Homework6

陈淇奥
21210160025

2021 年 11 月 7 日

Exercise 1 (2.2.6). 证明以上定义的 $\lhd$ 是 $\kappa \times \kappa$ 上的良序

证明. 1. 传递性：若 $(\alpha_1, \beta_1) \lhd (\alpha_2, \beta_2) \lhd (\alpha_3, \beta_3)$，则

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2, \text{或} \\
&\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \wedge \alpha_1 < \alpha_2, \text{或} \\
&\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \wedge \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 + \beta_2 < \alpha_3 + \beta_3, \text{或} \\
&\alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + \beta_3 \wedge \alpha_2 < \alpha_3, \text{或} \\
&\alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + \beta_3 \wedge \alpha_2 = \alpha_3 \wedge \beta_2 < \beta_3
\end{aligned}$$

若 $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2$, 则 $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2 \leq \alpha_3 + \beta_3$，因此 $(\alpha_1, \beta_1) \lhd (\alpha_3, \beta_3)$

若 $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \wedge \alpha_1 < \alpha_2$，则 $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 < \alpha_3 + \beta_3$ 或 $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_3 + \beta_3 \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3$，因此 $(\alpha_1, \beta_1) \lhd (\alpha_3, \beta_3)$

若 $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \wedge \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2$，则 $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_3 + \beta_3$ 或 $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_3 + \beta_3 \wedge \alpha_1 < \alpha_3$ 或 $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_3 + \beta_3 \wedge \alpha_1 = \alpha_3 \wedge \beta_1 < \beta_2 < \beta_3$，因此 $(\alpha_1, \beta_1) \lhd (\alpha_3, \beta_3)$

2. 非自反性：若 $(\alpha_1,\beta_1)\lhd(\alpha_2,\beta_2)$ 且 $(\alpha_2,\beta_2)\lhd(\alpha_1,\beta_1)$，则 $\alpha_1+\beta_1 >< \alpha_2+\beta_2$ 或 $\alpha_1 >< \alpha_2$ 或 $\beta_1 >< \beta_2$，这与 $<$ 的非自反性矛盾

3. 对任意的 (α_1,β_1) 与 (α_2,β_2)，因为 $<$ 有三岐性，于是 α_1 与 α_2，β_1 与 β_2 只见有关系，因此 (α_1,β_1) 与 (α_2,β_2) 之间有关系

4. 对任意 $\kappa\times\kappa$ 的子集 $A\times B$。因为 A,B 是序数的集合，有 $<$ 的最小值，令 $a=\min A$,$b=\min B$，于是对于任意 $\alpha\in A$ 与 $\beta\in B$，$a+b<a+\beta<\alpha+\beta$，于是 (a,b) 是 $A\times B$ 在 $\lhd$ 的最小值。

□

Exercise 2 (2.2.9). 令 A,B 为集合

1. ${}^AB$ 为集合

2. 当 $B=\emptyset$ 时，${}^AB$ 是什么?

3. 如果 $A=\emptyset$ 呢?

证明. 1. 因为 A,B 是集合，于是 $A\times B$ 是集合，于是 ${}^AB=\{R\in A\times B\mid R\text{是函数}\}$ 是集合

2. 是 $\emptyset$

3. 是 $\{\emptyset\}$

□

Exercise 3 (2.2.16). 证明 $|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$

证明. $|\mathbb{R}|\geq 2^{\aleph_0}$: 对于每个 0，1 序列 $f\in 2^{\aleph_0}$，都可以唯一映射到康托集的一个元素，因此 $2^{\aleph_0}\leq|\mathbb{R}|$。

$|\mathbb{R}|\leq 2^{\aleph_0}$: 定义 $f:\mathbb{R}\to\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 为 $f(r)=\{q\in\mathbb{Q}\mid q<r\}$。如果 $r\neq r'$，不妨令 $r<r'$，则存在有理数 q 使得 $r<q<r'$，因此 $f(r)\neq f(r')$，从而 f 是 1-1 的 □

Lemma 1. 对于集合 A,C，$\left|{}^{|A|}C\right|=\left|{}^AC\right|$

证明. 给定双射 $f : |A| \to A$，定义 $h : {}^{A}C \to {}^{|A|}C$ 为 $h(g) = g \circ f$

若 $h(g_1) = h(g_2)$，则 $g_1 \circ f = g_2 \circ f$，因为 f 是双射，于是 $g_1 = g_2$

对于任意 $k \in {}^{|A|}C$，则 $k \circ f^{-1} \in {}^{A}C$ 且 $h(k \circ f^{-1}) = k$

因此 h 是双射 □

Lemma 2. 对于集合 A, B，$|A \times B| = ||A| \times |B||$

证明. 给定双射 $f : |A| \to A$，$g : |B| \to B$，定义映射 $h : |A| \times |B| \to A \times B$ 为 $h((a, b)) = (f(a), g(b))$。

若 $h((a, b)) = h((a', b'))$，则 $f(a) = f(a')$ 且 $g(b) = g(b')$，因此 $(a, b) = (a', b')$

同时对任意 $(a, b) \in A \times B$，$h(f^{-1}(a), g^{-1}(b)) = (a, b)$，因此 h 是双射 □

Exercise 4 (2.2.12). 假设 κ, λ 是无穷基数，则

1. $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^{\lambda} \oplus \kappa^{\mu}$
2. $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$
3. $(\kappa \otimes \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \otimes \lambda^{\mu}$
4. $2^{\kappa} > \kappa$

证明. 令 $|A| = \lambda, |B| = \mu, |C| = \kappa$ 且 A, B, C 相互不交

1. 由引理

$$\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \left|{}^{\lambda \oplus \mu}C\right| = \left|{}^{|A \cup B|}C\right| = \left|{}^{A \cup B}C\right|$$
$$\kappa^{\lambda} \otimes \kappa^{\mu} = \left|\left|{}^{|A|}C\right| \times \left|{}^{|B|}C\right|\right| = \left|{}^{A}C \times {}^{B}C\right|$$

定义映射 $h : {}^{A \cup B}C \to {}^{A}C \times {}^{B}C$ 为 $h(f) = (f|A, f|B)$。若 $h(f) = h(f')$，则 $(f|A, f|B) = (f'|A, f'|B)$，因为 $A \cap B = \emptyset$，$f = f'$。

对任意 $f \in {}^{A}C, g \in {}^{B}C$，则 $h(f \cup g) = (f, g)$。因此 h 是双射

2. $(\kappa^\lambda)^\mu = \left|{}^B({}^AC)\right|$,$\kappa^{\lambda\otimes\mu} = \left|{}^{A\times B}C\right|$

对于任意函数 $f : A \times B \to C$，定义 $g_b : A \to C$ 为 $g_b(a) = f(a,b)$，定义 $h : B \to (A \to C)$ 为 $h(b) = g_b$。定义映射 $k : f \to h$. 如果 $k(f) = k(f')$，则对于任意 $(a,b) \in A \times B$，$f(a,b) = k(f)(b)(a) = k(f')(b)(a) = f'(a,b)$，于是 $f = f'$。

同时对于任意 $h \in {}^B({}^AC)$，令 $f(a,b) = h(b)(a)$，则 $k(f) = h$。因此 k 是双射

3. $(\kappa \otimes \lambda)^\mu = \left|{}^B(C \times A)\right|$,$\kappa^\mu \otimes \lambda^\mu = \left|{}^BC \times {}^BA\right|$

定义函数 $k : {}^BC \times {}^BA \to {}^B(C \times A)$ 为 $k(f,g) = f \times g$，对于任意 $x \in B$，$(f \times g)(x) = (f(x), g(x))$。若 $k(f,g) = k(f',g')$，则对于任意 $x \in B$，$(f(x), g(x)) = (f'(x), g'(x))$，于是 $f = f'$，$g = g'$，因此 $(f,g) = (f',g')$

对于任意 $g \in {}^B(C \times A)$，令 $\pi_1 : C \times A \to C, \pi_2 : C \times A \to A$ 为对应的投影函数，则 $k(\pi_1 \circ g, \pi_2 \circ g) = g$。因此 k 是双射。

4. $2^\kappa > \kappa$ 等价于 $\left|2^A\right| > A$。对任意函数 $f : A \to \mathcal{P}(A)$，令 $Y = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$，如果存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = Y$，则 $a \in Y$ 当且仅当 $a \notin f(a)$ 当且仅当 $a \notin Y$。因此 f 不是满射。因此 $2^\kappa \neq \kappa$。同时我们有单射 $x \mapsto \{x\}$，于是 $2^\kappa > \kappa$

□

Exercise 5 (2.3.2). 1. $A \subset \alpha$ 是无界的当且仅当 $\alpha = \bigcup\{\xi{+}1 \mid \xi \in A\}$。因此对任意序数，如果 $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ 是共尾映射，则 $\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}[f(\xi)+1] = \alpha$

2. 对任意 α，$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$

3. 任意后继序数 $\alpha = \beta + 1$ 的共尾是 1

4. 对任意极限序数 $\alpha > 0$，$\mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega$

证明. 1. 若 $A \subset \alpha$ 无界，因此对于任意 $\beta \in \alpha$，都存在 $\xi \in A$ 使得 $\gamma \leq \xi < \xi + 1$，因此 $\alpha \subseteq \bigcup\{\xi + 1 \mid \xi \in A\}$。同时对任意 $\xi \in A$，因为

$A \subset \alpha$,因此 $\xi \subset \alpha$,因此 $\xi{+}1 = \xi \cup \{\xi\} \subset \alpha$,所以 $\bigcup\{\xi{+}1 \mid \xi \in A\} \subseteq \alpha$。于是 $\alpha = \bigcup\{\xi + 1 \mid \xi \in A\}$

若 $\alpha = \bigcup\{\xi + 1 \mid \xi \in A\}$，则对于任意 $\beta < \alpha$，都存在 $\xi \in A$ 使得 $\beta < \xi + 1$，因此 $\beta \leq \xi$，因此 A 无界

2. 因为恒等映射 $id : \alpha \to \alpha$ 是一个共尾映射，因此 $\text{cf}(\alpha) \leq \alpha$

3. 令映射 $f : 1 \to \alpha$ 为 $f(0) = \beta$，而 β 在 α 中无界，因此 f 是共尾映射。因为 $\text{cf}(\alpha) \neq 0$，因此 $\text{cf}(\alpha) = 1$

4. 因为 $A \subset \alpha$ 无界当且仅当 $\alpha = \cup\{\xi + 1 \mid \xi \in A\}$。若 $|A| \in \omega$，则 $\bigcup\{\xi + 1 \mid \xi \in A\}$ 为后继序数，矛盾

$\square$

Exercise 6. 对任意序数 α, β，$\text{cf}(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) > \aleph_\beta$

证明. 若 $\text{cf}(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) \leq \aleph_\beta$，则

$$\left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right)^{\text{cf}(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})} \leq \left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right)^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$$

与定理矛盾 $\square$