第 1 章　第一章

第 2 章　第二章

第3章　树

3.1　树的有关定义

3.1.1　基本定义

定义 3.1.1. 树的基本定义

树 : 一个不含任何回路的连通图, 用 T 表示

树枝 : T 中的边，称为 T 的树枝

树叶 :T 中度为一的结点

定义 3.1.2. 设 e 是 G 的一条边，若 $G' = G - e$ 比 G 的连通支数增加，则称 e 是 G 的一条割边。

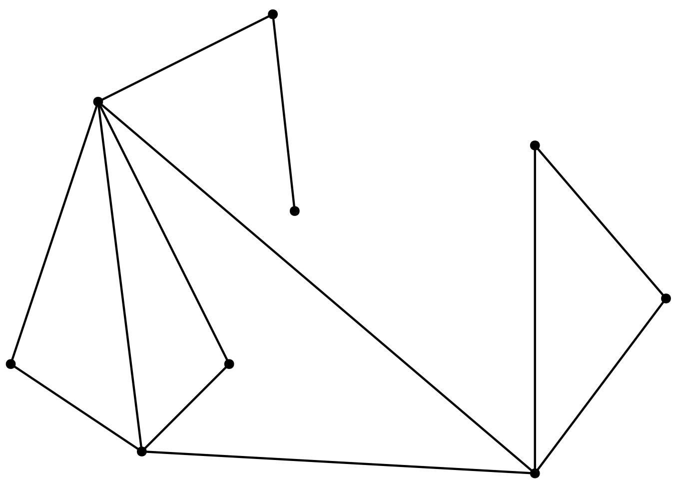


图 3.1

定理 3.1.1. $e = (u, v)$ 是割边，当且仅当 e 不属于 G 的任何回路。

证明:

- 充分性 (反证法)：若 $e=(u,v)$ 属于 G 的某个回路，则 $G'=G-e$ 中仍存在 u 到 v 的道路，故结点 u 和 v 属于同一连通支，e 不是割边。
- 必要性 (反证法)：反之，若 e 不是割边，则 G' 和 G 的连通支数一样，因此 u 和 v 仍然处在同一个连通支，因此在图 G' 中存在道路 $P(u,v)$

$$P(u,v)+e$$

就是图 G 的一个回路.

定理 3.1.2. $e=(u,v)$ 是割边，当且仅当 e 不属于 G 的任何回路。

小结论:

- 树的每条边都不属于任何回路
- 因此树的每条边都是割边
- 树是边数最少的连通图

3.1.2　树的等价性质

定理 3.1.3. 设 T 是结点数为 $n\geq 2$ 的树, 则下列性质等价:

1. T 连通且无回路
2. T 连通且每条边都是割边
3. T 连通且有 *n-1* 条边
4. T 有 *n-1* 条边且无回路
5. T 的任意两结点间有唯一道路
6. T 无回路，但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

依次证明上述定理的正确性：

- *(1)*T 连通且无回路 $\Rightarrow$*(2)*T 连通且每条边都是割边
  证明：
  由定理 3.1.2， $e=(u,v)$ 是割边 $\Leftrightarrow$ e 不属于 G 的任何回路.

- *(2)T* 连通且每条边都是割边 ⇒ *(3)T* 连通且有 *n-1* 条边

  证明:

  采用数学归纳法: 对结点数 *n* 进行归纳。

  设 *m(T)* 为树 *T* 的边数，*n(T)* 为树 *T* 的结点数。

  n=2 时, 结论显然成立;

  设 $n \le k$ 时,$m(T) = n(T) - 1$ 成立。

  当 $n = k + 1$ 时, 由于每条边都是割边, 因此图 $G' = G - e$ 有两个连通支 T_1 和 T_2。

  根据假设,

  $$m(T_1) = n(T_1) - 1, \quad m(T_2) = n(T_2) - 1 \Rightarrow$$

  $$m(T) = m(T_1) = m(T_2) + 1 = n(T) - 1$$

- *(3)T* 连通且有 $n - 1$ 条边 ⇒*(4)T* 有 $n - 1$ 条边且无回路

  证明:

  反证法: 假定 *T* 有回路。

  设 *C* 为其中一条含有 *k* 个结点的初级回路，故回路内有 *k* 条边。考察 *C* 以外的 $n - k$ 个结点, 为保持 *T* 的连通性, 至少需要 *C* 以外的 *n-k* 条边。所以 *T* 的边数至少为 $k + (n - k) = n$ 条与 *T* 有 $n - 1$ 条边矛盾，故假设不成立，即 *T* 无回路。

- *(4) T* 有 $n - 1$ 条边且无回路 ⇒ *(5)T* 的任意两结点间有唯一道路

  证明：

  首先证明任意两结点间道路的存在性 (反证法) : 设 u, v 是 T 的任意两结点, 假设不存在道路 $P(u, v)$ 则 u, v 属于两个连通支 T_1, T_2。由于 $m = n - 1$, 则至少有一个连通支的边数不少于结点数。不妨设为 $T_1, m(T_1) \ge n(T_1)$ 设 T_1 无回路，由性质 *(1)*⇒ 性质 *(2)* ⇒ 性质 *(3)*，$m(T_1) = n(T_1) - 1 < n(T_1)$，矛盾。因此此时该连通支 T_1 必存在回路, 与题目前提矛盾! 因此, $P(u, v)$ 存在。

  其次证明任意两结点间道路的唯一性:

  如图 3.2, 若存在两条不同的道路 $P(u, v), P'(u, v)$，则 $P(u, v) \bigoplus P'(u, v)$ 必存在回路。与题目假设矛盾。因此 $P(u, v)$ 唯一。

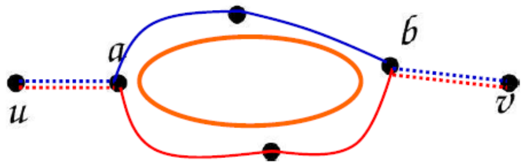


图 3.2

- *(5)T* 的任意两结点间有唯一道路 ⇒　*(6)T* 无回路, 但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

  证明：

  首先证明 T 无回路：

  若 T 有回路，则回路上任意两点之间至少有两条不同的道路，与前提矛盾。

  故 T 无回路。

  其次证明在任意两结点间加上一条边 e 后恰有一个回路：

  设原来两结点之间的道路为 P，则 $P \bigcup e$ 即为一个回路。

  故在任意两结点间加上一条边 e 后恰有一个回路

- *(6)T* 无回路, 但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路 ⇒　*(1)T* 连通且无回路

  证明： T 连通：因任意两结点间加上一条边后恰有一个回路，故原图中任意两点间必然存在一条道路。

  T 无回路：已知条件

定理 3.1.4. *树 T 中一定存在树叶结点*

证明：

T 为连通图，故不存在度为零的结点。

假设 T 中不存在树叶结点，则意味着不存在度为 *1* 的结点，则所有结点度均不小于 *2*。

$$m = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d(v) \quad \Rightarrow \quad m \geq \frac{1}{2} \cdot 2n = n > n - 1$$

容易看出：矛盾*!*

定义 3.1.3. 如果 T 是图 G 的支撑子图，而且又是一棵树，则称 T 是 G 的一棵支撑树，或称生成树，又简称为 G 的树。

3.1.3 余树的概念

定义 3.1.4. G 中删掉 T 的各边后子图称为 T 的余树, 记为 $\bar{T}$

3.2 基本关联矩阵及其性质

本节研究的范围是有向连通图。

定义 3.2.1. 有向连通图 $G = (V, E)$ 的关联矩阵 B 中划去任意节点 v_k 所对应的行，得到一个 $(n1) \times m$ 的矩阵 B_k, B_k 称为 G 的一个基本关联矩阵。

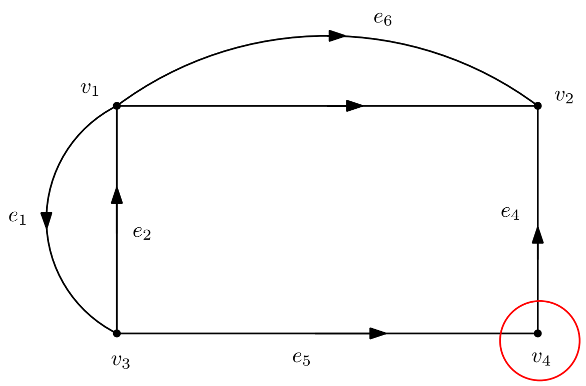


图 3.3

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.1}$$

下面我们来研究基本关联矩阵的性质。

定理 3.2.1. 有向图 $G = (V, E)$ 关联矩阵 B 的秩 $ran(B) < n$。

证明:

关联矩阵特点：每一列都只有一个 1 和 -1

n 行全部相加
即 n 个行向量线性相关，因此

$$ranB < n$$

证毕！

定理 3.2.2. 设 B_0 是有向图 G 关联矩阵 B 的任意一 k 阶子方阵，则 $det(B_0)$ 为 $0, 1$ 或 -1
证明:
若 B_0 某列全零，则 $det(B_0)0$
若 B_0 每列都有两个非零元，则 $det(B_0)0$
若 B_0 存在某列只有一个非零元，则按该列展开可知 $det(B_0) \pm det(B_1)$
依次类推，可证！

定理 3.2.3. 设 B_0 是有向图 G 关联矩阵 B 的任意一 k 阶子方阵，则 $det(B_0)$ 为 $0, 1$ 或 -1
证明:
若 B_0 某列全零，则 $det(B_0)0$
若 B_0 每列都有两个非零元，则 $det(B_0)0$
若 B_0 存在某列只有一个非零元，则按该列展开可知 $det(B_0) \pm det(B_1)$
依次类推，可证！

定理 3.2.4. 设 B 是有向连通图 G 的关联矩阵，则

$$ranB = n - 1$$

证明：
设 B 中最少的线性相关行数为 l
则 $l \leq n$，其对应图中结点 $v(i_1), v(i_2), \ldots, v(i_l)$

$$k_1 \cdot b(i_1) + k_2 \cdot b(i_2) + \cdots + k_l \cdot b(i_l) = O_m \quad (k_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, l)$$

- 所有 $b(i_j)$ 中，第 $t(t = 1, 2, \cdots m)$ 个分量可能
- 所有 $b(i_j)$ 中，第 $t(t = 1, 2, \cdots m)$ 个分量可能
- 所有 $b(i_j)$ 中，第 $t(t = 1, 2, \cdots m)$ 个分量不可能

否则，该分量最终不可能为 0。

这样，我们可以对矩阵 B 进行行、列交换，使前 l 行为线性相关的各行
再针对这 l 行中，有两个非零元的列换到前 r 列
则此 l 行中，其余 $(m-r)$ 列将均为零元
此时矩阵 B 将变为

$$B' = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & m-r \end{array} \\ \begin{array}{c} l \\ n-l \end{array} & \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \end{array} \qquad ranB = ranB'$$

若 $l < n$，则从 B' 可清楚看出，图 G 为两个连通支，这与图 G 为连通图矛盾！
因此，一定有 $l = n$

定理 3.2.5. 设 B 是有向连通图 G 的关联矩阵，则

$$ranB = n - 1$$

定理 3.2.6. 连通图 G 基本关联矩阵 B_k 的秩

$$ranB_k = n - 1$$

定理 3.2.7. 设 B_k 为有向连通图 G 的基本关联矩阵，C 为 G 中的一个回路。则 C 中各边所对应 B_k 的各列线性相关。

证明：
只需针对 C 为初级回路进行讨论即可
设 C 中含 l 个结点与 l 条边 $(l < n)$，这 l 条边对应关联矩阵 B 中的 l 列，它们构成子阵 $B(G_C)$

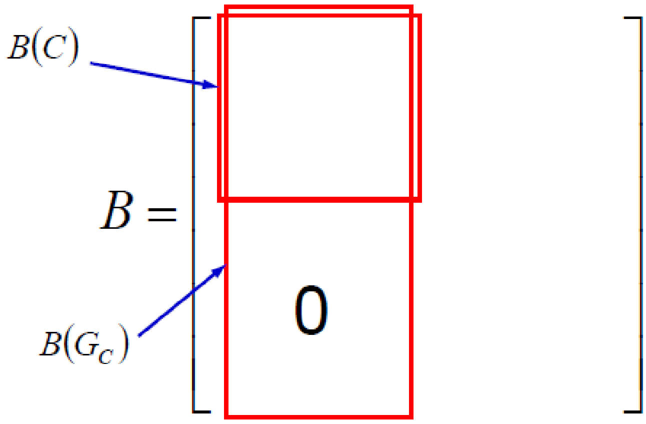


图 3.4

C 的关联矩阵为 l 阶方阵 $B(C)$，据定理 3.2.5

$$ranB(C) = l - 1$$

说明 $B(C)$ 的 l 列线性相关
观察 $B(C)$ 与 $B(G_C)$ 的关系：

- $B(C)$ 为 $B(G_C)$ 的子阵，列数相同，行数不同
- C 中各边只经过 $B(C)$ 中的各结点，因此 $B(G_C)$ 中其他结点对应各行均为零

因此，$B(G_C)$ 的各列也线性相关！
因此，在 B_k 中，C 对应各列也线性相关！

定理 3.2.8. 设 B_k 为有向连通图 G 的基本关联矩阵，C 为 G 中的一个回路。则 C 中各边所对应 B_k 的各列线性相关。

推论 3.2.1. 设 H 为连通图 G 的子图，如果 H 含有回路，则 H 的诸边对应的 G 的基本关联矩阵各列线性相关。

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{H} & \\ \boxed{0} & \end{bmatrix}$$

思考：

有向连通图的基本关联矩阵，哪些列线性相关？

有向连通图的基本关联矩阵，哪些列线性不相关？

定理 3.2.9. 令 B_k 是有向连通图 G 的基本关联矩阵，那么 B_k 的任意 $n-1$ 阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成 G 的一棵支撑树。

证明：

充分性:

设 T 为 G 的支撑树

子图 T 的基本关联矩阵 $B_k(T)$ 是 $n-1$ 阶子方阵, 它的秩为 $n-1$ 这意味着其行列式非零。

该子方阵恰好就是 B_k 的某个 $n-1$ 阶子阵

即 B_k 所对应的该 $n-1$ 阶行列式非零。

小结：

(1) **有向连通图关联矩阵的秩**

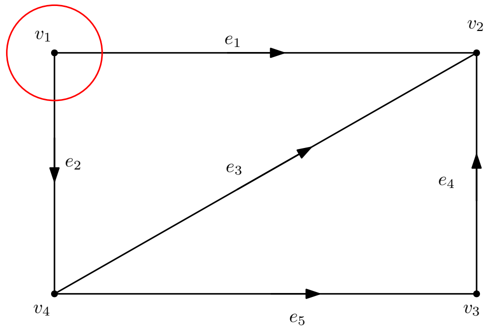
(2) **有向连通图基本关联矩阵各列的线性相关性**

(3) **有向连通图基本关联矩阵同支撑树的关系**

3.3 支撑树的计数

给定连通图 G，其支撑树可以有多少个？

以某结点为根的支撑树可以有多少个？



定理 3.3.1. *(Binet-Cauchy 定理)* 已知两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{n\times m}$，满足 $m\le n$，则

$$det(AB)=\sum_i (A_iB_i)$$

其中 A_i，B_i 都是 m 阶行列式
A_i 是从 A 中取不同的 m 列所成的行列式；
B_i 是从 B 中取相应的 m 行构成的行列式；
结果为全部组合求和

例 3.3.1. 已知 $A=\begin{bmatrix}4&3&2\\-2&4&3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5&1\\0&3\\4&2\end{bmatrix}$ 求 $det(AB)$

解：
$AB=\begin{bmatrix}28&17\\2&16\end{bmatrix}$
因此 $det(AB)=28\times 16-17\times 2=414$

采用内比一柯西定理计算矩阵乘积的行列式通常比较复杂
其价值在于：揭示了乘积矩阵的行列式与各矩阵的子阵行列式之间的关系
连通图中不同支撑树的计数恰好利用了这种关系，从而可以用代数的方法很容易解决支撑树的计数问题

3.3.1 支撑树的计数－有向连通图

定理 3.3.2. 设 B_k 的是有向连通图 $G=(V,E)$ 的某一基本关联矩阵，则 G 的不同树的数目是

$$det(B_kB_k^T)$$

证明：设 $B_k=(b_{ij})_{(n-1)\times m}$
由内比 -柯西定理

$$det(B_kB_k^T)=\sum_i |B_i||B_i^T|$$

其中 $|B_i|$ 是 B_k 的某 $n-1$ 阶子阵的行列式
$|B_i^T|$ 是对应的 B_i^T 的 $n-1$ 阶阵的行列式
有 $|B_i|=|B_i^T|$
因此可以得到

$$det(B_kB_k^T)=\sum_i |B_i||B_i^T|=\sum_i |B_i|^2$$

由定理 3.2.9，如果，则其所对应的边构成 G 的一棵树
再由定理 3.2.3，$|B_i|$ 只能为 $0,1$ 或 -1
因此，$det(B_kb_k^T)$ 恰恰是 G 中不同树的数目

例 3.3.2. 如图 3.5

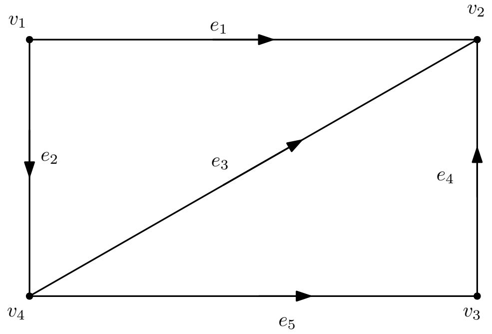


图 3.5

$$B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_4 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

$$det(B_4 B_4^T = 8)$$

3.3.2　含特定、不含特定边的计算方法

1. 计算 G 中不含某特定边 e 的树的数目：将该边删除即可！

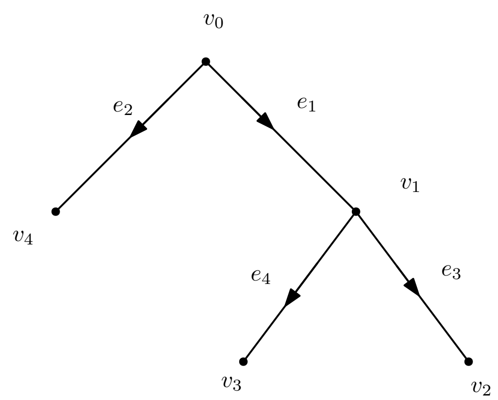
2. 计算 G 中必定含特定边 e 的树的数目：将该边收缩即可！

3.4　无向连通图支撑树的计数

无向连通图的关联矩阵不存在 -1 元素, 如何计算其支撑树的数目？
对无向连通图 G 的每边任给一个方向, 得到有向连通图 G', 则 G' 的支撑树与 G 的支撑树一一对应!

3.5　有向连通图根树的计数

定义 3.5.1. 根树：*T 为有向树, 若 T 中存在某结点 v0 的负度为 0, 其余结点负度为 1, 则称 T 为以 v_0 为根的外向树, 或称根树, 用 $\vec{T}$ 表示*。例：

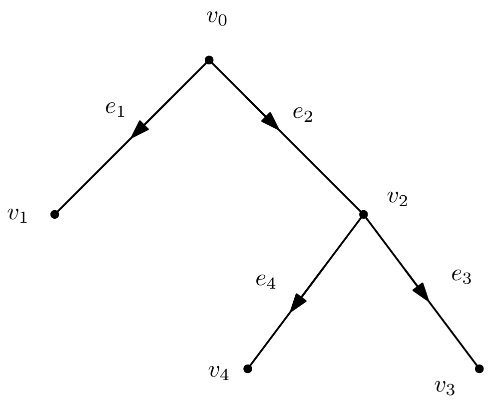


$$\Rightarrow \quad B_0 = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \end{array}$$

特点: 除 v_0 外，每行只有一个 -1

3.5.1 根树基本关联矩阵的性质和特点

如果对根树的结点和边重新进行编号，使每条边 $e=(v_i,v_j)$ 都满足 v_i 的编号小于 v_j 的编号，同时 $e=(v_i,v_j)$ 的编号为 e_j



$$\Rightarrow \quad B_0' = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \end{array}$$

思考：为什么按照规则编号后，根树中根结点对应的基本关联矩阵一定是上三角矩阵?

特点：按照规则编号后, 根树中根结点对应的基本关联矩阵一定是上三角矩阵。
非根树基本关联矩阵可调整为上三角矩阵, 且对角线上将出现“1”元素。
令 $\overrightarrow{B}_k$ 表示有向连通图 G 的基本关联矩阵 B_k 中全部 1 元素改为 0 后的矩阵。相应地,G 的支撑树的基本关联矩阵, 可调整为上三角矩阵, 但原先的“1”变为了“0”。

如果该树为非根树 (行列式为零), 则对角线将出现“0”元素

如果该树为根树 (行列式绝对值为“1”), 则对角线全部为“-1”元素

3.5.2　根树的计算方法

回顾：定理 3.3.2
设 B_k 的是有向连通图 $G = (V, E)$ 的某一基本关联矩阵，则 G 的不同树的数目是

$$det(B_k B_k^T)$$

定理 3.5.1. *有向连通图 G 中以 v_k 为根的根树数目是*

$$det(\overrightarrow{B}_k B_k^T)$$

证明：
由比内 -柯西定理

$$det(\overrightarrow{B}_k B_k^T) = \sum_i |\overrightarrow{B}_i||B_i^T|$$

若 $|B_i^T| \neq 0$, 说明这 $n-1$ 条边构成了 G 的一棵树
若 $\overrightarrow{B}_i \neq 0$, 说明该树是以 v_k 为根的根树。
二者的乘积非零说明存在一棵 *vk* 为根的根树。由于遍历了所有 $n-1$ 条边的组合, 因此

$$det(\overrightarrow{B}_k B_k^T) = \sum_i |\overrightarrow{B}_i||B_i^T|$$

为以 v_k 为根的根树的数目

3.5.3　含特定边、不含特定边的根树计算方法

1. 如何计算以 v0 为根结点不含某特定边 e 的根树的数目?

作 $G' = G - e$，计算 G' 的以 v_0 为根结点的根树的数目即可

2. 如何计算以 v_0 为根结点必含某特定边 e 的根树的数目?

- 将该边收缩为一点
  错误！此方法未必得到根树！

- 先计算以 v_0 为根结点的根树数目, 再计算不含边 e 的根树数目, 求差值即可。

- 其他计算方法: 设 $e = (u, v)$, 将除 e 之外所有以 v 为终点的边都删掉得到 G', 然后计算 G' 的以 v_0 为根结点的根树的数目即可

3.6 回路矩阵与割集矩阵

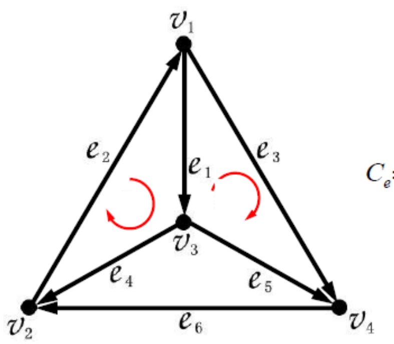
3.6.1 回路矩阵及其性质

设 T 是有向连通图 $G = (V, E)$ 的一棵支撑树，对任意边 $e \in E(G) - E(T)$，$T + e$ 都可构成 G 的一个唯一回路 C。给定回路 C 一个参考方向，则 C 中的边如和方向一致，称之为正向边，否则称之为反向边。

定义 3.6.1. 有向连通图 G 的全部初级回路构成的矩阵，称为 G 的完全回路矩阵，记为 C_e :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & , e_j \in C_i \text{且与回路} C_i \text{方向一致} \\ -1 & , e_i \in C_i \text{且与回路} C_i \text{方向相反} \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

例：



$$C_e=\begin{array}{c}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\\c_6\\c_7\\ \end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\-1&0&1&0&-1&0\\0&0&0&-1&1&1\\0&1&1&0&0&1\\0&1&1&1&-1&0\\-1&0&1&-1&0&1\\1&1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$
$$\qquad\quad\begin{array}{cccccc}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\end{array}$$

思考：图 G 中会有多少个初级回路？

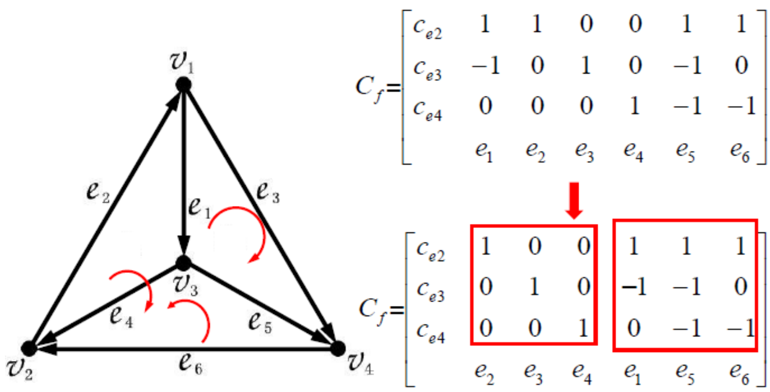
给定 G 的一个支撑树 T，理论上最多可以生成 $2^{m-n+1}-1$ 个初级回路。

- T 有 $n-1$ 条边，则余树有 $m-n+1$ 条边
- T 中加入余树中任意几条边都有可能构成初级回路
- $m-n+1$ 条边每条边都有两种选择，但不能一条边都没有

定义 3.6.2. 当有向图 $G=(V,E)$ 的支撑树 T 确定后，每条余树边 e 所对应的回路称为基本回路，该回路的方向与 e 的方向一致。由全部基本回路构成的矩阵称为 G 的基本回路矩阵，记为 $\mathbf{C_f}$

例：

例：



$C_f = (I, C_{f12})$

显然，基本回路矩阵的秩为 $m-n+1$

定理 3.6.1. 有向连通图 $G=(V,E)$ 的关联矩阵 B 和完全回路矩阵 C_e 的边次序一致时，恒有：

$$BC_e^T = 0$$

证明：设 $D = BC_e^T$, 则

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot c_{jk}$$

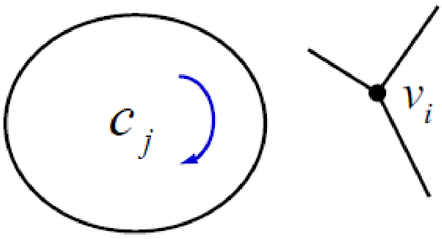
其中 b_{ik} 是结点 v_i 和边 e_k 的关联情况

c_{jk} 是回路 c_j 和边 e_k 的关联情况

回路 C_j 与结点 v_i 只有两种情况：

第一种：C_j 不经过结点 v_i:

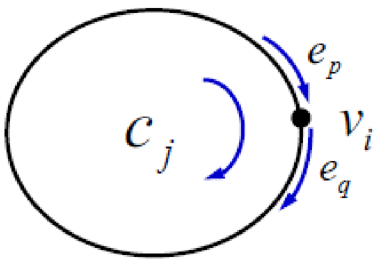
- 与 v_i 关联的任一边都不是 C_j 中的边
- 此时 b_{ik} 不为零时，c_{jk} 一定为零
- c_{jk} 不为零时，b_{ik} 一定为零



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

第二种：C_j 经过结点 v_i

- 则 C_j 必定经过与 v_i 关联的两条边 e_p 和 e_q
- 若 e_p 和 e_q 同向，则 C_{jp} 和 C_{jq} 同正负，b_{ip} 和 b_{iq} 一正一负
- 若 e_p 和 e_q 反向，则 c_{jp} 和 c_{jq} 一正一负，b_{ip} 和 b_{iq} 同正负



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

$$BC_e^T = 0$$

推论 3.6.1. 有向连通图的基本关联矩阵 B_k，基本回路矩阵 C_f，在边次序一致的情况下，有

$$B_k C_f^T = 0$$

定理 3.6.2. 若有向连通图 $G=(V,E)$ 基本关联矩阵 B_k 是和基本回路矩阵 C_f 的边次序一致，并设 $C_f=(I \quad C_{f_{12}})$ ，$B_k=(B_{11} \quad B_{12})$,

$$C_{f_{12}} = -B_{11}^T \cdot (B_{12}^{-1})^T$$

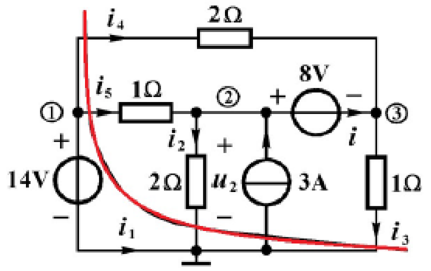
证明：

由推论知 $B_kC_f^T=0$, 写成块矩阵形式

$$(B_{11}, B_{12})\begin{bmatrix} I \\ C_{f_{12}}^T \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_{12}\cdot C_{f_{12}}^T = -B_{11}$$

定理 3.6.2 说明了基本关联矩阵和基本回路矩阵之间的关系

说明根据基本关联矩阵，可以通过计算得到基本回路矩阵如果 B_k 已知，而且确定了一棵树，则可以直接经过计算求出 G 的基本回路矩阵 C_f。



一个电路网络

例 3.6.1. 已知上图基本关联矩阵

$$B_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

其中 e_1,e_5,e_6 所对应的子阵行列式非零，求 C_f。

解：由 e_1,e_5,e_6 可以构成 G 的一棵树。对 B_4 进行行列式交换得到

$$B_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = (B_{11} \quad B_{12})$$

因此 $C_{f_{12}} = -B_{11}^T B_{12}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$B_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　$B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　$B_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

即

$$C_f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

定理 3.6.3. 有向连通图 $G = (V, E)$ 完全回路矩阵的秩为 $(m - n + 1)$

基本回路矩阵为完全回路矩阵的子阵（列数相等，行数不等）。

基本回路矩阵秩为 $m - n + 1$

则完全回路矩阵的秩不小于 $m - n + 1$

即：

$$ran(C_e) \geq m - n + 1$$

sylvester 定理：设 *A,B* 分别为 $n \times m$ 与 $m \times s$ 的矩阵，则 $ran(AB) \geq ran(A) + ran(B) - m$

$$B : n \times m \quad ran(B) = n - 1$$
$$C_e^T : m \times s \quad ran(C_e^T) = ?$$
$$BC_e^T = 0 \quad \Rightarrow \quad ran(BC_e^T) = 0$$

即:$ran(C_e^T) \leq m - n + 1$

故：$ran(C_e) = m = n + 1$

定义 3.6.3. 有向连通图 G 中 $(m - n + 1)$ 个互相独立的回路组成的矩阵，称为 G 的回路矩阵，记为 C。

回路矩阵 C 具有以下几个简单性质：

(1). 基本回路矩阵 C_f 是回路矩阵

(2).$BC^T = 0$，其中 B 与 C 的边次序一致

(3). $C = P \cdot C_f$，其中 P 为非奇异方阵，C 与 C_f 边次序一致

定理 3.6.4. 连通图 $G=(V,E)$ 的回路矩阵 C 的任一 $(m-n+1)$ 阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于 G 的某一棵余树

证明：

充分性：已知余树 $\bar{T} \quad \Rightarrow \quad$ 对应行列式非零

可构造出 G 的基本回路矩阵 $C_f=(I \quad C_{f_{12}})$。

对给定的回路矩阵 C 进行列交换，使其边序与 C_f 一致，这样可写为 $C=(C_{11} \quad C_{12})$，其中 C_{11} 对应余树 $\bar{T}$

由性质 *(3)*$C=P\cdot C_f$，即

$$(C_{11} \quad C_{12})=P(I \quad C_{f_{12}})=(P \quad P\cdot C_{f_{12}})$$

因此，$C_{11}=P$，P 非奇异，即 C_{11} 行列式非零

必要性：已知回路矩阵 C 的某 $(m-n+1)$ 阶子阵行列式非零。

将这 $(m-n+1)$ 列放在前面，写为 $C=(C_{11} \quad C_{12})$

求证 C_{11} 对应的是一棵余树（反证法）：

假设 C_{12} 对应的不是一棵树，则 C_{12} 中必含回路，不妨设为 C_x

由于回路矩阵的各行线性无关，且完全回路矩阵秩为 $m-n+1$

任意一个回路都可以由回路矩阵各行向量线性表示!

因此，C_x 一定可以由 C 中各行线性表示，即 C 经过行初等变换，可以得到表示 C_x 的行向量

$$C=(C_{11} \quad C_{12}) \quad \Rightarrow \quad C'=\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{C_x} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C'=\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ 0 & C''_{12} \end{bmatrix}$$

即 C_{11} 可经过行初等变换，可得到

说明 C_{11} 行列式为零，与前提矛盾。

因此 C_{12} 对应的是一棵树，C_{11} 对应其余树*!*

定理 3.6.5. 令 B_k 是有向连通图 G 的基本关联矩阵，那么 B_k 的任意 $n-1$ 阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成 G 的一棵支撑树。

3.6.2 割集矩阵及其性质

定义 3.6.4. 设 S 为有向图 $G=(V,E)$ 的边子集，若*:*

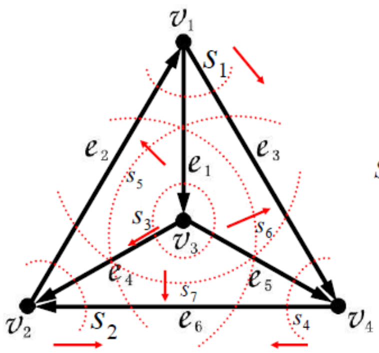
1. $G'=(V,E-S)$ 比 G 的连通支数多 1

2. 对任意 S 的真子集 S'，$G'' = (V, E - S')$ 与 G 的连通支数相同
则称 S 为 G 的一个割集
一般给割集 S 一个方向，称它为有向割集

定义 3.6.5. 有向连通图 G 的全部割集构成的矩阵，称为 G 的完全割集矩阵，记为 S_e:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & , e_j \in S_i\text{且与割集}S_i\text{方向一致} \\ -1 & , e_j \in S_i\text{且与割集}S_i\text{方向相反} \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

例:



$$S_e = \left[\begin{array}{ccccccc} s_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ s_3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ s_4 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ s_5 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ s_6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ s_7 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\right]$$

思考: 图 G 中会有多少个割集?

- 一个割集可将连通图分为两个部分，连通图的一个划分就对应一个割集
- n 个结点划分为两个部分，有多少种分法?
- 设想将 n 个不同的球放入两个盒子

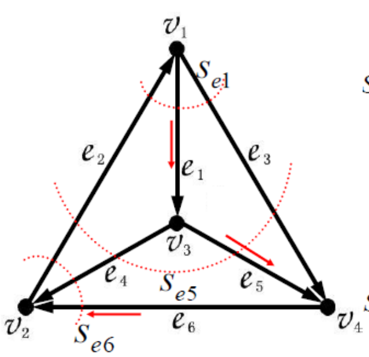
$$\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

完全割集矩阵规模为 $(2^{n-1} - 1) \times m$

定义 3.6.6. 设 T 是连通图 G 的一棵树，e_i 是树枝。对应 e_i 存在 G 的割集 S_i，S_i 只包括一条树枝 e_i 及某些余树枝，且与 e_i 的方向一致。此时称 S_i 为 G 的对应树 T 的一个基本割集

定义 3.6.7. 给定有向连通图 G 的一棵树 T，由对应 T 的全部基本割集组成的矩阵称为基本割集矩阵，记为 $\mathbf{S_f}$

例:



$$S_f=\begin{array}{c} s_{e1} \\ s_{e5} \\ s_{e6} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$S_f=\begin{array}{c} s_{e1} \\ s_{e5} \\ s_{e6} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_1 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

S_f的秩为$n-1$

$$S_f=\left(S_{f_{11}} \quad I\right)$$

定理 3.6.6. 当有向连通图 G 的完全回路矩阵 C_e 和完全割集矩阵 S_e 的边次序一致时，有

$$S_eC_e^T=0$$

证明：设 $D=S_eC_e^T$, 则

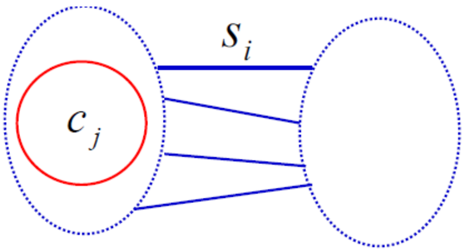
$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{m} s_{ik}\cdot c_{jk}$$

其中 S_{ik} 是第 i 个割集 S_i 中的情况

c_{jk} 是第 j 个回路 c_j 中的情况

回路 C_j 与割集 S_i 只有两种情况：

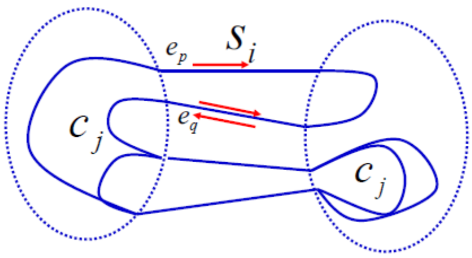
第一种情况:C_j 与割集 S_i 无公共边（不相交）：



- 此时 S_i 中的任一边都不是 C_j 中的边
- 此时 s_{ik} 不为零时，c_{jk} 一定为零
- c_{jk} 不为零时，s_{ik} 一定为零

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} s_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

第二种情况: C_j 与割集 S_i 有公共边（相交）:



- 则 C_j 必定与 S_i有成对出现的偶数条公共边 e_p 和 e_q
- 若 e_p 和 e_q 同向，则 c_{jp} 和 c_{jq} 一正一负，s_{ip} 和 s_{iq} 同正负
- 若 e_p 和 e_q 反向，则 c_{jp} 和 c_{jq} 同正负，s_{ip} 和 s_{iq} 一正一负

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} s_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$
$$S_e C_e^T = 0$$

定理 3.6.7. 当有向连通图 G 的完全回路矩阵 C_e 和完全割集矩阵 S_e 的边次序一致时，有

$$S_e C_e^T = 0$$

思考:
完全割集矩阵的任一行，与完全回路矩阵的任一行的转置乘积，是否为零？
基本割集矩阵、基本回路矩阵是什么关系？

定理 3.6.8. 有向连通图 $G = (V, E)$ 完全割集矩阵的秩为 $(n-1)$
证明：
由于基本割集矩阵 *(*秩为 $n-1$*)* 是完全割集矩阵的行子阵，所以完全割集矩阵的秩不小于 $n-1$
由于 $S_e C_e^T = 0$，根据 *sylvester* 定理 *sylvester* 定理：设 *A,B* 分别为 $n \times m$ 与 $m \times s$ 的矩阵，则 $ran(AB) \geq ran(A) + ran(B) - m$

$$S_e : p \times m \quad ran(S_e) = ?$$
$$C_e^T : m \times q \quad ran(C_e^T) = m - n + 1$$
$$S_e C_e^T = 0 \quad \Rightarrow \quad ran(S_e C_e^T) = 0$$

即*:*$ran(S_e) \leq n-1$
故：$ran(S_e) = n-1$

定理 3.6.9. 有向连通图 G 中 $(n-1)$ 个互相独立的割集组成的矩阵，称为 G 的割集矩阵，记为 S。

割集矩阵 S 具有以下几个简单性质：
1. 基本割集矩阵 S_f 是割集矩阵
2. $SC^T = 0$ 其中 S 与 C 的边次序一致
3. $S = P \cdot S_f$ 其中 P 为非奇异方阵，S 与 S_f 边次序一致

这里说明最后一点。因为 S 与 S_f 中都由 $n-1$ 个线性无关的行向量组成，它们都是完全割集矩阵 S_e 的行向量的极大线性无关组。因此 S 与 S_f 的行向量是等价向量组，对 S_f 进行初等行变换一定可以得到 S, 这在线性代数上对应于左乘可逆矩阵 P。

3.6.3 基本割集矩阵的计算

定理 3.6.10. 有向连通图 $G = (V, E)$ 的割集矩阵 S 的任一 $(n-1)$ 阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于 G 的某棵树。

证明：

充分性：已知 G 的树 $T \quad \Rightarrow \quad$ 其对应子阵行列式非零

构造基本割集矩阵 $S_f = (S_{f_{11}} \quad I)$。

对给定的割集矩阵 S 进行列交换，使其边序与 S_f 一致，这样可写为 $S = (S_{11} \quad S_{12})$，其中 S_{12} 对应树 T

由性质 *3*，$S = P \cdot S_f$ ，即

$$(S_{11} \quad S_{12}) = P(S_{f_{11}} \quad I) = (P \cdot S_{f_{11}} \quad P)$$

因此,$S_{12} = P$，P 非奇异，即 S_{12} 行列式非零

必要性：采用反证法

调整 S 的这 $n-1$ 列构成 S_{12}，使得 $S = (S_{11} \quad S_{12})$。假定 S_{12} 各列对应的不是树，则一定含有 $s(< n)$ 条边和 s 个顶点的初级回路 *C,* 如图 3.6*(*否则，这 $n-1$ 条边中不存在回路，故而它们构成一棵树，与假设矛盾*)*。

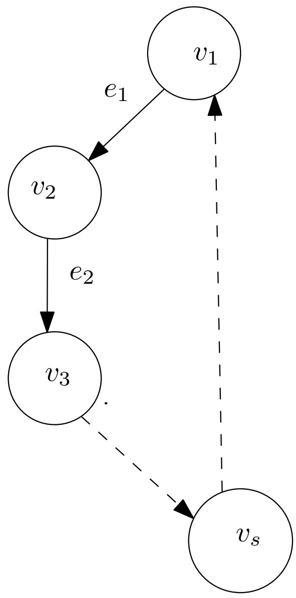


图 3.6: 回路 C 中，含有 s 条边和 s 个顶点。注意在初级回路中边数和顶点数总是相等的

由于 *C* 是 G 的连通子图，因此 *C* 的割集矩阵的秩是 $s-1$, 亦即 S_{12} 对应的这 s 列线性相关，故 $|s_{12}| = 0$ 矛盾。

思考：基本回路矩阵，基本割集矩阵，基本关联矩阵她们的关系是什么？

接下来将给出计算基本割集矩阵的算法。从中读者可以感受基本关联矩阵 B_k、基本回路矩阵 C_f、基本割集矩阵 S_f 三者的联系。

定理 3.6.11. 设 S_f 和 C_f 分别是连通图 G 中关于某棵树 T 的基本割集矩阵和基本回路矩阵，且边次序一致。并设 $S_f = (S_{f_{11}} \quad I)$， $C_f = (I \quad C_{f_{12}})$ 则

$$S_{f_{11}} = -C_{f_{12}}^T$$

证明：由推论有 $S_f \cdot C_f^T = 0$

即 $(S_{f_{11}} \quad I)\begin{bmatrix} I \\ C_{f_{12}}^T \end{bmatrix} = 0$

再加上回路矩阵所证明的定理 3.6.2 容易导出当割集矩阵 S_f 与基本关联矩阵 B_k 的边次序一致时，有

$$S_{f_{11}} = B_{12}^{-1} B_{11}$$

这就是基本关联矩阵 B_k 计算基本割集矩阵 S_f 的算法。 **本定理说明，如果 B_k 已知，而且确定了一棵树，则可以直接经过计算求得 G 的基本割集矩阵 S_f。**

推论 3.6.2. 当连通图 G 的基本关联矩阵 B_k 与基本割集矩阵 S_f 的边次序一致，并设：

$$B_k = (B_{11} \quad B_{12}) \quad S_f = (S_{f_{11}} \quad I)$$

则：$S_{f_{11}} = B_{12}^{-1} \cdot B_{11}$ 证明：

$$S_{f_{11}} = -C_{f_{12}}^T = -(-B_{11}^T \cdot (B_{12}^{-1})^T)^T = B_{12}^{-1} \cdot B_{11}$$

例 3.6.2. 已知图 3.7 的基本关联矩阵

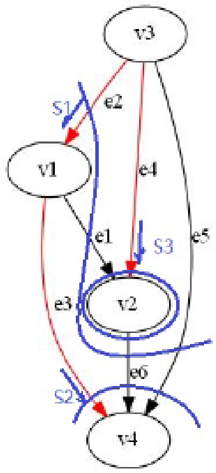


图 3.7: 求 S_f

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$ 其中 $T = \{e_2, e_3, e_4\}$ 构成的树，求对应的基本割集矩阵。

解: 对 B_1 的列重新调整如下:

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_5 & e_6 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此

$$S_f = (B_{12}^{-1}B_{11} \quad I) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_5 & e_6 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$