理想的对偶概念是滤，以上关于理想的结果对于滤也都成立。具体说：如果 $\mathscr{F}$ 是布尔代数 $\mathscr{B}$ 上的所有滤的族，$\mathscr{F}$ 是一个完全的分配格。

引理 2.2.10. 令 $\mathscr{B}$ 为布尔代数，$\mathscr{I}, \mathscr{F}$ 为其上理想和滤。定义 $h : \mathscr{I} \to \mathscr{F}$ 为 $h(I) = -I$，即 I 的对偶滤，则 h 是格同构。

证明. 令 $f : \mathscr{F} \to \mathscr{I}$ 为如此定义的映射：$f(F) = -F$。对任意 $F \in \mathscr{F}$，我们有

$$h(f(F)) = h(\{-a \mid a \in F\}) = \{-(-a) \mid a \in F\} = F,$$

反之，对任意 $I \in \mathscr{I}$，

$$f(h(I)) = f(\{-a \mid a \in I\}) = \{-(-a) \mid a \in I\} = I,$$

所以 h 是双射。

对任意 $I, J \in \mathscr{I}$，如果 $I \subseteq J$，则显然有 $-I \subseteq -J$，这就意味着 $h(I) \subseteq h(J)$，反之依然。所以 h 保持格上的偏序，因此是一个格同构。 □

练习 2.2.11. 假设 $h : X \to Y$ 和 $f : Y \to X$ 是两个函数，并且满足 $f \circ h = \mathrm{id}_X$，$h \circ f = \mathrm{id}_Y$，证明 h 是双射，并且 $f = h^{-1}$。

2.3　形式概念

令 S, P 为两个集合，其中 S 中的元素为“对象”，P 中的元素为“性质”。如果 $s \in S, p \in P$，则 $p(s)$ 表示：a 有性质 p。对任意 $X \subseteq S$，$Y \subseteq P$，我们令

$$\begin{aligned} X' &= \{p \in P \mid \forall s \in X[p(s)]\} \\ Y' &= \{s \in S \mid \forall p \in Y[p(s)]\} \end{aligned}$$

显然，$X \subseteq Y$ 当且仅当 $Y' \subseteq X'$。这就是传统上所说的一个概念内涵越多，外延越小。

给定 S, P，如果 $E \subseteq S, D \subseteq P$ 满足：$E = D', D = E'$，就称 $C = (E, D)$ 为语境 (S, P) 下的一个**概念**。其中 E 称为 C 的**外延**，D 称为**内涵**。今后记 $\mathbb{C}(S, P)$ 为语境 (S, P) 下所有概念的集合。在语境清晰时，我们省去 S, P。

练习 2.3.1. 给定语境 (S,P)，令 $E\subseteq S, D\subseteq P$，

(1) $E\subseteq E''$，$D\subseteq D''$；

(2) $E'''=E'$，$D'''=D'$；

(3) $E\subseteq D'$ 当且仅当 $D\subseteq E'$；

(4) 如果 (E,D) 是概念，则 $E''=E, D''=D$；反之，如果 $E''=E$，则 E 是一个概念的外延，同样地，如果 $D''=D$，则 D 是一个概念的内涵。

(5) $(\bigcup_{i\in I}E_i)'=\bigcap_{i\in I}E_i'$，$(\bigcup_{i\in I}D_i)'=\bigcap_{i\in I}D_i'$。

给定 $\mathbb{C}(S,P)$，$C_1=(E_1,D_1), C_2=(E_2,D_2)\in\mathbb{C}$，我们定义其上的偏序关系为：

$$C_1\le C_2 \quad \text{当且仅当} \quad E_1\subseteq E_2 \quad \text{当且仅当} \quad D_2\subseteq D_1.$$

同时，对任意 $C_1,C_2\in\mathbb{C}(S,P)$，不难验证它们在 $\le$ 下的上确界和下确界分别是：

$$\begin{aligned}\sup\{C_1,C_2\} &= ((E_1\cup E_2)'', D_1\cap D_2),\\ \inf\{C_1,C_2\} &= (E_1\cap E_2, (D_1\cup D_2)'').\end{aligned}$$

以上确界为例，根据练习 2.3.1(2)，$(E_1\cup E_2)'''=(E_1\cup E_2)'=D_1\cap D_2$。而根据（5），$(D_1\cap D_2)'=(E_1\cup E_2)''$。所以 $((E_1\cup E_2)'', D_1\cap D_2)$ 是概念。它是 C_1,C_2 的最小上界是显然的：由于 $D_1\cap D_2\subseteq D_1$ 且 $D_1\cap D_2\subseteq D_2$，所以它是上界。如果 $C=(E,D)$ 也是上界，则 $D\subseteq D_1, D\subseteq D_2$，所以 $D\subseteq D_1\cap D_2$，$((E_1\cup E_2)'', D_1\cap D_2)\le(E,D)$。

这样我们验证了 $\mathbb{C}(S,P)$ 在 $\le$ 下是一个格，并且

$$\begin{aligned}C_1\vee C_2 &= ((E_1\cup E_2)'', D_1\cap D_2),\\ C_1\wedge C_2 &= (E_1\cap E_2, (D_1\cup D_2)'').\end{aligned}$$

事实上，它还是一个完全格。

引理 2.3.2. 在以上定义的 $\leq$ 下，$\mathbb{C}(S,P)$ 是一个完全格。

证明. 我们只需验证：对任意 $\{C_i\}_{i\in I}$，

$$\begin{aligned}\bigvee_{i\in I} C_i &= ((\bigcup_{i\in I} E_i)'', \bigcap_{i\in I} D_i)\\ \bigwedge_{i\in I} C_i &= (\bigcap_{i\in I} E_i, (\bigcup_{i\in I} D_i)'')\end{aligned}$$

是语境 (S,P) 下的概念，并且分别是 $\{C_i\}_{i\in I}$ 的上确界和下确界。证明与以上讨论的 $\{C_1,C_2\}$ 的情况类似。例如，关于 $\bigwedge C_i$，首先 $(\bigcup D_i)''' = (\bigcup D_i)' = \bigcap E_i$。同时，$(\bigcap E_i)' = (\bigcup D_i)''$，所以 $\bigwedge C_i$ 是概念。不难证明它也是最大下界。 □

接下来我们讨论关于形式概念的一些性质。

注记 2.3.3. 由练习2.3.1(4)，我们可以分别定义如下概念：任给 (S,P)，令 $\mathbb{C}(S) = \{E \subseteq S \mid E'' = E\}$，$\mathbb{C}(P) = \{D \subseteq S \mid D'' = D\}$。对任意概念 $(E,D) \in \mathbb{C}(S,P)$，$(E,D) \mapsto E$ 是一个严格保序的一一射，因此是一个格同构。$\mathbb{C}(S)$ 在 $\subseteq$ 下也是一个完全格。对任意 $\mathbb{C}(S)$ 中的 $\{E_i\}_{i\in I}$，$\bigwedge_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} E_i$，$\bigvee_{i\in I} = (\bigcup_{i\in I} E_i)''$。

类似地，$(\mathbb{C}(P),\supseteq)$ 也是一个完全格，$(E,D)\mapsto D$ 是一个格同构。

给定语境 (S,P)。S 中的对象代表“实体”，P 中的对象表示“属性”。任给一个实体 $s\in S$，$\{s\}'$ 表示 s 的所有属性。理想的情况下，每个实体可以由它所有的属性唯一地刻画，即 $\{s\}'' = \{s\}$。不过，无论如何，$(\{s\}'',\{s\}')$ 是一个概念。类似地，对任意 $p\in P$，$\{p\}'$ 是具有属性 p 的所有实体的类。在理想的（外延主义成立的）情形下，所有这些实体的类也可以唯一刻画属性 p，即 $\{p\}'' = \{p\}$。但 $(\{p\}',\{p\}'')$ 也是总是一个概念。今后，我们将 $\{p\}',\{s\}'$ 分别记作 p',s'。

根据以上分析，存在 S,P 分别到 $\mathbb{C}(S,P)$ 的两个自然的映射：$h_S(s) = (s'',s')$ 和 $h_P(p) = (p',p'')$。以下练习是一个有趣的观察。

练习 2.3.4. 令 (S,P) 为语境而 h_P,h_S 为以上定义的映射，

(1) 对任意 $s\in S, p\in P$，$p(s)$ 当且仅当 $h_S(s)\leq h_P(p)$。

(2) 对任意 $E \subseteq S$，$p \in P$，$p \in E'$ 当且仅当 $\bigvee h_S(E) \leq h_P(p)$。

(3) 对任意 $D \subseteq P$，$s \in S$，$s \in D'$ 当且仅当 $h_S(s) \leq \bigwedge h_P(D)$。

定义 2.3.5. 令 $(L, \leq)$ 为任意偏序集，$X \subseteq L$：

(1) X 称为**联稠密的**，如果对任意 $a \in L$，存在 $Y \subseteq X$，使得 $a = \bigvee Y$。

(2) X 称为**会稠密的**，如果对任意 $a \in L$，存在 $Y \subseteq X$，使得 $a = \bigwedge Y$。

引理 2.3.6. 给定语境 (S, P) 以及映射 $h_S : S \to \mathbb{C}(S, P)$ 和 $h_P : P \to \mathbb{C}(S, P)$。$h_S(S)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是联稠密的，$h_P(P)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是会稠密的。

证明. 任意给定 $(E, D) \in \mathbb{C}(S, P)$，

$$
\begin{aligned}
\bigvee h_S(E) &= \bigvee_{s \in E} h_S(\{s\}) \\
&= \bigvee_{s \in E} (s'', s') \\
&= (\bigcup_{s \in E} s'')'', \bigcap_{s \in E} s').
\end{aligned}
$$

又根据练习2.3.1，$\bigcap_{s \in E} s' = (\bigcup_{s \in E} \{s\})' = E' = D$。所以 $\bigvee h_S(E) = (E, D)$。

类似地，$\bigwedge h_P(D) = (\bigcap_{p \in D} p', (\bigcup_{p \in D} p'')'')$，而 $\bigcap_{p \in D} p' = (\bigcup_{p \in D} \{p\})' = D' = E$。 □

联稠密和会稠密映射的有趣之处更在于这样一个事实：对任意完全格 L，如果存在 S, P 以及 h_S, h_P 使得它们在 L 中的像分别是联稠密和会稠密的，则 L 同构于 $\mathbb{C}(S, P)$。所以，从一定意义上说，任何完备格都同构于某个概念格。

定理 2.3.7. 令 $(L, \leq)$ 为完备格，S, P 为集合，$h_S : S \to L$ 和 $h_P : P \to L$ 为函数，并且 $h_S(S)$ 在 L 中是联稠密的，$h_P(P)$ 在 L 中是会稠密的，则 $L \cong \mathbb{C}(S, P)$。

证明. 对任意 $a \in L$ 定义

$$\begin{aligned} E_a &= \{s \in S \mid h_S(s) \le a\} \\ D_a &= \{p \in P \mid a \le h_P(p)\}. \end{aligned}$$

首先注意到，由于 h_P 是联稠密的，h_S 是会稠密的，所以 $\bigvee h_S(E_a) = a$，$\bigwedge h_P(D_a) = a$。定义 L 上的函数 f 为：对任意 $a \in L$，$f(a) = (E_a, D_a)$。

1. 对任意 $a \in L$, $f(a) \in \mathbb{C}(S, P)$。为此,我们需要证明对任意 a, $E'_a = D_a$ 并且 $D'_a = E_a$。令 $p \in E'_a$，根据练习 2.3.4（2）,这当且仅当 $a = \bigwedge h_S(E_a) \le h_P(p)$，当且仅当 $p \in D_a$，所以 $E'_a = D_a$。$D'_a = E_a$ 类似。

2. f 是满射。对任意 $(E, D) \in \mathbb{C}(S, P)$，令 $a = \bigvee h_S(E)$, $b = \bigwedge h_P(D)$.

(2.1) $a = b$。由于 $E' = D$，还是根据练习 2.3.4（2），$a \le b$；而由（3），$b \le a$，所以 $a = b$。

(2.2) $E = E_a, D = D_a$。对任意 $s \in E$，都有 $h_S(s) \le \bigvee h_S(E) = a$，所以 $E \subseteq E_a$。假设 $s \in E_a$，则 $h_S(s) \le a = \bigvee h_S(E)$。由练习2.3.4（2），对任意 $p \in E'$，都有 $\bigvee h_S(E) \le h_P(p)$，所以 $h_S(s) \le h_P(p)$，再由练习2.3.4（1），这又当且仅当 $p(s)$，所以 $s \in E'' = E$，这就证明了 $E_a \subseteq E$，所以 $E = E_a$。类似地可以证明 $D = D_a$。

3. f 是单射。对任意 $a \le b$，都有 $E_a \subseteq E_b$，所以 $f(a) \le f(b)$。反过来，如果 $(E_1, D_1) \le (E_2, D_2)$，即 $E_1 \subseteq E_2$，令 $a_1 = \bigvee h_S(E_1)$，$a_2 = \bigvee h_S(E_2)$，则根据前面的结果有 $E_1 = E_{a_1}$, $E_2 = E_{a_2}$, 显然 $a_1 \le a_2$, 所以 $f(a_1) \le f(a_2)$ 也蕴涵 $a_1 \le a_2$。

□

第三章　布尔代数与型空间

总结一下第一章中布尔代数与逻辑的几个主要结果。

1. 任给一个一致的理论 T，存在一个由 T 确定的布尔代数 $\mathcal{B}(T)$，它的元素是等价关系 $\sim$ 下的等价类，对任意公式 α, β，$\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$。这个 $\mathcal{B}(T)$ 称为 Lindenbaum 代数。

2. 在 Lindenbaum 代数 $\mathcal{B}(T)$ 中，每个滤 F 都是 T 的一致扩张。因此每个滤都是一个一致的理论。而每个超滤则是一个完全理论。

3. 如果 T 是完全的，则 $\mathcal{B}(T)$ 是特殊的布尔代数 $\{0, 1\}$，其中 $0 = \{\alpha \mid T \vdash \neg\alpha\}$，$1 = \{\alpha \mid T \vdash \alpha\}$。

4. 从另一个角度看，$\mathcal{B}(T)$ 上的每个超滤 U 都对应着 T 的一个模型 $\mathfrak{A}_U$，对任意公式 α，$\mathfrak{A}_u \models \alpha$ 当且仅当 $[\alpha] \in U$。所以超滤存在定理蕴涵着完全性定理。

5. 在 Stone 表示定理的证明中，借助 Stone 映射，我们为每一个 $a \in B$ 指定一个超滤的集合 $\{U \mid U \in a\}$。这实际上是为 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 定义了一个拓扑结构，（参见习题1.4.6 和1.4.7）。$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 连同其上的拓扑称为 Stone 空间。

3.1　Stone 空间

Stone 空间是一个非常典型的结构，与逻辑有很多密切的联系。我们接下来讨论一些有关这个空间的性质，并给出模型论中的更为深刻的一个例子。

定义 3.1.1. 对任意集合 X，$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 称为 X 上的一个**拓扑**，如果以下条件成立：

1. $X, \varnothing \in \mathcal{T}$；
2. 如果 $u, v \in \mathcal{T}$，则 $u \cap v \in \mathcal{T}$；
3. 对任意 $A \subseteq \mathcal{T}$，$\bigcup A \in \mathcal{T}$。

$(X, \mathcal{T})$ 称为**拓扑空间**，$\mathcal{T}$ 中的 X 的子集称为**开集**，开集的补集称为**闭集**。

例 3.1.2. 令 $\mathbb{R}$ 为全体实数的集合，对任意实数 $r \in \mathbb{R}$，开区间

$$N = \{x \subseteq \mathbb{R} \mid |x - r| < \epsilon\}$$

称为 r 的**邻域**，其中 ϵ 为任意实数，称为 N 的半径。$\mathbb{R}$ 的子集 U 如果满足：对任意 $r \in U$，都存在 r 的邻域 N 使得 $N \subseteq U$，就称 U 为**开集**。令 $\mathcal{T}$ 为所有开集的族，则 $\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{T}$ 下是一个拓扑空间。

证明. 首先，$\varnothing \in \mathcal{T}$，并且 $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$。其次，如果 U, V 是开集，$r \in U \cap V$，则根据定义，存在 B_1, B_2 分别是包含 r 的开区间，且 $I_1 \subseteq U, I_2 \subseteq V$。显然 $N_1 \cap N_2$ 仍是一个开区间包含 r 的开区间，并且是 $U \cap V$ 的子集。最后，如果 $\{U_i\}$ 是任意开集的族，$r \in U = \bigcup U_i$，则存在 i，$r \in U_i$，所以存在邻域 N，使得 $r \in B \subseteq U$。 □

以下简单的事实使我们可以定义一个拓扑的基：在实数 $\mathbb{R}$ 中，U 是开集当且仅当 U 可以表示为 $\mathbb{R}$ 中开区间的并。

定义 3.1.3. 令 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$S \subseteq \mathcal{T}$ 称为这个空间的一个**拓扑基**，如果 $\mathcal{T}$ 中的元素都可以表示为 S 中元素的并。S 中的元素称为**基本开集**。

例 3.1.4. 以上例子中，实数上的拓扑 $\mathcal{T}$ 以所有开区间为拓扑基。事实上，所有以有理数为端点的开区间也是它的拓扑基，并且是一个可数的拓扑基。

练习 3.1.5. 任给布尔代数 $\mathscr{B}$，令 $X = \mathrm{Ult}(\mathscr{B})$。对任意 $a \in B$，定义

$$N_a = \{U \in \mathrm{Ult}(\mathscr{B}) \mid a \in U\},$$

则 $\{N_a \mid a \in B\}$ 构成 X 的一个拓扑基。即如果 $\mathcal{T}$ 中的元素都可以表示为形如 N_a 的集合的并，则 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑。

练习 3.1.6. 令 X 为拓扑空间，$S \subseteq \mathcal{T}$ 为拓扑基，则

(1) 对任意 $x \in X$，存在 $N \in S$，$x \in N$；

(2) 对任意 $N_1, N_2 \in S$，任意 $x \in N_1 \cap N_2$，存在 $N_3 \subseteq N_1 \cap N_2$，$x \in N_3$。

反之，对任意集合 X，如果 X 的子集族 $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ 满足（1）和（2），则 S 构成 X 的一个拓扑基。

习题1.4.6告诉我们，N_a 既是开集也是闭集，在一个拓扑空间中，我们称这样的集合为**开闭集**。显然，对任意的拓扑空间 X，$\varnothing, X$ 是开闭集。

定义 3.1.7. 一个拓扑空间 X 称为**零维的**，如果它有一个开闭集构成的拓扑基。

零维空间也称为“完全不连通空间”。显然，$\mathrm{Ult}(\mathscr{B})$ 是一个零维空间。

定义 3.1.8. 令 X 为拓扑空间，如果 $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{T}$ 是开集的族，并且 $\bigcup \mathscr{C} = X$，就称 $\mathscr{C}$ 是 X 的**开覆盖**。如果 X 的每个开覆盖 C 都有一个有穷的子覆盖，即 $\mathscr{C}_0 \subseteq_f \mathscr{C}$，并且 $\bigcup C_0 = X$，则称 X 为**紧致空间**。

由习题1.4.7知道，$\mathrm{Ult}(\mathscr{B})$ 是一个紧致空间。

练习 3.1.9. 令 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，称 X 的子集族 $\mathcal{Z}$ 有有**有穷交性质**，如果对任意有穷的 $\{Y_1, \cdots, Y_n\} \subseteq \mathcal{Z}$，$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \neq \varnothing$。

对任意拓扑空间 X，以下命题等价：

(1) X 是紧致空间；

(2) 如果 $\mathcal{Z}$ 是闭集的族且有有穷交性质，则 $\bigcap \mathcal{Z} \neq \varnothing$。

定义 3.1.10. 令 X 为拓扑空间，如果对任意 $x, y \in X$，总存在开集 M, N，$x \in M, y \in N$，使得 $M \cap N = \varnothing$，就称 X 为 Hausdorff 空间。

由习题1.4.6(2) 可知 $\mathrm{Ult}(\mathscr{B})$ 是一个 Hausdorff 空间：如果超滤 U 属于一个开闭集 N，则 $M = X \setminus N$ 也是一个开闭集，$V \in M$ 并且 $M \cap N = \varnothing$。

定理 3.1.11. *对任意布尔代数 $\mathscr{B}$，$\mathrm{Ult}(\mathscr{B})$ 在以 $S = N_a \mid a \in B$ 为拓扑基的拓扑下，是一个零维的紧致 Hausdorff 空间。这样的空间通常称为 Stone 空间。*

也有文献称为布尔空间，见 Halmos。

例 3.1.12. 给定一阶语言 $\mathscr{L}$，令 X 是所有完全理论的族。对任意语句 $\sigma \in \mathscr{L}$，令 $\langle\sigma\rangle = \{T \in X \mid T \models \sigma\}$，则 $S = \{\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in \mathscr{L}\}$ 构成 X 的一个拓扑基：这是因为 $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle = \langle\sigma \wedge \tau\rangle$，由练习3.1.7可得。

同时，这个完全理论的空间是一个零维空间：$\langle\sigma\rangle$ 与 $\langle\neg\rangle$ 互为补集，并且都是基本开集，所以完全理论的空间有一个开闭集构成的基。

X 也是 Haudorff 空间：令 T_1, T_2 为两个完全理论，且 $T_1 \neq T_2$，则必有 $\sigma \in \mathscr{L}$，$T_1 \models \sigma$ 而 $T_2 \models \neg\sigma$。这样，$T_1 \in \langle\sigma\rangle, T_2 \in \langle\neg\sigma\rangle$。

在完全理论的空间中，开集是形如 $\langle\sigma\rangle$ 的基本开集的并，对偶地，闭集是这样的基本开集的交。令 Σ 为一致的语句集，$F = \bigcap\{\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in \Sigma\}$，则 F 不空，并且是闭集。对任意 $T \in F$，$\Sigma \subseteq T$。任取语句 τ，$\Sigma \models \tau$ 当且仅当对所有 $T \in F$，$T \models \tau$。所以 F 确定了一个以 Σ 为公理集的理论。除非 F 是一个单点集 $\{T\}$，否则 F 确定的理论是一个不完全的理论。

引理 3.1.13. *Hausdorff 空间 X 是紧致空间当且仅当对任意闭集的族 $\mathscr{F} = \{F_i\}_{i \in I}$，如果 $\mathscr{F}$ 有有穷交性质，即对任意 $Z \subseteq_f \mathscr{F}$，$\bigcap Z \neq \varnothing$，则 $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$。*

证明. 假设 $\mathscr{F}$ 有有穷交性质，并且 $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$，则 $\bigcup(-\mathscr{F}) = X$，所以是 X 的一个开覆盖，令 $\{-F_1, \cdots, -F_n\}$ 为子覆盖，则 $\bigcap\{F_1, \cdots, F_n\} = \varnothing\}$，矛盾。

反之，如果 X 不是紧致的，令 $\{O_i\}_{i \in I}$ 为开覆盖，但没有有穷的子覆盖。则 $\{-O_i\}_{i \in I}$ 是有有穷交性质的闭集的族，但它的交为空集。 □

为了证明这个完全理论的拓扑空间是紧致空间，我们需要几个新的定义。这也是为了充分利用我们所熟悉的超滤工具。

定义 3.1.14. 给定拓扑空间 X，X **中的滤** 指的是某一个 X 的子集 Y 上的滤。

例 3.1.15. 对任意 $x \in X$，所有包含 x 的开集构成的族

$$\mathcal{N}_x = \{U \mid U\text{是开集并且 } x \in U\}$$

是整个空间 X 上的滤。请读者验证。

定义 3.1.16. 给定拓扑空间 X 中的滤 F，$x \in X$ 称为 F 的**极限点**，如果 U 是 $\mathcal{N}_x$ 的扩张。此时称 F **收敛**到 x。如果 F 至少有一个极限点，就称 F 是**收敛的**。

练习 3.1.17. Haudorff 空间中的滤如果有极限点，则它的极限点是唯一的。

定理 3.1.18. *一个 Hausdorff 空间 X 是紧致的当且仅当 X 中的每个超滤都是收敛的。*

证明. 假设 U 是 X 中的超滤，并且不收敛。对任意 $x \in X$，$\mathcal{N}_x \not\subseteq U$，即存在一个开集 $O_x \in \mathcal{N}_x$，$O_x \notin U$。令 $\{O_x \mid x \in X \ \&\ O_x \notin U\}$ 为这样的开集的族。这是整个空间的一个开覆盖。令 $\{O_1, \cdots, O_n\}$ 为它的一个有穷子覆盖，并且 $\bigcup_{i=1}^n O_i = X$。任取 U 中元素 u，

$$(u \cap O_1) \cup \cdots \cup (u \cap O_n) = u \in U,$$

但 U 是超滤，所以存在 O_i，$u \cap O_i \in U$，而这又蕴涵着 $O_i \in U$，矛盾。

现在假设 X 不是紧致的。令 $\{O_i\}_{i \in I}$ 为 X 的一个开覆盖，并且没有有穷的子覆盖。任取 $\{O_1, \cdots, O_n\}$，$O_1 \cup \cdots \cup O_n \neq X$，所以 $(-O_1) \cap \cdots \cap (-O_n) \neq \varnothing$。这即是说 $\{-O_i\}_{i \in I}$ 有穷交性质。令 U 为这个集族生成的超滤。对任意 $x \in X$，存在 O_i，$x \in O_i$，由于 $-O_i \in U$，所以 $O_i \notin U$，即 $\mathcal{N}_x \not\subseteq U$，即 U 不是收敛的。 □

引理 3.1.19. *一阶语言 $\mathcal{L}$ 中全体完全理论的空间是零维的 Hausdorff 紧致空间。*

证明. 我们需要证明这个空间中的任意超滤都是收敛的。给定超滤 U，对每一完全理论 T，令 $\mathfrak{A}_T$ 为 T 的一个模型。同时，令 $\mathfrak{A} = \mathrm{Ult}_U\, \mathfrak{A}_t$ 为相应的超积模型。注意到 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ 是一个完全理论。对任意开集 O，由于 O 是基本开集的并，所以，如果 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \in O$，则存在 σ，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \in \langle\sigma\rangle$，这意味着 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \sigma$，亦即 $\mathfrak{A} \models \sigma$。由 Łoś 定理，$\langle\sigma\rangle = \{T \mid \mathfrak{A}_T \models \sigma\} \in U$。这就证明了超滤 U 收敛于 U 所确定的超积模型的理论 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$。 □

引理 3.1.20. 令 $\mathscr{L}$ 为一阶语言，Σ 为 $\mathscr{L}$ 中的语句集，Σ 是一致的当且仅当 Σ 是有穷一致的。

证明. 考虑 $\mathscr{L}$ 的所有完全理论构成的空间。由引理3.1.20，它是一个零维的 Hausdorff 紧致空间。对任意 $\sigma \in \Sigma$，$\langle\sigma\rangle$ 是这个空间中的闭集。由题设，$\{\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in \Sigma\}$ 是一个有有穷交性质的闭集族，由引理 3.1.14，$\bigcap_{\sigma\in\Sigma}\langle\sigma\rangle \neq \varnothing$。对任意完全理论 $T \in \bigcap_{\sigma\in\Sigma}\langle\sigma\rangle$，都有 $\Sigma \subseteq T$，所以 Σ 是一致的。 □

3.2　型空间

给定一个语言 $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}$ 的完全理论的空间由句子集的族构成。很自然地，我们是否可以用类似的工具来处理带自由变元的公式呢？这就是型空间。

对任意 $\mathscr{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$，任意 $a \in |\mathfrak{A}|$，公式集 $\{\phi(x) \mid \mathfrak{A} \models \phi(a)\}$ 就称为 a 确定的型，记作 p_a。p_a 中的元素是 $\mathscr{L}$ 中所有那些至多只含一个自由变元的公式，并且“在 a 处为真”。所以完全理论 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ 包含在 p_a 中。

我们还可以从另一个角度看待型。p_a 仍可以看做一个完全理论，只是不是 $\mathscr{L}$ 中的，而是 $\mathscr{L} \cup \{c_a\}$ 中的，其中 c_a 是一个新的常量符号，它在 $\mathfrak{A}$ 中的解释是 a。为了简便，$\mathscr{L} \cup \{c_a\}$ 通常记作 $\mathscr{L}(a)$。这样，p_a 就恰好是在 $\mathfrak{A}$ 中为真的所有 $\mathscr{L}(a)$ 语句。

我们把 $\mathscr{L}(a)$ 中的任何一个完全理论称为 1-型，所有这些 1-型构成的空间记作 S_1，它在相应的拓扑下是一个零维的 Hausdorff 紧致空间。相应地，$\mathscr{L}$ 中的完全理论的空间记作 S_0。

事实上，对每个自然数 n，我们还可以定义 n-型：对任意 $\mathscr{L}$ 模型 $\mathfrak{A}$，任意 $a_1, \cdots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，$\mathscr{L}(a_1, \cdots, a_n)$ 上的一个完全理论称为 $a_1, \cdots, a_n$ 确定的