一阶逻辑（一）
第五章 - 哥德尔完全性定理

姚宁远

复旦大学哲学学院

October 18, 2021

目录

可靠性定理

可靠性定理

如果 $\Gamma \vdash \phi$，则 $\Gamma \models \phi$.

Proof.

- 验证逻辑公理的普遍有效性；
- 验证推理规则的普遍有效性；
- 对证明序列的长度归纳证明。

$\square$

验证推理规则的普遍有效性

- $\Gamma \models \psi \to \phi$;
- $\Gamma \models \psi$;
- $\Rightarrow \Gamma \models \phi$。

验证逻辑公理的普遍有效性

1. A(1)，A(2)，A(3)（显然）；
2. $\forall\alpha \to \alpha^x_t$，其中 t 在 α 中可以替换 x；
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$；
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现；
5. $x = x$（显然）；
6. $(x = y) \to (\alpha \to \alpha')$，其中 α 为原子公式，并且 α' 是将 α 中的若干个 x 的自由出现替换为 y 而得到；

第二组公理的普遍有效性

引理

设 $\mathfrak{U} = (U, \ldots)$ 是一个 L-结构。$s : V \to U$ 是一个赋值。如果 t 可以在公式 ϕ 中替换变元 x，且 $s(\overline{t}) = d$，则

$$(\mathfrak{U}, s) \models \phi_t^x \iff (\mathfrak{U}, s_d^x) \models \phi.$$

第二组公理的普遍有效性-证明

- 设 $\bar{s}(t)=d$, 对项 u 归纳证明 $\bar{s}(u^x_t)=\overline{s^x_d}(u)$；
- 对公式 ϕ 的长度归纳证明。
- 原子公式：$u_1=u_2$ 或者 $Pu_1...u_n$；
- $(\mathfrak{U},s)\models(u_1=u_2)^x_t\Leftrightarrow\bar{s}({u_1}^x_t)=\bar{s}({u_2}^x_t)\Leftrightarrow(\mathfrak{U},s^x_d)\models(u_1=u_2)$；
- 否定公式 $\neg\psi$ 和蕴含公式 $\psi_1\to\psi_2$ 由归纳假设容易证明；
- 设 ϕ 是全称公式：$\forall y\psi$ （$y\neq x$ 且 $y\notin t$）。
- 则 $(\mathfrak{U},s)\models\phi^x_t$ 当且仅当对每个 $e\in|\mathfrak{U}|$ 有 $(\mathfrak{U},(s^y_e))\psi^x_t$
- 根据归纳假设，当且仅当对每个 $e\in|\mathfrak{U}|$ 有 $(\mathfrak{U},(s^y_e)^x_d)\models\psi$
- 显然 $(s^y_e)^x_d=(s^x_d)^y_e$，故对每个 $e\in|\mathfrak{U}|$ 有 $(\mathfrak{U},(s^x_d)^y_e)\models(\psi)$.
- 即，当且仅当 $(\mathfrak{U},s^x_d)\models\forall y\psi$

第三组公理的普遍有效性

第三组公理普遍有效性的证明

$\{\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\alpha\} \models \forall x\beta.$

第四组公理的普遍有效性

$\models \alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现。

根据定理 5.1.1：对任意结构 $\mathfrak{U}$，任意赋值 s，以及任意 $d \in |\mathfrak{U}|$，有

证明

对任意结构 $\mathfrak{U}$，任意赋值 s，以及任意 $d \in |\mathfrak{U}|$

- s 与 s_d^x 在 α 的自由变元上的取值相同;
- $(\mathfrak{U}, s) \models \alpha \iff (\mathfrak{U}, s_d^x) \models \alpha$;
- 故 $(\mathfrak{U}, s) \models \alpha \iff (\mathfrak{U}, s) \models \forall x\alpha$。

推论

推论

1. 如果 $\vdash (\phi \leftrightarrow \psi)$，则 ϕ 与 ψ 语义等价；
2. 如果 Γ 是可满足的，则 Γ 是一致的。

目录

完全性定理

完全性定理

1. 如果 $\Gamma \models \phi$，则 $\Gamma \vdash \phi$；
2. 如果 Γ 是一致的，则 Γ 是可满足的。

辛钦性质

辛钦性质

成一个句子集 Γ 具有**辛钦性质**是指：若 $\exists x\phi \in \Gamma$，则存在常数符号 c 使得 $\phi_c^x \in \Gamma$.

辛钦构造 I

枚举引理

设 L 是可数的语言，$\{c_0, c_1, c_2, ...\}$ 是一个可数多个常数符号的集合，则存在 L-句子集的一个枚举 $S = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, ...\}$ 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$c_n \notin \theta_0, ..., \theta_{n-1}.$$

辛钦构造 II

Proof.

设 $f:\mathbb{N}\to S$ 是 L-句子集的一个枚举。递归构造函数序列 $\{f_n|\ n\in\mathbb{N}\}$ 如下：

1. $f_0=f$;
2. 设 f_n 已经构造好了，则
   - $f_{n+1}(n)=f_n(d)$，$f_{n+1}(d)=f_n(n)$，其中 $d\geq n$ 是最小的使得 $c_n,c_{n+1},\ldots\notin f_n(d)$ 的自然数；
   - $f_{n+1}(k)=f_n(k)$，其中 $k\neq n,d$.

令 $F:\mathbb{N}\to S$ 为 $F(n)=f_n(n)$，则 F 是双射且 $c_n\notin F(0),\ldots,F(n)$. □

辛钦构造 III

引理

- 设 L 是可数的语言；
- $C = \{c_0, c_1, c_2, ...\}$ 是一个可数的新常数符号集合；
- Γ 是一致的 L-句子集，

则存在极大一致 L_C-句子集 Γ^* 使得 Γ^* 具有辛钦性质。

辛钦构造 IV （证明-构造 Γ^*）

设 $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, ...\}$ 是全体 L_C 句子的一个枚举使得 $c_n \notin \theta_0, ..., \theta_n$，递归构造序列 $\{\Gamma_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ 如下：

- $\Gamma_0 = \Gamma$；
- 设 Γ_n 已经构造好了，则

  一致性扩张 如果 $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ 一致，则 $\Gamma^0_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\theta_n\}$，否则 $\Gamma^0_{n+1} = \Gamma_n$;

  辛钦扩张 如果 $\Gamma^0_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ 且 θ_n 形如 $\exists x \phi$，则 $\Gamma_{n+1} = \Gamma^0_{n+1} \cup \{\phi^x_{c_n}\}$，否则 $\Gamma_{n+1} = \Gamma^0_{n+1}$
- 令 $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$，则 Γ^*极大一致且具有辛钦性质。

辛钦构造 V

引理

Γ^* 满足以下性质：

- 对每个句子 ϕ，有 $\neg\phi \in \Gamma^*$ 当且仅当 $\phi \notin \Gamma^*$；
- 对每个句子 ϕ 和 ψ，$\phi \to \psi \in \Gamma^*$ 当且仅当 $\phi \notin \Gamma^*$ 或 $\psi \in \Gamma^*$；
- 若 ϕ 是含有自由变元 x 的公式，则 $\exists x\phi \in \Gamma^*$ 当且仅当存在常元 c 使得 $\phi^x_c \in \Gamma^*$.

辛钦构造 VI-论域

完全性定理的证明

存在 L_C-结构 $\mathfrak{U} = (U, \ldots)$ 满足 Γ^*.

在 L_C 的常数符号集上有一个 $\mod \Gamma^*$ 等价关系：

$$c \sim d \iff \Gamma^* \vdash c = d.$$

令

$$U = \{[c] | \ c \in L_C\}$$

对每个 $c \in L_C$，有 $\exists x(x = c) \in \Gamma^*$，由以上构造可知，存在 c_n 使得 $c_n = c \in \Gamma^*$，即

$$U = \{[c] | \ c \in C\} = \{[c_n] | \ n \in \mathbb{N}\}.$$

辛钦构造 VII-闭项

练习

对任意的闭项 t_1, t_2，定义 $t_1 \sim t_2 \iff t_1 = t_2 \in \Gamma^*$，则闭项的集合$/\sim$ 与 U 之间有一个自然的双射。

辛钦构造 vIII-解释

设 $d_1, ..., d_n, c$ 均是常数符号，则

常数符号 c 的解释 $c^{\mathfrak{A}} = [c]$;

函数符号 f 的解释

$$f^{\mathfrak{A}}([d_1], ..., [d_n]) = [c] \iff f(d_1, ..., d_n) = c \in \Gamma^*;$$

谓词符号 P 的解释 $([d_1], ..., [d_n]) \in P^{\mathfrak{A}} \iff P(d_1, ..., d_n) \in \Gamma^*$.

结构 $\mathfrak{U}$ 的良定性

设 $d_1 \sim e_1, ..., d_n \sim e_n$，验证以下事实：

1. 函数符号 f 的解释与代表元的选取无关，即
   1. $f^{\mathfrak{U}}$ 在 $([d_1], ..., [d_n])$ 处有定义；
   2. $f^{\mathfrak{U}}([d_1], ..., [d_n]) = f^{\mathfrak{U}}([e_1], ..., [e_n])$。
2. 谓词符号 P 的解释与代表元的选取无关，即

$$([d_1], ..., [d_n]) \in P^{\mathfrak{U}} \iff ([e_1], ..., [e_n]) \in P^{\mathfrak{U}}$$

结构 $\mathfrak{U}$ 满足 Γ^*

定理

对每个 L_C-句子，有

$$\mathfrak{U} \models \sigma \iff \sigma \in \Gamma^*.$$

需要先证明以下引理

引理

对每个 L_C-闭项 t，有

- 存在常数符号 c 使得 $t = c \in \Gamma^*$；
- $t = c \in \Gamma^*$ 当且仅当 $t^{\mathfrak{U}} = [c]$。

目录

紧致性定理

紧致性定理

设 Γ 是一个公式集，ϕ 是一个公式，则

1. 如果 $\Gamma \models \phi$，则存在有限的 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 使得 $\Gamma_0 \models \phi$；
2. 如果 Γ 的每个有穷子集 Γ_0 都是可满足的，则 Γ 是可满足的。

紧致性定理是完全性定理的直接推论。

紧致性定理拓扑解释

定义

设 X 是一个集合，$\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$，如果

1. $\emptyset \in \tau$，$X \in \tau$；
2. τ 关于有限交封闭；
3. τ 关于任意交封闭，

则称 (X, τ) 是一个拓扑空间，同时称 τ 中的元素为 X 的开子集，称 τ 中的元素的补集为闭集。

紧致性定理拓扑解释

定义

设 (X, τ) 是拓扑空间，如果对任意一族开集 $\{O_i |\ i \in I\}$ 使得

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i,$$

都存在 I 的有限子集 I_0 使得

$$X = \bigcup_{i \in I_0} O_i,$$

则称 X 是紧空间。

紧致性定理拓扑解释

定义

设 (X, τ) 是拓扑空间，如果对任意一族闭集 $\{U_i | \ i \in I\}$ 使得

$$\bigcap_{i \in I} U_i = \emptyset,$$

都存在 I 的有限子集 I_0 使得

$$\bigcap_{i \in I_0} U_i = \emptyset,$$

则称 X 是紧空间。

Stone 空间

设 L 是一个语言。

1. $\mathfrak{X} = \{\Gamma \mid \Gamma$ 是极大一致的L-句子集$\}$
2. 设 Σ 是一个 L-句子集，令

$$[\Sigma] = \{\Gamma \in \mathfrak{X} \mid \Sigma \subseteq \Gamma\}$$

3. $U \subseteq \mathfrak{X}$ 是闭集当且仅当存在句子集 Σ 使得 $U = [\Sigma]$.

Stone 空间

引理

$\mathfrak{X}$ 是一个拓扑空间。

Proof.

1. $\emptyset = [\{\sigma, \neg\sigma\}]$，$\mathfrak{X} = [\{\forall x(x = x)\}]$;
2. $[\Sigma_1] \cup [\Sigma_2] = [\{\sigma_1 \vee \sigma_2 | \ \sigma_1 \in \Sigma_1, \ \sigma_2 \in \Sigma_2\}]$;
3. $[\Sigma_1] \cap [\Sigma_2] = [\Sigma_1 \cup \Sigma_2]$.

$\square$

语法紧致性

引理

$\mathfrak{X}$ 是一个紧的拓扑空间。

证明

Proof.

设 σ 是一个句子，将 $[\{\sigma\}]$ 记作 $[\sigma]$。假设句子集 Σ 总是关于 $\vdash$ 封闭的。

1. $\mathfrak{X}\backslash[\sigma] = [\neg\sigma]$，故 $[\sigma]$ 是一个开闭集;
2. 设 $O \subseteq \mathfrak{X}$ 是开集，则 $O = \mathfrak{X}\backslash[\Sigma]$，从而 $O = \bigcup_{\sigma\notin\Sigma}[\sigma]$;
3. $\{[\sigma]|\ \sigma$是L-句子$\}$ 是拓扑基;
4. 只需证明：如果 $\{[\sigma_i]|\ ui \in I\}$ 是 $\mathfrak{X}$ 的覆盖，则存在有穷子集 $I_0 \subseteq I$ 使得 $\mathfrak{X} = \bigcup_{i\in I_0}[\sigma_i]$;
5. $\mathfrak{X} = \bigcup_{i\in I}[\sigma_i] \iff \bigcap_{i\in I}[\neg\sigma_i] = \emptyset \iff \{\neg\sigma_i|\ i \in I\}$ 不一致
6. $\{\neg\sigma_i|\ i \in I\}$ 不一致 $\iff$ 存在有限子集 $I_0 \subseteq I$ 使得 $\{\neg\sigma_i|\ i \in I_0\}$ 不一致 $\iff \mathfrak{X} = \bigcup_{i\in I_0}[\sigma_i]$

$\square$

语义紧致性

注

以上证明没有用到“紧致性定理”。

令 L 是一个语言。

1. $\mathfrak{X}^* = \{\mathfrak{A} | \mathfrak{A}是一个L\text{-}结构\}$
2. 设 Σ 是一个 L-句子集，令

$$[\Sigma]^* = \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}^* | \mathfrak{A} \models \}$$

3. $U \subseteq \mathfrak{X}^*$ 是闭集当且仅当存在句子集 Σ 使得 $U = [\Sigma]^*$.

则根据紧致性定理，$\mathfrak{X}^*$ 是一个紧空间。

超滤

定义

设 X 是一个集合，$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$，如果

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$，$X \in \mathcal{U}$；
2. $\mathcal{U}$ 关于有限交封闭，即 $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$；
3. $\mathcal{U}$ 向上封闭，即 $A \in \mathcal{U}$，$A \subseteq B \subseteq X$，则 $B \in \mathcal{U}$，

则称称 $\mathcal{U}$ 是 X 上的滤子。如果对任意的 $A \subseteq X$，有 $A \in \mathcal{U}$ 或者 $X \backslash A \in \mathcal{U}$，则称 $\mathcal{U}$ 是超滤。

超积 I

定义

设 I 是一个集合，$\mathcal{U}$ 是 I 上的一个超滤，$\{\mathfrak{M}_i | \ i \in I\}$ 是一族 L-结构。令

1. $\mathcal{D} = \Pi_{i \in I} M_i = \{(a_i)_{i \in I} | \ a_i \in M_i\}$；
2. $(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I | \ a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$；
3. $M = \mathcal{D}/\sim = \{[a] | \ a \in \mathcal{D}\}$;
4. $c^{\mathfrak{M}} = [(c^{\mathfrak{M}_i})_{i \in I}]$;
5. $f^{\mathfrak{M}}([a_1], \ldots, [a_n]) = [(f^{\mathfrak{M}_i}(a_{1i}, \ldots, a_{ni}))_{i \in I}]$;
6. $([a_1], \ldots, [a_n]) \in R^{\mathfrak{M}} \iff \{i \in I | \ (a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in \mathcal{U}$;

称 $\mathfrak{M} = (M, c^{\mathfrak{M}}, \ f^{\mathfrak{M}}, \ R^{\mathfrak{M}} \ldots.)$ 为 $\{\mathfrak{M}_i | \ i \in I\}$ 关于 $\mathcal{U}$ 的超积，记作 $\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}_i$.

超积 II

引理

$\Pi_{\mathcal{U}}\mathfrak{M}_i$ 是一个 L-结构

证明：验证 $f^{\mathfrak{M}}$ 和 $R^{\mathfrak{M}}$ 的良定性。

- 设 $a_1=(a_{1,i})_{i\in I},...,a_n=(a_{n,i})_{i\in I}$;
- $b_1=(b_{1,i})_{i\in I},...,b_n=(b_{n,i})_{i\in I}$;
- 满足：$a_1\sim b_1,...,a_n\sim b_n$.
- 设 $U_1=\{i\in I|\ a_{1,i}=b_{1,i}\}$, ..., $U_n=\{i\in I|\ a_{n,i}=b_{n,i}\}$
- 令 $U=\bigcap_{k\leq n}U_k$，则 $U\in\mathcal{U}$ 且
- 对每个 $i\in U$，$f^{\mathfrak{M}_i}(a_{1i},...,a_{ni})=f^{\mathfrak{M}_i}(b_{1i},...,b_{ni})$
- 故 $f^{\mathfrak{M}}([a_1],...,[a_n])=f^{\mathfrak{M}}([b_1],...,[b_n])$;
- 若 $([a_1],...,[a_n])\in R^{\mathfrak{M}}$，

超积 III

- 则 $\{i \in I | (a_{1i}, ..., a_{ni}) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in \mathcal{U}$;
- 故 $\{i \in I | (a_{1i}, ..., a_{ni}) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \cap U \in \mathcal{U}$
- $\{i \in I | (a_{1i}, ..., a_{ni}) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \cap U \subseteq \{i \in I | (b_{1i}, ..., b_{ni}) \in R^{\mathfrak{M}_i}\}$
- 从而 $([b_1], ..., [b_n]) \in R^{\mathfrak{M}}$。反之亦然。

例

令 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤。考虑结构 $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, <, 0, 1)$，令每个 $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}$，令 $\mathcal{Z}^{\mathcal{U}} = \Pi_{\mathcal{U}} \mathcal{Z}_n$。

- $n \mapsto [(n, n, ...)]$ 是 $\mathcal{Z}$ 到 $\mathcal{Z}^{\mathcal{U}}$ 的嵌入;
- 如果 $\mathcal{U}$ 是主滤，则 $\mathcal{Z} \cong \mathcal{Z}^{\mathcal{U}}$;
- 如果对每个 $n > 0$，$n\mathbb{N} = \{0, n, 2n, 3n, ...\} \in \mathcal{U}$
- 则 $x = [(0, 1, 2, 3, 4, ...)]$ 满足:

超积 IV

- 对每个 $n \in \mathbb{N}$，有 $[(n, n, ...)] < x$；
- 对每个 $n \in \mathbb{N}$，有 $\mathcal{Z}^{\mathcal{U}} \models \exists y(ny = x)$.

超积定理 I

Łós 超积定理

设 $\Pi_{\mathcal{U}}\mathfrak{M}_i$ 是 $\{\mathfrak{M}_i|\ i \in I\}$ 关于 $\mathcal{U}$ 的超积，σ 是一个 L-句子，则

$$\Pi_{\mathcal{U}}\mathfrak{M}_i \models \sigma \iff \{i \in I|\ \mathfrak{M}_i \models \sigma\} \in \mathcal{U}$$

超积定理 II

引理

设 $t_1(x_1, ..., x_n)$ 和 $t_2(x_1, ..., x_n)$ 是两个项，$a_1, ..., a_n \in \Pi_{i \in I}\mathfrak{M}_i$，则

$$t_1^{\mathfrak{M}}([a_1], ..., [a_n]) = t_2^{\mathfrak{M}}([b_1], ..., [b_n])$$

当且仅当

$$\{i \in I | \ t_1^{\mathfrak{M}_i}(a_{1i}, ..., a_{ni})\} = t_2^{\mathfrak{M}_i}(a_{1i}, ..., a_{ni})\} \in \mathcal{U}.$$

Łós 超积定理的证明：对 σ 的长度归纳证明：

- σ 是 $t_1 = t_2$，其中 t_1, t_2 是闭项；
- σ 是 $R(t_1, ..., t_n)$，其中 $t_1, ..., t_n$ 是闭项；
- σ 是 $\neg\psi$;

超积定理 III

- σ 是 $\phi \vee \psi$;
- σ 是 $\exists x \psi(x)$.

紧致性定理的证明

设 Γ 的任意有限子集都可满足。

- 令 I 为 Γ 的全体有限子集；
- 对每个 $i \in I$，令 M_i 是 i 的模型；
- 对每个 $\sigma \in \Gamma$，令 $X_\sigma = \{i \in I | \mathfrak{M}_i \models \sigma\}$；
- $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2} = X_{\sigma \wedge \sigma_2}$；
- $\{X_\sigma | \sigma \in \Gamma\}$ 具有有限交性质；
- 存在一个包含 $\{X_\sigma | \sigma \in \Gamma\}$ 的超滤 $\mathcal{U}$；
- 对每个 $\sigma \in \Gamma$，$\{i \in I | \mathfrak{M}_i \models \sigma\} = X_\sigma \in \mathcal{U}$
- 根据 Łós 超积定理，$\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}_i \models \sigma$。

无穷模型

定理

如果句子集 Σ 有任意大的有穷模型，则 Σ 有无穷模型。

定理

有穷模型的类不是初等类。

挠群

定义

称 G 是一个挠群，如果对每个 $g \in G$，存在 n 使得 $g^n = 1_G$。

定理

挠群的类不是初等类。

连通图

定理

连通图的类不是初等类。

连通图

1. 有限图不是初等类;
2. 有限度数的图不是初等类;
3. p-群不是初等类;
4. 有限域不是初等类;

定理

一类结构 $\mathcal{K}$ 是初等类当且仅当 $\mathcal{K}$ 对于超积封闭。

无穷小量

- $(\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1)$
- $$\mathrm{Th}(\mathbb{R}, r)_{r\in\mathbb{R}} = \{\phi(r_1, ..., r_n) | \ \mathbb{R} \models \phi[r_1, ..., r_n], \phi \in L, n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{R}\}$$
  是一个一致的 $L \cup \mathbb{R}$-句子集；
- $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, r)_{r\in\mathbb{R}} \cup \{0 < c < 1/n | \ n \in \mathbb{N}^+\}$ 是一致的；
- $\mathfrak{R}^* \models \mathrm{Th}(\mathbb{R}, r)_{r\in\mathbb{R}} \cup \{0 < c < 1/n | \ n \in \mathbb{N}^+\}$；
- $c^{\mathfrak{R}^*} \in \mathbb{R}^*$ 是一个无穷小量；
- $\mathrm{st} : \mathrm{Bd}(\mathbb{R}^*) \to \mathbb{R}$ 是标准映射；

导数

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个函数。用 μ 表示（某一个）无穷小量。则 f 在 x_0 处可导当且仅当

$$\frac{f(x_0+\mu)-f(x)}{\mu} \text{ 与 } \frac{f(x_0-\mu)-f(x)}{-\mu}$$

均属于 $\mathrm{Bd}(\mathbb{R}^*)$; 且

$$\mathrm{st}\left(\frac{f(x_0+\mu)-f(x)}{\mu}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x_0-\mu)-f(x)}{-\mu}\right).$$

此时 $f'(x_0) = \mathrm{st}(\frac{f(x_0+\mu)-f(x)}{\mu})$.

自然数的非标准模型

- $(\mathbb{N}, <, S, 0, 1)$
- $\mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{c > n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是一致的；
- $\mathfrak{N}^* \models \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{c > n \mid n \in \mathbb{N}\}$；
- $c^{\mathfrak{N}^*} \in \mathbb{N}^*$ 是一个无穷大的量；

无穷图的四色定理

1. 有限图 $G=(V,E)$ 是平面图是指 G 可以画在在平面上使得边互不相交；
2. 无限图 $G=(V,E)$ 是平面图是指它的每个有限子图是平面图；

有穷四色定理

设 G 是有限平面图，则可以对 G 的顶点集着四种颜色，使得相邻的点不同色。

无穷四色定理

设 G 是无穷平面图，则可以对 G 的顶点集着四种颜色，使得相邻的点不同色。

证明

设 $G=(V,E^G)$ 是一个无穷平面图。

- $L=\{E,R,W,B,Y\}$
- σ: R,W,B,Y 是一个划分；
- σ_R: $\forall x,y(E(x,y)\to\neg(R(x)\wedge R(y)))$；
- $\sigma_W,\sigma_B,\sigma_Y$ 类似；
- $\mathrm{Diag}(G)=\{\phi(a_1,...,a_n)|\ G\models\phi[a_1,...,a_n]|\ a_i\in V,\ \phi\in L\}$；
- $L_V=L\cup V$;
- $\Sigma=\mathrm{Diag}(G)\cup\{\sigma,\sigma_R,\sigma_W,\sigma_B,\sigma_Y\}$ 是一个一致的 L_V-句子集；
- 令 $G'=(V',E^{G'})\models\Sigma$，则 $v\mapsto v^{G'}$ 是 G 到 G' 的单射同态。

证明 2

不妨设 $V = \mathbb{N}$。

- 映射 $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3\} = 4$ 是一个着色方案；
- $X = \{f :\ f\text{是着色方案}\} = 4^{\mathbb{N}} = \Pi_{\mathbb{N}}\{0, 1, 2.3\}$；
- 定义 $X_{n,i} = \{f \in X |\ f(n) = i\}$；
- 定义 X 的开集为任意多个 $X_{n,i}$ 的并，$n \in \mathbb{N}, i = 0, 1, 2, 3$；
- $X_{n,i}$ 是开闭集；
- 由吉洪诺夫定理，X 是一个紧空间；
- 对任意子集 $A \subseteq \mathbb{N}$，$F(A) = \{f : A \to 4 |\ f\text{是好的着色方案}\}$;
- 对任意有穷的 $A \subseteq \mathbb{N}$，$F(A)$ 是闭集；
- 对任意的 $A, B \subseteq \mathbb{N}$，有 $F(A \cup B) \subseteq F(A) \cap F(B)$；
- 根据四色定理，$\{F(A) |\ A \subseteq \mathbb{N},\ A\text{有穷}\}$ 具有有限交性质。
- $\bigcap_{A \subseteq \mathbb{N},\ A\text{有穷}} F(A) \neq \emptyset$，$f \in \bigcap_{A \subseteq \mathbb{N},\ A\text{有穷}} F(A) \Rightarrow f \in F(\mathbb{N})$.

Thanks!