第一章 行列式（数或式子）

一. defs

1. 逆序 — $\forall i, j \in N$, $i \neq j$

$$\begin{cases} i<j, (i,j) \text{—顺序} \\ i>j, (i,j) \text{—逆序} \end{cases}$$

2. 逆序数 — $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的排列.
其中含逆序个数之和称为逆序数。符号为 $\tau(\ )$.
Ex. $\tau(615324) = 5+3+1+0 = 9$

3. 行列式 — $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$.

4. ~~余子式~~.余子式,代数余子式 — $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

取 a_{ij}. D中去掉i行,j列形成 $n-1$ 阶行列式. 记 M_{ij} — a_{ij} 的余子式

$A_{ij} \triangleq (-1)^{i+j} M_{ij}$.
↳ a_{ij} 的代数余子式

如: $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$M_{11} = 7$, $A_{11} = 7$

$M_{12} = 7$. $A_{12} = -7$

二.易算:

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

2. $$\begin{vmatrix} & & & k_1 \\ & & k_2 & \\ & \cdots & & \\ k_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} k_1 k_2 \cdots k_n$$

$\tau(n \cdots 2.1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

3. $V_n =$ $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \cdots & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j)$$

范德蒙行列式

Ex. $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$

$V_3 = (a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$

$V_4 = (a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$

Note:

$V_n \neq 0 \Leftrightarrow a_1, \cdots a_n$ 两两不等.