Week3

陈淇奥
21210160025

2022 年 3 月 26 日

Exercise 1 (1.1.36). 如果 $\mathcal{B}$ 是一个完全的集合代数，则存在 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$

证明. 如果 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{P}(A)$ 的完全子代数，定义 A 上的等价关系 $\sim$ 为

$$x \sim y \quad \text{当且仅当} \quad \forall b \in \mathcal{B}, x \in b \Leftrightarrow y \in b$$

令 $f : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(A/\sim)$ 为 $f(b) = \{[a] \in A/\sim : a \in b\}$，于是我们可以验证这是一个同构，其中满射由完全性得到：对于任何 $a \in A$,$\{[a]\} = f(\bigcap\{b \in \mathcal{B} : a \in b\})$，因为若 $[a] \neq [c]$，则存在 $b \in \mathcal{B}$ 使得 $a \in b$ 且 $c \notin b$。 □

Exercise 2 (1.1.38). 若 $\mathcal{B}$ 是一个完全的原子化的布尔代数，则存在集合 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(A)$

证明. 由定理 1.1.26，A 是全体原子的集合，对于任何 $Y \subseteq A$，$f(\Sigma Y) = \{a \in A \mid a \leq \Sigma Y\}$，因此 $Y \subseteq f(\Sigma Y)$。若存在 $a \in A \setminus Y$ 且 $a \leq \sum Y$，于是对于任何 $b \in Y$，$a \neq b$，于是 $a \cdot b = 0$，因此 $a \cdot \sum Y = \sum\{a \cdot b \mid b \in Y\} = 0 = a$ 矛盾。因此 $f(\sum Y) = Y$，于是 f 是满射，因此 $\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(A)$ □

Exercise 3 (1.1.36). 如果 $\mathcal{B}$ 是一个完全集合代数，则存在 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$

证明. □

Exercise 4 (1.2.3). 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$F \subseteq B$，以下命题等价

1. F 是滤

2. $0 \notin F$, $1 \in F$ 并且对任意 $a, b \in B$,$a \cdot b \in F$ 当且仅当 $a \in F$ 且 $b \in F$

证明. $1 \to 2$；因为 $F \neq \emptyset$，对于任何 $a \in F$, $a \leq 1$，因此 $1 \in F$。若 $ab \in F$，则 $ab \leq a$ 且 $ab \leq b$，因此 $a, b \in F$. 若 $a, b \in F$，则 $ab \in F$

$2 \to 1$: 因为 $1 \in F$，因此 $F \neq \emptyset$，其它显然 □

Exercise 5 (1.2.5). 如果 $G \subseteq B$ 有有穷交性质,$a \in B$，则 $G \cup \{a\}$ 或 $G \cup \{-a\}$ 有有穷交性质

证明. 若 $G \cup \{a\}$ 与 $G \cup \{-a\}$ 都没有有穷交性质，则对于任意 $n \in \omega$，任意 $g_1, \dots, g_n \in G$, $g_1 \cdot \dots g_n \cdot a = 0 = g_1 \cdot \dots \cdot g_n \cdot (-a)$, 于是 $g_1 \cdot \dots \cdot g_n \cdot (a + -a) = 0$，于是 G 没有有穷交性质 □

Exercise 6 (1.2.7). 如果 F 是由 G 生成的滤，则 F 是包含 G 的最小的滤，即 $G \subseteq F$ 且如果 $F' \supseteq G$ 也是滤，则 $F \subseteq F'$

证明. 对于任何包含 G 的滤 F'，若 $g_1 \cdot \dots \cdot g_n \in F'$，对于任何 $b \in B$ 且 $g_1 \cdot \dots \cdot g_n \leq b$，有 $b \in F'$，因此 $F \subseteq F'$ □