第 1 章　第一章

第 2 章　第二章

第3章　树

3.1　树的有关定义

3.1.1　基本定义

定义 3.1.1. 树的基本定义

树 : 一个不含任何回路的连通图, 用 T 表示

树枝 : T 中的边，称为 T 的树枝

树叶 :T 中度为一的结点

定义 3.1.2. 设 e 是 G 的一条边，若 $G' = G - e$ 比 G 的连通支数增加，则称 e 是 G 的一条割边。

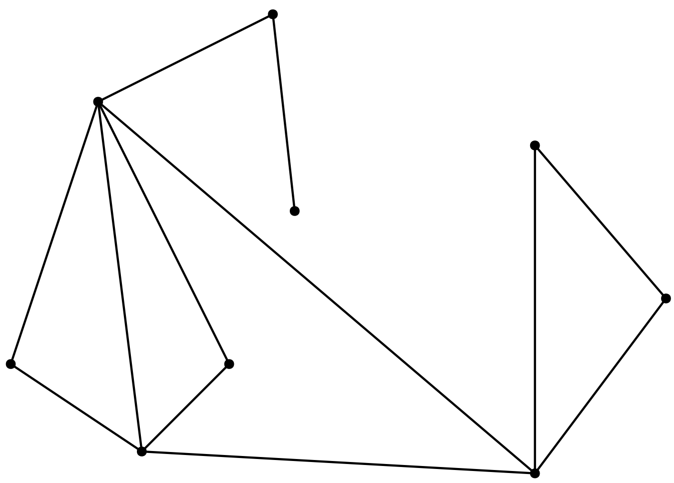

图 3.1

定理 3.1.1. $e = (u, v)$ 是割边，当且仅当 e 不属于 G 的任何回路。
证明:

- 充分性 (反证法)：若 $e=(u,v)$ 属于 G 的某个回路，则 $G'=G-e$ 中仍存在 u 到 v 的道路，故结点 u 和 v 属于同一连通支，e 不是割边。
- 必要性 (反证法)：反之，若 e 不是割边，则 G' 和 G 的连通支数一样，因此 u 和 v 仍然处在同一个连通支，因此在图 G' 中存在道路 $P(u,v)$

  $$P(u,v)+e$$

  就是图 G 的一个回路.

定理 3.1.2. $e=(u,v)$ 是割边，当且仅当 e 不属于 G 的任何回路。

小结论:

- 树的每条边都不属于任何回路
- 因此树的每条边都是割边
- 树是边数最少的连通图

3.1.2 树的等价性质

定理 3.1.3. *设 T 是结点数为 $n\geq 2$ 的树, 则下列性质等价:*

1. *T 连通且无回路*
2. *T 连通且每条边都是割边*
3. *T 连通且有 n-1 条边*
4. *T 有 n-1 条边且无回路*
5. *T 的任意两结点间有唯一道路*
6. *T 无回路，但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路*

依次证明上述定理的正确性：

- *(1)T* 连通且无回路 $\Rightarrow$*(2)T* 连通且每条边都是割边
  证明：
  由定理 3.1.2，$e=(u,v)$ 是割边 $\Leftrightarrow$ e 不属于 G 的任何回路.

- *(2)T* 连通且每条边都是割边 $\Rightarrow$ *(3)T* 连通且有 *n-1* 条边

  证明*:*

  采用数学归纳法*:* 对结点数 *n* 进行归纳。

  设 *m(T)* 为树 *T* 的边数，*n(T)* 为树 *T* 的结点数。

  n=2 时*,* 结论显然成立*;*

  设 $n \le k$ 时*,*$m(T) = n(T) - 1$ 成立。

  当 *n=k+1* 时*,* 由于每条边都是割边*,* 因此图 $G' = G - e$ 有两个连通支 T_1 和 T_2。

  根据假设*,*

  $$m(T_1) = n(T_1)-1, \quad m(T_2) = n(T_2)-1 \Rightarrow m(T) = m(T_1) = m(T_2)+1 = n(T)-1$$

- *(3)T* 连通且有 *n-1* 条边 $\Rightarrow$*(4)T* 有 *n-1* 条边且无回路

  证明*:*

  反证法*:* 假定 *T* 有回路。

  设 *C* 为其中一条含有 k 个结点的初级回路，故回路内有 k 条边。考察 *C* 以外的 $n-k$ 个结点*,* 为保持 *T* 的连通性*,* 至少需要 *C* 以外的 *n-k* 条边。所以 *T* 的边数至少为 $k + (n-k) = n$ 条与 *T* 有 $n-1$ 条边矛盾，故假设不成立，即 *T* 无回路。

- *(4) T* 有 $n-1$ 条边且无回路 $\Rightarrow$ *(5)T* 的任意两结点间有唯一道路

  证明：

  首先证明任意两结点间道路的存在性 *(*反证法*) :* 设 u, v 是 *T* 的任意两结点*,* 假设不存在道路 $P(u,v)$ 则 u, v 属于两个连通支 T_1, T_2。由于 $m = n-1$*,* 则至少有一个连通支的边数不少于结点数。不妨设为 $T_1, m(T_1) \ge n(T_1)$ 设 T_1 无回路，由性质 *(1)*$\Rightarrow$ 性质 *(2)* $\Rightarrow$ 性质 *(3)*，$m(T_1) = n(T_1) - 1 < n(T_1)$，矛盾。因此此时该连通支 T_1 必存在回路*,* 与题目前提矛盾*!* 因此*,* $P(u,v)$ 存在。

  其次证明任意两结点间道路的唯一性*:*

  如图3.2*,* 若存在两条不同的道路 $P(u,v), P'(u,v)$，则 $P(u,v) \bigoplus P'(u,v)$ 必存在回路。与题目假设矛盾。因此 $P(u,v)$ 唯一。

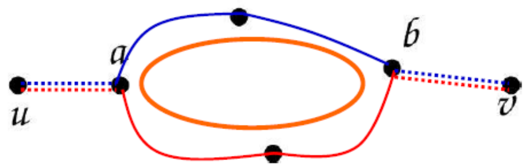

图 3.2

- *(5)T* 的任意两结点间有唯一道路 $\Rightarrow$ *(6)T* 无回路, 但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

  证明：

  首先证明 T 无回路：

  若 T 有回路，则回路上任意两点之间至少有两条不同的道路，与前提矛盾。

  故 T 无回路。

  其次证明在任意两结点间加上一条边 e 后恰有一个回路：

  设原来两结点之间的道路为 P，则 $P\bigcup e$ 即为一个回路。

  故在任意两结点间加上一条边 e 后恰有一个回路

- *(6)T* 无回路, 但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路 $\Rightarrow$ *(1)T* 连通且无回路

  证明： T 连通：因任意两结点间加上一条边后恰有一个回路，故原图中任意两点间必然存在一条道路。

  T 无回路：已知条件

定理 3.1.4. *树 T 中一定存在树叶结点*

证明：

T 为连通图，故不存在度为零的结点。

假设 T 中不存在树叶结点，则意味着不存在度为 *1* 的结点，则所有结点度均不小于 *2*。

$$m=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d(v) \quad\Rightarrow\quad m\geq\frac{1}{2}\cdot 2n=n>n-1$$

容易看出：矛盾*!*

定义 3.1.3. 如果 T 是图 G 的支撑子图，而且又是一棵树，则称 T 是 G 的一棵支撑树，或称生成树，又简称为 G 的树。

3.1.3 余树的概念

定义 3.1.4. G 中删掉 T 的各边后子图称为 T 的余树, 记为 $\bar{T}$

3.2 基本关联矩阵及其性质

本节研究的范围是有向连通图。

定义 3.2.1. 有向连通图 $G = (V, E)$ 的关联矩阵 B 中划去任意节点 v_k 所对应的行，得到一个 $(n1) \times m$ 的矩阵 B_k, B_k 称为 G 的一个基本关联矩阵。

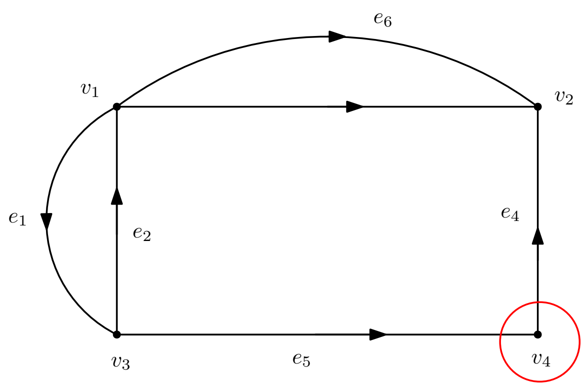

图 3.3

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.1}$$

下面我们来研究基本关联矩阵的性质。

定理 3.2.1. 有向图 $G = (V, E)$ 关联矩阵 B 的秩 $ran(B) < n$。

证明:

关联矩阵特点：每一列都只有一个 1 和 -1

n 行全部相加
即 n 个行向量线性相关，因此

$$ranB < n$$

证毕！

定理 3.2.2. 设 B_0 是有向图 G 关联矩阵 B 的任意一 k 阶子方阵，则 $det(B_0)$ 为 $0, 1$ 或 -1
证明*:*
若 B_0 某列全零，则 $det(B_0)0$
若 B_0 每列都有两个非零元，则 $det(B_0)0$
若 B_0 存在某列只有一个非零元，则按该列展开可知 $det(B_0) \pm det(B_1)$
依次类推，可证！

定理 3.2.3. 设 B_0 是有向图 G 关联矩阵 B 的任意一 k 阶子方阵，则 $det(B_0)$ 为 $0, 1$ 或 -1
证明*:*
若 B_0 某列全零，则 $det(B_0)0$
若 B_0 每列都有两个非零元，则 $det(B_0)0$
若 B_0 存在某列只有一个非零元，则按该列展开可知 $det(B_0) \pm det(B_1)$
依次类推，可证！

定理 3.2.4. 设 B 是有向连通图 G 的关联矩阵，则

$$ranB = n - 1$$

证明：
设 B 中最少的线性相关行数为 l
则 $l \leq n$，其对应图中结点 $v(i_1), v(i_2), \ldots, v(i_l)$

$$k_1 \cdot b(i_1) + k_2 \cdot b(i_2) + \cdots + k_l \cdot b(i_l) = O_m \quad (k_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, l)$$

- 所有 $b(i_j)$ 中，第 $t(t = 1, 2, \cdots m)$ 个分量可能
- 所有 $b(i_j)$ 中，第 $t(t = 1, 2, \cdots m)$ 个分量可能
- 所有 $b(i_j)$ 中，第 $t(t = 1, 2, \cdots m)$ 个分量不可能

否则，该分量最终不可能为 0。

这样，我们可以对矩阵 B 进行行、列交换，使前 l 行为线性相关的各行
再针对这 l 行中，有两个非零元的列换到前 r 列
则此 l 行中，其余 $(m-r)$ 列将均为零元
此时矩阵 B 将变为

$$B' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & m-r \end{array} \\ \begin{array}{c} l \\ n-l \end{array} & \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \end{array} \qquad ranB = ranB'$$

若 $l < n$，则从 B' 可清楚看出，图 G 为两个连通支，这与图 G 为连通图矛盾！
因此，一定有 $l = n$