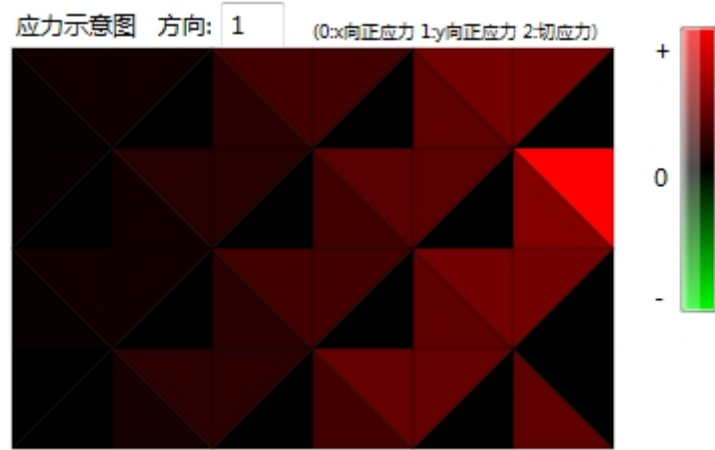
平面薄板，厚度为0.1m，弹性模量为 2.06×10^{11} ，长6m，宽4m，划分为48个单元，35个节点，如图所示。第21节点y方向有100N集中载荷作用。约束为1,7,29,35四个角点铰支。



结果

结果示意图如下（应注意计算机坐标系的方向，右向是x轴正向，下方是y轴正向）。可以看到结果与常识相符，24号单元有最大的y向拉应力，并且在计算域内，x越小，各向应力越小。由于单元较少，并且外载荷是以集中力的方式加入，有限元的结果显得比较粗糙。如果加密网格，可能会使结果更接近实际。





第1节点第1约束力	-8.648574296
第1节点第2约束力	-4.070135844
第7节点第1约束力	-3.561833236
第7节点第2约束力	-45.92986416
第29节点第1约束力	8.648574296
第29节点第2约束力	-4.070135844
第35节点第1约束力	3.561833236
第35节点第2约束力	-45.92986416

序号	位移	序号	位移
1	8.65E-25	36	1.99E-09
2	4.07E-25	37	-1.55E-25
3	6.06E-10	38	2.67E-09
4	6.74E-10	39	-4.91E-25
5	9.80E-10	40	3.96E-09
6	1.28E-09	41	-7.24E-25
7	1.16E-09	42	7.78E-09
8	2.07E-09	43	-2.60E-10
9	1.09E-09	44	2.07E-10
10	3.05E-09	45	-3.12E-10
11	3.91E-10	46	5.21E-10
12	2.90E-09	47	-4.78E-10
13	3.56E-25	48	1.24E-09
14	4.59E-24	49	-6.36E-10
15	2.60E-10	50	2.02E-09
16	2.07E-10	51	-9.22E-10
17	3.12E-10	52	2.84E-09
18	5.21E-10	53	-1.46E-09
19	4.78E-10	54	3.54E-09
20	1.24E-09	55	-1.25E-10
21	6.36E-10	56	3.80E-09
22	2.02E-09	57	-8.65E-25
23	9.22E-10	58	4.07E-25
24	2.84E-09	59	-6.06E-10
25	1.46E-09	60	6.74E-10
26	3.54E-09	61	-9.80E-10
27	1.25E-10	62	1.28E-09
28	3.80E-09	63	-1.16E-09
29	1.89E-25	64	2.07E-09
30	2.05E-10	65	-1.09E-09
31	1.03E-25	66	3.05E-09
32	5.62E-10	67	-3.91E-10
33	-2.42E-26	68	2.90E-09
34	1.17E-09	69	-3.56E-25
35	-5.17E-26	70	4.59E-24

参考书目

1. 《计算固体力学 (Computational Solid Mechanics)》 刘正兴 孙雁 王国庆 陶昉敏
2. 《数值分析》 李庆扬 王能超 易大义
3. CSDN C#论坛