1. **考虑掷硬币试验。分别使用参数为$(a,b)=(1,1)$和$(a,b)=(10,5)$的贝塔分布作为先验，用程序分别画出出现下列正面向上的计数结果时，硬币向上的概率参数的后验分布：**

   (1) 投掷0次，0次正面向上

   (2) 投掷1次，1次正面向上

   (3) 投掷2次，2次正面向上

   (4) 投掷3次，2次正面向上

   (5) 投掷8次，4次正面向上

   (6) 投掷15次，6次正面向上

   (7) 投掷50次，24次正面向上

   (8) 投掷500次，263次正面向上

- 在掷硬币试验中，将参数θ的先验分布设定为$Beta$分布

$$p(\theta)=Beta(\theta|a,b)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} \tag{1}$$

- 似然函数为二项分布

$$p(x|\theta)=C_n^x\theta^x(1-\theta)^{n-x} \tag{2}$$

- 通过贝叶斯公式推导得到

$$p(\theta|x)=\frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)}=Beta(\theta|a+x,b+n-x) \tag{3}$$

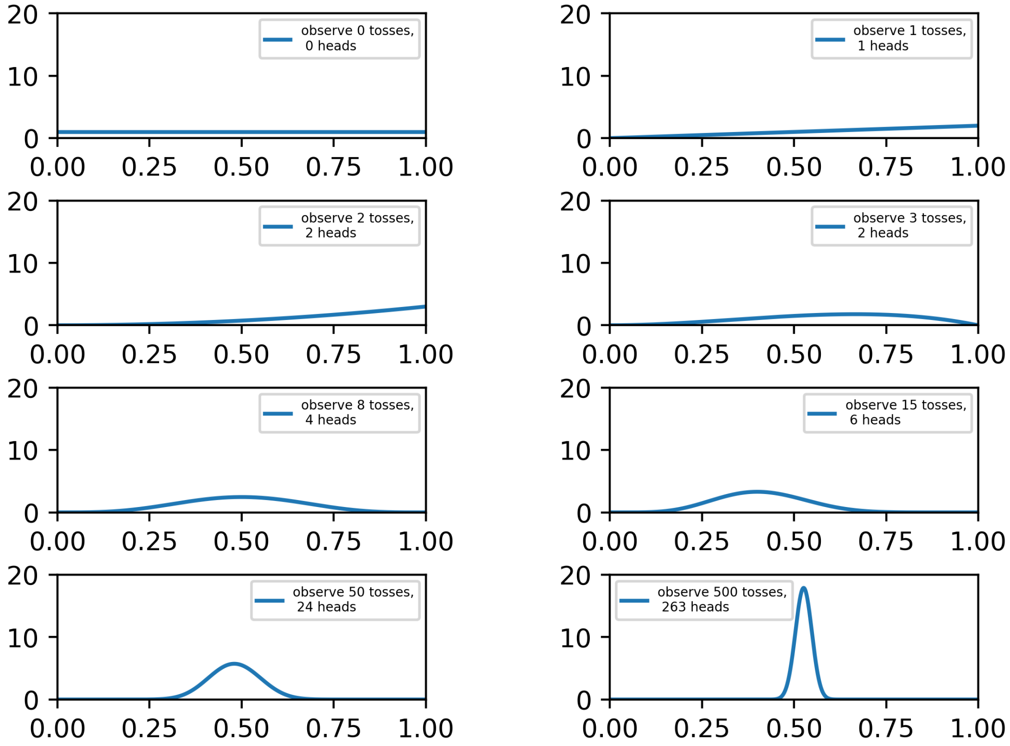
- 先验分布参数为$(1,1)$时，需依次画出$Beta(\theta|1,1)$、$Beta(\theta|1+1,1+1-1)$、$Beta(\theta|1+2,1+2-2)$、$Beta(\theta|1+2,1+3-2)$、$Beta(\theta|1+4,1+8-4)$、$Beta(\theta|1+6,1+15-6)$、$Beta(\theta|1+24,1+50-24)$、$Beta(\theta|1+263,1+500-263)$
- 先验分布参数为$(10,5)$时，需依次画出$Beta(\theta|10,5)$、$Beta(\theta|10+1,5+1-1)$、$Beta(\theta|10+2,5+2-2)$、$Beta(\theta|10+2,5+3-2)$、$Beta(\theta|10+4,5+8-4)$、$Beta(\theta|10+6,5+15-6)$、$Beta(\theta|10+24,5+50-24)$、$Beta(\theta|10+263,5+500-263)$

核心代码如下：

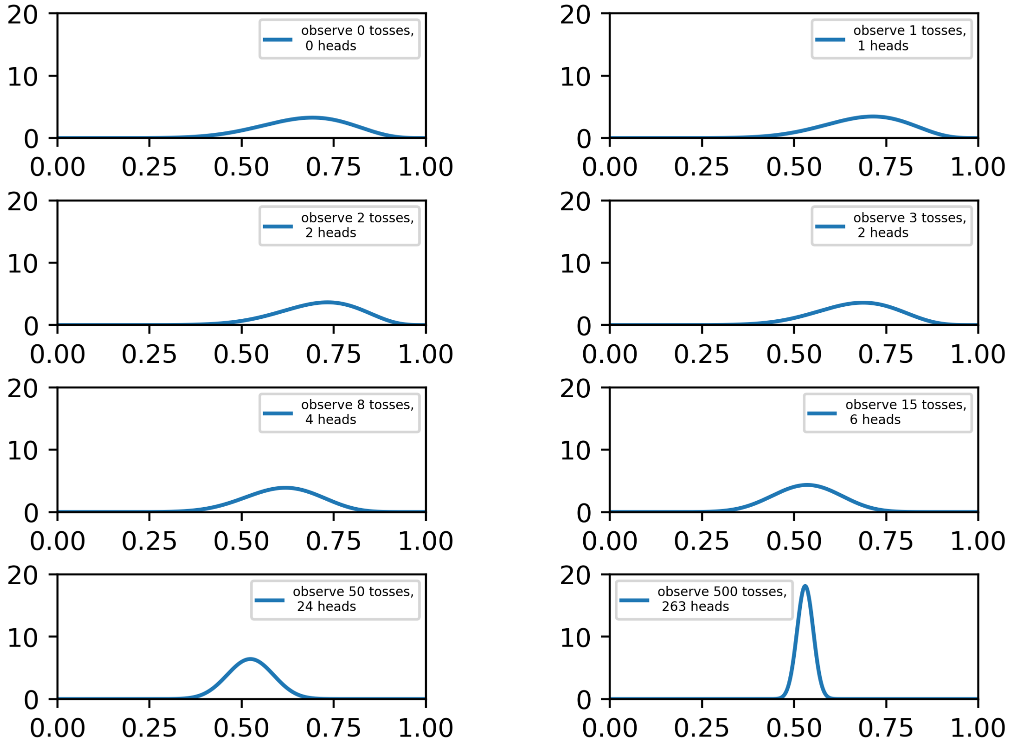
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import beta

def betaDist(a, b):
    x = np.linspace(0, 1, 1002)[1:-1]  # 创建一系列x值
    y = beta(a,b).pdf(x)#使用 scipy.stats 中的 beta 类产生贝塔分布的概率密度函数
    return x,y

x,y = betaDist(1,1)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

结果：

先验为Beta(1, 1)



先验为Beta(10, 5)



2. **分别证明：**

（1）多项分布的共轭先验是狄利克雷分布，参数为$\theta_1, \ldots, \theta_k$**，观测值为**$x_1, \ldots, x_k$**。**

> **多项分布**是二项分布的推广扩展，在n次独立试验中只输出k种结果中的一个，且每种结果都有一个确定的概率θ。多项分布给出了在多种输出状态的情况下，关于成功次数的各种组合的概率。举个例子，投掷n次骰子，这个骰子共有6种结果输出（k=6），且1点出现的概率为θ_1，2点出现的概率为θ_2，...，在n次试验中，骰子1点出现x_1次，2点出现x_2次...。这个结果组合出现的概率为$C_n^{x_1}C_{n-x_1}^{x_2}\ldots C_{n-x_1\cdots-x_5}^{x_6}{\theta_1}^{x_1}{\theta_2}^{x_2}\ldots{\theta_6}^{x_6}=\frac{n!}{x_1!\ldots x_6!}\theta_1^{x_1}\ldots\theta_6^{x_6}$

> **狄利克雷分布**是$Beta$分布在多项情况下的推广，概率密度函数如下：
>
> $$p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k|\alpha_1,\ldots,\alpha_k\right)=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k\alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\alpha_i\right)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i-1}$$
>
> $Beta$分布的概率密度函数$p(\theta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$

根据贝叶斯公式，有

$$p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k|x_1,\ldots,x_k\right)=\frac{p\left(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots,\theta_k\right)p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k\right)}{\int p\left(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots,\theta_k\right)p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k\right)d\theta_1,\ldots,\theta_k}$$

观测值$x_1,\ldots,x_k$关于参数$\theta_1,\ldots,\theta_k$的似然函数：

$$\begin{aligned}p\left(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots\theta_k\right)&=\frac{n!}{x_1!\ldots x_k!}\theta_1^{x_1}\ldots\theta_k^{x_k}\\&=\frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma(x_i+1)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{x_i}\end{aligned}$$

参数$\theta_1,\ldots,\theta_k$的先验：

$$p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k\right)=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k\alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\alpha_i\right)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i-1}$$

计算归一化因子$p(x_1,\ldots,x_k)$：

$$\begin{aligned}p(x_1,\ldots,x_k)&=\int p(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots,\theta_k)p(\theta_1,\ldots,\theta_k)d\theta\\&=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\sum_{i=1}^k\alpha_i)}{\prod_{i=1}^k\Gamma(x_i+1)\Gamma(\alpha_i)}\int\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i+x_i-1}d\theta\\&=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\sum_{i=1}^k\alpha_i)\prod_{i=1}^k\Gamma(\alpha_i+x_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^k(\alpha_i+x_i))\prod_{i=1}^k\Gamma(x_i+1)\Gamma(\alpha_i)}\int\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k\left(\alpha_i+x_i\right)\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\alpha_i+x_i\right)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i+x_i-1}d\theta\\&=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\sum_{i=1}^k\alpha_i)\prod_{i=1}^k\Gamma(\alpha_i+x_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^k(\alpha_i+x_i))\prod_{i=1}^k\Gamma(x_i+1)\Gamma(\alpha_i)}\end{aligned}$$

代入贝叶斯公式计算：

$$\begin{aligned}p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k|x_1,\ldots,x_k\right)&=\frac{p(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots,\theta_k)p(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{p(x_1,\ldots,x_k)}\\&=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k\left(\alpha_i+x_i\right)\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\alpha_i+x_i\right)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i+x_i-1}\\&=Dirichlet\left(\theta_1,\ldots,\theta_k|\alpha_1+x_1,\ldots,\alpha_k+x_k\right)\end{aligned}$$

（2）泊松分布的共轭先验是$Gamma$分布，参数为λ，观测值为x。

> **泊松分布**的随机变量表示某事件在单位时间内随机独立出现的次数
>
> $$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\exp\left(-\lambda\right)，\lambda>0，k=0,1,2,\ldots$$

> **指数分布**的随机变量表示独立随机事件发生的时间间隔，即要等到一个随机事件发生，需要经历多久时间
>
> $$p\left(x\right)=\begin{cases}\lambda\exp\left(-\lambda x\right)，x\geqslant 0\\ 0，x<0\end{cases}$$

> $Gamma$**分布**的随机变量表示要等到α个随机事件都发生，需要经历多久时间
>
> 对$Gamma$函数做个变形，可以得到如下式子：
>
> $\mathit{\Gamma}(\alpha)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-t\right)t^{\alpha-1}dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}\exp(-t)}{\mathit{\Gamma}(\alpha)}dt=1$
>
> 做一个变换$t=\beta x$，$\int_0^{+\infty}\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)}{\mathit{\Gamma}(\alpha)}d(x)=1$
>
> 取等式左边积分中的函数作为概率密度函数，得到$Gamma$分布的一般形式：
>
> $$Gamma(x,\alpha,\beta)=\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}\exp\left(-\beta x\right)}{\mathit{\Gamma}(\alpha)}$$
>
> 且α=1时，上式就变成了指数分布，指数分布是$Gamma$分布的特殊形式。

根据贝叶斯公式，有：

$$p\left(\lambda|x\right)=\frac{p\left(x|\lambda\right)p\left(\lambda\right)}{\int p\left(x|\lambda\right)p\left(\lambda\right)d\lambda}$$

观测值x关于参数λ的似然函数：

$$p\left(x|\lambda\right)=\frac{\lambda^x}{x!}\exp\left(-\lambda\right)$$

参数λ的先验：

$$p\left(\lambda\right)=Gamma\left(\lambda|\alpha,\beta\right)=\frac{\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}\exp\left(-\beta\lambda\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}$$

计算$p(x|\lambda)p(\lambda)$：

$$p\left(x|\lambda\right)p\left(\lambda\right)=\frac{\beta^\alpha}{\mathit{\Gamma}\left(x+1\right)\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}\lambda^{\alpha+x-1}\exp\left(-\left(\beta+1\right)\lambda\right)$$

计算归一化因子$p(x)$：

$$\begin{aligned}p(x)&=\int_0^{+\infty}p(x|\lambda)p(\lambda)d\lambda\\&=\frac{\beta^\alpha}{\mathit{\Gamma}\left(x+1\right)\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha+x-1}\exp\left(-\left(\beta+1\right)\lambda\right)d\lambda\\&=\frac{\beta^\alpha\mathit{\Gamma}\left(\alpha+x\right)}{\mathit{\Gamma}\left(x+1\right)\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)\left(\beta+1\right)^{\alpha+x}}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\beta+1\right)^{\alpha+x}\lambda^{\alpha+x-1}\exp\left(-\left(\beta+1\right)\lambda\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha+x\right)}d\lambda\\&=\frac{\beta^\alpha\mathit{\Gamma}\left(\alpha+x\right)}{\mathit{\Gamma}\left(x+1\right)\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)\left(\beta+1\right)^{\alpha+x}}\end{aligned}$$

代入贝叶斯公式：

$$
\begin{aligned}
p(\lambda|x) &= \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{p(x)} \\
&= \frac{(\beta+1)^{\alpha+x}\lambda^{\alpha+x-1}\exp\left(-(\beta+1)\lambda\right)}{\Gamma(\alpha+x)} \\
&= Gamma\left(\lambda|\alpha+x,\beta+1\right)
\end{aligned}
$$

（3）指数分布的共轭先验是$Gamma$分布，参数为θ，观测值为x。

根据贝叶斯公式，有：

$$
p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(x|\theta)p(\theta)d\theta}
$$

观测值x关于参数θ的似然函数：

$$
p(x|\theta) = \theta\exp\left(-\theta x\right), x > 0
$$

参数θ的先验：

$$
p(\theta) = Gamma\left(\theta|\alpha,\beta\right) = \frac{\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}\exp\left(-\beta\theta\right)}{\Gamma(\alpha)}
$$

计算$p(x|\theta)p(\theta)$：

$$
p(x|\theta)p(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha}\exp\left(-(\beta+x)\theta\right)
$$

计算归一化因子$p(x)$：

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \int p(x|\theta)p(\theta)d\theta \\
&= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\theta^{\alpha}\exp\left(-(\beta+x)\theta\right)d\theta \\
&= \frac{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)(\beta+x)^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}\frac{(\beta+x)^{\alpha+1}\theta^{\alpha}\exp\left(-(\beta+x)\theta\right)}{\Gamma(\alpha+1)}d\theta \\
&= \frac{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)(\beta+x)^{\alpha+1}}
\end{aligned}
$$

代入贝叶斯公式：

$$
\begin{aligned}
p(\theta|x) &= \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} \\
&= \frac{(\beta+x)^{\alpha+1}\theta^{\alpha}\exp\left(-(\beta+x)\theta\right)}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= Gamma\left(\theta|\alpha+1,\beta+x\right)
\end{aligned}
$$

（4）方差已知的正态分布的共轭先验是正态分布，参数为均值μ，观测值为x。

根据贝叶斯公式，有：

$$
p(\mu|x) = \frac{p(x|\mu)p(\mu)}{\int p(x|\mu)p(\mu)d\mu}
$$

观测值x关于参数μ的似然函数：

$$
p(x|\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)
$$

参数$\mu \sim N(u, v^2)$，先验为：

$$p\left(\mu\right) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\mu - u\right)^2}{2v^2}\right)$$

计算$p(x|\mu)p(\mu)$：

$$p\left(x|\mu\right)p\left(\mu\right) = \frac{1}{2\pi v\sigma}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2} - \frac{\left(\mu - u\right)^2}{2v^2}\right)$$

计算归一化因子$p(x)$：

$$\begin{aligned}
p(x) &= \int p(x|\mu)p(\mu)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi v\sigma}\int \exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2} - \frac{\left(\mu - u\right)^2}{2v^2}\right)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi v\sigma}\int \exp\left(-\frac{\left(v^2+\sigma^2\right)\mu^2 - \left(2xv^2 + 2u\sigma^2\right)\mu + v^2x^2 + u^2\sigma^2}{2\sigma^2v^2}\right)d\mu \\
&= \frac{\exp\left(\frac{v^2x^2+u^2\sigma^2}{2\sigma^2v^2}\right)}{2\pi v\sigma\exp\left(\frac{\left(\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)}\int \exp\left(-\frac{\left(\mu - \frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)d\mu \\
&= \frac{\exp\left(\frac{v^2x^2+u^2\sigma^2}{2\sigma^2v^2}\right)\sqrt{\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\sqrt{2\pi}}{2\pi v\sigma\exp\left(\frac{\left(\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\mu - \frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)d\mu \\
&= \frac{\exp\left(\frac{v^2x^2+u^2\sigma^2}{2\sigma^2v^2}\right)\sqrt{\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\sqrt{2\pi}}{2\pi v\sigma\exp\left(\frac{\left(\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)}
\end{aligned}$$

代入贝叶斯公式：

$$\begin{aligned}
p\left(\mu|x\right) &= \frac{p(x|\mu)p(\mu)}{p(x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\mu - \frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)
\end{aligned}$$

则$p(\mu|x)$服从正态分布$N\left(\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2}, \frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}\right)$。

（5）均值已知的正态分布的共轭先验是逆$Gamma$分布，参数为方差σ^2，观测值为x。

> **逆$Gamma$分布**
>
> $$IG\left(x|\alpha, \beta\right) = \frac{\beta^\alpha x^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{\beta}{x}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}$$
>
> 逆$Gamma$分布与$Gamma$分布之间的关系：
>
> 若随机变量$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$，则$\frac{1}{X} \sim IG(\alpha, \beta)$

根据贝叶斯公式，有：

$$p\left(\sigma^2|x\right)=\frac{p\left(x|\sigma^2\right)p\left(\sigma^2\right)}{\int p\left(x|\sigma^2\right)p\left(\sigma^2\right)d\sigma^2}$$

观测值x关于参数σ^2的似然函数：

$$p\left(x|\sigma^2\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

参数σ^2的先验：

$$p\left(\sigma^2\right)=IG\left(\sigma^2|\alpha,\beta\right)=\frac{\beta^\alpha\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}$$

计算$p\left(x|\sigma^2\right)p\left(\sigma^2\right)$：

$$p\left(x|\sigma^2\right)p\left(\sigma^2\right)=\frac{\beta^\alpha}{\sqrt{2\pi}\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2+2\beta}{2\sigma^2}\right)$$

计算归一化因子$p(x)$：

$$\begin{aligned}
p(x)&=\int p(x|\sigma^2)p(\sigma^2)d\sigma^2\\
&=\frac{\beta^\alpha}{\sqrt{2\pi}\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}\int\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2+2\beta}{2\sigma^2}\right)d\sigma^2\\
&=\frac{\beta^\alpha\mathit{\Gamma}(\frac{1}{2}+\alpha)}{\sqrt{2\pi}\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)\left(\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}\int\frac{\left(\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2+2\beta}{2\sigma^2}\right)}{\mathit{\Gamma}(\frac{1}{2}+\alpha)}d\sigma^2\\
&=\frac{\beta^\alpha\mathit{\Gamma}(\frac{1}{2}+\alpha)}{\sqrt{2\pi}\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)\left(\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}
\end{aligned}$$

代入贝叶斯公式：

$$\begin{aligned}
p\left(\sigma^2|x\right)&=\frac{p(x|\sigma^2)p(\sigma^2)}{p(x)}\\
&=\frac{\left(\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2+2\beta}{2\sigma^2}\right)}{\mathit{\Gamma}(\frac{1}{2}+\alpha)}
\end{aligned}$$

则$p\left(\sigma^2|x\right)$服从逆$Gamma$分布$IG\left(\sigma^2|\frac{1}{2}+\alpha,\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)$。