Week5

陈淇奥
21210160025

2022 年 4 月 18 日

Exercise 0.0.1. 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数，$a, b, c \in B$，证明

$$-(-a + (-b) + c) + (-(-a + b)) + -a + c = 1$$

证明. 用 $\bar{x}$ 表示 $-x$，则

$$\begin{aligned}
-(\bar{a} + \bar{b} + c) + (-(\bar{a} + b)) + \bar{a} + c &= ab\bar{c} + a\bar{b} + \bar{a} + c \\
&= ab\bar{c} + a\bar{b}(c + \bar{c}) + \bar{a} + c \\
&= a\bar{c} + \bar{a} + c + a\bar{b}c \\
&= c + a\bar{c} + \bar{a} = ca + c\bar{a} + a\bar{c} + \bar{a} \\
&= a + \bar{a} = 1
\end{aligned}$$

□

Exercise 0.0.2. 在 Lindenbaum 代数 $\mathcal{B}(\emptyset)$ 中，如果 $[\alpha]$ 是原子，则对任意公式 β，$\vdash \alpha \to \beta$ 或者 $\vdash \alpha \to \neg\beta$

证明. 因为 $[\alpha]$ 是原子，由引理 1.1.25，对任意 $[\beta] \neq 0$，$[\alpha] \leq [\beta]$ 或者 $[\alpha] \leq -[\beta]$，于是由练习 1.1.19，$\vdash \alpha \to \beta$ 或者 $\vdash \alpha \to \neg\beta$ □

Exercise 0.0.3. 对任意布尔代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$，定义它们的积 $\mathcal{C}$ 为

1. $C = A \times B$
2. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

3. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$

4. $-(a, b) = (-a, -b)$

5. $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 1)$

证明 $\mathcal{C}$ 是一个布尔代数

证明.

1. $(a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) = ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) = ((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3)$

   $(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)) = (a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3) = ((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3)$

2. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$

   $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_2 a_1, b_2 b_1) = (a_2, b_2)(a_1, b_1)$

3. $(a_1, b_1) + (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 + a_1 a_2, b_1 + b_1 b_2) = (a_1, b_1)$

   $(a_1, b_1)((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = (a_1(a_1 + a_2), b_1(b_1 + b_2)) = (a_1, b_1)$

4. $(a_1, b_1)((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1(a_2 + a_3), b_1(b_2 + b_3)) = (a_1 a_2 + a_1 a_3, b_1 b_2 + b_1 b_3) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3)$

   $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)(a_3, b_3) = (a_1 + a_2 a_3, b_1 + b_2 b_3) = ((a_1, b_1) + (a_2, b_2))((a_1, b_1) + (a_3, b_3))$

5. $(a_1, b_1) + (-a_1, -b_1) = (a_1 + -a_1, b_1 + -b_1) = (1, 1)$

   $(a_1, b_1)(-a_1, -b_1) = (a_1(-a_1), b_1(-b_1)) = (0, 0)$

$\square$

Exercise 0.0.4. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，如果 $a \in B$ 且 $a > 0$，令 $B \upharpoonright a = \{b \in B \mid b \leq a\}$，令 $\mathcal{B} \upharpoonright a$ 中的运算 $+, \cdot, 0$ 保持与 $\mathcal{B}$ 中一致，而 1 和 $-b$ 分别为 a 和 $a \cdot (-b)$

1. 证明 $\mathcal{B} \upharpoonright a$ 是一个布尔代数

2. 对任意 $a \in B$,$B \cong (\mathcal{B} \upharpoonright a) \times (\mathcal{B} \upharpoonright -a)$

证明. 1. 不难验证

2. 定义 $f:\mathcal{B}\to(\mathcal{B}\restriction a)\times(\mathcal{B}\restriction -a)$ 为 $f(b)=(b\cdot a, b\cdot(-a))$，于是

   (a) $f(0)=(0,0)$, $f(1)=(a,-a)$

   (b) $f(b_1+b_2)=(b_1a+b_2a,b_1(-a)+b_2(-a))=(b_1a,b_1(-a))+(b_2a,b_2(-a))=f(b_1)+f(b_2)$ 同理 $f(b_1\cdot b_2)=f(b_1)\cdot f(b_2)$

   (c) 若 $f(b_1)=f(b_2)$，则 $b_1a=b_2a$ 且 $b_1(-a)=b_2(-a)$，于是 $b_1(a+(-a))=b_2(a+(-a))$，因此 $b_1=b_2$

   (d) 对于任意 $b\in\mathcal{B}\restriction a$,$c\in\mathcal{B}$,则 $b\le a$, $c\le -a$, 于是 $ca\le a(-a)=0$, $b(-a)\le a(-a)=0$，因此 $ca=b(-a)=0$，因此 $f(b+c)=(b,c)$

□

Exercise 0.0.5. 令 $h:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 为同态，$D\subseteq A$ 且 $\sum D$ 存在，称 h **保持** $\sum D$，如果 $\sum h[D]$ 存在且 $h(\sum D)=\sum h[D]$

证明：$\mathcal{B}$ 上的超滤 U 保持 $\sum D$ 当且仅当 U 确定的同态 $f:\mathcal{B}\to\{0,1\}$ 保持 $\sum D$

证明. $\Rightarrow$: 因为 U 保持 $\sum D$，存在 $d\in D$ 使得 $d\in U$，于是 $f(d)=1$，因此 $\sum f(d)=1$，$\sum h[D]=1$，于是 $h(\sum D)=1=\sum h[D]$

$\Leftarrow$: 若 $\sum D\in U$，则 $f(\sum D)=1=\sum f[D]$，若对于所有 $d\in D$, $f(d)=0$，则 $\sum f[D]=0$，因此存在 $d\in D$ 使得 $f(d)=1$，因此 $d\in U$ □

Exercise 0.0.6. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$h:\mathcal{B}\to\mathcal{P}(Ult(\mathcal{B}))$ 为 Stone 映射，对任意 $b\in B$，称 $h(b)$ 为 $S(\mathcal{B})$ 的 **基本开集**，如果集合 $X\subseteq Ult(\mathcal{B})$ 能表示称基本开集的并集，就称 X 为 **开集**，开集的补集为 **闭集**

证明. 1. 证明 $h(d)$ 既是开集，也是闭集

2. 对任意 $U,V\in Ult(\mathcal{B})$，如果 $U\ne V$，则存在一个开闭集包含 U，但不包含 V

□

证明. 1. $h(d)$ 显然是开集，而 $h(-d)$ 也是开集，而 $h(d) \cap h(-d) = \emptyset$ 且 $h(d) \cup h(-d) = Ult(\mathcal{B})$，因此 $h(d)$ 为闭集

2. 取 $b \in U \setminus V$，于是 $-b \in V$，因此 $V \notin h(b)$

□

Exercise 0.0.7. 如果 $C \subseteq \mathcal{P}(Ult(\mathcal{B}))$ 是开集的族，且 $\bigcup C = Ult(\mathcal{B})$，就成 X 是 **开覆盖**。证明：如果 C 是开覆盖，则存在有穷的 $C_0 \subseteq C$，$\bigcup C_0 = Ult(\mathcal{B})$

证明. 令 $h : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(Ult(\mathcal{B}))$ 为 Stone 映射，令 $[b]$ 表示 $h(b)$。因为每个开集都是基础开集的并，则 $\bigcup C = \bigcup_{b \in D}[b]$，即 $\bigcap_{b \in D}[-b] = \mathcal{P}(Ult(\mathcal{B})) - \bigcup C$。

若对于任何有穷的 $C_0 \subseteq C$，$\bigcup C_0 \neq Ult(\mathcal{B})$，则基础开集族 $\{[-b] : b \in D\}$ 有穷交性质，因此 $\{-b : b \in D\}$ 有有穷交性质，因此存在超滤 $U \supseteq \{-b : b \in D\}$，因此 $U \notin \bigcup C$，于是 $\bigcup C \neq Ult(\mathcal{B})$，矛盾 □

Exercise 0.0.8. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，$D \subseteq B$ 且 $\sum D$ 存在，证明：Stone 映射保持 $\sum D$ 当且仅当存在有穷 $D_0 \subseteq D$ 且 $\sum D = \sum D_0$

证明. 令 h 为 Stone 映射。

$\Rightarrow$: $h(\sum D) = \sum h[D] = \bigcup h[D]$, 于是存在有穷 $D_0 \subseteq D$ 使得 $h(\sum D) = \bigcup h[D_0] = h(\sum D_0)$, 因为 h 是单射，$\sum D_0 = \sum D$

$\Leftarrow$: 断言：对于有穷集合 $D_0 = \{d_1, \dots, d_n\} \subseteq B$,$\sum D_0 = d_1 + \dots + d_n$

对于任何 $\sum D_0 \leq e, d_1 \leq e, \dots, d_n \leq e$，于是 $d_1 + e = e, \dots, d_n + e = e$，于是 $d_1 + \dots + d_n + e = e$, 因此 $d_1 + \dots + d_n \leq e$

于是 $h(\sum D) = h(\sum D_0) = +_{d \in D_0} h(d) = \bigcup_{d \in D_0} h(d) = \sum\{h(d) : d \in D_0\} = \sum h[D_0]$

$\sum h[D_0] \leq \sum h[D]$，存在有穷 $D_1 \subseteq D$ 使得 $\sum h[D_1] = \sum h[D]$，因此 $\sum D_0 \leq \sum(D_0 \cup D_1) \leq \sum D$，因此 $\sum(D_0 \cup D_1) = \sum D$ 且 $h(\sum D) = h(\sum(D_0 \cup D_1)) = \sum h[D_0 \cup D_1] = \sum h[D]$ □