

Set Theory2

Yao

2022 年 4 月 28 日

目录

1 集合的宇宙	1
1.1 数理逻辑	1
1.2 层垒的谱系	4
1.3 相对化 relativization	10
1.4 绝对性	13
1.5 基础公理的相对一致性	19
1.6 基于良基关系的归纳与递归	21
1.7 基础公理的绝对性	25
1.8 不可达基数与 ZFC 的模型	36
1.9 反映定理	45
1.10 Exercise	49

1 集合的宇宙

1.1 数理逻辑

在 ZFC 下证明 $\text{ZFC} \vdash \text{CH}$, 希望将 “ $\text{ZFC} \vdash \text{CH}$ ” 表述为一阶句子

一般而言, 给定一个 \mathcal{L} -理论 T 和一个 \mathcal{L} -句子 δ , “ $T \vdash \sigma$ ” 不能用一个 \mathcal{L} -句子表示, 只能用元语言表述

我们需要在 ZFC 中编码“元语言”

在 ZFC 中可以定义 $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$

即存在集合论语言 $\mathcal{L} = \{\in\}$ 中的公式，在 ZFC 的任意模型中可以定义 $\mathbb{N}, +, \times, 0, 1$ ，以上公式与模型无关

用 $\ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \ulcorner 2 \urcorner \dots$ 表示 ZFC 中的“自然数”，以区别元语言中的自然数

Theorem 1.1. 如果 $R \subseteq \mathbb{N}^n$ 是一个递归关系。 $T \subseteq \text{Th}(\mathcal{N})$ 是包含数论的适当的丰富的理论，则存在公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 使得对任意自然数 m_1, \dots, m_n 有

如果 $(m_1, \dots, m_n) \in R$ 则 $T \vdash \varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$

如果 $(m_1, \dots, m_n) \notin R$ 则 $T \vdash \neg \varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$

Remark. 1. $T \subseteq \text{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \text{ZFC}$

2. φ 是语言 $\{+, \times, 0, 1\}$ 上的公式

3. φ 可以还原为一个 $\{\in\}$ 上的公式

4. $\varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$ 是一个闭语句

编码

编码函数 $f: X \rightarrow \mathbb{N}$

存在解码函数 g, h ，对 $a = a_0, \dots, a_n \in X$, $h(f(a)) = n + 1$, $g(f(a), k) = a_k$ (分量)

性质：以上三种函数 f, g, h 均是递归函数 \Rightarrow 都是可表示的

性质：“公式集”的编码集是递归的

性质：如果 $T \subseteq \text{ZFC}$ 是可公理化的，则 T 的证明集的编码集是递归的

Corollary 1.2. 存在一个公式 ψ 和 θ 使得

$\text{ZFC} \vdash \psi(n) \Leftrightarrow n \text{ is a formula}$

$\text{ZFC} \vdash \neg \psi(n) \Leftrightarrow n \text{ is not a formula}$

$\text{ZFC} \vdash \theta(n) \Leftrightarrow n \text{ is a proof in ZFC}$

$\text{ZFC} \vdash \neg \theta(n) \Leftrightarrow n \text{ is not a proof in ZFC}$

称 ψ 定义了公式集， θ 定义了证明集

$$\text{FORM} = \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \text{ formula}\} \subseteq \mathbb{N}$$

如果 $T \subseteq \text{ZFC}$ 是可公理化的, 则“ T 是一致的”是一个一阶表述式“不存在一个有穷的证明序列 $D = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 使得 φ_n 形如 $\varphi \wedge \neg \varphi$, 记作 $\text{Con}(T)$

Theorem 1.3 (第二不完全). 如果 T 是包含 ZFC 的一个递归公理集, 且 T 一致, 则

$$T \not\vdash \text{Con}(T)$$

特别地, $\text{ZFC} \not\vdash \text{Con}(\text{ZFC})$

Theorem 1.4. 对任意可公理化的理论 T , $\text{ZFC} \vdash \text{Con}(T)$ 当且仅当存在 $M \models T$

即不能在 ZFC 里证明 ZFC 有一个模型

需要可公理化来写出 $\text{Con}(T)$, 因此因为 $\text{ZFC} \not\vdash \text{Con}(T)$, 我们只能假设这么一个模型

集合论的模型跟集合论没什么关系, 就是一个集合带一个二元关系, 是关于集合论语言的结构

Definition 1.5. 设 (M, E) 是集合论模型

1. 对任意公式 $\varphi(\bar{x}, y)$, 定义 M^n 上的函数

$$h_\varphi : M^n \rightarrow M$$

满足条件

$$M \models \exists y \varphi(\bar{a}, y) \Rightarrow M \models \varphi(\bar{a}, h_\varphi(\bar{a}))$$

称 h_φ 为 φ 的 Skolem 函数 (依赖于选择公理, 不同的变量选择有不同的函数)

2. 令 $\mathcal{H} = \{h_\varphi \mid \varphi \text{ formula}\}$ 为 Skolem 函数集合, 设 S 是 M 的任意子集, 则 $\mathcal{H}(S)$ 表示包含 S 且对 \mathcal{H} 封闭的最小集合, 称之为 S 的 Skolem 壳

Lemma 1.6. 令 N 是集合论模型, $S \subseteq N$, 如果 $M = \mathcal{H}(S)$, 则 $M \prec N$

证明. Induction

对任意 $\bar{a} \in M^n$, 有 $M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a})$

1. 不含量词, 显然成立
2. φ 形如 $\exists y \psi(\bar{x}, y)$, $N \models \exists y \psi(\bar{a}, y) \Rightarrow N \models \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a}))$, by IH, $M \models \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a})) \Rightarrow M \models \exists y \psi(\bar{a}, y)$

□

Theorem 1.7 (Löwenheim–Skolem Theorem).

1.2 层全的谱系

工作于 ZF^- : ZF – 基础公理

$\alpha \mapsto V_\alpha$ 是 On 到 WF 的 1-1 映射, 而 On 是真类

Lemma 1.8. *For any ordinal α*

1. V_α is transitive
2. $\xi \leq \alpha \Rightarrow V_\xi \subseteq V_\alpha$
3. if κ is inaccessible, then $|V_\kappa| = \kappa$

Definition 1.9. For any $x \in \text{WF}$, **rank** of x is

$$\text{rank}(x) = \min\{\beta \mid x \in V_{\beta+1}\}$$

$$\text{rank}(x) = \alpha \Rightarrow x \in V_{\alpha+1} \wedge x \notin V_\alpha$$

- $x \in V_{\alpha+1} \Leftrightarrow \text{rank}(x) \leq \alpha$
- $x \subseteq V_\alpha \Leftrightarrow \text{rank}(x) \leq \alpha$

Lemma 1.10. 1. $V_\alpha = \{x \in \text{WF} \mid \text{rank}(x) < \alpha\}$

2. WF is transitive

$$3. \forall x, y \in \text{WF}, x \in y \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$$

$$4. \forall y \in \text{WF}, \text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$$

证明. 1. by definition, $x \in V_{\text{rank}(x)+1} \setminus V_{\text{rank}(x)}$, $\text{rank}(x) < \alpha \Rightarrow x \in$

$$V_{\text{rank}(x)+1} \subseteq V_\alpha$$

$$\text{rank}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \notin V_\alpha$$

2. WF is the “union” of transitive sets

$$3. y \in V_{\text{rank}(y)+1} \setminus V_{\text{rank}(y)}, y \subseteq V_{\text{rank}(y)}, x \in y \Rightarrow x \in V_{\text{rank}(y)} \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$$

$$4. \text{ by 3, } \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \leq \text{rank}(y).$$

$$\text{induction on } \text{rank}(y) \leq \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$$

- $\text{rank}(y) = 0$

- $\text{rank}(y) = \beta + 1, y \in V_{\beta+2} \setminus V_{\beta+1}$

$$y \in V_{\beta+2} \Rightarrow y \subseteq V_{\beta+1}. y \notin V_{\beta+1} \Rightarrow y \not\subseteq V_\beta \Rightarrow y \setminus V_\beta \text{ nonempty.}$$

$$\text{Let } x \in y \setminus V_\beta, \text{rank}(x) \geq \beta, \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \beta + 1 = \text{rank}(y)$$

- $\text{rank}(y) = \gamma$ for some limit, then $y \subseteq V_\gamma$ and for any $\xi < \gamma, y \not\subseteq V_\xi$, let $X_\xi \in y \setminus V_\xi$, then $\text{rank}(X_\xi) \geq \xi, \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \sup\{\xi + 1 \mid \xi < \text{rank}(y)\} \geq \text{rank}(y)$

□

- WF 中的集合按照秩分层

- 在 WF 中基础公理是成立的: $\forall y(y \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in y(x \cap y = \emptyset))$, 因为任何序数集都有最小元, 挑一个有最小 rank 的就好了

- WF 类的构造没有用到选择公理

- $\text{On} \subseteq \text{WF}$

Lemma 1.11. *for any ordinal α*

1. $\alpha \in \text{WF}$ and $\text{rank}(\alpha) = \alpha$
2. $V_\alpha \cap \text{On} = \alpha$

证明. 1. $0 \in V_1 \setminus V_0 \subset \text{WF}$, $\text{rank}(0) = 0$

If $\alpha \in \text{WF}$ and $\text{rank}(\alpha) = \alpha$. $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$, $\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$, $\alpha+1 \in V_{\alpha+2} \subset \text{WF}$. If $\alpha+1 \in V_{\alpha+1}$, then $\text{rank}(\alpha+1) \leq \alpha$, but $\alpha \in \alpha+1 \Rightarrow \text{rank}(\alpha) = \alpha < \text{rank}(\alpha+1)$. A contradiction

suppose γ is a limit ordinal and for any $\alpha < \gamma$, $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$. $\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} \alpha \subseteq \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha = V_\gamma$. Thus $\gamma \in V_{\gamma+1}$, $\text{rank}(\gamma) \leq \gamma$ and $\text{rank}(\gamma) \not< \gamma$.

2. suppose $\beta \in V_\alpha \cap \text{On}$, then $\beta = \text{rank}(\beta) < \alpha$. If $\beta \in \alpha$ and $\text{rank}(\beta) < \alpha$, $\beta \in V_\alpha \cap \text{On}$

□

Lemma 1.12. 1. If $x \in \text{WF}$, then $\bigcup x, \mathcal{P}(x), \{x\} \in \text{WF}$, and their rank $< \text{rank}(x) + \omega$

2. If $x, y \in \text{WF}$, then $x \times y, x \cup y, x \cap y, \{x, y\}, (x, y), x^y \in \text{WF}$, and their rank $< \text{rank}(x) + \text{rank}(y) + \omega$
3. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$
4. for any set x , $x \in \text{WF} \Leftrightarrow x \subset \text{WF}$

证明. 1. suppose $\text{rank}(x) = \alpha$. $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$ and $x \subseteq V_\alpha$.

by transitivity, $\bigcup x \subseteq V_\alpha \Rightarrow \bigcup x \in V_{\alpha+1} \subset \text{WF}$. $\text{rank}(\bigcup x) \leq \alpha$

suppose $y \in \mathcal{P}(x)$, $y \subseteq x \Rightarrow y \subseteq V_\alpha \Rightarrow y \in V_{\alpha+1}$. $\mathcal{P}(x) \subseteq V_{\alpha+1}$, $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$, $\text{rank}(\mathcal{P}(x)) \leq \alpha+1$.

$\{x\} \in \mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$.

2. Suppose $\text{rank}(x) = \alpha, \text{rank}(y) = \beta, x \subset V_\alpha, y \subset V_\beta$

$$x \cup y \subset V_\alpha \cup V_\beta = V_{\max(\alpha, \beta)}, \text{rank}(x \cup y) \leq \max(\alpha, \beta)$$

$$x \cap y \subset V_{\min(\alpha, \beta)}$$

$$\{x, y\} \subseteq V_{\alpha+1} \cup V_{\beta+1} = V_{\max(\alpha, \beta)+1}, \text{rank}(\{x, y\}) = \max(\alpha, \beta) + 1$$

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subset V_{\max(\alpha, \beta)+2}, \text{rank}((x, y)) = \max(\alpha, \beta) + 2$$

$$x \times y = \{(a, b) \mid a \in x, b \in y\}. a \in x \Rightarrow \text{rank}(a) < \alpha, b \in y \Rightarrow \text{rank}(b) < \beta, \text{rank}(a, b) < \max(\alpha, \beta) + 2, (a, b) \in V_{\max(\alpha, \beta)+2}. x \times y \subseteq V_{\max(\alpha, \beta)+2}, \text{rank}(x \times y) \leq \max(\alpha, \beta) + 2.$$

$$x^y \subseteq \mathcal{P}(x \times y) \subseteq V_{\max(\alpha, \beta)+3}.$$

3. $\mathbb{N} = \omega \in V_{\omega+1}$

\mathbb{Z} : let \sim be an equivalence relation on $\omega \times \omega$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, then $\mathbb{Z} = (\omega \times \omega) / \sim$. Hence \mathbb{Z} is a partition of $\omega \times \omega$ and hence $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{P}(\omega \times \omega)$. $\mathbb{Z} \in V_{\omega+3}$

\mathbb{Q} : let \sim be an equivalence on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+)$, $\mathbb{Q} \in V_{\omega+6}$

\mathbb{R} : set of dedekind cut on \mathbb{Q} , $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R} \in V_{\omega+8}$

4. \Rightarrow : WF is transitive

$$\Leftarrow: x \text{ is a set and } x \subset \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha.$$

Claim: there is an ordinal α s.t. $x \subset V_\alpha$

Otherwise, let $f : \text{On} \rightarrow \mathcal{P}(x)$ s.t. $f(\alpha) = x \setminus V_\alpha$. Then for any $y \in \mathcal{P}(x)$, $f^{-1}(y)$ is a set. $\text{On} = \bigcup_{y \in x} f^{-1}(y)$ and is thus a set, a contradiction

□

AC \Rightarrow Any set has cardinality

Lemma 1.13. Assume AC ($V \models \text{ZFC}$)

1. for any group G , there is a group G' in WF s.t. $G \cong G'$

2. for any topological space T , there is a topological space T' in WF s.t. $T \cong T'$ (homeomorphic)

证明. 1. suppose $(G, *_G)$ is a group, $G, *_G \in V$. By AC, there is a cardinal α s.t. $|G| = \alpha$, that is, there is a bijection $f : \alpha \rightarrow G$. Define $*$: for any $x, y, z \in \alpha$, $x * y = z \Leftrightarrow f(x) *_G f(y) = f(z)$. Then $(\alpha, *) \cong (G, *_G)$, $* \subseteq \alpha \times \alpha$

□

V 中的任何结构都可以在 WF 中找到同构象（同构是在 V 里看到的）

Definition 1.14. 任意集合 A 上的二元关系 $<$ 是良基的，当且仅当对 A 的任意非空子集 X ， X 有 $<$ 下的极小元

Theorem 1.15. If $A \in \text{WF}$, then \in is a well-founded relation on A

证明. suppose $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$, $X \subseteq \text{WF}$, then elements of X has ranks and $x \in y \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$. Let x having least rank in X , then x is the \in -minimal element in X

□

Lemma 1.16. If A is a transitive set and \in is a well-founded relation on A , then $A \in \text{WF}$

证明. Just need to prove $A \subset \text{WF}$. If $A \not\subset \text{WF}$, $X = A \setminus \text{WF} \neq \emptyset$. Then X has a \in -minimal element x . Then $x \neq \emptyset \in \text{WF}$. For any $y \in x$, $y \in A$. By the minimality of x , $y \in \text{WF}$. Then $x \subset \text{WF}$, $x \in \text{WF}$, a contradiction

□

Lemma 1.17. For any set x , there is a minimal transitive set $\text{trcl}(x)$ s.t. $x \subseteq \text{trcl}(x)$

证明. For any $n \in \omega$ define x_n

$$x_0 = x$$

$$x_{n+1} = \bigcup x_n$$

let $\text{trcl}(x) = \bigcup_{n \in \omega} x_n$.

1. $\text{trcl}(x)$ is transitive

$$a \in \text{trcl}(x) \Rightarrow a \in x_n \Rightarrow a \subseteq x_{n+1} \subseteq \text{trcl}(x)$$

2. $\text{trcl}(x)$ is minimal

If $y \supseteq x$ is transitive, recursively prove for any $n < \omega$, $x_n \subseteq y$.

□

$\text{trcl}(x)$ is the **transitive closure** of x .

Lemma 1.18. *We can prove the following without axiom of power set*

1. if x is transitive, $\text{trcl}(x) = x$
2. $y \in x \Rightarrow \text{trcl}(y) \subseteq \text{trcl}(x)$
3. $\text{trcl}(x) = x \cup \bigcup \{\text{trcl}(y) \mid y \in x\}$

证明. 2. $y \in x \subset \text{trcl}(x)$. $y \in \text{trcl}(x)$. $\text{trcl}(y) \subseteq \text{trcl}(x)$.

3. $x \cup \bigcup \{\text{trcl}(y) \mid y \in x\} \subseteq \text{trcl}(x)$ by (2)

$\bigcup \{\text{trcl}(y) \mid y \in x\}$ is transitive. For $y \in x$, $y \subseteq \text{trcl}(y)$. Thus rhs is transitive

□

Theorem 1.19 (In ZF^-). *For any set X , TFAE*

1. $X \in \text{WF}$
2. $\text{trcl}(X) \in \text{WF}$
3. \in is a well-founded relation on $\text{trcl}(X)$

证明. $1 \rightarrow 2$: WF is closed under union

□

Theorem 1.20. *If $V \models \text{ZF}^-$, TFAE*

1. axiom of foundation ($V \models$) axiom of foundation

2. for any set X , \in is a well-founded relation on X

3. $V = \text{WF}$

$V \models \text{ZF} \Rightarrow V = \text{WF}(\text{WF} \models \text{ZF})$

Goal: $V \models \text{ZF}^- \Rightarrow \text{WF} \models \text{ZF}^-$ 但是 WF 是一个类，我们并没有定义
我们可以用相对化编码 $\text{WF} \models \text{ZF}^-$

1.3 相对化 relativization

工作在 ZF^-

Definition 1.21. M class, φ formula, φ 对 M 的 相对化 φ^M

1. $(x = y)^M := x = y$
2. $(x \in y)^M := x \in y$
3. $(\varphi \rightarrow \psi)^M := \varphi^M \rightarrow \psi^M$
4. $(\neg \varphi)^M := \neg \varphi^M$
5. $(\forall x \varphi)^M := (\forall x \in M) \varphi^M$

φ^M 读作“ φ 在 M 中为真”，表示为 $(M, \in) \subseteq (V, \in)$ 有 $M \models \varphi$ ，即如果 $V \models \varphi^M$ ，那么 $M \models \varphi$ ，而 V 知道得更多一点

重新定义了满足

若 M 被公式 $M(u)$ 定义， $(\forall x \varphi)^M$ 是公式 $\forall x (M(x) \rightarrow \varphi^M(x))$

Example 1.1. $M = \text{On}$, $\text{On} \models \forall x \forall y (x \in y \vee y \in x \vee x = y)$

“ $M \models \varphi$ ”可以形式化为 $V \models \varphi^M$ ，而 M 对应于 $M(u)$ ，即等价于 $T \vdash \varphi^M$ ，
如果我们工作在某个 T 上

若函数 f 被公式 $\varphi(\bar{x}, y)$ 定义，则 $V \models \forall \bar{x} \exists! y \varphi(\bar{x}, y)$ ，但相对化后不一定对，因此 $f^M = \{(\bar{x}, y) \in M : \varphi^M(\bar{x}, y)\}$ 不一定是 M 上的函数

Definition 1.22. for any theory T , any class M , M is a **model** of T , $M \models T$,
iff for any axiom φ of T , φ^M holds, i.e., $V \models \varphi^M$

V 中定义出语义

Theorem 1.23. $V \models ZF^- \Rightarrow WF \models ZF - \text{Inf}$,
 $V \models (ZF - \text{Inf})^{WF}$ 等价的 $ZF^- \vdash (ZF - \text{Inf})^{WF}$

- 存在公理: $\exists x \in M(x = x)$
- 外延公理: Ext^M

$$\forall x \in M \forall y \in M \forall u \in M ((u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y)$$

Lemma 1.24. *If M is transitive, then Ext^M holds*

证明. suppose $X, Y \in M$, if $X \neq Y$, then there is $u \in X \triangle Y$ (by Ext in V), by transitivity, $u \in M$ □

- 分离公理模式: for any M , any formula φ , $S(\varphi)^M$

$$\forall x \in M \exists Y \in M \forall u \in M (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$$

Therefore, if for any $X \in M$, $\{u \in X \mid \varphi^M(u)\} \in M$, then 分离公理模式在 M 中为真

Lemma 1.25. *If M satisfies $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then $S(\varphi)^M$ holds for any M*

证明. Suppose $X \in M$, suffices to find corresponding $Y \in M$ s.t.
 $\forall u \in M (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$

根据 V 中的分离公理, $Y = \{x \in X \mid \varphi^M(u)\} \in V$ and $Y \subseteq X \subset M$,
 thus $Y \in M$ and $\forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$. But $x \in Y \Rightarrow x \in M$,
 thus this is equivalent to $\forall u \in M (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$ □

- axiom of pairing Pair

$$\forall x \in M \forall y \in M \exists z \in M \forall u \in M (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

只要 M 对对集函数 $x, y \mapsto \{x, y\}$ 封闭, 则 Pair^M 成立

- 幂集公理 *Pow*

$$\forall X \in M \exists Y \in M \forall u \in M (u \in Y \leftrightarrow \forall a \in M (a \in u \rightarrow a \in X))$$

Lemma 1.26. *If M satisfies $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then Pow^M holds*

证明. for any $X \in M$, $\mathcal{P}(X) \in M$. and we prove $\mathcal{P}(X)$ is the Y , for any $u \in M$ □

- axiom of infinity *Inf*

$$\exists X \in M (\emptyset \in X \wedge \forall y \in M (y \in X \rightarrow y^+ \in X))$$

$$\emptyset : \psi(x) := \forall u (u \in x \rightarrow u \neq u), x = \emptyset \Leftrightarrow \psi(x)$$

$y^+ : \varphi(y, z) : \forall u \in z (u = y \vee u \in y) \wedge y \subseteq z \wedge y \in z$ 函数相对化后不一定是函数，所以放到下一节

- axiom of foundation *Fod*

$$\forall x \in M (\exists u \in M (u \in x) \rightarrow \exists y \in M (y \in x \wedge \neg \exists u \in M (u \in x \wedge u \in y)))$$

Lemma 1.27. *If M is transitive and elements of M is well-founded under \in , then Fod^M holds*

证明. suppose $x_0 \in M$ and there is

$\psi := \exists u (u \in x)$ and φ is the latter part

$$\psi^M(x_0) \leftrightarrow \exists u (u \in x_0) \text{ since } M \text{ is transitive, } \varphi^M(x_0) \leftrightarrow \exists y (y \in x_0 \wedge \neg \exists u \in M (u \in x \wedge u \in y))$$

在 V 中, $x_0 \neq \emptyset$, 由条件可知 (x_0, \in) 是良基的, 于是 φ 在 V 中对, 那么当然在 M 中对 □

- 替换公理模式 *Rep*(φ)

$$\forall A \in M \forall x \in A \cap M \exists! y \in M \varphi^M(x, y) \rightarrow \exists B \in M \forall x \in A \exists y \in B \varphi^M(x, y)$$

$$\exists! y \theta(y) : \exists y (\theta(y) \wedge \forall y' (\theta(y') \rightarrow y = y'))$$

Lemma 1.28. *if M satisfied $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then $\text{Rep}(\varphi)^M$ holds for any φ*

证明. for any $A_0 \in M$, then $A_0 \cap M = A_0$, thus we have $\forall x \in A_0 \exists! y (\varphi^M(x, y) \wedge M(y))$.

by $\text{Rep}(\varphi^M(x, y) \wedge M(y))$, $\exists B' \forall x \in A_0 \exists y \in B' \varphi^M(x, y) \wedge M(y)$

Let $B = B' \cap M$, which is what we want \square

Thus in ZF^- , we can prove $\text{WF} \models \text{ZF} - \text{inf}$

1.4 绝对性

$$(V, \in) \supseteq (M, \in)$$

对于哪些 φ , 有 $V \models \varphi \Leftrightarrow M \models \varphi$

Definition 1.29. 公式 $\psi(\bar{x})$, 对任意类 $M \subseteq N$, 如果

$$\forall \bar{x} \in M (\psi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^N(\bar{x}))$$

就称 $\psi(\bar{x})$ 对于 M, N 是 **绝对的**, 如果 $N = V$, 则称 $\psi(\bar{x})$ 对于 M 是 **绝对的**

$$\bar{a} \in M, (M, \in) \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow V \models \psi^M(\bar{a})$$

$$\psi \text{ 相对于 } M, N \text{ 绝对: } \forall \bar{a} \in M, \text{ 有 } M \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \psi(\bar{a})$$

if $\forall \varphi(\bar{x}) \in L$, 均有 φ 相对于 M, N 绝对的, 则 $M \leq N$

Lemma 1.30. *suppose $M \subseteq N$, φ, ψ formula*

1. 如果 φ, ψ 相对于 M, N 绝对, so are $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$
2. if φ is q.f., then φ 对任意 M 绝对
3. if M are transitive, and φ 相对于它们绝对, so is $\forall x \in y \varphi$

证明. 3. $\forall x \in y \varphi := \forall x (x \in y \rightarrow \varphi(x, y, \bar{z}))$, 故 $(\forall x \in y \varphi)^M = \forall x \in M (x \in y \rightarrow \varphi^M(x, y, \bar{z}))$, 任取 $y_0, \bar{z}_0 \in M$, 则由 M 的传递性, 都有 $x \in y_0 \Rightarrow x \in M$

目标: $\forall x \in M(x \in y_0 \rightarrow \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$ 当且仅当 $\forall x \in N(x \in y_0 \rightarrow \varphi^N(x, y_0, \bar{z}_0))$

由 φ 的绝对性, 对每个 $x_0 \in M$, 有

$$\varphi^M(x_0, y_0, \bar{z}_0) \leftrightarrow \varphi^N(x_0, y_0, \bar{z}_0)$$

故 $V \models \forall x \in M(x \in y_0 \rightarrow \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$, 当且仅当 $V \models \forall x(x \in y_0 \rightarrow \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$ 当且仅当 $V \models \forall x \in N(x \in y_0 \rightarrow \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$

□

Lemma 1.31. 令 $M \subseteq N$ 且 M 传递, $\psi(\bar{x})$ 是一个公式, 则

1. 如果 ψ 是 Δ_0 公式, 则它对 M, N 是绝对的
2. 如果 ψ 是 Σ_1 公式, 则

$$\forall \bar{x} \in M(\psi^M(\bar{x}) \rightarrow \psi^N(\bar{x}))$$

3. 如果 ψ 是 Π_1 公式, 则

$$\forall \bar{x} \in M^n(\psi^N(\bar{x}) \rightarrow \psi^M(\bar{x}))$$

证明. 1. 对公式的长度进行归纳证明

2. 例子: 令 $M = \mathbf{On}, N = \mathbf{WF}$, 令 $\psi(y) := \forall x \in y \forall u, v \in x(u \in v \vee v \in u \vee u = v)$, 则 ψ 是 Δ_0 的, 则

$$\psi^M(y) = \forall x \in M(x \in y \rightarrow \forall u, v \in M(u, v \in x \rightarrow (u \in v \vee v \in u \vee u = v)))$$

$$\psi^N(y) = \forall x \in N(x \in y \rightarrow \forall u, v \in N(u, v \in x \rightarrow (u \in v \vee v \in u \vee u = v)))$$

任取 $x_0 \in \mathbf{WF} \setminus \mathbf{On}$ 使得 (x_0, \in) 不是线序, 令 $y_0 = \{x_0\}$, 则 $\psi^M(y_0)$ 的前件假, $\psi^M(y_0)$ 是真的, $\psi^N(y_0)$ 为假, 因此

$$\forall \bar{x}(\psi^M(\bar{x}) \rightarrow \psi^N(\bar{x}))$$

错误

令 $x = \bar{x}, y = \bar{y}$

设 $\psi := \exists y \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y) \in \Delta_0$, $\psi^M := \exists y \in M(\varphi^M(x, y))$, $\psi^N := \exists y \in N(\varphi^N(x, y))$, 任取 $a \in M^m$, 目标 $\psi^M(a) \rightarrow \psi^N(a)$

若 $\psi^M(a)$ 成立, 则有 $b \in M^n$ 使得 $\psi^M(a, b)$, 由 Δ_0 的绝对性, $\psi^N(a, b)$, 因此 $\exists y \psi^N(a, y)$

3. 设 $\psi := \forall y \varphi(x, y)$ 其中 $\varphi \in \Delta_0$, 则 $\psi^M := \forall y \in M \varphi^M(x, y)$, $\psi^N := \forall y \in N \varphi^N(x, y)$, 设 $a \in M$ 使得 $\psi^N(a)$ 成立, 目标 $\psi^M(a)$ 成立。

$\psi^N(a) \Rightarrow$ 对所有的 $b \in N$ 均有 $\varphi^N(a, b)$ 成立, 故对一切 $b \in M$ 有 $\varphi^N(a, b)$ 成立, 由 φ 的绝对性, $\forall y \in M \varphi^M(a, y)$

□

Lemma 1.32. 设 $M \subseteq N$, 均是句子集 Σ 的模型, 而 $\Sigma \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$, 则 φ 对 M 与 N 绝对当且仅当 ψ 也是

证明. $M, N \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$

$\forall \bar{x} \in M^n(\varphi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^M(\bar{x})), \forall \bar{x} \in N^n(\varphi^N(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^N(\bar{x}))$

若 φ 是绝对的, $\forall \bar{x} \in M^n(\varphi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^N(\bar{x}))$

因此 $\forall \bar{x} \in M^n(\psi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^N(\bar{x}))$

□

Definition 1.33. 假设 $M \subseteq N$, $f(x_1, \dots, x_n)$ 是函数 (类), 设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 被公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ 定义, 称 f 相对于 M, N 是绝对的, 是指

1. $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ 相对于 M, N 绝对

2. $\forall \bar{x} \in M^n \exists! y \in M(\varphi^N(\bar{x}, y))$

由上一引理, f 的绝对性与定义 f 的公式无关

$f^M = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in M^{n+1} \mid \varphi^M(\bar{x}, y)\}, f \upharpoonright M = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in M^{n+1} \mid \varphi(\bar{x}, y)\}$

f 是绝对的当且仅当 $\forall \bar{x} M \forall y \in M(\varphi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \varphi^M(\bar{x}, y))$ 当且仅当 $\varphi(M^n, M) = \varphi^M(M^n, M)$, 即 $f \upharpoonright M = f^M$

即对任意 $\bar{a} \in M^n$, 有 $f \upharpoonright M(\bar{a}) = f^M(\bar{a})$

Theorem 1.34. 以下关系和函数可以在 $ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf}$ 中用公式定义, 且在 $ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf}$ 下等价于一个 Δ_0 -formula

1. $x \in y$
2. $x = y$
3. $x \subset y$
4. $\{x, y\}$
5. $\{x\}$
6. (x, y)
7. \emptyset
8. $x \cup y$
9. $x \cap y$
10. $x - y$
11. $x^+ = x \cup \{x\}$
12. x 传递
13. $\bigcup x$
14. $\bigcap x$, 且 $\bigcap \emptyset = \emptyset$

证明. 4. 函数 $z = \{x, y\}$ 被公式 $\forall u \in z(u = x \vee u = y) \wedge (x \in z \wedge y \in z)$

5. $y = \{x\}$ 被公式 $\forall u \in y(u = x) \wedge (x \in y)$

6. 函数 $z = (x, y)$ 被公式 $\forall u \in z(u = x \vee x = \{x, y\}) \wedge x \in z \wedge \exists u \in z(u = \{x, y\})$

7. $\forall y \in x(y \neq y)$

8. 函数 $z = x \cup y$ 被公式 $\forall x \subset z \wedge y \subset z \wedge \forall u \in z(u \in x \vee u \in y)$
9. 函数 $z = x \cap y$ 被公式 $z \subset x \wedge z \subset y \wedge \forall u \in x(u \in y \rightarrow u \in z)$
10. 函数 $z = x - y$ $\forall u \in z(u \in x \wedge u \notin y) \wedge \forall u \in x(u \notin y \rightarrow u \in z)$
11. 函数 $z = x^+$ $\forall u \in z(u \in x \vee u = x) \wedge x \in z \wedge x \subset z$
12. $\forall y \in x(y \subset x)$
13. 函数 $z = \bigcup x$, $\forall u \in z \exists y \in x(u \in y) \wedge \forall u \in x(u \subset z)$
14. 函数 $z = \bigcap x$, $x = \emptyset \rightarrow z = \emptyset \wedge \forall u \in z \forall y \in x(u \in y) \wedge \exists y \in x \forall u \in z(\forall w \in x(u \in w) \rightarrow u \in z)$

□

Lemma 1.35. 如果 M 是一个传递类, f 是一个被 Δ_0 公式定义的函数, 如果 f 在 M 上封闭, 即 $f(M^n) \subseteq M$, 则 f 相对于 M 绝对

证明. 设 f 被 $\varphi(\bar{x}, y)$ 定义, $\forall \bar{x}, y \in M(\varphi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \varphi^M(\bar{x}, y)), \forall \bar{x} \in M \exists! y \in M(\varphi(\bar{x}, y))$ □

Corollary 1.36. 之前的函数均在 $ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf}$ 的传递模型 M 中绝对的
 $ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf}$ 能够保证函数封闭, 传递性保证定义它们的公式的绝对性

Lemma 1.37. 绝对性对复合运算封闭, 即假设 $M \subseteq N$, 公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 函数 $f(x_1, \dots, x_n), g_i(y_1, \dots, y_m), 1 \leq i \leq n$ 都相对于 M, N 绝对, 则 $\varphi(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ 与 $f(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ 也相对于 M, N 绝对

证明. 不妨设 $m = n = 1$

设 $g(y) = z$ 被 $\theta(y, z)$ 定义, $\varphi(g(y)) := \exists z(\theta(y, z) \wedge \varphi(z))$

$\varphi^M(g(y)) := \exists z \in M(\theta^M(y, z) \wedge \varphi^M(z)), \varphi^N(g(y)) := \exists z \in N(\theta^N(y, z) \wedge \varphi^N(z))$

由绝对性 $\forall z \in M \forall y \in M(\theta^M(y, z) \wedge \varphi^M(z) \leftrightarrow \theta^N(y, z) \wedge \varphi^N(z))$

任取 $y_0 \in M$, 设 $\exists z \in N(\theta^N(y_0, z) \wedge \varphi^N(z))$, 由函数 $g(y) = z$ 的绝对性, $\forall y \in M \exists! z \in M(\theta^N(y, z))$, 存在唯一的 $z_0 \in M$ 使得 $\theta^N(y_0, z_0) \wedge \varphi^N(z_0)$ □

Theorem 1.38. 以下关系和函数对任意 $ZF^- - \text{Pow Inf}$ 的传递模型 M 都是绝对的

1. z 是有序对

2. $A \times B$

3. R 是关系

4. $\text{dom}(R)$

5. $\text{ran}(R)$

6. f 是函数

7. $f(x)$

8. f 是一一函数

- 证明. 1. “ z 是有序对”: $\exists u, v(z = (u, v))$, 但是这不是 Δ_0 , 因此考虑 $\exists u \in \bigcup z \exists v \in \bigcup z(z = (u, v))$, 注意这里不是平常的受囿量词, 但是令 $g_1(z) = \bigcup z, g_2(z) = \bigcup z, g_3(z) = z, \varphi(x_1, x_2, x_3) := \exists u \in x_1 \exists v \in x_2(x_3 = (u, v))$, 则 g_1, g_2, g_3, φ 绝对, 故 $\varphi(g_1(z), g_2(z), g_3(z))$ 绝对
2. 函数 $z = x \times y: \forall u \in z \exists s \in x \exists t \in y(u = (s, t)) \wedge \forall s \in x \forall t \in y \exists u \in z(u = (s, t))$
3. R 是关系 $\Leftrightarrow \forall u \in R(u \text{ 是有序对})$
4. 函数, $D = \text{dom}(R): \forall x \in D \exists z \in R \exists u \in z \exists y \in u(z = (x, y))$ 且 $\forall z \in R \forall u \in z \forall x \in u \forall y \in u(z = (x, y) \rightarrow x \in D)$
5. 同理
6. f 是关系 $\wedge \forall x \in \text{dom}(f) \exists! y \in \text{ran}(f) \exists u \in f(u = (x, y))$
7. $\varphi(f(x))$ 表示 f 是函数且 $x \in \text{dom}(f)$, 则 “ $y = f(x)$ ” 定义为 $\varphi(f, x) \rightarrow \exists u \in f(u = (x, y)) \vee (\neg \varphi(f, x) \rightarrow y \neq \emptyset)$
8. “ f 是函数” 且 $\forall s \in \text{dom}(f) \forall t \in \text{dom}(f)(f(s) = f(t) \rightarrow s = t)$

□

1.5 基础公理的相对一致性

如果 ZF^- 一致, 则 ZF 一致

目标: $V \models ZF^-$, 证明 $WF \models ZF$, 等价于 $ZF^- \vdash (ZF)^{WF}$

Lemma 1.39. 若传递类 M 是 $ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf}$ 的模型, 且 $\omega \in M$, 则无穷公理在 M 中为真, 因此无穷公理在 WF 中为真 ($ZF^- \vdash (\text{Inf})^{WF}$)

证明. • 由于 \emptyset 与 x^+ 都被 Δ_0 公式定义

- 若 $M \models ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf}$, 则 x^+ 在 M 中封闭, 且 $\emptyset \in M$
- $\emptyset^M = \emptyset, (x^+)^M = x^+$
- 无穷公理的相对化为 $\exists x \in M (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y^+ \in x))$
- 即 $\exists x \in M (\emptyset \in M \wedge \forall y \in x (y^+ \in x))$
- 由于 $\omega \in M$, 令 $x = \omega$

□

结论: $WF \models ZF$

目标: $Con(ZF^-) \vdash Con(ZF)$

Theorem 1.40. 设 $T (ZF^-)$ 是集合论的理论, $\Sigma (ZF)$ 是一个句子集, 设 M 是一个类且非空, 如果 $T \vdash (M \models \Sigma)$, 即 $T \vdash \Sigma^M$ 或者“若 $V \models T$, 则 $V \models \Sigma^M$ ”, 则

1. 对集合论语言的任何语句 φ , 如果 $\Sigma \vdash \varphi$, 则 $T \vdash \varphi^M$
2. 如果 T 一致, 则以 Σ 为公理的理论也一致

证明. 1. 设 $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ 是 Σ 的一个证明, 对 $k \leq n$, 归纳证明 $T \vdash \varphi_k^M$

- 若 $\varphi_i \in \Sigma \cup Ax, Ax$ 一阶逻辑的公理, $T \vdash \varphi_i^M$
- 若 $i, j < k$ 使得 $\varphi_j = \varphi_k \rightarrow \varphi_i$, 由归纳假设 $T \vdash \varphi_i^M, T \vdash \varphi_j^M \rightarrow \varphi_k^M$, 因此 $T \vdash \varphi_k^M$

2. 若 Σ 不一致, 则存在 φ 使得 $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, 从而 $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)^M$, 故 T 不一致

□

Theorem 1.41. 基础公理相对于 ZF^- 一致, 即如果 ZF^- 一致, 则 ZF 一致

证明. • $ZF^- \vdash (ZF)^{WF}$

- 故 ZF^- 一致能推出 ZF 一致

□

选择公理: 任何非空集合都可被良序化 $\forall X \exists R (R \text{ 是 } X \text{ 上的良序})$

1. $R \subseteq X \times X$
2. R 是线序
3. $\forall Y \subseteq X, Y \neq \emptyset \Rightarrow Y$ 存在 R -极小元

Lemma 1.42 (ZF^-). 设 M 是 $ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf}$ 的传递模型, 如果 $X, R \in M$ 并且 R 是 X 上的一个良序, 则 $(R \text{ 是 } X \text{ 的良序})^M$

证明. “ R 是 X 上的线序”被公式 $\varphi(X, R)$ 表达

- R 是关系
- $\forall x \in X (\neg R(x, x))$
- $\forall x, y, z \in X (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$
- $\forall x, y \in X (R(x, y) \vee R(y, x) \vee x = y)$

$R(x, y)$ 表示 $(x, y) \in R, \exists z \in R (z = (x, y))$

因此 $\varphi(X, R)$ 是 Δ_0 -公式

令公式 $\psi(X, Y, R)$ 为 $Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in Y \forall x \in Y (\neg R(x, y))$, 则 $\psi(X, Y, R)$ 是 Δ_0 -公式, “ R 是 X 上的良序”可以表达为 $\theta(X, Y) = \varphi(X, R) \wedge \forall Y \psi(X, Y, R)$

则 θ 是一个 Π_1 -公式

$\forall X \in M \forall R \in M (\theta(X, R) \rightarrow \theta^M(X, R))$, 任取 $X_0, R_0 \in M$ 使得 R_0 是 X_0 上的良序, 则 $\theta(X_0, R_0)$, 故 $\theta^M(X_0, R_0)$ 也成立, 即 \square

Theorem 1.43 (ZF^-). V_ω 是 $ZFC - \text{Inf} + \neg \text{Inf}$ 的模型

证明. 与 WF 类似, V_ω 是传递的, 且关于 $\{x, y\}, \bigcup x, \mathcal{P}(x)$ 封闭, 故而是 $ZF - \text{Inf}$ 的模型 (练习)

$$\neg \text{Inf}: \forall x \neg (\emptyset \in X) \wedge \forall y \in x (y^+ \in x)$$

$$\neg \text{Inf}^M: \forall x \in M (\emptyset^M \in X \wedge \forall y \in x ((y^+)^M \in x))$$

由于 $M = V_\omega$ 传递, 故 $(\neg \text{Inf})^M: \forall x \in M (\emptyset \in X \wedge \forall y \in x (y^+ \in x))$

由于 V_ω 中没有无穷集, 故 $(\neg \text{Inf})^M$ 在 V 中成立

AC^M : 任取 $X \in V_\omega$, 若 $X \neq \emptyset$, 存在 $R \in V_\omega$ 使得 R 是 X 上的良序

$\text{rank}(\mathcal{P}(x \times y)) < \max(\text{rank}(x), \text{rank}(y))$, 故 $\mathcal{P}(x \times x) \in V_\omega$ \square

Corollary 1.44. $\text{Con}(ZF^-) \vdash \text{Con}(ZFC - \text{Inf} + \neg \text{Inf})$

1.6 基于良基关系的归纳与递归

Definition 1.45. 类 R ($\varphi(x, y)$) 是类 X ($\psi(x)$) 上的良基关系当且仅当

$$\forall U \subset X (U \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in U (\neg \exists z \in U (z R y)))$$

U 是集合

Example 1.2. \in 是 On 上的良基关系

如果 Fud 成立, 则 \in 是 V 上的良基关系

Theorem 1.46 (超穷归纳原理). 设 $\varphi(x)$ 是一个公式, 若 $\forall \alpha \in \text{On}$ 有 $\forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha)$, 则 $\forall \alpha \in \text{On} (\varphi(\alpha))$

Theorem 1.47 (超穷递归定理). 设 $G: V \rightarrow V$ 的函数, 则存在唯一的函数 $F: \text{On} \rightarrow V$ 使得

$$F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

Definition 1.48. 类 X 上的关系, 类 R 是 似集合的 当且仅当对任意 $x \in X$, 有 $\{y \in X \mid y R x\}$ 是一个集合

类的元素一定是集合，因为类是集合宇宙的一个子区域

一般称 $\{y \in X \mid yRx\}$ 中的元素为 x 的前驱， \in 是任何类 X 上的似集合关系

Definition 1.49. 如果 R 是 X 上的似集合关系，且 $x \in X$ ，则递归定义

- $\text{pred}^0(X, x, R) = \{y \in X \mid yRx\}$
- $\text{pred}^{n+1}(X, x, R) = \bigcup \{\text{pred}(X, y, R) \mid y \in \text{pred}^n(X, x, R)\}$
- $\text{cl}(X, x, R) = \bigcup_{n \in \omega} \text{pred}^n(X, x, R)$

对每个 n , $\text{pred}^n(X, x, R)$ 是集合

故 $\text{cl}(X, x, R)$ 是集合

若 R 是 \in ，且 X 是传递的，则 $\text{cl}(X, x, R) = x$

Lemma 1.50. 如果 R 是 X 上的似集合关系，则对任意 $y \in \text{cl}(X, x, R)$ ，都有 $\text{pred}(X, y, R) \subseteq \text{cl}(X, x, R)$

证明. 设 $y \in \text{cl}(X, x, R)$ ，则存在 $n \in \omega$ 使得 $y \in \text{pred}^n(X, x, R)$ ，故 $\text{pred}(X, y, R) \subseteq \text{pred}^{n+1}(X, x, R)$ □

Theorem 1.51. 如果 R 是 X 上的良基关系，且是似集合的，则 X 的每个非空子类 Y 都有 R -极小元

证明. 任取 $x \in Y$ ，若 x 不是 Y 的 R -极小元，则 $\text{pred}(X, x, R) \cap Y$ 非空，于是 $Y \cap \text{cl}(X, x, R)$ 非空，令 $x_0 \in Y \cap \text{cl}(X, x, R)$ 为极小元，则 x_0 是 Y 的极小元，否则 $\text{pred}(X, x_0, R) \cap Y = \emptyset$ ，任取 $z_0 \in \text{pred}(X, x_0, R) \cap Y$ ，则 $z_0 \in Y$ ， $z_0 \in \text{cl}(X, x, R)$ ，于是 $z_0 \in Y \cap \text{cl}(X, x, R)$ 且 $z_0 Rx_0$ ，与 x_0 的极小性矛盾 □

Remark. 假设基础公理，则 \in 是 V 上的良基关系，若 $V \neq \text{WF}$ ，则 $V \setminus \text{WF}$ 有极小元 x_0 非空，但是 $\forall y \in x_0 (y \in \text{WF})$ ，于是 $x_0 \subset \text{WF}$ ，矛盾，因此 $V = \text{WF}$

Theorem 1.52. 设 R 是 X 上的似集合的良基关系, 如果 $F : X \times V \rightarrow V$ 是“函数”, 则存在唯一的“函数” $G : X \rightarrow V$ 使得 $\forall x \in X (G(x) = F(x, G \upharpoonright \text{pred}(X, x, R)))$

练习

证明. 1. 存在性

令公式 $\theta(x, t)$ 表示

- t 是一个函数 (集合)
- $\text{dom}(t) = \{x\} \cup \text{pred}(X, x, R)$
- $\forall y \in \text{dom}(t) (t(y) = F(y, t \upharpoonright \text{pred}(X, y, R)))$
- $\forall y \notin \text{dom}(t) (t = \emptyset)$

令 $G = \{(x, y) \mid \theta(x, y)\}$, 证明 G 是函数:

1. 唯一性

若不唯一, 则存在最小的 $x \in X$ 使得 $G(x) \neq G(x')$. 但是 $G(x) = F(x, G \upharpoonright (X, x, R)) = F(x, G' \upharpoonright (X, x, R)) = G'(x)$

□

Definition 1.53. 如果 R 是 X 上的似集合关系, 设 $x \in X$, 则定义

$$\text{rank}(x, X, R) = \sup\{\text{rank}(y, X, R) + 1 \mid yRx \wedge y \in X\}$$

(来自超穷递归)

Definition 1.54 (ZF^-). 如果类 X 传递, 且 \in 是 X 上的良基关系, 则 $X \subseteq \text{WF}$ 且对任意 $x \in X$ 有 $\text{rank}(x, X, \in) = \text{rank}(x)$

证明. 若 $X \not\subseteq \text{WF}$, 取极小元 $x_0 \in X \setminus \text{WF}$, 显然 $x_0 \neq \emptyset$. 任取 $z \in x_0$, 由传递性, 有 $z \in X \cap \text{WF}$, 于是 $x_0 \subseteq \text{WF}$, 于是 $X \subseteq \text{WF}$

令 $Y = \{x \in X \mid \text{rank}(x, X, \in) \neq \text{rank}(x)\}$, 如果 Y 非空, 令 x_0 为 Y 的极小元, 根据传递性, $x_0 \subseteq X$, 且 $\forall z \in x_0, \text{rank}(z, X, \in) = \text{rank}(z)$

$$\text{rank}(x_0, X, \in) = \sup\{\text{rank}(z, X, \in) + 1 \mid z \in x_0\}$$

$$\text{rank}(x_0) = \sup\{\text{rank}(z) + 1 \mid z \in x_0\}$$

□

Definition 1.55. 令类 R 是 X 上似集合的良基关系, 则 (X, R) 上的 **mostowski** 函数 G 定义为

$$G(x) = \{G(y) \mid y \in X \wedge yRx\}$$

G 的值域记作 M , 称之为 (X, R) 的 **Mostowski 坍塌**

Lemma 1.56. 设 R 是 X 上的一个似集合的良基关系, G 是其上的 *Mostowski* 函数, M 为其 *Mostowski* 坍塌, 则

1. $\forall x, y \in X (xRy \rightarrow G(x) \in G(y)), G : (X, R) \rightarrow (M, \in)$ 同态
2. M 是传递集
3. 如果幂集公理成立, 则 $M \subseteq \text{WF} (ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf})$
4. 如果幂集公理成立, 且 $x \in X$, 则 $\text{rank}(x, X, R) = \text{rank}(G(x))$

证明. 3. 断言: (M, \in) 是良基的

任取 $Y \subseteq M$ 非空, 则 $G^{-1}(Y) \subseteq X$ 非空, 有极小元 x_0 , 若 $G(x_0)$ 不是 Y 的极小元, 则 $G(x_0) \cap Y \neq \emptyset$. 令 $z \in G(x_0) \cap Y$, 则存在 $y \in G^{-1}(Y)$ 使得 $G(y) = z$ 且 yRx_0 , 与 x_0 极小矛盾

4. 设 $x \in X, \text{rank}(G(x)) = \sup\{\text{rank}(v)+1 \mid v \in G(x)\} = \sup\{\text{rank}(G(y))+1 \mid y \in X \wedge yRx\}$

设 x_0 是使得等式不成立的极小元, 则对任意 $y \in X, yRx_0 \rightarrow \text{rank}(y, X, R) = \text{rank}(G(y))$

$$\text{rank}(x, X, R) = \sup\{\text{rank}(y, X, R)+1 \mid yRx \wedge y \in X\} = \sup\{\text{rank}(G(y))+1 \mid yRx \wedge y \in X\} = \text{rank}(G(x))$$

□

那么 G 在什么条件下是个同构

Definition 1.57. R 是 X 上的 **外延**的关系当且仅当

$$\forall x, y \in X (\forall z \in X (zRx \leftrightarrow zRy) \rightarrow x = y)$$

Lemma 1.58. 如果 X 是传递的, 则 \in 在 X 上是外延的

证明. $\text{pred}(X, x, \in) = x$

□

Lemma 1.59. 令 R 是 X 上的似集合良基关系, 如果 R 在 X 上是外延的, 则 G 是同构

证明. 若 G 不是单射, 即 $Y = \{x \in X \mid \exists y \in X (x \neq y \wedge G(x) = G(y))\}$ 非空, 则有极小元 x_0 , 取极小的 $y_0 \in Y$ 使得 $x_0 \neq y_0$ 且 $G(x_0) = G(y_0)$, 存在 $z_0 \in X$ 使得 $\neg(z_0 R x_0 \leftrightarrow z_0 R y_0)$

若 $z_0 R x_0$, $\neg z_0 R y_0$, 则 $G(z_0) \in G(x_0), G(z_0) \notin G(y_0)$

□

Theorem 1.60 (莫斯托夫斯基坍塌定理). 令 R 是 X 上的似集合良基关系, 并且在 X 上是外延的, 则存在传递类 M 和双射 G 满足 $G : X \rightarrow M$ 满足: G 是 (X, R) 与 (M, \in) 之间的同构。另外 M 和 G 唯一

1.7 基础公理的绝对性

已知 ZF^- 一致 \Rightarrow ZF 一致

本节工作于 ZF 中

Theorem 1.61. 以下关系和函数可以在 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 中用公式定义, 且 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 可以证明这些公式等价于 Δ_0 公式, 所以它们对任意 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 的传递模型绝对

1. x 是序数
2. x 是极限序数
3. x 是后继序数
4. ω
5. x 是有穷序数
6. $0, 1, 2, \dots, 20, \dots$

证明. 1. \in 良基

x 是序数 $\Leftrightarrow x$ 是传递集且 \in 是 x 上的线序

即 $\forall y \in x(y \subset x) \wedge \forall y, z \in x(y \in z \vee y = z \vee z \in y)$

2. 令 $\psi(x)$ 为“ x 是序数”且 $\forall y \in x \exists z \in x(y \in z)$

4. 令 $\psi(x)$ 为“ x 是极限序数”且 $\emptyset \in x$ 且 $\forall y \in x(y \text{ is limit} \rightarrow y = \emptyset)$

5. 令 $\psi(x)$ 为“ x 是序数”且 $x \neq \omega$ 且 $\forall y \in x(y \neq \omega)$

6. 归纳证明: $\emptyset: \forall y \in x(y \neq y) \psi_0(x)$

假设 n 被 $\psi_n(x)$ 定义, 则 $\psi_{n+1}(x) : \exists y \in x(\psi_n(y) \wedge x = y^+)$

□

Remark. 令 $\psi_{limit}(x)$ 定义极限序数, 即使 $V \models \neg \text{Inf}$, $\psi_{limit}(x)$ 相对于 $\text{ZF} - \text{Pow} + \neg \text{Inf}$ 的传递模型 M 仍然是绝对的, 此时, $V \models \forall x(\psi_{limit}(x) \rightarrow x = \emptyset)$

同理定义 ω 的 $\psi_\omega(x)$ 也是绝对的, 此时 $V \models \neg \exists(\psi_\omega(x))$

若 V 和 M 均满足 Inf , 则 $\omega \in M$ 且 $\psi_\omega(\omega) \leftrightarrow \psi_\omega^M(\omega)$

Lemma 1.62. 如果 M 是 $\text{ZF}^- - \text{Pow}$ 的传递模型, 则 M 的所有有穷子集都是 M 的元素

证明. 令 σ_n 为

$$\forall x \subset M(|x| = n \rightarrow x \in M)$$

V 看到的

1. $\sigma_0, V \models (\text{ZF} - \text{Pow})^M$, 由于 $\text{ZF} - \text{Pow} \vdash \exists x(x = \emptyset)$, 故 $V \models \exists x \in M(x = \emptyset^M)$, 而空集是一个绝对概念, 因此 $V \models \exists x \in M(x = \emptyset)$

2. 假设 σ_n 成立, 任取 $x \subset M$ s.t. $|x| = n + 1$, 任取 $y \in x$, 则 $y \in M$,

□

Theorem 1.63. 以下概念对 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的

1. x 是有穷的

2. X^n

3. $X^{<\omega}$ 即 X 上所有有穷序列的集合

证明. 1. 令 $\psi(x, f)$ 表示“ f 是函数”且 $\text{dom}(f) = x$ 且 $\text{ran}(f) \in \omega$ 且 “ f 是一一的”

显然 $\psi(x, f)$ 是绝对的, x 有穷 $\Leftrightarrow \exists f \psi(x, f)$

目标: $\forall x \in M (x \text{ finite} \leftrightarrow (x \text{ finite})^M)$, 即 $\forall x \in M (\exists f \psi(x, f) \leftrightarrow \exists f \in M \psi(x, f))$

任取 $x_0 \in M$, 若存在 $f_0 \in M$ 使得 $\psi^M(x_0, f_0)$ 成立, 则 $\psi(x_0, f_0)$ 成立,

若存在 f 使得 $\psi(x_0, f)$ 成立, 下面证明 $f_0 \in M$ 。存在 $n \in \omega$ 使得 $f_0 : x \rightarrow n$ 是一一的函数, $f_0 \subseteq x_0 \times n$ 是有穷集

n 与 x_0 均属于 M , 故 $x_0 \times n \in M$, 故 $x_0 \times \subset M$, 故 $f_0 \subseteq M$ 是有穷子集,

2. X^n 是 n 到 X 的所有函数的集合

令 $f : n \rightarrow X$ 表示“ f 是函数”且 $\text{dom}(f) = n$ 且 $\text{ran}(f) \subseteq X$

f 是绝对的, 于是 $\forall f, n, X \in M ((f : n \rightarrow X) \leftrightarrow (f : n \rightarrow X)^M)$

定义函数

$$F(X, n) = \begin{cases} 0 & n \notin \omega \\ \{f \mid f : n \rightarrow x\} & n \in \omega \end{cases}$$

$Z = F(X, n)$ 被公式 $\psi(X, n, z)$ 表示: $(n \notin \omega \rightarrow z = 0) \wedge (n \in \omega \rightarrow z = \{f \mid f : n \rightarrow x\})$

下面证明 ψ 的绝对性, 只需证明 $\forall n \in \omega$ 以及 $X_0, Z_0 \in M$, 有

$$\forall y \in Z_0 (y : n \rightarrow X_0) \wedge \forall f ((f : n \rightarrow X_0) \rightarrow f \in Z_0)$$

唯一的障碍是 $\forall f$, 但是因为当 $n, X_0 \in M$ 且 $f : n \rightarrow X_0$, 则 f 是 M 的有穷子集

故 $\psi(X, n, Z)$ 是绝对的

下面验证, $X^n \subseteq \mathcal{P}(n \times X) \in M$

$$V \models \forall X \in M \forall n \in M \exists! Z \in M \psi(X, n, Z)$$

任取 $X \in M$, 若 $n \notin \omega$, 则 $F(X, n) = \emptyset \in M$, 若 $n \in \omega$, 定义 $\theta_n(x, y)$ 为

$$\exists a_0 \dots a_{n-1} (x = (a_0, \dots, a_{n-1}) \wedge y = \{(0, a_0), \dots, (n-1, a_{n-1})\})$$

令 $[X^n]$ 表示 n 次笛卡儿积, 显然 $[X^n] \in M$

$$\forall x \in [X^n] \exists! y \in M \theta_n^M(x, y)$$

由于 M 满足替换公理, 故存在 $z \in M, X^n \subseteq z$

根据分离公理

$$V \models \exists u \in M \forall f \in M (f \in u \leftrightarrow f \in z \wedge (f : n \rightarrow x))$$

故 $u = X^n \in M$

3. 先证明封闭, 再证明绝对

首先证明函数 $Z = X^{<\omega}$ 是绝对的

令 $F(x, n) = X^n$, 则 $Z = \bigcup \{F(x, 0), F(x, 1), \dots\} = \bigcup \text{ran}(F(x, -)) \upharpoonright \omega$

由于 $\omega \in M$, 于是 $\text{ran}(F(x, -)) \upharpoonright \omega \in M$, 由并集公理, $\bigcup \text{ran}(F(x, -)) \upharpoonright \omega \in M$

即 $x \in M \Rightarrow X^{<\omega} \in M$

$Z = X^{<\omega}$ 被公式 $\varphi(x, z)$ 定义: $\forall f (f \in z \leftrightarrow \exists n (n \text{ finite ordinal} \wedge f \in X^n))$

验证: $\forall x \in M \forall z \in M (\varphi(x, z) \leftrightarrow \varphi^M(x, z))$

V 看到所有有穷序数都在 M 中

于是 φ 绝对, $\forall x \in M \exists! z \in M \varphi(x, z)$

□

Theorem 1.64. 以下概念对 $ZF^- - \text{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的

1. R 是 X 上的良序 (集合)
2. $\text{type}(x, R)$

证明. 1. 已证明: $\forall R \in M \forall x \in M (R \text{ 是 } X \text{ 的良序} \rightarrow (R \text{ 是 } X \text{ 的良序})^M)$

另一方面, $ZF - \text{Pow} \vdash \forall R \forall X [R \text{ 是 } X \text{ 的良序} \rightarrow \exists \alpha \exists f (\alpha \text{ ordinal} \wedge f : (\alpha, \in) \cong (X, R))]$

后面的部分是绝对的

同时这个也有 M 的相对化 $(ZF - \text{Pow})^M \vdash \forall R \in M \forall X \in M [(R \text{ 是 } X \text{ 的良序})^M \rightarrow \exists \alpha \in M \exists f \in M (\alpha \text{ ordinal} \wedge f : (\alpha, \in) \cong (X, R))]$

若 $R_0, X_0 \in M$ 且 $(R_0 \text{ 是 } X_0 \text{ 的良序})^M$, 则存在 $\alpha \in M, f \in M, f : (\alpha, \in) \cong (X_0, R_0)$, 因此 $V \models R_0 \text{ 是 } X_0 \text{ 的良序}$

2. 令 $W(X, R)$ 表示 R 是 X 的良序, 令 $\chi(X, R, Z)$ 表示 Z 是序数且 $W(X, R)$ 且 $\exists f : (Z, \in) \cong (X, R)$

则 $Z = \text{type}(X, R) \Leftrightarrow \chi(X, R, Z)$, 而 χ 是绝对 (这里的问题是 $\exists f$, 要证明 f 一定在 M 中, 参考良序绝对性的证明) 的且 $\forall X, R \in M \exists! Z \in M \chi(X, R, Z)$ (练习)

□

Theorem 1.65. 以下概念对 $ZF - \text{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的

1. $\alpha + 1$
2. $\alpha - 1$
3. $\alpha + \beta$
4. $\alpha \cdot \beta$

证明. 2. $x = \alpha - 1$ 被

$$\alpha \neq 0 \wedge ((\alpha \text{ 后继} \wedge \alpha = x + 1) \vee (\alpha \text{ 极限} \wedge \alpha = x))$$

3. 没有递归定义的绝对性

$\alpha + \beta$ 的定义为 $\text{type}(\alpha \oplus \beta)$

由于 $\text{type}(-, -)$ 是绝对的, 只需证明 $\alpha \oplus \beta$ 是绝对的

令 $F(\alpha \oplus \beta) = W$, 其中 $W = \{\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}\}$, 再令 $G(\alpha \oplus \beta) = R$, 其中 $R \subseteq W^2$ 且满足 $\forall x \in \alpha \times \{0\} \forall y \in \beta \times \{1\} (xRy)$ 且 $\forall x, y \in \alpha ((x, 0)R(y, 0) \leftrightarrow x \in y)$ 且 $\forall x, y \in \beta ((x, 1)R(y, 1) \leftrightarrow x \in y)$

显然 R 是 W 的良序集

F 是绝对的

令 $\psi(\alpha, \beta, R)$ 为

$$\begin{aligned} & \forall x \in R [\exists a \in \alpha \exists b \in \beta (a \in b \wedge x = ((a, 0), (b, 0))) \\ & \quad \vee \exists a \in \beta \exists b \in \beta (a \in b \wedge x = ((a, 1), (b, 1))) \\ & \quad \vee \exists a \in \alpha \exists b \in \beta (x = ((a, 0), (b, 1)))] \\ & \wedge \forall a, b \in \alpha \exists x \in R (x = ((a, 0), (b, 0))) \\ & \wedge \forall a, b \in \beta \exists x \in R (x = ((a, 1), (b, 1))) \\ & \wedge \forall a \in \alpha \forall b \in \beta \exists x \in R (x = ((a, 0), (b, 1))) \end{aligned}$$

用 $\theta(\alpha, \beta, x)$ 表示方括号, 则 $V \models \forall z (z \in R \leftrightarrow \theta(\alpha, \beta, z))$

于是 $G(\alpha, \beta) = R \Leftrightarrow \psi(\alpha, \beta, R)$

ψ, θ 是绝对的

若 $\alpha, \beta \in M$, 则 $\{x \mid \theta(\alpha, \beta, x)\} = \{x \in M \mid \theta(\alpha, \beta, x)\} = \{x \in M \mid \theta^M(\alpha, \beta, x)\} \subseteq M$, $R = \{x \in W^2 \mid \theta^M(\alpha, \beta, x)\}$, 由分离公理, $R \in M$

故 $G(\alpha, \beta) = R$ 是绝对的,

$\alpha + \beta = \text{type}(F(\alpha, \beta), G(\alpha, \beta))$ 是绝对的

4. 同理: $\alpha \cdot \beta = \text{type}(\alpha \otimes \beta)$ 是绝对的

□

设 X 是一个类，被公式 $X(x)$ 定义，称 X 绝对是指 $\forall x \in M (X(x) \leftrightarrow X^M(x))$

令 X^M 表示 $\{x \in M \mid x^M(x)\}$ ， X 对于 M 绝对 $\Leftrightarrow X^M = X \cap M$

若 M 是 $ZF - \text{Pow}$ 的传递模型，则 $\text{On}^M = M \cap \text{On}$

作为函数的类， $G : X \rightarrow Y$ 其中 X, Y 是类，是一个公式 $G(x, y)$ 满足函数的条件

称 G 相对于类 M 是绝对的是指

1. $\forall x \in X^M \exists! y \in Y^M G^M(x, y)$ ，即 $G^M : X^M \rightarrow Y^M$
2. $\forall x \in M \forall y \in M (G^M(x, y) \leftrightarrow G(x, y))$

Theorem 1.66. 设 R 是 X 的似集合的良基关系， $F : X \times V \rightarrow V$ ，令 $G : X \rightarrow V$ 如递归定理所定义的：

$$\forall x \in X (G(x) = F(x, G \upharpoonright \text{pred}(X, x, R)))$$

令 M 是 $ZF - \text{Pow}$ 的传递模型，且假设

1. F 相对于 M 绝对的
2. X, R 相对于 M 是绝对的
3. $(R \text{ 在 } X \text{ 上是似集合的})^M$
4. $\forall x \in M (\text{pred}(X, x, R) \subseteq M)$

则 G 对 M 是绝对的

证明. 阅读书中证明

$$V \models (X^M = X \cap M)$$

$$V \models (R^M = R \cap (M \times M))$$

$$V \models R^M = (X^M)^2 \cap R$$

$$V \models (X^M, R^M) \text{ 是良基的}$$

R 在 X 上是似集合的， $\forall x \in X \exists z \forall y \in X (y \in z \leftrightarrow yRx)$ ，它的相对化就是 $\forall x \in X^M \exists z \in M \forall y \in X^M (y \in z \leftrightarrow yR^Mx)$

故 (X^M, R^M) 是似集合的且 $\forall x \in M(\text{pred}(X^M, x, R^M) \in M)$

由 X 与 R 的绝对性, $\text{pred}(X^M, x, R^M) = \text{pred}(X, x, R) \cap M$

由于 $\forall x \in M(\text{pred}(X, x, R)) \subseteq M$, 故 $\forall x \in M(\text{pred}(X^M, x, R^M) = \text{pred}(X, x, R))$

断言 1: 函数 $y = \text{pred}(X, x, R)$ 是绝对的

$y = \text{pred}(X, x, R)$ 被公式 $\psi(x, y)$ 表示:

$$\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in X \wedge zRx)$$

则 $\psi^M(x, y)$ 为

$$\forall z \in M(z \in y \leftrightarrow z \in X^M \wedge zR^Mx)$$

若 $x_0, y_n \in M$, 有 $z \in y_0 \rightarrow z \in M, zRx_0 \rightarrow z \in M$

故 ψ 绝对, 由以上分析, 若 $x \in M$, 则 $\text{pred}(X, x, R) \in M$ 。故 $y = \text{pred}(X, x, R)$ 是作为函数是绝对的

对任意的 $x \in M$, 有 $(\text{pred}(X, x, R))^M = \text{pred}(X, x, R) = \text{pred}(X^M, x, R^M)$

先在 (X^M, R^M) 是似集合的良基关系, 由绝对性, $F^M : X^M \times M \rightarrow M$, 这些都是 V 看到的, 那么由递归定理, 存在函数 $g : X^M \rightarrow V$ 满足

$$\forall x \in X^M(g(x) = F^M(x, g \upharpoonright \text{pred}(X^M, x, R^M)))$$

目标: 证明 $g = G^M$ (书本)

问题: 递归定理中的 “ G ” 只刻画了 G 的性质并非定义 (元语言)

回忆: $G(x)$ 的定义令公式 $\theta(x, t)$ 表示

- t 是一个函数 (集合)
- $x \in X$
- $\text{dom}(t) = \{x\} \cup \text{pred}(X, x, R)$
- $\forall y \in \text{dom}(t)(t(y) = F(y, t \upharpoonright \text{pred}(X, y, R)))$
- $\forall y \notin \text{dom}(t)(t = \emptyset)$

则 $G(x) = y \Leftrightarrow \exists t(\theta(x, t) \wedge y = t(x))$

下面证明 $\exists t(\theta(x, t) \wedge y = t(x))$ 的绝对性

断言 2 : $\theta(x, t)$ 是绝对的

只需证明 $t \upharpoonright \text{pred}(X, y, R)$ 是绝对的, 即若 $x_0 \in X^M, y_0 \in \text{pred}(X, x_0, R), t_0 \in M$, 则 $t_0 \upharpoonright \text{pred}(X, y_0, R) = (t_0 \upharpoonright \text{pred}(X, y_0, R))^M$

函数 $s = t \upharpoonright \text{pred}(X, y, R)$ 被公式

$$\eta(y, t, s) := \forall x \in s \exists u \exists v (uRy \wedge v = t(u) \wedge x = (u, v)) \wedge \forall u \forall v (uRy \wedge v = t(u) \rightarrow (u, v) \in s)$$

验证: η 是绝对的 (练习), 但是 uRy , 因此 $u \in M$,

故 $\theta(x, t)$ 是绝对的

断言 3 : $\theta(x, t)$ 定义了一个类函数, 即 $V \models \forall x \in X \exists! t \theta(x, t)$ 练习 (对 $x \in X$ 归纳证明)

下面证明 θ 作为函数是绝对的 **断言 4** : 若 $x \in M$, 则 $\forall t(\theta(x, t) \rightarrow t \in M)$

否则, 存在一个极小的 $x_0 \in M, t_0$ 使得 $\theta(x_0, t_0)$ 且 $t_0 \notin M$

若 $\text{pred}(X, x_0, R) = \emptyset$, 则由 θ 的定义, $t_0 = \{(x_0, F(x_0, \emptyset))\} \in M$, 矛盾

若 $\text{pred}(X, x_0, R) \neq \emptyset$, 令 $t^* = \{y \mid \exists x \in \text{pred}(X, x_0, R) \wedge \theta(x, y)\}$, 由极小性, $t^* \subseteq M$

$$t^* = \text{ran}(\theta \upharpoonright \text{pred}(X, x_0, R))$$

由归纳假设, $\forall x \in \text{pred}(X, x_0, R) \exists! y \in M(\theta(x, y))$

于是 $\forall x \in \text{pred}(X, x_0, R) \exists! y \in M(\theta^M(x, y))$

因此 $t^* = \text{ran}(\theta^M \upharpoonright \text{pred}(X, x_0, R))$

由替换公理, $t^* \in M$, 由绝对性

$$t_0 = (\bigcup t^*) \cup \{(x_0, F^M(x_0, \bigcup t^*))\} \in M$$

矛盾

故 $\forall x \in M \exists! t \in M(\theta(x, t))$, 即 $\theta(x, t)$ 作为函数绝对

记 $\phi(x, y) := \exists t(\theta(x, t) \wedge y = t(x))$, 则

$$\phi^M(x, y) = \exists t \in M(\theta(x, t) \wedge y = t(x))$$

但是 $\forall x \in M \forall y \in M$

$$(\exists t(\theta(x, t) \wedge y = t(x))) \leftrightarrow \exists t \in M(\theta(x, t) \wedge y = t(x))$$

下面证明 $G(x)$ 作为函数绝对, 即 $G(x)$ 封闭

回忆: $g: X^M \rightarrow M$ 满足

$$\forall x \in X^M (g(x) = F^M(x, g \upharpoonright \text{pred}(X^M, x, R^M)))$$

断言 5: $\forall x \in X^M (G(x) = g(x))$

否则, 存在“极小”的 $x_0 \in X^M = X \cap M$ 使得 $G(x_0) \neq g(x_0)$

显然 $\text{pred}(X, x_0, R) = \text{pred}(X^M, x_0, R^M) \neq \emptyset$, 否则 $g(x_0) = F^M(\emptyset, g \upharpoonright \emptyset) = F^M(\emptyset, \emptyset) = F(\emptyset, g \upharpoonright \emptyset) = G(x_0)$

假设 $\text{pred}(X, x_0, R) = \text{pred}(X^M, x_0, R^M) \neq \emptyset$, 由 x_0 的极小性, 有 $\forall x \in \text{pred}(X, x_0, R) \cap \text{pred}(X^M, x_0, R^M)$ 时, 有 $G(x) = g(x)$

因此 $G \upharpoonright \text{pred}(X, x_0, R) = g \upharpoonright \text{pred}(X^M, x_0, R^M)$

$g(x_0) = F^M(x_0, g \upharpoonright \text{pred}(X^M, x_0, R^M)) = G(x_0)$, 矛盾 □

Theorem 1.67. 一下概念对 ZF-Pow 的传递模型都是绝对的

1. α^β (序数)
2. $\text{rank}(x)$
3. $\text{trcl}(x)$

证明. 1. 若 $\alpha = 0$, 则 $\alpha^\beta = 0$

它是递归定义的, 因此是绝对的

规定 $\text{On} \times \text{On}$ 上的关系 R 为

$$R = \{((\alpha, \beta_1), (\alpha, \beta_2)) \mid \beta_1 \in \beta_2\} \subseteq \text{On}^2$$

显然 R 是良基关系, R 是似集合的, $\text{pred}(\text{On}^2, (\alpha, \beta), R) = \{\alpha\} \times \beta$

定义 $F : \mathbf{On}^2 \times V \rightarrow V$ 为

$$F(\alpha, \beta, x) = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \vee x \notin \mathbf{On}^3 \\ 1 & \beta = 0 \wedge \alpha \neq 0 \\ \left(\bigcup_{y \in x} \pi_3(y) \right) \cdot \alpha & \text{otherwise, } x \in \mathbf{On}^3 \end{cases}$$

有 M 的传递性, $x = (x_1, x_2, x_3) \in M \Rightarrow x_1, x_2, x_3 \in M$

由 (x_1, x_2, x_3) 的绝对性, $y = \pi_3(x)$ 是绝对的, 因为 $y = \pi_3(x)$ 为

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x = (x_1, x_2, x_3) \wedge y = x_3)$$

验证 $G(\alpha, \beta) = \alpha^\beta$ 是基于 F 递归定义的, 因此 G 是绝对的

2. $\text{rank}(x)$, 即 $\text{rank}(V, x, \in)$

$\text{rank}(x) = \sup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$, 找 F , 并证明绝对性, 练习

3. $\text{trcl}(x) = x \cup \bigcup\{\text{trcl}(y) \mid y \in x\}$ 练习

□

Remark. $\alpha + \beta$ 也是递归定义的

Remark. • $\text{rank}(x)$ 的定义用到 V_α

- 当 $M \not\models \mathbf{Pow}$, V_α^M 没有意义
- $\text{rank}(x)$ 仍可递归定义为 $\sup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$
- 当 $M \models \mathbf{Pow}$, 则两种定义等价

定义公式 $\varphi(x, y)$ 为

$$\forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

当 $V \models \mathbf{Pow}$, 则 $V \models \forall x \exists! y \varphi(x, y)$, 即 $\varphi(x, y)$ 定义了一个函数, 记作 $\mathcal{P}(x) = y$

若 $M \models \mathbf{Pow}$, 则

$$V \models \forall x \in M \exists! y \in M \varphi^M(x, y)$$

当 M 传递时, $\subseteq^M \Leftrightarrow \subseteq$, 若 $M \models \text{Pow}$, 则

$V \models (\varphi^M \text{ 定义了 } M \text{ 到 } M \text{ 的函数})$

记该函数为 $\mathcal{P}^M(x)$, 即 $\mathcal{P}^M(x) = \{z \in M \mid z \subseteq^M x\}$ 当 M 传递时, $\mathcal{P}^M(x) = \{z \in M \mid z \subseteq x\} = \mathcal{P}(x) \cap M$

同理 $V_\alpha^M = \{x \in M \mid (\text{rank}(x) < \alpha)^M\}$

Lemma 1.68. 若 M 是 ZF 的传递模型, 则

1. 若 $x \in M$, 则 $\mathcal{P}^M(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$

只需 Pow 加传递

2. 如果 $\alpha \in M$, 则 $V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$

只需 ZF-Pow , 若有 Pow , 则 V_α^M 是由 \mathcal{P}^M 得到的

Remark. \mathcal{P} 与 V_α 作为函数不是绝对的

固定 $x \in M$, 则 $\mathcal{P}(x)$ 可以是带参数 x 的公式

$$\mathcal{P}(x)(y) : \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x)$$

此时谓词 $\mathcal{P}(x)$ 是绝对的, $(\mathcal{P}(x))^M = \mathcal{P}(x) \cap M$

固定 $\alpha \in M \cap \text{On}$, 则 V_α 可以看成带参数 α 的谓词, 此时 $(V_\alpha)^M = V_\alpha \cap M$ 是绝对的

1.8 不可达基数与 ZFC 的模型

一般来讲, V_α 不是 ZF 的模型, 比如 $\text{ZF}^- \vdash (V_\omega \models \text{ZFC} - \text{Inf})$

令 Z 表示 $\text{ZF} - \text{替换公理模式 (Rep)}$

ZC 表示 $\text{ZFC} - \text{Rep}$

Theorem 1.69. 如果 $\gamma > \omega$ 是无穷极限序数, 则 $\text{ZF} \vdash (V_\gamma \models Z)$, $\text{ZFC} \vdash (V_\gamma \models ZC)$

证明. 假设 $V \models \text{ZF}$

- 存在公理:
- 外延公理: $\forall x \in V_\gamma \forall y \in V_\gamma \forall u \in V_\gamma ((u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$, V_γ 传递
- 分离公理模式: 假设 $x \in V_\gamma$, 则存在 $\beta < \gamma$ 使得 $x \in V_\beta$, 故 $x \subseteq V_\beta$, $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1} \subseteq V_\gamma$, 则若 $x \in V_\gamma$, 则 X 的子集均属于 V_γ
分离公理

$$\forall x \in V_\gamma \exists Y \in V_\gamma \forall u \in V_\gamma (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$$

在 V 里面可以看到这些是 X 的子集, 且能看到 X 的所有子集在 V_γ 里

- 对集公理, $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$
设 $x, y \in V_\gamma \subseteq \text{WF} = V$, 有 $\text{rank}(\{x, y\}) < \max\{\text{rank}(x), \text{rank}(y)\} + \omega$,
故 $\{x, y\} \in V_\gamma$
- 并集公理, 类似
- 幂集公理, 类似
- 无穷公理

对于 $\text{ZF}^- - \text{Pow} - \text{Rep}$ 的传递模型, \emptyset 与后继运算是绝对的
 $\omega \in V_\gamma$, 故无穷公理的相对化成立

- 基础公理

$$\forall x \in V_\gamma ((x \neq \emptyset)^{V_\gamma} \rightarrow \exists y \in V_\gamma (y \in x \wedge (y \cap x = \emptyset)^{V_\gamma}))$$

对于 $\text{ZF}^- - \text{Pow} - \text{Rep}$ 的传递模型, \emptyset 与 \cap 是绝对的

而 $V_\gamma \subseteq \text{WF} = V$, 故 Fon 成立

若 $V \models \text{ZFC}$, 设 $x \in V_\gamma$, 则 $V \models \exists R (R \text{ 是 } X \text{ 的良序})$ 。 $R \subseteq X \times X \Rightarrow R \in V_\gamma$, 对于 $\text{ZF}^- - \text{Pow} - \text{Inf} - \text{Rep}$ 的传递模型 V_γ 有

$$V \models (R \text{ 是 } X \text{ 的良序})^{V_\gamma}$$

□

Exercise 1.8.1. 证明 $V_{\omega+\omega}$ 不满足 Rep

证明. $f : n \rightarrow \omega + n$

□

Proposition 1.70. 工作在 ZFC

- ZF 不能证明“ V_ω 存在”
- ZF 不能证明“对任意 x , $trcl(x)$ 存在”

证明. 构造模型否定这两个命题

令 $V \models \text{ZFC}$, 令 $X_0 = \omega$, $X_{\alpha+1} = \mathcal{P}(X_\alpha)$, $X_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} X_\beta$ (γ 极限序数)

显然 $\bar{X} = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} X_\alpha = \text{WF} = V$ (练习)

容易验证以下事实: X_α 传递, 设 $f(x, y)$ 表示 $\{x, y\}, (x-y), x \times y, \bigcup x, \cap x, \mathcal{P}(x), \dots$

若 $x \in X_\alpha, y \in X_\beta$, 则 $f(x, y) \in X_{\max\{\alpha, \beta\} + \omega}$

类似可证 X_ω 是 $\text{ZC} - \text{Inf}$ 的传递模型

由于 $\omega \in X_\omega$, 故 $X_\omega \models \text{Inf}$, 即 $X_\omega \models \text{ZC}$

显然 $V_\omega \not\subseteq \omega = X_0$, 于是存在 $V_n \not\subseteq X_0$, 故 $\mathcal{P}(V_n) \not\subseteq \mathcal{P}(X_0)$, 即 $\forall k < \omega$,

$V_{n+k} \not\subseteq X_k$, 故 $\forall n < \omega$, 都有 $V_\omega \not\subseteq X_n$, 故 $V_\omega \notin X_\omega$

但要严格地说的话得找到一个东西定义 V_ω 然后证明它的相对化在 X_ω 不满足

另一方面, $V_0 \subseteq X_0 \Rightarrow V_n \subseteq X_n$, 于是 $V_\omega \subseteq X_\omega$

令 $G : \omega \rightarrow \text{WF}$ 为 $G(n) = V_n$

验证 G 相对于 X_ω 是绝对的, G 的任何一个片段都是有穷的, 因此片段的值域都在 X_ω 中, 因为 X_ω 对于任何有穷集合封闭

注: 当 $M \models \text{ZF} - \text{Pow}$, 我们知道递归函数 G 的绝对性, 此时 $X_\omega \not\models \text{Rep}$, 然而 X_ω 的任何有穷子集都属于 X_ω , 故而对任何 $f : \omega \rightarrow X_\omega$, 有 $f(\{0, \dots, n\}) \in X_\omega$, 可以证明 G 的绝对性 (练习)

V_ω 被公式 $\eta(x) : \exists n \in \omega (x \in G(n))$

(V_ω 被“ $\alpha \in V_\omega$ ”定义, 但是 X_ω 不一定认为 V_ω 是集合, 必需用 X_ω 认可的方式定义)

V_ω 存在指的是

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \eta(x))$$

由于 G 是绝对的, $\eta(x)$ 绝对, 因此 X_ω 认为“ V_ω 存在”当且仅当 $\exists y \in X_\omega \forall x \in X_\omega (x \in y \leftrightarrow \eta(x))$

由于 $V_\omega \subseteq X_\omega$ 且 X_ω 是传递的, 以上的公式等价于

$$\exists y \in X_\omega \forall x (x \in y \leftrightarrow \eta(x))$$

而这样的 y 只能是 V_ω , 而 $V_\omega \notin X_\omega$, 因此以上句子不成立

即 $\text{ZFC} \vdash "X_\omega \models \text{ZC} + V_\omega \text{ 不存在}"$

证明“ x 存在且 $\text{trcl}(x)$ 不存在”, 假设 $V \models \text{ZFC}$, 令 $t(u) = \{u\}, x_n = t^n(n)$, $\text{rank}(x_n) = 2n$, $x = \{x_n \mid n < \omega\}$, 令 $X_0 = x, X_1 = \bigcup X_0, \dots, X_{n+1} = \bigcup X_n$, 则 $\text{trcl}(x) = \bigcup_{n < \omega} X_n$

令 $Y_0 = \omega \cup X_0$, $Y_{n+1} = \mathcal{P}(Y_n) \cup Y_n \cup X_n$, 验证 $Y_\omega = \bigcup_{n < \omega} Y_n$ 是传递的, 验证 $Y_\omega \models \text{ZC}$, 验证 $x \in Y_1 \subseteq Y$, 验证 $\text{trcl}(x) = \bigcup_{n < \omega} X_n \notin Y$, 即验证 $\forall n \exists m (X_m \not\subseteq Y_n)$

后面类似, 证明 $Y_\omega \models " \text{trcl}(x) \text{ 不存在}"$

□

Theorem 1.71. 如果 κ 是不可达基数, 则在 ZF^- 中可以证明 $V_\kappa \models \text{ZF}$, 在 ZFC^- 中可以证明 $V_\kappa \models \text{ZFC}$

证明. 已知 $\text{ZF}^- \vdash (V_\kappa \models Z), \text{ZFC}^- \vdash (V_\kappa \models \text{ZC})$, 下面验证替换公理模式

$$\forall A (\forall x \in A \exists! y \psi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y))$$

相对化

$$\forall A \in M (\forall x \in A \exists! y \in M \psi^M(x, y) \rightarrow \exists B \in M \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y))$$

假设 $A \in V_\kappa$ 且 $\forall x \in A \exists! y \in V_\kappa \psi^M(x, y)$

由于 κ 是极限序数, 故 $A \in V_\kappa \Rightarrow \exists \alpha < \kappa (A \in V_\alpha)$, 因此 $A \subseteq V_\alpha$, 而 $V \models (\psi^M : A \rightarrow V_\kappa)$, 于是 $V \models |A| \leq |V_\alpha| < \kappa, V \models |f(A)| < \kappa, V \models f(A) \subseteq V_\kappa$, 由 κ 的正则性, 所以存在 $\beta < \kappa$, $f(A) \subseteq V_\beta$, 于是 $f(A) \in V_{\beta+1} \subseteq V_\kappa$, 即 $B = f(A)$ 即可

□

注: V_κ 的基数小于 κ 的子集都是 V_κ 的元素

若 M 的有穷子集都是 M 的元素, 则 $M \models \text{有穷 Rep}$

Corollary 1.72. ZFC 中不能证明“存在不可达基数”

证明. 若 $\text{ZFC} \vdash$ “存在不可达基数”, 则 $\text{ZFC} \vdash "V_\kappa \models \text{ZFC}"$, 即 $\text{ZFC} \vdash \exists X(\text{ZFC})^X$, 因为 V_κ 是个集合, 因此 $\text{ZFC} \vdash \text{Con}(\text{ZFC})$

若只能找到一个真类, 我们不能得到能证明一致性 □

若 T 是可公理化的, 则

$$\text{ZFC} \vdash \text{Con}(T) \leftrightarrow \exists M(T)^M$$

(粗略的完全性定理) 取一个适当的子集 $P \subseteq \text{ZFC}$, 有

$$P \vdash \text{Con}(T) \leftrightarrow \exists M(T)^M$$

已知若 $V \models \text{ZF}^-$, 则 $\text{WF} \models \text{ZF}, \text{ZF}^- \vdash (\text{ZF})^{\text{WF}} \not\Rightarrow \text{ZF}^- \models \text{Con}(\text{ZF})$, 因为 WF 不是集合

Lemma 1.73. 设 κ 是不可达基数 (极限序数), 则以下概念对 V_κ 都是绝对的

1. x 是一个基数
2. x 是正则基数
3. x 是一个不可达基数

证明. 1. x 是基数被公式 $\varphi(x)$ 表示: “ x 是序数” $\wedge \forall f \forall y \in x ((f : y \rightarrow x) \rightarrow \text{ran}(f) \neq x)$

三个子公式对 $\text{ZF} - \text{Pow} - \text{Inf} - \text{Rep}$ 的传递模型都是绝对的

若 κ 是极限序数, 则

$$V_\kappa \models \text{ZF} - \text{Pow} - \text{Inf} - \text{Rep}$$

由于 $\varphi(x)$ 是一个 Π_1 公式, 故

$$\forall x \in V_\kappa (\varphi(x) \rightarrow \varphi^{V_\kappa}(x))$$

另一方面, 要证明 $\forall x \in V_\kappa (\varphi^{V_\kappa}(x) \rightarrow \varphi(x))$, 只需证明若 $x, y \in V_\kappa$ 且 $f : y \rightarrow x$, 则 $f \in V_\kappa$

显然若 $f : y \rightarrow x$, 则 $f \in x^y$, 而 $x, y \in V_\alpha$, $x^y \in V_{\alpha+\omega}$, 故 $f \in V_\kappa$,
 $\text{rank}(f) \leq \max\{\text{rank}(x), \text{rank}(y)\} + 2$

2. x 是正则基数被公式 $\varphi(x)$ 表示: “ x 是基数” $\wedge \forall f \forall y \in x [(f : y \rightarrow x) \rightarrow \exists z \in x (\text{ran}(f) \subseteq z)]$

与 1 类似

3. x 是不可达基数被公式 $\varphi(x)$ 表示: “ x 是正则基数” $\wedge \forall f \forall y \in x ((f : 2^y \rightarrow x) \rightarrow \text{ran}(f) \neq x)$

2^y 是 y 到 2 的全体函数为绝对概念

□

用“ I ”表示“存在不可达基数”

Lemma 1.74. 如果 ZFC 一致, 则 $\text{ZFC} + \neg I$ 也是一致的, 即

$$\text{ZFC} \vdash \text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \neg I)$$

证明. 设 $V \models \text{ZFC} + \text{Con}(\text{ZFC})$, $V \models \exists M (\text{ZFC})^M$

先在 $M \models \text{ZFC}$, 视 M 为集合宇宙, 若 κ 是 M 中最小的不可达基数, 则 $V_\kappa \models \text{ZFC} + \neg I$, 即 $M \models (\text{ZFC} + \neg I)^{V_\kappa}$

存在 M 中的元素 X 使得 $M \models "(X, \in) \models \text{ZFC} + \neg I"$, 即 $M \models (\text{ZFC} + \neg I)^X$, 则 $V \models ((\text{ZFC} + \neg I)^X)^M$, 即 $\forall y \rightsquigarrow \forall y \in X \rightsquigarrow \forall y \in X \cap M$, 因此 $V \models (\text{ZFC} + \neg I)^{X \cap M}$ (验证: 归纳)

注: M 看到 (X, \in) 恰好是 V 看到的 $(X \cap M, \in)$

因此 $V \models \text{Con}(\text{ZFC} + \neg I)$

若 M 中不存在不可达基数, 则 $M \models \text{ZFC} + \neg I$, 因此 $V \models (\text{ZFC} + \neg I)^M$

事实上 $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1) + AC + \text{Con}(\text{ZFC}) \vdash \text{Con}(\text{ZFC} + \neg I)$ (完全性要 AC) □

以上引理表明: $\text{ZFC} \not\models I$

以上证明没有使用哥德尔不完全定理

最好的情况是, “ $\text{ZFC} + I$ ”一致, 即我们希望 ZFC 下构造“ $\text{ZFC} + I$ ”的模型

Corollary 1.75. 在 ZFC 中不能生成“ $\text{ZFC} + I$ ”的模型, 即

$$\text{ZFC} + \text{Con}(\text{ZFC}) \not\models \text{Con}(\text{ZFC} + I)$$

证明. 否则, 假设 ZFC 一致, 则 $\text{ZFC} + I$ 一致, 目标 $\text{ZFC} + I \vdash \text{Con}(\text{ZFC} + I)$

任取 $V \models \text{ZFC} + I$, 则 $V \models (\text{ZFC})^{V_\kappa}$, 由完全性, $V \models \text{Con}(\text{ZFC})$, 因此有了矛盾 \square

Definition 1.76. 对任意的无穷基数 κ

$$H_\kappa = \{x \mid |\text{trcl}(x)| < \kappa\}$$

称 H_κ 的元素为 **遗传基数 $< \kappa$ 的基数**

称 $x \in H_\omega$ 为 **遗传有穷集**

Lemma 1.77 ($V \models \text{ZFC}$). 对任意的无穷基数 κ 有

$$H_\kappa \subseteq V_\kappa$$

证明. $V = \text{WF}$, 只需验证 $\forall x \in H_\kappa$, 有 $\text{rank}(x) < \kappa$

设 $x \in H_\kappa$, 令 $t = \text{trcl}(x)$, 令 $s = \{\text{rank}(y) \mid y \in t\} \subseteq \text{On}$, 验证 s 是序数

假设 α 是最小的不属于 s 的序数, $\alpha \subseteq s$, 若 $\alpha \neq s$, 令 $\beta = \min(s \setminus \alpha)$, 因此 $\beta > \alpha$, 令 $y \in t$ 使得 $\beta = \text{rank}(y)$, $\forall z \in y, z \in t$ 且 $\text{rank}(z) < \text{rank}(y)$, 由 β 的极小性, $\forall z \in y(\text{rank}(z) < \alpha)$, $\beta = \text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(z) + 1 \mid z \in y\}$, 因此 $\beta \leq \alpha$, 矛盾

故 $s = \alpha$, 且 $|s| \leq |t| = |\text{trcl}(x)| < \kappa$, 所以 $\alpha < \kappa$, $x \subseteq \text{trcl}(x) \subseteq V_s$ \square

Lemma 1.78. 如果 κ 是正则基数, 则 $H_\kappa = V_\kappa$ 当且仅当 κ 是不可达基数

证明. 设 κ 不可达, 只需证明 $V_\kappa \subseteq H_\kappa$

对 $\alpha < \kappa$ 进行归纳证明: $|V_\alpha| < \kappa$ (练习)

设 $x \in V_\kappa$, 则存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $x \in V_\alpha$, $\text{trcl}(x) \subseteq V_\alpha$, 因此 $|\text{trcl}(x)| < \kappa$

假设 κ 不是不可达基数, 则存在 $\lambda < \kappa$, $2^\lambda \geq \kappa$, $\mathcal{P}(\lambda) \in V_{\lambda+\omega} \subseteq V_\kappa$, $|\text{trcl}(\mathcal{P}(\lambda))| \geq 2^\lambda \geq \kappa$, 因此 $\mathcal{P}(\lambda) \in V_\kappa \setminus H_\kappa$ \square

Lemma 1.79. 对于任意无穷基数 κ

1. H_κ 传递

2. $H_\kappa \cap \text{On} = \kappa$
3. $x \in H_\kappa \Rightarrow \bigcup x \in H_\kappa$
4. $x, y \in H_\kappa \Rightarrow \{x, y\} \in H_\kappa$
5. $x \in H_\kappa$ 且 $y \subseteq x$, 则 $y \in H_\kappa$
6. 如果 κ 正则, 则

$$\forall x (x \in H_\kappa \leftrightarrow x \subset H_\kappa \wedge |x| < \kappa)$$

证明. 1. 设 $x \in y \in H_\kappa$, 则 $|\text{trcl}(y)| < \kappa$, 而 $\text{trcl}(x) \subset \text{trcl}(y)$, 因此 $x \in H_\kappa$

2. 若 $\alpha < \kappa$, 则 $\alpha = \text{trcl}(\alpha)$, 因此 $\alpha \in H_\kappa$

若 $\alpha \in H_\kappa$, 则 $|\alpha| < \kappa$, 因此 $\alpha < \kappa$

3. $\bigcup x \subseteq \text{trcl}(x) \Rightarrow \text{trcl}(\bigcup x) \subseteq \text{trcl}(x)$, 故 $x \in H_\kappa \Rightarrow \bigcup x \in H_\kappa$

4. $\text{trcl}(\{x, y\}) = \{x, y\} \cup \text{trcl}(x) \cup \text{trcl}(y)$

5. $\text{trcl}(y) \subseteq \text{trcl}(x)$

6. 若 $x \in H_\kappa$, 由传递性, $x \subset H_\kappa$, $|x| \leq |\text{trcl}(x)| < \kappa$

若 $x \subset H_\kappa, |x| < \kappa$, 设 $x = \{x_i \mid i < \lambda\}$, 则 $\text{trcl}(x) = x \cup \bigcup_{i < \lambda} \text{trcl}(x_i)$,
若 $|\text{trcl}(x)| \geq \kappa$, 则 $\forall \alpha < \kappa$, 存在 $i < \lambda$ 使得 $|\text{trcl}(x_i)| > \alpha$, 故 λ 与 κ 共尾

□

Theorem 1.80 (ZFC). 若 κ 是不可数正则基数, 则 $H_\kappa \models \text{ZFC} - \text{Pow}$

证明. H_κ 传递 \Rightarrow 外延公理

H_κ 非空 \Rightarrow 存在公理

由于 $x \in H_\kappa \leftrightarrow x \subset H_\kappa \wedge |x| < \kappa$, 故分离公理 + 替换公理成立

H_κ 对 $\bigcup x$ 与 $\{x, y\}$ 封闭, 故对集公理 + 并集公理成立

H_κ 满足以上公理 $\Rightarrow \emptyset, \omega, x^+, x \cap y$ 的绝对性

由于 $\omega \in H_\kappa, H_\kappa \models \text{Inf}$

$\emptyset, x \cap y$ 的绝对性, $H_\kappa \models \text{Fud}$

选择公理: $\forall x \in H_\kappa \exists R \in H_\kappa (R \text{ 是 } X \text{ 的良序})^{H_\kappa}$

已知, 若 $x, R \in H_\kappa$, 则 R 是 x 的良序当且仅当 $(R \text{ 是 } X \text{ 的良序})^{H_\kappa}$

(ZF – Pow)

只需验证: 如果 $X \in H_\kappa$, 则 $\forall R \subseteq X \times X$, 有 $R \in H_\kappa$

显然 $|X| < \kappa$, 因此 $|X \times X| < \kappa$, 若 $a, b \in X$, 则 $|\text{trcl}((a, b))| < |\text{trcl}(x)| + \aleph_0$, 因此 $(a, b) \in H_\kappa$, 因此 $R \subset H_\kappa$, 根据 (6), 有 $R \in H_\kappa$ \square

Theorem 1.81 (ZFC). 如果 κ 是不可数正则基数, TFAE

1. $H_\kappa \models \text{ZFC}$

2. $H_\kappa = V_\kappa$

3. κ 不可达

证明. 已知 $2 \leftrightarrow 3$

$1 \rightarrow 2 + 3$: 若 κ 不是不可达基数, 则存在 $\lambda < \kappa$ 使得 $2^\lambda \geq \kappa$, $\lambda \in H_\kappa$ 且 $\mathcal{P}(\lambda) \notin H_\kappa$, 于是 $H_\kappa \not\models \text{Pow}$

$V \models \forall z \in H_\kappa \forall x \in H_\kappa (x \in z \leftrightarrow x \subseteq \lambda)$

$2 \rightarrow 1$ 显然 \square

以上引理表明, 若 κ 正则且不是不可达的, 则

$$\text{ZFC} \vdash (\text{ZFC} - \text{Pow} + \neg \text{Pow})^{H_\kappa}$$

故 $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} - \text{Pow} + \neg \text{Pow})$, 即 Pow 不能由 ZFC 中的其它公理推出

Corollary 1.82. $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} - \text{Pow} + \forall (x \text{ countable}))$

证明. $H_{\omega_1} \models \text{ZFC} - \text{Pow}$

x 可数: 存在 f , $(f : x \rightarrow \omega)$ 是双射, 只需要这个 f 是属于 H_{ω_1} 就行了, 但这是显然的 $\forall x, y \in H_\kappa, x^y \in H_\kappa$ 用性质 6

这个可数我们得在 H_{ω_1} 里看到 \square

1.9 反映定理

已知 $V \models \text{ZF} \Rightarrow V_\alpha \models Z \alpha > \omega$

$V \models \text{ZFC} \Rightarrow V_\alpha \models \text{ZC} (\alpha > \omega)$

$V_\omega \models \text{ZFC} - \text{Inf}$

V_α 不能“反映” V 的全貌，除非 α 是不可达基数

对不可达基数 κ ， V_κ 能“反映” V 的全貌（不全对）

H_κ 也类似，

本节讨论另一个方向：对给定的句子 φ ，若 φ 在 V 中成立，则能否找到 α 使得 $V_\alpha \models \varphi$

问：是否存在 φ ，它在 V 中成立，但是 $\forall \alpha (V_\alpha \not\models \varphi)$ (因为 ZC 少了无穷条 Rep)

Theorem 1.83 (反映定理). 对于任意有穷 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ，存在 α 使得

$$V \models \varphi_i \Leftrightarrow V_\alpha \models \varphi_i (i = 1, \dots, n)$$

即

$$V \models \varphi_i \Leftrightarrow \varphi_i^{V_\alpha}$$

设 F 是一个集合论语言的公式集，如果对每个 $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F$ ，对每个 $a_1, \dots, a_n \in M$ ，有 $M \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow N \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ ，则称 M 是 N 的相对于 F 的初等子模型，记作 $M \prec_F N$

反映定理是 Löwenheim–Skolem Theorem 的有穷“版本”，等价地说 F 中的公式相对于 V_α 绝对

Lemma 1.84. 令 $M \subseteq N$ 都是类， $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 是对子公式封闭的公式集，则以下命题等价

1. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 相对于 M 和 N 绝对
2. 如果 φ_i 是形如 $\exists x \varphi_j(x, y_1, \dots, y_m)$ 的公式，则

$$\forall \bar{y} \in M (\exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}))$$

证明. $1 \rightarrow 2$: 设 φ_i 形如这样的形式, 由绝对性

$$\forall \bar{y} \in M(\varphi_i^N(\bar{y}) \leftrightarrow \varphi_i^M(\bar{y}))$$

载有 φ_j 的绝对性, $\forall \bar{y}(\exists x \in M \varphi_j^M(x, \bar{y}) \leftrightarrow \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}))$

$2 \rightarrow 1$: 对 φ_i 的长度归纳证明: 若 $|\varphi_i|$ 最小, 则 φ_i 无量词, 因此绝对

若长度小于 $|\varphi_i|$ 的公式都是绝对的, 则 φ_i 的所有子公式都绝对, 而 φ_i 的形式有以下形式

1. $\varphi_j \rightarrow \varphi_k$
2. $\neg \varphi_j$
3. $\exists x \varphi_j(x, \bar{y})$

只需验证情形 3: 任取 $\bar{y} \in M$, 由题设条件,

$$\exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y})$$

由 φ_j 的绝对性, 有

$$\exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \in M \varphi_j^M(x, \bar{y})$$

而显然

$$\exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y})$$

□

这个证明没有用到有穷性, 因此无穷情况也成立

Theorem 1.85 (反映定理, ZF). 对于任意有穷公式集 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, 对任意 $\alpha \in \text{On}$, 存在 $\beta \geq \alpha$ 使得 F 对 V_β 绝对

在 ZF 中, $\text{WF} = V$

证明. 由于没有选择公理, 无法“构造” $\mathcal{H}(V_\alpha)$, V_α 的 Skolem hull

本质上, 我们只需要找到一个 V_β 使得每个形如 $\exists x \varphi(x, \bar{y})$ 的公式以及每一组参数 $\bar{b} \in V_\beta$ 有 $V \models \exists x \varphi_j(x, \bar{b}) \Leftrightarrow V_\beta \models \exists x \varphi_j(x, \bar{b})$, 即系数来自 V_β 的方程若有解, 则有一个解 $\in V_\beta$

设 $\varphi_i \in F$ 且形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$, 定义函数 h_i 如下:

- 任取 $\bar{x} \in V$, 令 $U = \{y \mid \varphi_j(\bar{x}, y)\}$
- 若 $U = \emptyset$, 则 $h_i(\bar{x}) = 0$
- 若 $U \neq \emptyset$, 则存在最小的 ξ 使得 $U \cap V_\xi \neq \emptyset$, 此时令 $h_i(\bar{x}) = V_\xi$ (用了序数的良序性)
- 函数 h_i 满足

$$\forall \bar{x} (\exists y \varphi_j(\bar{x}, y) \rightarrow \exists y \in h_i(\bar{x}) \varphi_j(\bar{x}, y))$$

定义 h_F 为:

$$h_F(x_1, \dots, x_m) = \bigcup \{h_i(x_1, \dots, x_m) : i = 1, \dots, n\}$$

这里必需要求只能有穷多个, 因为 h_i 是类

则 h_F 满足: 对每个形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$ 的公式, 有

$$\forall \bar{x} (\exists y \varphi_j(\bar{x}, y) \rightarrow \exists y \in h_F(\bar{x}) \varphi_j(\bar{x}, y))$$

任取 α , 递归定义 V_α^i , $i \in \omega$ 如下:

- $V_\alpha^0 = V_\alpha$
- $V_\alpha^{i+1} = V_\alpha^i \cup \bigcup \{h_F(\bar{y}) \mid \bar{y} \in V_\alpha^i\}$

令 $V_\beta = \bigcup V_\alpha^i$, 相当于 V_α 的 F -Skolem hull, 若 $\varphi_i \in F$ 形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$

任取 $\bar{x} \in V_\beta$, 则存在 $k < \omega$ 使得 $\bar{x} \in V_\alpha^k$, 若 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$, 则

$$\exists y \in h_F(\bar{x}) \varphi_j(\bar{x}, y)$$

□

Corollary 1.86 (ZF). 令 $F = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ 为 ZF 的有穷子集, 则

$$\forall \alpha \exists \beta \geq \alpha (\sigma_1^{V_\beta} \wedge \dots \wedge \sigma_n^{V_\beta})$$

证明. 将 F 扩张为 F' , 有穷且对子公式封闭, 于是 $\forall \alpha \exists \beta \geq \alpha$ 使得 F' 相对于 V_β 绝对

对于 F' 中的句子, 有

$$\text{ZF} \vdash \sigma \leftrightarrow \sigma^{V_\beta}$$

□

Corollary 1.87. 设 $F = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subseteq \text{ZF}$, 除非 ZF 不一致, 否则 “ $F \not\vdash \text{ZF}$ ”

证明. 存在 V_β 使得 $\text{ZF} \vdash (F)^{V_\beta}$, 若 $F \vdash \text{ZF} \Rightarrow \text{ZF} \vdash (\text{ZF})^{V_\beta}$, 故 $\text{ZF} \vdash (\text{ZF})^{V_\beta} \rightarrow \text{Con}(\text{ZF})$ (无需 AC, 反过来要), 因此 $\text{ZF} \vdash \text{Con}(\text{ZF})$ □

Remark. 以上推论对 ZF 的任意扩张成立

若 AC 成立, 则反映定理可以改进为存在可数 (M, \in) 使得 $M \prec_F V$ (绝对性强于 \prec_F)

- 若 F 含有无穷公理, 则 $M \neq V_\omega$
- 若 F 含有幂集公理, 若 M 传递, 则没有绝对性
 - 令 $\psi(x, y)$ 表示 $\forall u(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$, 令 $\text{Pow} : \forall x \exists y \psi(x, y)$, 则 ψ 与 Pow 不能同时绝对
 - M 传递时, $\subseteq \leftrightarrow \subseteq^{\text{eq}}$, 若 ψ 绝对, 则 V 看到的幂集跟 M 看到的幂集, 而 M 是可数的

- 若 $F \subseteq_f \text{ZFC}$, 由 Mostowski collapsing 定理, 存在传递模型使得 $(M, \in) \cong (N, \in)$

F 相对于 N 绝对, 但是 F 的子公式不一定绝对 (比如 ψ 与 Pow)

Theorem 1.88 (ZFC). 对任意有穷公式集 F , 对任意集合 N , 存在集合 M 使得

1. $N \subseteq M$
2. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 相对于 (M, \in) 绝对

$$3. |M| \leq |N| + \aleph_0$$

4. 若 N 至多可数, 则 M 可数

证明. 不妨设 F 对于子公式封闭, 令 \mathcal{H}_F 为 F 对应的 Skolem 函数集, 令 $M = \mathcal{H}_F(N)$ (练习) \square

Corollary 1.89 (ZFC). 对任意有穷句子集 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, 对任意的传递集 N , 存在 M 满足

$$1. N \subseteq M$$

2. F 相对于 (M, \in) 是绝对的

$$3. |M| \leq |N| + \aleph_0$$

4. M 传递

证明. 不妨设外延公理 $\in F$, 则存在 (M', \in) 满足 1 – 3

(M', \in) 良基似集合且满足外延公理

故 $G : M' \rightarrow V, x \mapsto \{G(y) \mid y \in M' \wedge y \in x\}$ 是 M' 到 $M = G(M')$ 的同构, M 传递, 由 M' 的绝对性, $V \models \varphi_i \leftrightarrow \varphi_i^{M'}$

由同构

$$\varphi_i^{M'} \Leftrightarrow M' \models \varphi_i \Leftrightarrow M \models \varphi_i \Leftrightarrow \varphi_i^M$$

故 F 相对于 M 绝对

设 $N \subseteq M'$ 传递, 对 N 中元素的 rank 归纳证明: $\forall x \in N (G(x) = x)$, 即 $G(N) = N \subseteq M$ \square

句子集的绝对性被同构保持, 而公式不是这样 (例子是幂集公理)

Remark. 若 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 是一个公式, 且 $(M, \in) \cong (M', \in)$ 则 φ 相对于

1.10 Exercise

Exercise 1.10.1. 1. $V_\alpha = \{x \in \text{WF} \mid \text{rank}(x) < \alpha\}$

2. WF is transitive

$$3. \forall x, y \in \text{WF}, x \in y \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$$

$$4. \forall y \in \text{WF}, \text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$$

证明. 1. by definition, $x \in V_{\text{rank}(x)+1} \setminus V_{\text{rank}(x)}$, $\text{rank}(x) < \alpha \Rightarrow x \in$

$$V_{\text{rank}(x)+1} \subseteq V_\alpha$$

$$\text{rank}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \notin V_\alpha$$

2. WF is the “union” of transitive sets

$$3. y \in V_{\text{rank}(y)+1} \setminus V_{\text{rank}(y)}, y \subseteq V_{\text{rank}(y)}, x \in y \Rightarrow x \in V_{\text{rank}(y)} \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$$

$$4. \text{ by 3, } \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \leq \text{rank}(y).$$

$$\text{induction on } \text{rank}(y) \leq \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$$

- $\text{rank}(y) = 0$

- $\text{rank}(y) = \beta + 1, y \in V_{\beta+2} \setminus V_{\beta+1}$

$$y \in V_{\beta+2} \Rightarrow y \subseteq V_{\beta+1}. y \notin V_{\beta+1} \Rightarrow y \not\subseteq V_\beta \Rightarrow y \setminus V_\beta \text{ nonempty.}$$

$$\text{Let } x \in y \setminus V_\beta, \text{rank}(x) \geq \beta, \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \beta + 1 = \text{rank}(y)$$

- $\text{rank}(y) = \gamma$ for some limit, then $y \subseteq V_\gamma$ and for any $\xi < \gamma, y \not\subseteq V_\xi$, let $X_\xi \in y \setminus V_\xi$, then $\text{rank}(X_\xi) \geq \xi, \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \sup\{\xi + 1 \mid \xi < \text{rank}(y)\} \geq \text{rank}(y)$

□

Exercise 1.10.2. R 是似集合的, 则 R 是外延的当且仅当对任意 $x, y \in X$

$$x \neq y \rightarrow \text{pred}(X, x, R) \neq \text{pred}(X, y, R)$$

Exercise 1.10.3 (7.10.7). 证明莫斯托夫斯基定理中的 **M** 和 **G** 唯一

证明. 假设 M, N 是传递类且 $f : (M, \in) \cong (N, \in)$, $S = \{x \in M \mid f(x) \neq x\}$. 因为 $M \neq N$, 因此 S 非空, 取 S 的极小元 x_0 , 则对于任意 $y \in x_0$,

$y = f(y) \in f(x_0)$, 于是 $x_0 \subset f(x_0)$, 又因为 f 是双射, 同理有 $f(x_0) \subset x_0$, 于是 $f(x_0) = x_0$, 矛盾。因此 $M = N$ 。

若 $f_1 : (X, R) \cong (M, \in)$, $f_2 : (X, R) \cong (N, \in)$, 则 $M = N$, 于是 $f_1 f_2 = f_2 f_1 = \text{id}$, 因此 $f_1 = f_2$ □

Exercise 1.10.4 (7.10.8). 证明以下概念对任意 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 的传递模型绝对

1. $X^{<\omega}$

证明. 1. $f \in X^{<\omega}$ 当且仅当存在有穷序数 n 使得 $f \in X^n$

而任意这样的模型都有有穷序数 □

Exercise 1.10.5 (7.10.9). $V_\omega \models \text{ZF} - \text{Inf} + \neg \text{Inf}$

证明. □