席位分配问题

题目：

学校共1000名学生，235人住在A宿舍，333人住在B宿舍，432人住在C宿舍.学生们要组织一个10人的委员会，试用下列办法分配各宿舍的委员数：

（1）. 按比例分配取整数的名额后,剩下的名额按惯例分给小数部分较大者;

（2）.用1.3中的Q值方法；

（3）.d’Hondt方法：将A、B、C各宿舍的人数用正整数n=1,2,3,……相除，其商数如下表：

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1 2 3 4 5 |
| A  B  C | 235 117.5 78.3 58.75 …  333 166.5 111 83.25 …  432 216 144 108 86.4 |

将所得商数从大到小取前10个（10为席位数），在数字下标以横线，表中A、B、C行有横线的数分别为2，3，5，这就是3个宿舍分配的席位.你能解释这种方法的道理吗？

如果委员会从10个人增至15人，用以上3种方法再分配名额，将3种方法两次分配的结果列表比较.

问题求解：

（1）. 按比例分配取整数的名额后,剩下的名额按惯例分给小数部分较大者;

由题意得，总人数为1000人，A宿舍235人，B宿舍333人，C宿舍432人，选10人组成10人委员会。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 宿舍 | 学生人数 | 比例分配 | 加惯例结果 |
| A | 235 | 2 | 3 |
| B | 333 | 3 | 3 |
| C | 432 | 4 | 4 |
| 总和 | 1000 | 9 | 10 |

（2）.用1.3中的Q值方法；

模型假设：

宿舍Q值越大，多出的委员数越应该分配给这一宿舍

符号说明：

p1：A宿舍学生人数 n1：A宿舍已分配到的委员数

p2：B宿舍学生人数 n2：B宿舍已分配到的委员数

p3：C宿舍学生人数 n3：C宿舍已分配到的委员数

rA：A的相对不公平度

rB：B的相对不公平度

rC：C的相对不公平度

Q = 

模型建立与求解：

首先给出衡量公平分配的数量指标：当 p1/n1 = p2/n2=p3/n3 时，分配公平；若 p1/n1 > p2/n2 ，则对A不公平，此时定义 p1/n1 − p2/n2 为对A的绝对不公平度, (p1/n1 − p2/n2)/(p2/n2)可以定义对A的相对不公平度rA(n1 , n2 )．公平分配方案应使rA和rB尽量小．

不妨先考虑A宿舍和B宿舍的委员数分配问题，那么不妨再设分配开始时p1/n1>p2/n2 ，即对A不公平 ，那么接下来我们讨论一下以下3种情况：

1° *p*1/(*n*1+1) > *p*2/*n*2 ，表明即使 A再增加 1个委员，仍对*A*不公平，这个委员数应该给*A*；

2° *p*1 /(*n*1 +1) < *p*2 /*n*2 ，表明*A*增加 1个委员时，将对*B*不公平，应计算rB(n2,n1+1) ；

3°p1/n1>p2/(p2+1)，表明*B*方增加 1个委员时，对*A*更加不公平，应计算 rA(n1,n2+1)；

若 rB(n2,n1+1)< rA(n1,n2+1)，根据rA (n1 , n2 )和rB (n2 , n1 )的定义可得 ，则这个席位应该给A 方；否则，该席位应该给B 。

根据比例加惯例和题意得到：

p1=235 n1=2

p2=333 n2=3

p3=432 n3=4

那么，由Q值法得到：

 9204.17

 =9240.75

 =9331.2

显然，<<，可知，多出的1名委员数应该分配给C宿舍。

由（1）问和Q值法得到：

分配给各宿舍的委员数： = 2  = 3  = 5

模型分析：

Q值法，在一定程度上保持了公平，将不公平降到了最低，即最大限度的保证了公平公正，在生活中也有广泛的应用，比如说国家选举党员数等等。

（3）.d’Hondt方法：将A、B、C各宿舍的人数用正整数n=1,2,3,……相除，所得商数从大到小取前10个（10为席位数），在数字下标以横线，表中A、B、C行有横线的数分别为2，3，5，这就是3个宿舍分配的席位.你能解释这种方法的道理吗？

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1 2 3 4 5 |
| A  B  C | 235 117.5 78.3 58.75 …  333 166.5 111 83.25 …  432 216 144 108 86.4 |

解：A宿舍有235人，分配到的委员数为2个，则235/2=117.5个人分得1个委员数；同理，B宿舍333人，分配到的委员数为3个，则333/3=111个人分得1个委员数；C宿舍432人，分配到的委员数为5个，则432/5=86.4个人分得1个委员数。

如果委员会从10个人增至15人，用以上3种方法再分配名额，将3种方法两次分配的结果列表比较.

方法一：（比例加惯例法）

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 宿舍 | 学生人数 | 10人分配 | | 15人分配 | |
| 比例分配 | 惯例分配 | 比例分配 | 惯例分配 |
| A | 235 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| B | 333 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| C | 432 | 4 | 4 | 6 | 6 |
| 总和 | 1000 | 9 | 10 | 13 | 15 |

方法二：（Q值法）

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 宿舍 | 学生人数 | 10人分配 | | | 15人分配 | | |
| 比例分配 | Q值 | 惯例分配 | 比例分配 | Q值 | 惯例分配 |
| A | 235 | 2 | 9204.17 | 3 | 3 | 4602.08 | 4 |
| B | 333 | 3 | 9240.75 | 3 | 4 | 5544.45 | 5 |
| C | 432 | 4 | 9331.2 | 4 | 6 | 4443.43 | 6 |
| 总和 | 1000 | 9 |  | 10 | 13 |  | 15 |

方法三：（d’Hondt法）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 宿舍 | 学生人数 | 10人分配 | 15人分配 |
| A | 235 | 2 | 3 |
| B | 333 | 3 | 5 |
| C | 432 | 5 | 7 |
| 总和 | 1000 | 10 | 15 |