1　泰勒展開

1.1　多項式逼近的基本概念與方法

多項式是一個很棒的函數，好處之一是它可以微分無限多次。這種函數應該發予良民證，實在太棒了！不過就這點而言還不夠特別，指數函數、三角函數也都可以發予良民證。

多項式還有一個好處是比較好代值，譬如說 $p(x) = x^{23} - 5x^{18} + 7x^{11} + 6x^3 - 8$，如果我們要算 $p(3.01)$，很煩，但起碼還能算。那如果是遇到其它函數呢？譬如說 $\sin(1)$，就不會算那麼久了，因為根本不會。

數學上常常是化繁為簡、化未知為已知。所以就有個想法，當我遇到一個函數 $f(x)$ 的時候，可不可以寫出一個多項式 $p(x)$，是可以跟它非常接近的呢？或者至少，在我要算的點的附近是很接近的。譬如說剛剛的 $\sin(1)$，如果我的多項式只能在 $[-1,2]$ 上跟 $\sin(x)$ 很接近，那其實也夠用了。待我將這個多項式寫出來之後，凡是在這所謂的「附近」裡面，我就可以將原本想對 $f(x)$ 做的事情，改對 $p(x)$ 做。舉凡加、減、乘、除、次方、代入、微分、積分等等，所以當然，這個「附近」的範圍，能越大就越好。

舉個例子，右圖中藍色曲線是 $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x + 3}{1.58^x}$，它並不是多項式。現在，我找到一個三次多項式 $p(x) = 12.241687 - 8.2648x + 1.7988x^2 - 0.1065x^3$，在圖中是綠色曲線。它與 $f(x)$ 在 $x = 3$ 的附近還蠻接近的，幾乎沒什麼分別。離 $x = 3$ 遠一點之後，兩條曲線才越差越多。千萬不要被我的例子的函數長相嚇到了，在後面我們並不需要找出長這麼醜的多項式。

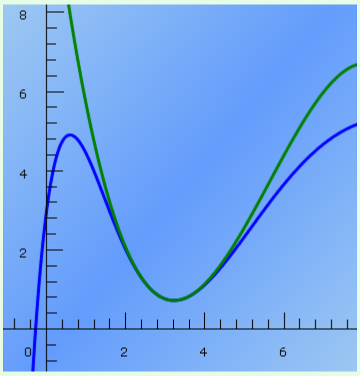


Figure 1: 以多項式逼近函數

牛頓在處裡某些函數時，用了一些技倆寫出冪級數來逼近 [1]。後來他的

[1]事實上，在微積分草創時期，除了牛頓也有其它許多數學家諸如 Gregory、萊布尼茲、John Bernoulli、棣美弗等等都寫出某些函數的冪級數逼近。

一個學生，Brook Taylor，在 1715 年時，提出一般性的理論，探討求出一個函數的多項式逼近的一般方法。

如果我們現在想找個 $p(x)$ 在 $x=a$ 的附近去逼近 $f(x)$。這個逼近的想法是這樣的，首先，兩個函數值 $f(a)$ 與 $p(a)$ 當然希望能一樣。接著，假如 $f(x)$ 可以微分的話，如果它們在 $x=a$ 這個地方的切線斜率也能夠一樣，那麼這兩個就更接近了。也就是説，$f'(a)=p'(a)$，這叫做一階切近。再來，假如 $f(x)$ 可以微分兩次，如果又有 $f''(a)=p''(x)$，那麼這兩個就又更接近了，這叫做二階切近。以此類推、得寸進尺。只要 $f(x)$ 能夠微分 k 次，我都希望 $f^{(k)}(x)$ 與 $p^{(k)}(x)$ 能夠相等，這叫做 k 階切近。如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可以微分無限多次的話，那我就希望寫一個冪級數，可以與 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的任意階微分都相等。

k 階切近

$f(x)$		$p(x)$
$f(a)$	$=$	$p(a)$
$f'(a)$	$=$	$p'(a)$
	$\vdots$	
$f^k(a)$	$=$	$f^k(a)$

按照這個想法，便可以將一個無限可微的函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處展開成：

$$\begin{aligned} f(x) =& f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots \\ =& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{1}$$

它的一般項形式是 $\dfrac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$，為什麼會這樣呢？為了檢驗等號右邊的確就是我們理想中的 $p(x)$，我們試著在等號右邊代 $x=a$、微分之後代 $x=a$、微分兩次之後代 $x=a$、$\cdots$ 看看是否各自等於 $f(a)$、$f'(a)$、$f''(a)$、$\cdots$。直接代 a，一次項以上全部都有 $(x-a)$，所以代入以後全是零，只剩 $f(a)$。接著我們對等號右邊先微分一次，此時常數項 $f(a)$ 微分後不見了。至於二次

項以上，微完都至少還有一個 $(x-a)$，所以在微完之後代 a 時，它們也全跟著不見了，所以只剩一次項。而一次項 $f'(a)(x-a)$ 微分一次以後，也成為常數，就是 $f'(a)$。我們直接跳去看微分 n 次後代 a。微分 n 次以後所有 $n-1$ 次以下的項全部變成零，而 $n+1$ 次以上的項，在微分完以後全部都還有至少一個 $(x-a)$，所以在微完之後代 a 時，它們也全跟著不見了，所以只剩 n 次項。而 n 次項 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 微分 n 次以後，也成為常數。值是多少呢？因為微分 n 次以後會乘以 $n!$ [2]，所以就是 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\times n! = f^{(n)}(a)$。在以上的檢驗過程中，你大概就能明白為什麼一般項長那樣了，擺個 $n!$ 在分母就是特意要拿來消的。

現在知道用 k 階切近的辦法來將函數展開成多項式了，刻不容緩，我們馬上來試刀吧！

example 1

試求 e^x 的馬克勞林展開。

解

所謂的馬克勞林 (Maclaurin) 展開，意思只不過是在 $x=0$ 處的泰勒展開，也就是說

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{2}$$

我們想要寫出這個出來，就必須知道 e^x 在的各階微分代 0 之後是多少。不過這太容易了，e^x 不管怎麼微分都還是 e^x，代 0 以後就是 1。於是有

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

[2] 微分第一次會乘以 n，微分第二次乘以 $n-1$，微分第三次乘以 $n-2$，$\cdots$

example 2

試求 $\sin(x)$ 的馬克勞林展開。

解

$\sin(x)$ 的高階微分具有規律

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) & f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(5)}(x) &= \cos(x) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

再配合 $\sin(0) = 0$、$\cos(0) = 1$，便易知

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$\cos(x)$ 的情況十分類似，你就自己動手寫吧！

e^x 與 $\sin(x)$ 及 $\cos(x)$ 的高階微分都有很簡單的規律，所以用一般的方法寫出馬克勞林展開都是很容易的。而且收斂區間都是整個實數 $\mathbb{R}$ [3]，所以就算代一百萬，兩邊也是相等的。現在我們來檢查一件事，我剛剛說，只要在收斂區間內，本來想對 $f(x)$，做的一些事，可以改對 $p(x)$ 做。我們知道 e^x 微分後是自己，於是我們將

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

作 **逐項微分**，得到

$$0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

[3] 判斷收斂區間的方法留待後面介紹。

真的等於自己。我們再檢查 $\sin(x)$ 的微分是 $\cos(x)$，將

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

作 **逐項微分**，得到

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

果然就是 $\cos(x)$ 的展開。

式子 1 好用在它具有一般性，一般而言，只要 $f(x)$ 能夠微分 k 次，我就可以照著操作寫出一個 k 次多項式來逼近它。卻不代表我們只能這樣做，有時候用這個方法會因為高階微分不太好寫而變得較為繁複。

事實上，我們還是可以根據各種不同函數的不同長相，用一些特殊的方法來寫出逼近多項式出來。在 Brook Taylor 於 1715 年提出他的理論以前，那些十七世紀的微積分先鋒們就各自寫出 $\sin(x)$、$\cos(x)$、$\arctan(x)$ 等等函數的展開，各自用了些奇奇怪怪的辦法。不過放心，在此我們只介紹些基本的辦法。

譬如說 $\dfrac{1}{1-x}$，除了用那個一般的做法外，也可直接寫出

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

為什麼呢？因為這就是無窮等比級數的和呀。從此還得知了，收斂區間就是 $-1 < x < 1$ [4]。

那麼 $\dfrac{1}{1+2x}$ 呢？把它看成 $\dfrac{1}{1-(-2x)}$ 就可以了，也就是說，將 $-2x$ 代在 $\dfrac{1}{1-x}$ 中的 x 裡面。於是就成為

$$1 + (-2x) + (-2x)^2 + \ldots + (-1)^n 2^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$$

至於收斂區間的問題，我們也將 $-2x$ 代入 $-1 < x < 1$，得到 $-1 < -2x < 1$，接著再化簡成 $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$。

[4] 公比的絕對值要小於 1

至於 $\ln(1+x)$ 呢？我們知道它的微分是 $\frac{1}{1+x}$，所以我們先寫出

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

然後作逐項積分，得到

$$C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

為了決定 C 是多少，我們代 $x = 0$，得到 $\ln(1+0) = 0 = C + 0 + 0 + \ldots$，所以 $C = 0$。於是

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$ [5]

至於收斂區間的問題，原本 $\frac{1}{1+x}$ 的收斂區間是 $-1 < x < 1$，我們是拿它作積分來的，所以範圍大致沒變，唯有端點可能發生改變，變成 $-1 < x \leq 1$ [6]。如果你想知道為什麼會多個 1，你可以將 1 代入冪級數，得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$，交錯級數收斂 [7]。

那如果是 $\sin(x)\cos(x)$ 呢？可以先各自展開再相乘。也可以看成 $\frac{\sin(2x)}{2}$，所以從 $\sin(x)$ 的展開用 $2x$ 代，然後整個除以 2，便有

$$\frac{1}{2}\left(2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \ldots\right) = \left(x - \frac{2^2x^3}{3!} + \ldots\right)$$

那如果是 $\arctan(x)$ 怎麼辦呢？它的微分是 $\frac{1}{1+x^2}$ 嘛，所以我們先寫出

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n}$$

[5] 這裡對足碼做了一點平移，新的 n 是舊的 n 加上 1，原來的 n 從 0 開始，那麼新的 n 就會從 1 開始。而 $(-1)^{n-1}$ 若改寫成 $(-1)^{n+1}$ 亦可，畢竟 $(-1)^2 = 1$。

[6] 不包含 -1 是顯而易見的，因為代入 $\ln(1+x)$ 會變成 $\ln 0$，然而對數裡必須是正的。

[7] 一般來說，冪級數收斂不代表它就會收斂到函數，後面會再談這部份。

然後做逐項積分，得到

$$C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

為了決定 C 是多少，我們代 $x = 0$，得到

$$\arctan(0) = C + 0 + 0 + \ldots$$

所以 $C = 0$，所以 $\arctan(x)$ 的展開就是

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

接著各自將 -1 和 1 代入冪級數，都有交錯級數收斂，因此收斂區間也是從原本的 $-1 < x < 1$ 變成 $-1 \leq x \leq 1$。

那如果是 $\sqrt{1+x}$ 又怎麼辦呢？它就是 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$，高中曾學過二項式定理

$$(x+y)^n = C_0^n y^n + C_1^n y^{n-1} x + C_2^n y^{n-2} x^2 + \ldots + C_n^n x^n \tag{3}$$

你如果在其它書看到 $\binom{n}{k}$，其實它不過是 C_k^n 的另一種寫法。

若 $y = 1$ 就是

$$(x+1)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

那是用在次方 n 是正整數的情況，我們現在次方不是正整數，也可以用嗎？牛頓在處理這問題的時候，將二項式定理推廣了，所以答案是可以的！所以我重寫一次

$$(x+1)^\alpha = C_0^\alpha + C_1^\alpha x + C_2^\alpha x^2 + \ldots \tag{4}$$

這對任何實數 α 都成立。這樣你可能產生一個問題，像 $C_3^{\frac{1}{2}}$ 該如何計算？回想一下，

$$C_3^7 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}$$

推廣方法就是照著寫

$$C_3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2})}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{16}$$

從這推廣方法也可得知，本來式子 3 的寫法會停在 $C_n^n x^n$。但次方非正整數的時候，式子 4 可以一直寫下去，無窮多項。

於是我們現在就來處理 $\sqrt{1+x}$，寫成

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = C_0^{\frac{1}{2}} + C_1^{\frac{1}{2}} x + C_2^{\frac{1}{2}} x^2 + C_3^{\frac{1}{2}} x^3 + \dots$$

前兩項的係數都不須特地算，因為任何數取 0 都是 1，任何數取 1 都是自己。另外算一下

$$C_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})}{1 \times 2} = -\frac{1}{8}$$

$$C_3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2})}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{16}$$

假如你還要繼續多算幾項的話，其實不須要慢慢寫，只要每次都在分子分母各補一項就好了。以 $C_4^{\frac{1}{2}}$ 為例，

$$C_4^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2}) \times (-\frac{5}{2})}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{1 \times (-\frac{5}{2})}{16 \times 4}$$

以此類推，要計算 $C_5^{\frac{1}{2}}$ 時，就分子補上 $-\frac{7}{2}$，分母補上 5。所以

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{1}{2}} x^n$$

至於 $\arcsin(x)$，它的微分是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，我們可以先做 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 的展開

$$1 - \frac{t}{2} + C_2^{-\frac{1}{2}} t^2 + C_3^{-\frac{1}{2}} t^3 + \dots = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} - \frac{5t^3}{16} + \dots$$

接著代 $t = -x^2$ [8]，便有

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \dots$$

[8] 我先用 t 展開，之後才代回 $-x^2$，只是想先慢慢寫給你看。實際上你如果處理得來的話，可以不必分成這兩步。

好啦，接著可以做逐項積分啦，

$$C+x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{8\cdot 5}+\frac{5x^7}{16\cdot 7}+\dots$$

代 $x=0$，得到

$$\arcsin(0)=0=C+0+0+\dots$$

所以 $C=0$，於是 $\arcsin(x)$ 的展開就是

$$x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{8\cdot 5}+\frac{5x^7}{16\cdot 7}+\dots$$

收斂區間由 $-1<x<1$ 變成 $-1\le x\le 1$。判斷方法較難，但不知道亦無妨，我目前還沒看過微積分的題目剛好是需要知道這端點的。

目前為止寫了這一堆，就是想 show 給你看，在許多時候我們都避開了需要高階微分的辦法。因為那好用歸好用，但寫起來通常都很麻煩。幸好我們常可以透過微分、積分、代入、加減乘除等等手段，來將所要處理的函數，用更基本、我們知道如何展開的函數來導出它的展開。我將一些函數的展開整理在下面給你看：

	函數	冪級數展開	收斂區間
★	e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$	$\mathbb{R}$
★	$\sin(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$\mathbb{R}$
★	$\cos(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$\mathbb{R}$
★	$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots$	$(-1,1)$
★	$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+\dots$	$(-1,1)$
★	$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$	$(-1,1]$
	$\arctan(x)$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$	$[-1,1]$
★	$(x+1)^\alpha$	$C_0^\alpha+C_1^\alpha x+C_2^\alpha x^2+\dots$	$(-1,1)$
	$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\dots$	$[-1,1]$
	$\arcsin(x)$	$x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{8\cdot 5}+\dots$	$[-1,1]$

★ 請你背起來，其它的便可由這些推得。

★ 可以不背，能背起來更好。

只有五個要背而已，而且第一個實在很好記，第二、三個長得和第一個很像可以一起背，第四個只不過是無窮等比級數，第五個也只是二項式定理的推廣，所以記誦的負擔並不大。

example 3

求 xe^x 的馬克勞林展開

解

先展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

接著整個乘以 x，便有

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots$$

example 4

求 e^{-x^2} 的馬克勞林展開

解

先展開

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

接著用 $t = -x^2$ 代入，便有

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

example 5

$$\text{求 } \frac{x^2}{1+x^3} \text{ 的馬克勞林展開}$$

解

我們可以將 $\dfrac{x^2}{1+x^3}$ 拆成 $x^2 \cdot \dfrac{1}{1+x^3}$，所以先將 $\dfrac{1}{1-(-x^3)}$ 展開成

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots$$

然後跟 x^2 相乘，也就是說每一項的次方都增加二，變成

$$x^2 - x^5 + x^8 - x^{11} + \ldots$$

也可以將之視為 $\ln(1+x^3)$ 的微分再除以 3，但應該還是前一個方法快些，你有時間可以自己練習看看，寫出來應該會一樣。

這題若以 sigma 的形式來寫，就是

$$\begin{aligned} & x^2 \cdot \frac{1}{1+x^3} \\ =& x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n \\ =& x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+2} \end{aligned}$$

example 6

$$\text{求 } \frac{1}{3-2x} \text{ 的馬克勞林展開}$$

解

注意分母那邊是 3 不是 1，所以沒辦法直接套我們有背的那個。但沒有關係，這很容易解決，只要將 3 提出來，便有

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\left(1+(\frac{2x}{3})+(\frac{2x}{3})^2+(\frac{2x}{3})^3+\ldots\right)$$

example 7

將 e^x 於 $x=2$ 處做泰勒展開

解

這次不是馬克勞林展開了，而是要在 $x=2$ 的地方展開。怎麼辦呢？難道要屈服於高階微分了嗎？放心，還是有個小技巧的！我先設 $t=x-2$，那麼 $e^x=e^{t+2}$，在 $x=2$ 處就是在 $t=0$ 處。因此我們就有

$$e^{t+2}=e^2\cdot e^t=e^2\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots\right)$$

此時再用 $t=x-2$ 代回去

$$e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}(x-2)^3+\ldots$$

若以 sigma 的形式來寫的話，就是

$$e^2\cdot e^t=e^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

用 $t=x-2$ 代回去

$$e^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

example 8

將 $\ln(x)$ 於 $x=3$ 處做泰勒展開

解

這題也類似，在 $x=3$ 處做泰勒展開會做出形如 $\sum a_n(x-3)^n$ 的冪級數，所以我們就設 $t=x-3$，使 $\ln(x)$ 變成 $\ln(t+3)$，然後作馬克勞林展開，做完再代回 x。這裡一樣，是 $t+3$ 不是 $t+1$，所以寫成

$$\begin{aligned}\ln(t+3) &= \ln 3 + \ln(1+\frac{t}{3}) \\ &= \ln 3 + \left((\frac{t}{3}) - \frac{(\frac{t}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{t}{3})^3}{3} - \dots\right)\end{aligned}$$

對數的加就是裡面相乘。

接著代 $t=x-3$ 回去

$$\begin{aligned}&= \ln 3 + \frac{(x-3)}{3} - \frac{(\frac{(x-3)}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{(x-3)}{3})^3}{3} + \dots \\ &= \ln 3 + \frac{(x-3)}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \frac{(x-3)^3}{81} + \dots\end{aligned}$$

你可能會覺得寫這樣，一般項長怎樣就不太明顯了。那可以選擇以 sigma 的形式做操作：

$$\begin{aligned}\ln(t+3) &= \ln 3 + \ln(1+\frac{t}{3}) \\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n} t^n\end{aligned}$$

$\ln(1+x)$ 的展開是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$

接著代 $t=x-3$ 回去

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n}(x-3)^n$$

用這樣寫好像比較好喔。不但寫的人比較簡便，看的人也較一目了然。

example 9

將 $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ 做馬克勞林展開

解

不要被 $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ 的長相嚇到了，對數裡的乘除就是加減、對數裡的次方就是乘。所以

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2}\cdot(\ln(1+x)-\ln(1-x))\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}x^n\end{aligned}$$

觀察當 n 是奇數的時候，$(-1)^{n+1}+1=1+1=2$，

然而當 n 是偶數的時候，$(-1)^{n+1}+1=-1+1=0$。所以

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

example 10

求 $\tan(x)$ 的馬克勞林展開

解

由於

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

所以可以拿 $\sin(x)$ 與 $\cos(x)$ 的展開來相除。但拿兩個無窮項的級數作相除畢竟麻煩，因此我們可以用另一招，**待定係數法**。就是先設

$$\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

不過我們注意到 $\tan(x)$ 是奇函數，所以它必然只有奇次項。於是可以寫成

$$\tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots$$

沒注意到也沒關係，等下還是會得到 $a_0 = a_2 = \cdots = 0$。然後我們寫成

$$\sin(x) = \tan(x) \cdot \cos(x)$$

所以就有

$$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \left(a_1 x + a_3 x^3 + \cdots\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$$

比較等號兩邊的一次項，我們有

$$1 = a_1 \times 1$$

接著再比較三次項，我們有

$$-\frac{1}{6} = a_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + a_3 \times 1$$

看我們需要將 $\tan(x)$ 展開到幾次項，就比較到幾次項。

以前學過線性逼近，也就是名詞的微分（differential）。它是這樣

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

我們現在仔細一看，其實它是一階切近嘛。換句話說，線性逼近是在 $x = a$ 附近對曲線做一次逼近，而泰勒展開則是可以做更高次的逼近。

1.2 多項式逼近的應用

在一開始介紹為什麼要做泰勒展開時，便已提過我們可以很好代值。譬如說 $\sin(1)$，我們可以寫出它的泰勒展開

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

然後將 $x=1$ 代入

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\dots$$

你如果做這無窮多次的加減乘除，便可以得到 $\sin(1)$ 的精確值了。當然，我是說笑的，實務上怎麼可能真的做無窮多項。實際上我們可以只做幾項就好，雖然只做前幾項就不是 $\sin(1)$ 的精確值了，但所做出來的近似值與精確值通常相差不遠 [9]。

example 11

估計 e 的近似值

解

我們可以利用 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$，代入 $x=1$，便有

$$\begin{aligned}e&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\dots\\&\doteqdot 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=2.7083\end{aligned}$$

只取前五項加起來是 2.7083，而精確值是 $2.718281828459045\dots$，看起來已經頗為接近。

[9] 實際上有些級數可能會收斂得很慢，以致於我們要算很多項才有辦法讓誤差夠小。在微積分課程裡我們要學會估算誤差大約是多少，這留待後面介紹。

example 12

估計 $\ln 2$ 的近似值

解

從 $\ln(1+x)$ 代 $x=1$ 之後就是 $\ln 2$ 了。檢查一下收斂區間，的確有包含到 1，所以可以代。假使要估計 $\ln 3$，便不可以直接從 $\ln(1+x)$ 代了，因為 $x=2$ 並不在收斂區間內。所以

$$
\begin{aligned}
\ln 2 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \\
&\doteqdot 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

但這個級數收斂得很慢，$\ln 2$ 的精確值大約是 0.693，然而我們只算前四項的結果 $\dfrac{7}{12}$ 約是 0.583，這誤差有點大。若想估得更精確的話，須要多算很多項才行。

example 13

估計 π 的近似值

解

想估計 π 有很多種辦法，其中一個方法是利用 $\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}$，也就是說 $\pi = 4\arctan(1)$，所以我們先做 $\arctan(x)$ 的展開

$$
x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots
$$

然後代 $x = 1$，再乘以 4，於是

$$\begin{aligned}\pi =& 4\arctan(1)\\ =& 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right)\end{aligned}$$

不過用這個方法也是有收斂得很慢的問題，算到一千項了才精確到小數點後三位。其它還可以有很多方法，譬如說 $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$，那麼 $\pi = 2\cdot\arcsin(1)$。於是就可以先將 $\arcsin(x)$ 展開後代 1，再兩倍。但很不幸地，這個方法也收斂得很慢。

example 14

$$\text{估計} \int_0^1 e^{x^2} dx \text{ 的近似值}$$

解

e^{x^2} 並沒有反導函數，所以我們無法利用微積分基本定理，來求出這個積分的精確值。但是我們可以利用泰勒展開，計算前幾項，來求近似值：

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} dx =& \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots\right) dx\\ =& \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \dots\right)\Big|_0^1\\ =& 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} + \dots\\ \fallingdotseq& 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} + \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!}\\ \fallingdotseq& 1.4618\end{aligned}$$

用數學軟體去估這個積分，大約是 1.46265，我們取前五項做起來就已經頗接近了。

example 15

$$求\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$$

解

我們將 $\tan(x)$ 與 $\sin(x)$ 都展開，得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+\ldots}{x^3}\\
=&\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

因為 $x\to 0$，所以我們直接只比較分子分母各自次方最小的，因此展開時寫到三次項就可以了。

由此題可見，在做極限時使用泰勒展開，可能會簡化不少過程。反觀羅必達法則，它許多時候好用，但有一些缺點。其一是，你可能事先不知道要微分幾次才結束，甚至可能根本沒有結束的時候。其二是，就算你知道要微分七次好了，你有那個勇氣做下去嗎？等你做完一題，秦始皇都已經把萬里長城蓋好了。因此，有些時候用泰勒展開也是處理極限式時的一個好選擇。

example 16

$$求\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{e^x-1}$$

解

這題用羅必達也可很快做出來，不過沒關係，我們還是拿來練習用泰勒展開解。上下各展開成

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\dots}{(1+x+\dots)-1}=1$$

其實也很快，才展開到一次項而已。像這種題目簡直可以不拿筆算，直接盯著題目就心算出來了。然後對著題目說：「我一眼就把你看穿了！」。

高階導函數的規律有時候是不容易找出來的，所以我們前面便演示了，如何一直避開高階微分來做泰勒展開。而巧妙地，我們卻可因此回過頭來解決高階導數問題。

就是說，我們若展開出

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\dots$$

而如果我們要用一般的方法

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x+\dots$$

也會做出一樣的展開。也就是說，我可以兩相比較，得到

$$\begin{aligned}
f(0)&=a_0\\
f'(0)&=a_1\\
\frac{f''(0)}{2!}&=a_2\\
&\vdots\\
\frac{f^{(n)}(0)}{n!}&=a_n
\end{aligned}$$

所以，如果我們想知道 $f^{(23)}(0)$，我就可以將 $f(x)$ 做馬克勞林展開，然後將第 23 階係數乘以 23!，便會等於 $f^{(23)}(0)$。這是因為

$$\frac{f^{(23)}(0)}{23!}=a_{23}$$

而如果是想知道 $f^{(23)}(3)$，便不能用馬克勞林展開，必須使用 $a = 3$ 的泰勒展開

$$f(x) = f(0) + f'(3)(x) - 3 + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + \ldots$$

接著因為

$$\frac{f^{(23)}(3)}{23!} = a_{23}$$

所以將第 23 階係數乘以 23!，便是 $f^{(23)}(3)$。

example 17

$$若\ f(x) = x^6 e^{x^3}，則\ f^{(60)}(0) = ?$$

解

先展開出

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

然後代 $t = x^3$，得到

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{n!} + \ldots$$

再整個乘以 x^6，也就是每一項的次方都加 6，得到

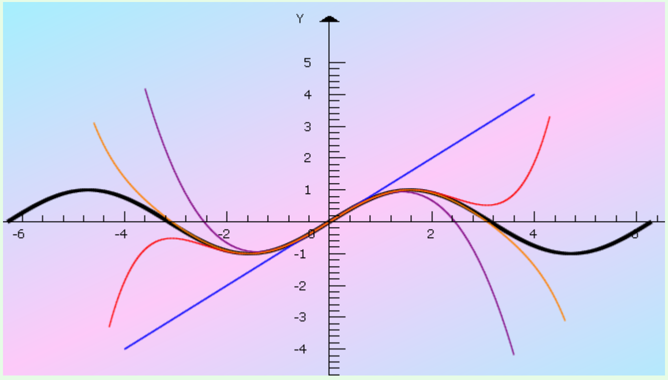
$$x^6 e^{x^3} = x^6 + x^9 + \frac{x^{12}}{2!} + \cdots + \frac{x^{3n+6}}{n!} + \ldots$$

從中找出第 60 階，就是 $\frac{x^{60}}{18!}$。將它的係數乘以 60!，得到

$$f^{(60)}(0) = \frac{1}{18!} \times 60!$$

1.3 泰勒定理與餘項

如前所示，雖然我們實際上沒辦法寫出無窮多項出來，但常常只要寫個前幾項就已有不錯的近似，寫越多項就越逼近。如下圖所示，$\sin(x)$ 的馬克勞林展開，寫得越多項，在 $x = 0$ 附近就與 $\sin(x)$ 越像。



$f(x) = \sin(x)$

$P_1(x) = x$

$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

Figure 2: $\sin(x)$ 的 k 階切近

現在我們來討論，如果我們預想好要近似到某種準確度，譬如說想要準確到小數點後四位，那我們能不能在展開前，預先估一下我們大概要算幾項呢？或者是，當我寫了 n 項出來，我如何知道我估的近似值跟精確值的誤差有多少呢 [10]？

Theorem 1.1. *泰勒定理*

若 $f(x)$ 在某個包含 a 點的開區間 I 上 $n+1$ 階可微，則對於任意的 $x \in I$，$f(x)$ 都可以展開為

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

其中

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1} \text{ ,} c \text{ between } x \text{ and } a$$

[10] 在前面幾題我們直接列出精確值與近似值作比較，那是因為我用數學軟體跑出來的。實際上我們紙筆計算時，當然不知道精確值是多少。

這個定理告訴我們，如果一個函數在某個開區間上可以微分 17 次的話，那麼我們就可以照著這個一般式來寫出泰勒展開，寫到第 16 階。至於它與原來的函數的差，我們就用 $R_{16}(x)$ 來代表這個差。就是說

$$R_{16}(x) = f(x) - p_{16}(x)\,,\quad p_{16}(x)\text{是展開到第 16 階的泰勒多項式}$$

一般來說，展開出 n 階的話，便有 $R_n(x)$ 來代表差。也就是說

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)\,,\quad p_n(x)\text{是展開到第 } n \text{ 階的泰勒多項式}$$

這叫做**餘項**，也可稱之為**誤差項** [11]。在這定理中還告訴我們餘項長什麼樣子，只要先照著泰勒多項式的一般項寫法，寫出下一項

$$\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

但注意 $f^{n+1}(\ )$ 裡面，那邊不是照著抄 a，而是改成某一個 c。這個 c 是介於 x 和 a 之間的某個數。這樣寫就剛好會是原函數與 n 階泰勒多項式之間的差。接著再把這個差，掛上絕對值，就是誤差。也就是說

$$\text{誤差} = |R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| = \left|\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$$

至於 c，我們只知道是 x 和 a 之間的某個數，並不知道到底是多少，這樣有用嗎？實際上我們可以用估計的方式，來說無論 c 是何值，這個誤差都小於等於某個值，如此一來雖無法確知誤差是多少，但至少可確定誤差不會超過那個值。

來點實際的例子讓你更了解我在說什麼。

example 18

以 5 階泰勒多項式估計 sin(1) 的近似值時，誤差大約是多少？

[11] 英文叫做 remainder，我們取其第一字母作符號。

解

sin(x) 的 5 階馬克勞林展開是

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

代入 $x = 1$，得到

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \;=\; \frac{101}{120} \;\doteqdot\; 0.8416667$$

這就是我們對 $\sin(1)$ 的估計值。現在我們想知道，這個估計值與精確值的誤差大概是多少。我們知道餘項

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6$$

我們是用馬克勞林展開所以 $a = 0$，而現在我們已經代 $x = 1$，並且誤差要掛絕對值，所以應該寫

$$|R_5(1)| = \left|\frac{f^{(6)}(c)}{6!}\right|$$

而 $\sin(x)$ 的六階微分就是 $-\sin(x)$，所以是

$$|R_5(1)| = \left|\frac{\sin(c)}{6!}\right|$$

不知道 c 是多少沒有關係，反正我們知道 $|\sin(x)| \le 1$，所以我們可以說

$$|R_5(1)| = \left|\frac{\sin(c)}{6!}\right| \le \frac{1}{6!} \doteqdot 0.00138889$$

這樣寫的意思是說，我不知道誤差的大小究竟如何。但最少最少，可以確定的是它不會超過 0.00138889。也許事實上 c 離 0 很近，使得 $\sin(c)$ 很小，也就是說誤差值實際上又遠小於 0.00138889。但我不管那麼多，反正我也求不出 c。至少我能確定，它一定不會超過 0.00138889 就對了。

實際用數學軟體去求 $\left|\sin(1) - \frac{101}{120}\right|$，得到大約是 0.000195682。還真的比 0.00138889 小了許多，不到它的六分之一。

example 19

以 4 階泰勒多項式估計 e 的近似值時，誤差大約是多少？

解

e^x 的 4 階馬克勞林展開，並且代 $x = 1$，得到

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \doteqdot 2.708333333$$

誤差則是

$$|R_4(1)| = \left|\frac{e^c}{5!}\right|$$

e^x 的 5 階微分仍是 e^x，接著代 c。我們是寫馬克勞林展開，所以 $a = 0$。至於 x 我們代 1，所以 $0 < c < 1$，這代表

$$e^0 < e^c < e^1$$

e 大約是 2.7，我說它小於 3 也沒關係。所以

$$|R_4(1)| = \left|\frac{e^c}{5!}\right| < \frac{e}{5!} < \frac{3}{5!} = 0.025$$

我們不知道誤差是多少，但至少有信心說誤差不超過 0.025。而精確誤差值是 $2.718281828 - 2.708333333 \doteqdot 0.009948495$，的確沒有超過。

example 20

請估計 $\sin(1)$ 的近似值使誤差小於 0.0001。

解

剛剛是指定寫出 5 階泰勒展開，估計誤差是多少。現在是反過來，指定誤差應控制在一定範圍內，我們要估一下我們必須至少寫到幾階。

我們知道誤差

$$|R_{2k+1}(1)| = \left|\frac{\sin(c)}{(2k+2)!}\right| < \frac{1}{(2k+2)!}$$

所以只要 $\frac{1}{(2k+2)!} < 0.0001$，便可確保誤差也小於 0.0001。所以我們解

$$\frac{1}{(2k+2)!} < \frac{1}{10000}$$
$$(2k+2)! > 10000$$

動手算算看，$6! = 720$ 不夠，$8! = 720 \times 56 > 700 \times 50 = 35000 > 10000$。所以只要 $2k+2 = 8$ 就可滿足誤差要求，也就是說 $2k+1 = 7$，我們要寫出 7 階泰勒展開。

example 21

請估計

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

使其誤差小於 0.001。

解

e^{x^2} 並沒有反導函數，所以我們沒辦法套用微積分基本定理來做出這個積分的精確值。但我們可以將它展開

$$\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \Big|_0^1$$
$$=1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \cdots$$
$$\doteqdot 0.7475$$

最後那個無窮級數是個交錯級數，我只加到 $\dfrac{1}{9\cdot 4!}$ 那一項。根據交錯級數的誤差估計法，誤差會小於將下一項掛絕對值，所以我們這裡的誤差會小於

$$\frac{1}{11\cdot 5!}=\frac{1}{1320}<0.001$$

這樣的確就確保誤差值小於 0.001 了。

你可能有疑問，我怎麼那麼厲害知道要加到 $\dfrac{1}{9\cdot 4!}$ 那一項？這是因為我首先知道交錯級數的誤差估計法，誤差會小於將下一項掛絕對值。於是我就直接看，看哪一項我是可以很確定它掛絕對值會小於 0.001 的，便看到 $-\dfrac{1}{11\cdot 5!}$ 這一項。既然這一項掛絕對值會小於 0.001，那麼我加到它的前一項，誤差就會小於 0.001 了。

餘項的寫法，為什麼會有一個介於 a 和 x 之間的 c 呢？我們先回想一下均值定理

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\ ,\quad c\in(a,b)$$

移項以後

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)\ ,\quad c\in(a,b)$$

仔細一看，它根本就是做零階泰勒展開

$$f(x)=f(a)+R_0(x)$$

然後再代 $x=b$ 嘛！所以你可以把泰勒定理想成是更高階的均值定理。

現在知道餘項該怎寫，便可以用它來看收斂區間了。請注意一下我們的用詞，同樣是「收斂區間」，泰勒展開的收斂區間與冪級數的收斂區間，意義並不相同。

冪級數的收斂區間是指，只要 x 在這區間內，代入冪級數以後，所形成的無窮級數會收斂。而泰勒展開的收斂區間是指，只要 x 在這區間內，代入泰勒級數以後，所形成的無窮級數不但會收斂，還要等於直接將 x 代在原函數。

舉例來說，這個函數

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

它在 $x = 0$ 處的各階微分都是 0

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 0$$

於是它的馬克勞林展開便是

$$0 + 0 + \cdots$$

這個長相很特別的「冪級數」，不管 x 代多少，都是每項皆 0，所以冪級數的收斂區間是 $\mathbb{R}$。但函數 $f(x)$ 只有在 $x = 0$ 的時候函數值才是 0，其它時候函數值皆不為 0，所以泰勒展開的收斂區間只有 $x = 0$ 處。

example 22

求 $\sin(x)$ 的馬克勞林展開的收斂區間。

解

將 $\sin(x)$ 展開至第 $2k+1$ 階 [12]，則餘項為

$$R_{2k+1}(x) = \frac{\sin(c)}{(2k+2)!}\ x^{2k+2}$$

所以 $2k+1$ 階泰勒多項式與原函數的誤差是

$$|R_{2k+1}(x)| = \left|\frac{\sin(c)}{(2k+2)!}\ x^{2k+2}\right| \leq \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\right|$$

如果我們做出無窮多項，那麼誤差便是

$$\lim_{k\to\infty} |R_{2k+1}| \leq \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\right| = 0$$

這意思是說，無論 x 是多少，餘項都會隨著 k 越來越大而趨近到 0。也就是收斂區間是整個實數。

[12] 因為 $\sin(x)$ 的泰勒展開只有奇次項。

前面 7 在求泰勒展開的收斂區間時，直接求展開出來的冪級數收斂區間。但現在又說，泰勒展開的收斂區間與冪級數收斂區間是不同一回事，應該要用 $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ 來確認。這並不是因為我還沒介紹餘項，所以前面姑且用錯誤的方法求出錯誤的區間。而是因為，雖然對於有些函數，例如前面的 5 ，其泰勒展開的收斂區間與冪級數收斂區間並不相同，但還是有某些函數，這兩區間是一模一樣的。像這種函數，實在太棒了！將它寫出泰勒級數出來，只要這個冪級數收斂的地方，也必然就收斂到原來的函數。這種函數，我們稱之為「解析函數」，並且頒予特級良民證，以資感謝。一般常見的多項式、指數函數、對數函數、三角函數等等，都是解析函數。而解析函數彼此拿來做加減乘除、合成，出來的結果也是解析函數。既然是解析函數，那我只須求泰勒級數的冪級數收斂區間，就會等同於泰勒展開的收斂區間了。