集合论期中测试

1. 递归定义**贝茨函数 (beth function)**$\beth : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 为：$\beth(0) = \aleph_0$，$\beth(\alpha+1) = 2^{\aleph_\alpha}$，对于极限序数 γ，$\beth(\gamma) = sup\{2^{\aleph_\xi} \mid \xi < \gamma\}$。证明：

（1）$|V_{\omega_\alpha}| = \beth_\alpha$。（2）对任意 α，存在 $\epsilon > \alpha$，ϵ 是 $\beth : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 的不动点。

Proof. 1. 施归纳于 α。

对于 $\alpha = 0$，$|V_{\omega_0} = |\bigcup_{n<\omega} V_n| = \aleph_0$

对于后继序数 $\alpha = \beta + 1$，$|V_{\omega_\alpha}| = |\bigcup_{\gamma<\omega_\alpha} V_\gamma| = 2^{|\aleph_\beta|} = \beth_\alpha$

对于极限序数 λ，$|V_{\omega_\lambda}| = |\bigcup_{\xi<\omega_\lambda} V_\xi| = sup_{\xi<\lambda} 2^{\aleph_\xi} = \beth_\lambda$

2. 给定 α，构造函数如下：

$\beth^0(\alpha) = \alpha$; $\beth^{n+1}(\alpha) = \beth(\beth^n(\alpha))$; $\beth^\omega(\alpha) = \bigcup_{n<\omega} \beth^n(\alpha)$

那么，若 α 是不动点，则所有这些都是不动点。否则，首先我们有 $\beth^\omega(\alpha)$ 是极限序数，那么 $\beth(\beth^\omega(\alpha)) = \bigcup_{\xi<\beth^\omega(\alpha)} \beth(\xi)$。而若 $\xi < \beth^\omega(\alpha)$，则对于某个 $n < \omega$，有 $\xi < \beth^n(\alpha)$，则 $\beth(\xi) < \beth^{n+1}(\alpha)$，且 $\beth(\beth^\omega(\alpha)) \leq \bigcup_{n<\omega} \beth^{n+1}(\alpha) = \beth^\omega(\alpha)$。则 $\beth^\omega(\alpha)$ 是一个不动点。

□

2. 对任意序数 α, β，$cf(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) > \aleph_\beta$。

Proof. 若 $cf(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) \leq \aleph_\beta$，则

$$(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})^{cf(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})} \leq (\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$$

与寇尼希定理矛盾。

□

3. 假设 κ 是不可达基数，证明：对任意 $X \in V_\kappa$，任意函数 $f : X \to V_\kappa$，$f[X] \in V_\kappa$。这就是说替换公理在 V_κ 中成立。

Proof. 由于 κ 是不可达基数，则 κ 正则，则对于任意 $X \in V_\kappa$ 到 V_κ 的函数 f，f 有界。

$\square$

4. 找到函数 $f : \omega \to \omega + \omega$ 和 $g : \omega + \omega \to \omega + \omega + \omega$ 满足：

（1）$sup(f[\omega]) = \omega + \omega$，

（2）$sup(g[\omega + \omega]) = \omega + \omega + \omega$，

（3）但是如果令 $h = g \circ f$，却有 $sup(h[\omega]) < \omega + \omega + \omega$。

Proof. 令 $f(x) = \omega + x$，$g(x) = \begin{cases} \omega + \omega + x & x \in \omega \\ n & x = \omega + n, n \in \omega \end{cases}$

那么，$sup(f[\omega]) = \omega + \omega, sup(g[\omega + \omega]) = \omega + \omega + \omega$，且 $sup(h[\omega]) = \omega < \omega + \omega + \omega$

$\square$

5. 令 β 为任意序数，α 为任意极限序数，证明：如果 $\alpha + \beta = \beta$，则 $\beta \geq \alpha \cdot \omega$。

Proof. 首先，若 $\alpha = 0$，显然。
若 $\alpha > 0$，设 $\beta < \alpha \cdot \omega$，则存在 $n \in \omega$ 使得 $\beta = \alpha \cdot n$。由于 $\alpha + \beta = \beta$，则有 $\alpha + \alpha \cdot n = \alpha \cdot (n+1) = \alpha \cdot n$，矛盾。

$\square$

6. 令 $X = \{f : \omega \to \omega_1 \mid f\text{是一一函数}\}$，证明 $|X| = 2^\omega$。

Proof. 定义 $[\kappa]^\lambda = |\{A \subseteq \kappa \mid |A| = \lambda\}|$。

断言： 若 $\lambda \leq \kappa$，则 $[\kappa]^\lambda = \kappa^\lambda$。

对于 $A \in [\kappa]^\lambda$，定义 $[f]_A = \{f \mid f : \lambda \to \kappa, ran(f) = A\}$，称所有 $[f]_A$ 构成的非空集合的族为 $\mathcal{F}$。由定义，存在 $[\kappa]^\lambda$ 到 $\mathcal{F}$ 的双射令其为 h，令 g 为 $\mathcal{F}$ 上的选择函数，则 $g \circ h$ 为 $[\omega_1]^\omega$ 到 ω_1^ω 的单射，即 $[\kappa]^\lambda \leq \kappa^\lambda$。另一方面，由于对任意 $f \in \kappa^\lambda$，f 都是 $\lambda \times \kappa$ 的子集并且 $|f| = \lambda$，则 $\kappa^\lambda \leq [\lambda \times \kappa]^\lambda = [\kappa]^\lambda$

这便证明了断言。

那么首先，显然我们有 $|X| \leq \omega_1^\omega$，其次，对于 $\kappa = \omega_1, \lambda = \omega$，由定义，$X = \bigcup_{A \in \omega_1} [f]_A$，其中 $|A| = \omega$。那么有 $|\mathcal{F}| \leq |X|$，则 $|X| \geq |\mathcal{F}| = [\omega_1]^\omega = \omega_1^\omega$。

$\square$