序

陈淇奥

2021 年 9 月 18 日

首先我们看偏序与严格偏序的定义，因为课本上给出的严格偏序并不是一个严格的定义

定义 1. 令 $\leq$ 为 X 上的二元关系，如果 $\leq$ 满足

1. $\leq$ 是自反的，即对所有的 $x \in X$,$x \leq x$
2. $\leq$ 是反对称的 (antisymmetry)，即对所有的 $x, y \in X$，如果 $x \leq y$ 且 $y \leq x$，则 $x = y$
3. $\leq$ 是传递的，即对所有的 $x, y, z \in X$, 如果 $x \leq y$,$y \leq z$，则 $x \leq z$

就称 $\leq$ 是 X 上的一个 **偏序**

定义 2. 令 $<$ 为 X 上的二元关系，如果 $<$ 满足

1. $<$ 是非自反的，即对所有的 $x \in X$,$x < x$ 不成立
2. $<$ 是 asymmetry，即对所有的 $x, y \in X$，如果 $x < y$，那么并非 $y < x$
3. $<$ 是传递的，即对所有的 $x, y, z \in X$, 如果 $x < y$,$y < z$，则 $x < z$

就称 $<$ 是 X 上的一个 **严格偏序**

注意，antisymmetry 跟 asymmetry 在非自反的条件下是等价的

命题 1. 令 R 是 X 上的二元关系，如果 R 是非自反的，那么 R 是反对称的当且仅当 R 是 asymmetry 的

证明. 1. 如果 R 是反对称的，我们使用反证法，如果存在 $x, y \in X$ 使得 xRy 且 yRx，于是 $x = y$，于是我们有 xRx，与自反性矛盾

2. 如果 R 是 asymmetric 的，对于任意 $x, y \in X$，如果 xRy 并且 yRx，我们知道这是错误的，于是 R 是反对称的

因此在非自反的条件下，这两个概念是等价的 □

有了以上的讨论，我们来看

$$D = \{(x, y) \mid y\text{是 } x \text{ 的祖先}\}$$

首先它是非自反的，是传递的，同时你们的讨论也是对的，它是反对称的（你也可以证明它是 asymmetric 的），因此它是严格偏序