

第 1 章 第一章

第 2 章 第二章

第3章 树

3.1 树的有关定义

3.1.1 基本定义

定义 3.1.1. 树的基本定义

树：一个不含任何回路的连通图, 用 T 表示

树枝： T 中的边, 称为 T 的树枝

树叶： T 中度为一的结点

定义 3.1.2. 设 e 是 G 的一条边, 若 $G' = G - e$ 比 G 的连通支数增加, 则称 e 是 G 的一条割边。

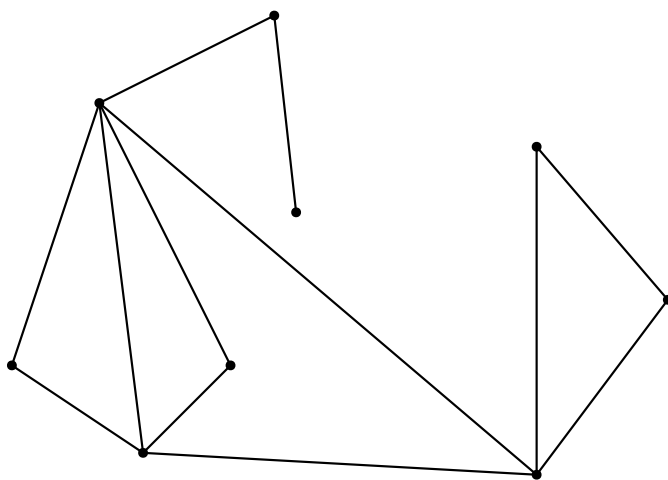


图 3.1

定理 3.1.1. $e = (u, v)$ 是割边, 当且仅当 e 不属于 G 的任何回路。

证明:

- 充分性 (反证法): 若 $e = (u, v)$ 属于 G 的某个回路, 则 $G' = G - e$ 中仍存在 u 到 v 的道路, 故结点 u 和 v 属于同一连通支, e 不是割边。
- 必要性 (反证法): 反之, 若 e 不是割边, 则 G' 和 G 的连通支数一样, 因此 u 和 v 仍然处在同一个连通支, 因此在图 G' 中存在道路 $P(u, v)$

$$P(u, v) + e$$

就是图 G 的一个回路.

定理 3.1.2. $e = (u, v)$ 是割边, 当且仅当 e 不属于 G 的任何回路。

小结论:

- 树的每条边都不属于任何回路
- 因此树的每条边都是割边
- 树是边数最少的连通图

3.1.2 树的等价性质

定理 3.1.3. 设 T 是结点数为 $n \geq 2$ 的树, 则下列性质等价:

1. T 连通且无回路
2. T 连通且每条边都是割边
3. T 连通且有 $n-1$ 条边
4. T 有 $n-1$ 条边且无回路
5. T 的任意两结点间有唯一道路
6. T 无回路, 但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

依次证明上述定理的正确性:

- $(1)T$ 连通且无回路 $\Rightarrow (2)T$ 连通且每条边都是割边

证明:

由定理 3.1.2, $e = (u, v)$ 是割边 $\Leftrightarrow e$ 不属于 G 的任何回路.

- (2) T 连通且每条边都是割边 \Rightarrow (3) T 连通且有 $n-1$ 条边

证明:

采用数学归纳法: 对结点数 n 进行归纳。

设 $m(T)$ 为树 T 的边数, $n(T)$ 为树 T 的结点数。

$n=2$ 时, 结论显然成立;

设 $n \leq k$ 时, $m(T) = n(T) - 1$ 成立。

当 $n=k+1$ 时, 由于每条边都是割边, 因此图 $G' = G - e$ 有两个连通支 T_1 和 T_2 。

根据假设,

$$m(T_1) = n(T_1) - 1, \quad m(T_2) = n(T_2) - 1 \Rightarrow m(T) = m(T_1) + m(T_2) + 1 = n(T) - 1$$

- (3) T 连通且有 $n-1$ 条边 \Rightarrow (4) T 有 $n-1$ 条边且无回路

证明:

反证法: 假定 T 有回路。

设 C 为其中一条含有 k 个结点的初级回路, 故回路内有 k 条边。考察 C 以外的 $n - k$ 个结点, 为保持 T 的连通性, 至少需要 C 以外的 $n - k$ 条边。所以 T 的边数至少为 $k + (n - k) = n$ 条与 T 有 $n - 1$ 条边矛盾, 故假设不成立, 即 T 无回路。

- (4) T 有 $n - 1$ 条边且无回路 \Rightarrow (5) T 的任意两结点间有唯一道路

证明:

首先证明任意两结点间道路的存在性 (反证法): 设 u, v 是 T 的任意两结点, 假设不存在道路 $P(u, v)$ 则 u, v 属于两个连通支 T_1, T_2 。由于 $m = n - 1$, 则至少有一个连通支的边数不少于结点数。不妨设为 $T_1, m(T_1) \geq n(T_1)$ 设 T_1 无回路, 由性质 (1) \Rightarrow 性质 (2) \Rightarrow 性质 (3), $m(T_1) = n(T_1) - 1 < n(T_1)$, 矛盾。因此此时该连通支 T_1 必存在回路, 与题目前提矛盾! 因此, $P(u, v)$ 存在。

其次证明任意两结点间道路的唯一性:

如图 3.2, 若存在两条不同的道路 $P(u, v), P'(u, v)$, 则 $P(u, v) \oplus P'(u, v)$ 必存在回路。与题目假设矛盾。因此 $P(u, v)$ 唯一。

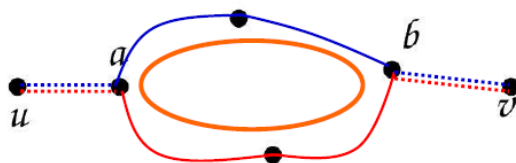


图 3.2

- (5) T 的任意两结点间有唯一道路 \Rightarrow (6) T 无回路, 但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

证明:

首先证明 T 无回路:

若 T 有回路, 则回路上任意两点之间至少有两条不同的道路, 与前提矛盾。

故 T 无回路。

其次证明在任意两结点间加上一条边 e 后恰有一个回路:

设原来两结点之间的道路为 P , 则 $P \cup e$ 即为一个回路。

故在任意两结点间加上一条边 e 后恰有一个回路

- (6) T 无回路, 但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路 \Rightarrow (1) T 连通且无回路

证明: T 连通: 因任意两结点间加上一条边后恰有一个回路, 故原图中任意两点间必然存在一条道路。

T 无回路: 已知条件

定理 3.1.4. 树 T 中一定存在树叶结点

证明:

T 为连通图, 故不存在度为零的结点。

假设 T 中不存在树叶结点, 则意味着不存在度为 1 的结点, 则所有结点度均不小于 2。

$$m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) \Rightarrow m \geq \frac{1}{2} \cdot 2n = n > n - 1$$

容易看出: 矛盾!

定义 3.1.3. 如果 T 是图 G 的支撑子图, 而且又是一棵树, 则称 T 是 G 的一棵支撑树, 或称生成树, 又简称为 G 的树。

3.1.3 余树的概念

定义 3.1.4. G 中删掉 T 的各边后子图称为 T 的余树, 记为 \bar{T}

3.2 基本关联矩阵及其性质

本节研究的范围是有向连通图。

定义 3.2.1. 有向连通图 $G = (V, E)$ 的关联矩阵 B 中划去任意节点 v_k 所对应的行, 得到一个 $(n-1) \times m$ 的矩阵 B_k , B_k 称为 G 的一个基本关联矩阵。

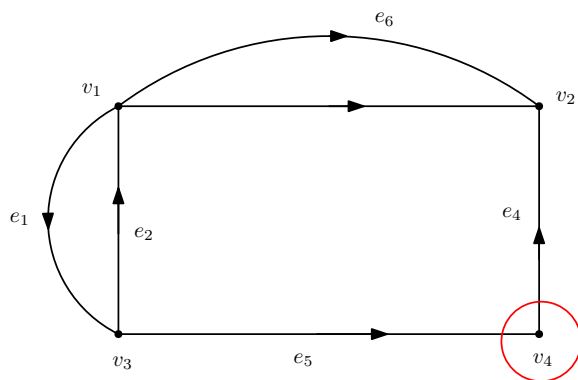


图 3.3

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (3.1)$$

下面我们来研究基本关联矩阵的性质。

定理 3.2.1. 有向图 $G = (V, E)$ 关联矩阵 B 的秩 $\text{ran}(B) < n$ 。

证明:

关联矩阵特点: 每一列都只有一个 1 和 -1

n 行全部相加

即 n 个行向量线性相关, 因此

$$\text{ran} B < n$$

证毕!

定理 3.2.2. 设 B_0 是有向图 G 关联矩阵 B 的任意一 k 阶子方阵, 则 $\det(B_0)$ 为 $0, 1$ 或 -1

证明:

若 B_0 某列全零, 则 $\det(B_0) = 0$

若 B_0 每列都有两个非零元, 则 $\det(B_0) = 0$

若 B_0 存在某列只有一个非零元, 则按该列展开可知 $\det(B_0) = \pm \det(B_1)$
依次类推, 可证!

定理 3.2.3. 设 B_0 是有向图 G 关联矩阵 B 的任意一 k 阶子方阵, 则 $\det(B_0)$ 为 $0, 1$ 或 -1

证明:

若 B_0 某列全零, 则 $\det(B_0) = 0$

若 B_0 每列都有两个非零元, 则 $\det(B_0) = 0$

若 B_0 存在某列只有一个非零元, 则按该列展开可知 $\det(B_0) = \pm \det(B_1)$
依次类推, 可证!

定理 3.2.4. 设 B 是有向连通图 G 的关联矩阵, 则

$$\text{ran} B = n - 1$$

证明:

设 B 中最少的线性相关行数为 l

则 $l \leq n$, 其对应图中结点 $v(i_1), v(i_2), \dots, v(i_l)$

$$k_1 \cdot b(i_1) + k_2 \cdot b(i_2) + \dots + k_l \cdot b(i_l) = O_m \quad (k_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l)$$

- 所有 $b(i_j)$ 中, 第 $t(t = 1, 2, \dots, m)$ 个分量可能
- 所有 $b(i_j)$ 中, 第 $t(t = 1, 2, \dots, m)$ 个分量可能
- 所有 $b(i_j)$ 中, 第 $t(t = 1, 2, \dots, m)$ 个分量不可能

否则, 该分量最终不可能为 0。

这样, 我们可以对矩阵 B 进行行、列交换, 使前 l 行为线性相关的各行
再针对这 l 行中, 有两个非零元的列换到前 r 列
则此 l 行中, 其余 $(m-r)$ 列将均为零元
此时矩阵 B 将变为

$$B' = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & m-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} l \\ n-l \end{matrix} & \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{ran} B = \text{ran} B'$$

若 $l < n$, 则从 B' 可清楚看出, 图 G 为两个连通支, 这与图 G 为连通图矛盾!

因此, 一定有 $l = n$

定理 3.2.5. 设 B 是有向连通图 G 的关联矩阵, 则

$$\text{ran} B = n - 1$$

定理 3.2.6. 连通图 G 基本关联矩阵 B_k 的秩

$$\text{ran} B_k = n - 1$$

定理 3.2.7. 设 B_k 为有向连通图 G 的基本关联矩阵, C 为 G 中的一个回路。
则 C 中各边所对应 B_k 的各列线性相关。

证明:

只需针对 C 为初级回路进行讨论即可

设 C 中含 l 个结点与 l 条边 ($l < n$), 这 l 条边对应关联矩阵 B 中的 l 列, 它们构成子阵 $B(G_C)$

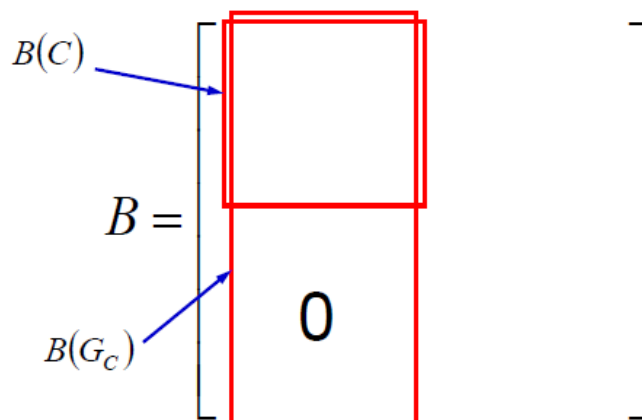


图 3.4

C 的关联矩阵为 l 阶方阵 $B(C)$ ，据定理 3.2.5

$$\text{ran} B(C) = l - 1$$

说明 $B(C)$ 的 l 列线性相关

观察 $B(C)$ 与 $B(G_C)$ 的关系：

- $B(C)$ 为 $B(G_C)$ 的子阵，列数相同，行数不同
- C 中各边只经过 $B(C)$ 中的各结点，因此 $B(G_C)$ 中其他结点对应各行均为零

因此， $B(G_C)$ 的各列也线性相关！

因此，在 B_k 中， C 对应各列也线性相关！

定理 3.2.8. 设 B_k 为有向连通图 G 的基本关联矩阵， C 为 G 中的一个回路。则 C 中各边所对应 B_k 的各列线性相关。

推论 3.2.1. 设 H 为连通图 G 的子图，如果 H 含有回路，则 H 的诸边对应的 G 的基本关联矩阵各列线性相关。

$$B = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}$$

思考：

有向连通图的基本关联矩阵，哪些列线性相关？

有向连通图的基本关联矩阵，哪些列线性不相关？

定理 3.2.9. 令 B_k 是有向连通图 G 的基本关联矩阵，那么 B_k 的任意 $n-1$ 阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成 G 的一棵支撑树。

证明：

充分性：

设 T 为 G 的支撑树

子图 T 的基本关联矩阵 $B_k(T)$ 是 $n-1$ 阶子方阵，它的秩为 $n-1$ 这意味着其行列式非零。

该子方阵恰好就是 B_k 的某个 $n-1$ 阶子阵

即 B_k 所对应的该 $n-1$ 阶行列式非零。

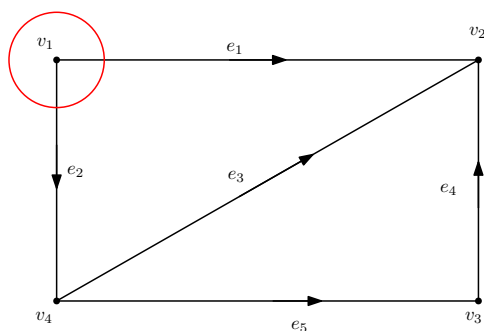
小结：

- (1) 有向连通图关联矩阵的秩
- (2) 有向连通图基本关联矩阵各列的线性相关性
- (3) 有向连通图基本关联矩阵同支撑树的关系

3.3 支撑树的计数

给定连通图 G ，其支撑树可以有多少个？

以某结点为根的支撑树可以有多少个？



定理 3.3.1. (Binet-Cauchy 定理) 已知两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{n \times m}$, 满足 $m \leq n$, 则

$$\det(AB) = \sum_i (A_i B_i)$$

其中 A_i , B_i 都是 m 阶行列式

A_i 是从 A 中取不同的 m 列所成的行列式;

B_i 是从 B 中取相应的 m 行构成的行列式;

结果为全部组合求和

例 3.3.1. 已知 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 求 $\det(AB)$

解:

$$AB = \begin{bmatrix} 28 & 17 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

因此 $\det(AB) = 28 \times 16 - 17 \times 2 = 414$

采用内比-柯西定理计算矩阵乘积的行列式通常比较复杂

其价值在于: 揭示了乘积矩阵的行列式与各矩阵的子阵行列式之间的关系
连通图中不同支撑树的计数恰好利用了这种关系, 从而可以用代数的方法
很容易解决支撑树的计数问题

3.3.1 支撑树的计数—有向连通图

定理 3.3.2. 设 B_k 的是有向连通图 $G = (V, E)$ 的某一基本关联矩阵, 则 G 的不同树的数目是

$$\det(B_k B_k^T)$$

证明: 设 $B_k = (b_{ij})_{(n-1) \times m}$

由内比-柯西定理

$$\det(B_k B_k^T) = \sum_i |B_i| |B_i^T|$$

其中 $|B_i|$ 是 B_k 的某 $n-1$ 阶子阵的行列式

$|B_i^T|$ 是对应的 B_i^T 的 $n-1$ 阶阵的行列式

有 $|B_i| = |B_i^T|$

因此可以得到

$$\det(B_k B_k^T) = \sum_i |B_i| |B_i^T| = \sum_i |B_i|^2$$

由定理 3.2.9, 如果, 则其所对应的边构成 G 的一棵树

再由定理 3.2.3, $|B_i|$ 只能为 0, 1 或 -1

因此, $\det(B_k B_k^T)$ 恰恰是 G 中不同树的数目

例 3.3.2. 如图 3.5

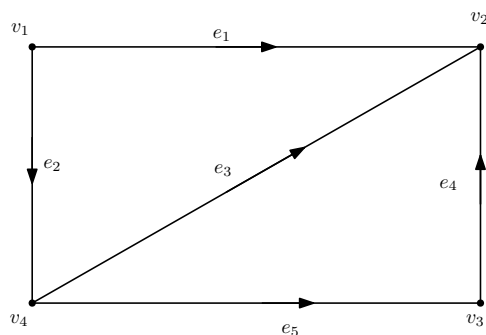


图 3.5

$$B = \begin{bmatrix} v_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ v_3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix} \Rightarrow B_4 = \begin{bmatrix} v_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ v_3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & & & & & & \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

$$\det(B_4 B_4^T) = 8$$

3.3.2 含特定、不含特定边的计算方法

1. 计算 G 中不含某特定边 e 的树的数目：将该边删除即可！
2. 计算 G 中必定含特定边 e 的树的数目：将该边收缩即可！

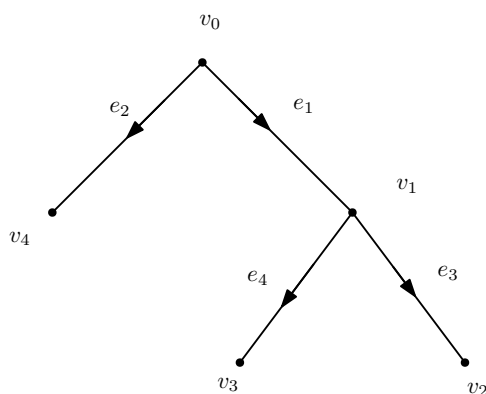
3.4 无向连通图支撑树的计数

无向连通图的关联矩阵不存在 -1 元素, 如何计算其支撑树的数目?

对无向连通图 G 的每边任给一个方向, 得到有向连通图 G' , 则 G' 的支撑树与 G 的支撑树一一对应!

3.5 有向连通图根树的计数

定义 3.5.1. 根树: T 为有向树, 若 T 中存在某结点 v_0 的负度为 0, 其余结点负度为 1, 则称 T 为以 v_0 为根的外向树, 或称根树, 用 \vec{T} 表示。例:

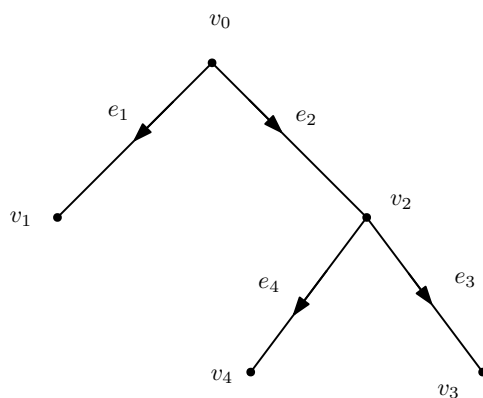


$$\Rightarrow B_0 = \begin{bmatrix} v_0 & & & & \\ v_1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ v_4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}$$

特点: 除 v_0 外, 每行只有一个 -1

3.5.1 根树基本关联矩阵的性质和特点

如果对根树的结点和边重新进行编号, 使每条边 $e = (v_i, v_j)$ 都满足 v_i 的编号小于 v_j 的编号, 同时 $e = (v_i, v_j)$ 的编号为 e_j



$$\Rightarrow B'_0 = \begin{bmatrix} v_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}$$

思考: 为什么按照规则编号后, 根树中根结点对应的基本关联矩阵一定是上三角矩阵?

特点：按照规则编号后, 根树中根结点对应的基本关联矩阵一定是上三角矩阵。

非根树基本关联矩阵可调整为上三角矩阵, 且对角线上将出现“1”元素。
令 \vec{B}_k 表示有向连通图 G 的基本关联矩阵 B_k 中全部 1 元素改为 0 后的矩阵。
相应地, G 的支撑树的基本关联矩阵, 可调整为上三角矩阵, 但原先的“1”变为了“0”。

如果该树为非根树 (行列式为零), 则对角线将出现“0”元素

如果该树为根树 (行列式绝对值为“1”), 则对角线全部为“-1”元素

3.5.2 根树的计算方法

回顾：定理 3.3.2

设 B_k 的是有向连通图 $G = (V, E)$ 的某一基本关联矩阵, 则 G 的不同树的数目是

$$\det(B_k B_k^T)$$

定理 3.5.1. 有向连通图 G 中以 v_k 为根的根树数目是

$$\det(\vec{B}_k B_k^T)$$

证明:

由比内-柯西定理

$$\det(\vec{B}_k B_k^T) = \sum_i |\vec{B}_i| |B_i^T|$$

若 $|B_i^T| \neq 0$, 说明这 $n-1$ 条边构成了 G 的一棵树

若 $\vec{B}_i \neq 0$, 说明该树是以 v_k 为根的根树。

二者的乘积非零说明存在一棵 v_k 为根的根树。由于遍历了所有 $n-1$ 条边的组合, 因此

$$\det(\vec{B}_k B_k^T) = \sum_i |\vec{B}_i| |B_i^T|$$

为以 v_k 为根的根树的数目

3.5.3 含特定边、不含特定边的根树计算方法

1. 如何计算以 v_0 为根结点不含某特定边 e 的根树的数目?

作 $G' = G - e$, 计算 G' 的以 v_0 为根结点的根树的数目即可

2. 如何计算以 v_0 为根结点必含某特定边 e 的根树的数目?

- 将该边收缩为一点
错误! 此方法未必得到根树!
- 先计算以 v_0 为根结点的根树数目, 再计算不含边 e 的根树数目, 求差值即可。
- 其他计算方法: 设 $e = (u, v)$, 将除 e 之外所有以 v 为终点的边都删掉得到 G' , 然后计算 G' 的以 v_0 为根结点的根树的数目即可

3.6 回路矩阵与割集矩阵

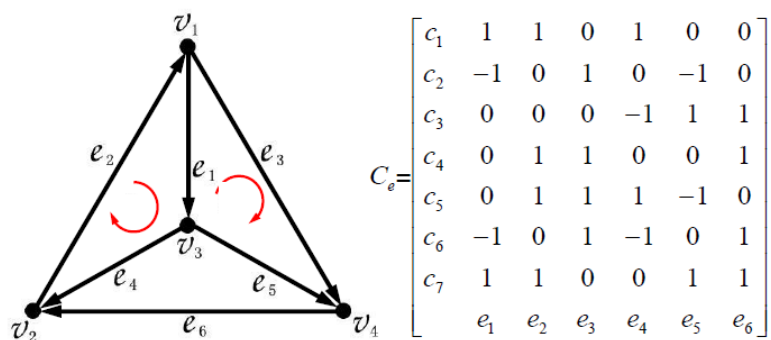
3.6.1 回路矩阵及其性质

设 T 是有向连通图 $G = (V, E)$ 的一棵支撑树, 对任意边 $e \in E(G) - E(T)$, $T + e$ 都可构成 G 的一个唯一回路 C 。给定回路 C 一个参考方向, 则 C 中的边如和方向一致, 称之为正向边, 否则称之为反向边。

定义 3.6.1. 有向连通图 G 的全部初级回路构成的矩阵, 称为 G 的完全回路矩阵, 记为 C_e :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & , e_j \in C_i \text{ 且与回路 } C_i \text{ 方向一致} \\ -1 & , e_i \in C_i \text{ 且与回路 } C_i \text{ 方向相反} \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

例:



思考：图 G 中会有多少个初级回路？

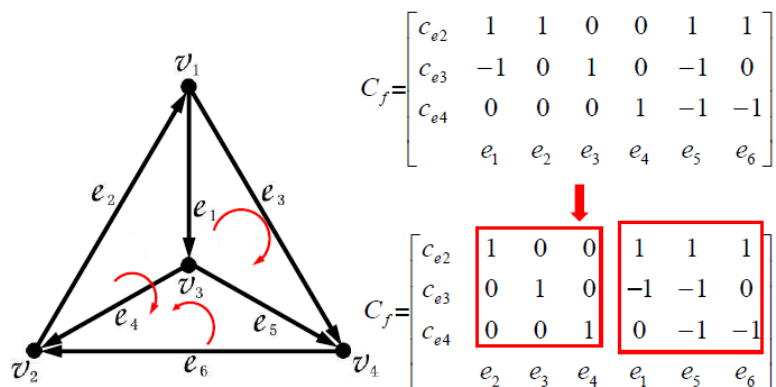
给定 G 的一个支撑树 T ，理论上最多可以生成 $2^{m-n+1} - 1$ 个初级回路。

- T 有 $n - 1$ 条边，则余树有 $m - n + 1$ 条边
- T 中加入余树中任意几条边都有可能构成初级回路
- $m - n + 1$ 条边每条边都有两种选择，但不能一条边都没有

定义 3.6.2. 当有向图 $G = (V, E)$ 的支撑树 T 确定后，每条余树边 e 所对应的回路称为基本回路，该回路的方向与 e 的方向一致。由全部基本回路构成的矩阵称为 G 的**基本回路矩阵**，记为 C_f

例：

例：



$$C_f = (I, C_{f12})$$

显然，基本回路矩阵的秩为 $m - n + 1$

定理 3.6.1. 有向连通图 $G = (V, E)$ 的关联矩阵 B 和完全回路矩阵 C_e 的边次序一致时，恒有：

$$BC_e^T = 0$$

证明：设 $D = BC_e^T$ ，则

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot c_{jk}$$

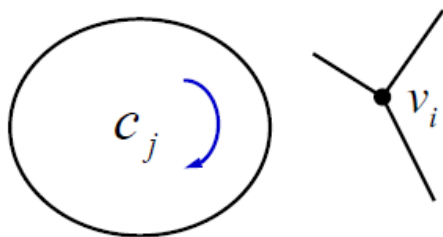
其中 b_{ik} 是结点 v_i 和边 e_k 的关联情况

c_{jk} 是回路 c_j 和边 e_k 的关联情况

回路 C_j 与结点 v_i 只有两种情况：

第一种： C_j 不经过结点 v_i ：

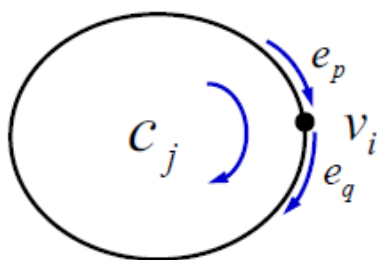
- 与 v_i 关联的任一边都不是 C_j 中的边
- 此时 b_{ik} 不为零时， c_{jk} 一定为零
- c_{jk} 不为零时， b_{ik} 一定为零



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

第二种: C_j 经过结点 v_i

- 则 C_j 必定经过与 v_i 关联的两条边 e_p 和 e_q
- 若 e_p 和 e_q 同向, 则 C_{jp} 和 C_{jq} 同正负, b_{ip} 和 b_{iq} 一正一负
- 若 e_p 和 e_q 反向, 则 c_{jp} 和 c_{jq} 一正一负, b_{ip} 和 b_{iq} 同正负



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

$$BC_e^T = 0$$

推论 3.6.1. 有向连通图的基本关联矩阵 B_k , 基本回路矩阵 C_f , 在边次序一致的情况下, 有

$$B_k C_f^T = 0$$

定理 3.6.2. 若有向连通图 $G = (V, E)$ 基本关联矩阵 B_k 是和基本回路矩阵 C_f 的边次序一致, 并设 $C_f = (I \ C_{f_{12}})$, $B_k = (B_{11} \ B_{12})$,

$$C_{f_{12}} = -B_{11}^T \cdot (B_{12}^{-1})^T$$

证明:

由推论知 $B_k C_f^T = 0$, 写成块矩阵形式

$$(B_{11}, B_{12}) \begin{bmatrix} I \\ C_{f_{12}}^T \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{12} \cdot C_{f_{12}}^T = -B_{11}$$