Homework

陈淇奥
21210160025

2021 年 11 月 29 日

Exercise 1 (3.2.13). 如果 F 是由 G 生成的滤，则 F 是包含 G 的最小的滤，即 $G \subseteq F$ 并且如果 $F' \supseteq G$ 也是滤，则 $F \subseteq F'$

证明. 对任意 $x \in F$，存在 $g \in G$ 使得 $g \leq b$。因为 F' 是包含 G 的滤，$g \in F'$，于是对于任意 $g \leq b$ 都有 $b \in F'$，因此 $x \in F'$ □

Exercise 2 (3.2.16). 假设 $G \subseteq B$ 为非空子集，F 是由 G 生成的滤，则以下命题等价

1. G 是单点集

2. F 是超滤

3. F 是主超滤

证明. 若 G 有有限交性质，F 是由 G 生成的主滤（书上这里写了主滤），则以下命题等价

1. G 包含原子的单点集

2. F 是超滤

3. F 是主超滤

$1 \to 2$。因为 G 有有限交性质，G 只包含一个原子 a，因为对任意 $b \in B$，或者 $a \leq b$ 或者 $a \leq -b$，因此 G 是超滤。

$3 \to 2$。显然。

$3 \to 1$。若 F 是主超滤，假设它由 $\{a\}$ 生成，则对于任意 $b \in B$，$a \leq b$ 或者 $a \leq -b$。因此 a 是原子且 $a \in G$。

$2 \to 3$。显然。 □

Exercise 3 (3.2.18). 如果 $a \neq b$，则存在超滤 U，$a \in U$ 但 $b \notin U$

证明. 如果 $a < b$，则任何包含 a 的滤都包含 b □

Exercise 4 (3.2.19). 令 F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤，令 $(\{0,1\}, +, \cdot, -, 0, 1)$ 为两个元素的布尔代数。定义 $f : B \to \{0,1\}$ 为

$$f(b) = \begin{cases} 1 & b \in F \\ 0 & b \notin F \end{cases}$$

证明：F 是超滤当且仅当 f 是布尔代数 $\mathcal{B}$ 到 $\{0,1\}$ 的同态映射

证明. 若 F 是超滤，则 $f(0) = 0$ 且 $f(1) = 1$。因为 $a \cdot b \in F$ 当且仅当 $a \in F \wedge b \in F$，因此 $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$。而 $a + b \in F$ 当且仅当 $a \in F \vee b \in F$，因此 $f(a+b) = f(a) + f(b)$。因此 f 是同态映射

若 f 是同态映射，于是有 $a \cdot b \in F \Leftrightarrow a \in F \wedge b \in F$ 且 $a + b \in F \Leftrightarrow a \in F \vee b \in F$。若 $a, -a \notin F$，则 $a + (-a) = 1 \notin F$，矛盾。因此 F 是超滤。 □

Exercise 5 (3.2.33). 令 X 为任意集合。

1. 如果 X 是可数集合，则 $\mathcal{P}(X)$ 上的所有 $\aleph_1$-完全滤都是主滤
2. 如果 X 不可数，则 $\{G \subset X \mid |G| \leq \aleph_0\}$ 是 X 上 $\aleph_1$-完全的理想
3. 如果 $\kappa > \aleph_1$ 正则，而 $|X| \geq \kappa$，则 $I = \{G \subset S \mid |G| < \kappa\}$ 是 κ-完全的理想

证明. 1.

2. 令 $I = \{G \subset X \mid |G| \leq \aleph_0\}$，因为可数集合的可数并依然可数，因此 I 是 $\aleph_1$-完全的。下证 I 是理想。首先 $\emptyset \in I$，对于任意 $X, Y \in I$，$|X \cap Y| \leq |X| \leq \aleph_0$，因此 $X \cap Y \in I$。若 $X \in I$ 且 $Y \subset X$，则 $Y \in I$

3. 对 I 的任意子集 I' 且 $|I'| = \gamma < \kappa$，有一个枚举 $I' = \{I_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$，定义 Y_α 为

$$
\begin{aligned}
&Y_0 = \{I_0\} \\
&Y_\alpha = Y_\beta \cup \{I_\alpha\} \qquad \alpha = \beta + 1 \\
&Y_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} Y_\alpha \qquad \alpha\text{是极限序数}
\end{aligned}
$$

于是有

$$
Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots
$$

且对于任意 $\alpha < \gamma$，$|Y_\alpha| < \gamma$。因为 $I' = \bigcup_{\alpha<\gamma} Y_\alpha$，又因为 κ 正则，于是 $|I'| < \kappa$，因此 $\bigcap I' \in I$，I 是 κ-完全的理想

$\square$