复习题

习题 1.1. 如果 $\mathcal{F}$ 是 S 上的滤构成的一个 $\subseteq$-链，则 $\bigcup\mathcal{F}$ 是 S 上的滤。

习题 1.2. 如果 F 是非主超滤，则任意 $X \in F$ 都是无穷的。因此任何非主超滤必是弗雷歇滤的扩张。

习题 1.3. 如果 F 是 S 上的滤，而 $F' = \{X \subseteq S \mid S - X \notin F\}$，则 $F \subseteq F'$，并且 $F = F'$ 当且仅当 F 是超滤。

习题 1.4. 假设 $X \subseteq S$，证明：

（1） 如果 F 是 S 上的滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的滤；

（2） 如果 F 是 S 上的超滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的超滤；

（3） 如果 F 是 X 上的滤，则 F 能扩张为 S 上的超滤。

习题 1.5. 假设 S 是无穷的，则

（1） 存在 S 上的超滤 F，对任意 $X \in F$，$|X| = |S|$。这样的滤称为 S 上的**均匀超滤**（uniform ultrafilter）；

（2） $\{F \mid F$ 是 S 上的均匀超滤$\} = \{F \mid F$ 是 S 上的非主超滤$\}$ 当且仅当 S 是可数的。

习题 1.6. 如果 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤，则以下命题等价：

（1） F 是非主滤；

（2） $\{X \subseteq S \mid S - X$ 是有穷的$\} \subseteq F$；

（3） F 的元素都是无穷的。

习题 1.7. 如果 S 是无穷的，则 S 上的任何非主超滤都不是 $|S|^+$- 完全的。所以 ω 上的任何非主超滤都不是 σ-完全的。

习题 1.8. 如果 F 是 S 上的非主超滤，并且是 $|S|$-完全的，则 F 是均匀超滤。

习题 1.9. 如果 F 是 S 上的滤，并且令 $\mu = \sup\{\kappa \mid F \text{ 是 } \kappa \text{ 完全的}\}$，则 μ 是正则基数，并且 F 是 μ-完全的。

证明. F 显然是 μ 完全的。假设 μ 不是正则的，并且 $\mathrm{cf}(\mu) = \lambda < \mu$。任取 $\langle X_\alpha \rangle_{\alpha<\mu}$ 为 F 中元素的序列，并且 $\bigcap_{\alpha<\mu} X_\alpha \notin F$。令 $\{\alpha_\xi < \mu \mid \xi < \lambda\}$ 为共尾序列。定义 $Y_{\alpha_\gamma} = \bigcap_{\alpha<\alpha_\gamma} X_\alpha$，则对任意 α_γ，$Y_{\alpha_\gamma} \in F$。但是 $\bigcap_{\gamma<\lambda} Y_{\alpha_\gamma} \notin F$，与 F 是 λ 完全的矛盾。 □

习题 1.10. 假设 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤。证明 F 是 κ-完全的当且仅当对任意 $\tau < \kappa$ 和任意划分 $\langle X_\xi \mid \xi < \tau \rangle$，总存在 $X_\xi \in F$。

习题 1.11. 如果 $\alpha > \aleph_0$ 是正则基数，并且 $f : \alpha \to \alpha$ 是函数，则集合 $C = \{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

Jech 第三版（第 7 章）

习题 1.12. 如果 U 是 S 上的超滤，令 $X \subseteq S \times S$ 为满足以下性质的集合：

$$\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a, b) \in X\} \in U\} \in U.$$

则所有这样的 X 组成的族 F 是 $S \times S$ 上超滤。

习题 1.13. 令 U 是 S 上的超滤，$f : S \to T$ 是函数，证明 $U' = \{X \subseteq T \mid f^{-1}[X] \in U\}$ 是 T 上的超滤。

习题 1.14. 令 A 为自然数 $\mathbb{N}$ 上的线序 $(\mathbb{N}, \leq_s)$ 组成的集合并且满足：如果 $(\mathbb{N}, \leq_s)$ 与 $(\mathbb{N}, \leq_t)$ 都属于 A，且 $s \neq t$，则 $(\mathbb{N}, \leq_s)$ 与 $(\mathbb{N}, \leq_t)$ 不同构。证明 A 与 $\mathbb{R}$ 等势。

证明. $|A| \leq |\mathbb{R}|$ 是显然的：对任意线序 $\leq$，都有 $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$。所以这样的线序至多有 $|2^\omega| = |\mathbb{R}|$。

考虑 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$，对任意 $n \in \mathbb{N}$，令 $\tau_n = \mathbb{N} \times \{n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$。对任意 $s \in 2^\omega$，我们构造一个线序 $\sigma = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_s)$，它是 τ_n 的链接：如果 $n < m$，则 τ_n

所有元素排在 τ_m 之前。对于同处一个 τ_n 中的元素，如果 $s(n) = 0$，则令 $<_s\restriction\tau_n$ 为：$(m,n) < (k,n)$ 当且仅当 $m < k$；而如果 $s(n) = 1$，则令 $<_s\restriction\tau_n$ 为：$(m,n) < (k,n)$ 当且仅当 $m > k$。显然，如果 $s_1 \neq s_2$，则相应的线序 $\sigma_1 \ncong \sigma_2$。最后，我们利用双射 $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，可以将 σ 视为 $\mathbb{N}$ 上的线序。所以 $|\mathbb{R}| = |2^\omega| \leq |A|$。 □

习题 1.15. 令 X 是一个序数的集合。$X^{<\omega}$ 是 X 中元素的有穷序列的集合。对任意 $s \in X^{<\omega}$，我们用 $|s|$ 表示 s 的长度。定义 $X^{<\omega}$ 上的序 $<_l$ 为：

$$\text{对任意 } s,t \in X,\ s <_l t \text{ 当且仅当}$$

(1) 存在 i，$i < |s|$ 并且 $i < |t|$，$s_i < t_i$，并且对任意 $j < i$，$s_j = t_j$；或者

(2) t 是 s 的真扩张，即，$|s| < |t|$，并且对任意 $i < |s|$，$s_i = t_i$，而且存在一个 j，$|s| < j < |t|$，$t_j \neq 0$。

证明 $<_l$ 是一个线序。

习题 1.16. 令 λ 为一个无穷基数，记 $D = \lambda^{<\omega}$，定义 D 上的序为：对任意 $s,t \in D$，

$$s \prec t \text{ 当且仅当 } s^\frown\lambda <_l t^\frown\lambda,$$

其中，对任意有穷序列 $s = (s_0,\cdots,s_{n-1})$，任意序数 β，$s^\frown\beta = (s_0,\cdots,s_{n-1},\beta)$。而 $<_l$ 是当 $X = \lambda\cup\{\lambda\}$ 时，1.15 中定义的 $X^{<\omega}$ 上的序。

(1) 证明：对任意 $s,t \in D$，$s \prec t$，对任意 $\alpha < \lambda$，存在 $r \in D$ 使得：$s \prec r^\frown\alpha \prec t$。

(2) 对任意 $\alpha < \lambda$，任意 D 中的区间 $(s,t) = \{r \in D \mid s \prec r \prec t\}$，证明：存在 $Y \subseteq (s,t)$，使得 $(\alpha,<) \cong (Y,\prec)$。

证明. (1) 分两种情况，(一) 存在 $i < |s|, i < |t|$ 使得 $s_i < t_i$。此时取 $r = s$。(二) s 是 t 的真扩张。此时 $r = t * (s_m + 1)$，其中 m 是 t 的长度。

（2）根据（1），归纳证明。后继的情况显然，极限的情况则考虑 α 中的共尾序列，每个序列中的序数都嵌入到一个区间中。这些区间的并还是一个区间，且序型为 α。 □

习题 1.17. 假设 λ 是不可数的正则基数。$S \subseteq \lambda$ 是平稳集。$f : \lambda \to \lambda$ 在 S 上是退缩函数，即，对任意 $\alpha \in S$，$\alpha > 0$，$f(\alpha) < \alpha$。对任意 $\beta < \lambda$，定义 $S_\beta = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \beta\}$。最后，令 $I = \{\beta < \lambda \mid S_\beta\text{是平稳集}\}$。

(1) 证明 I 非空，即至少存在一个 β 使得 S_β 是平稳集。

(2) 如果 $|I| \neq \lambda$，则存在一个无界闭集 C，f 限制在 $C \cap S$ 上是有界的。

Jech 第三版（第 8 章）：

习题 1.18. 令 κ 是不可数正则基数，如果 $X \subseteq \kappa$ 不是平稳集，则存在退缩函数 $f : X \to \kappa$ 使得对任意 $\gamma < \kappa$，集合 $\{\alpha \in X \mid f(\alpha) < \gamma\}$ 是有界的。【提示：取 $C \cap X = \emptyset$，定义 $f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$。】

证明. 取无界闭集 C，使得 $C \cap X = \emptyset$，定义 $f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$。$f$ 显然是退缩函数。对任意 $\gamma < \kappa$，令 $X_\gamma = \{\alpha \in X \mid f(\alpha) < \gamma\}$，我们证明 X_γ 是有界的。任取 $\eta \in C$，$\eta > \gamma$，这总是可以的，是因为 C 是无界闭集。但是，对任意 $\alpha \in C$，$\alpha > \epsilon$，$f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha) \geq \epsilon$，所以 ϵ 是 X_γ 的上界。 □

习题 1.19. 如果 κ 是马洛基数，则 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{ 是不可达基数}\}$ 是 κ 上的平稳集，因此 κ 是第 κ 个不可达基数。

证明. 定义 $f : \kappa \to \kappa$ 为：$f(\eta + 1) = 2^{f(\eta)}$；对于极限基数 $\lambda < \kappa$，$f(\lambda) = \sup_{\eta<\lambda}(f(\eta))$。由于 κ 是不可达的，所以这样定义是合理的。f 是 κ 上的连续函数，所以它的值域是一个无界闭集。根据马洛基数的定义，$M = \{\eta < \kappa \mid \eta\text{ 是正则的}\}$ 是平稳集，所以 $\mathrm{ran}(f) \cap M$ 是平稳集，而它的元素都是不可达基数。 □

习题 1.20. 如果 $\kappa = \min\{\lambda \mid \lambda\text{ 是第 }\lambda\text{ 个不可达基数}\}$，证明 κ 不是马洛基数。

证明. 假设 κ 是马洛基数，根据上题，令 $M = \{\eta < \kappa \mid \eta\text{是不可达基数}\}$，则 M 是平稳集。我们取 $\langle\lambda_\xi\rangle_{\xi<\kappa}$ 为 M 的一个严格递增的枚举。对任意 $\eta \in M$，都有唯一的 ξ，$\eta = \lambda_\xi$。如果 $\xi \geq \eta$，则 η 就是第 η 个不可达基数，与 κ 是最小的矛盾。所以如果定义 $f(\eta) = \xi$，其中 ξ 是使得 $\eta = \lambda_\xi$ 的唯一的 ξ，则 f 是平稳集 M 上的退缩函数。由 Fodor 引理，有一个平稳集 $S \subseteq M$，f 限制在 S 上是常值，与 f 是一一函数矛盾。 □

习题 1.21. 如果 κ 是马洛基数，则集合 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda$ 是第 λ 个不可达基数$\}$ 在 κ 中无界。

证明. 我们已知 κ 以下的不可测基数有 κ 个。对任意 $\eta<\kappa$，大于 η 的不可达基数有 κ 个。定义函数 $f:\kappa\to\kappa$ 为：$f(0)=\lambda_0$ 为大于 η 的最小的不可达基数，$f(\alpha+1)=\lambda_{\alpha+1}$ 为大于 λ_α 的最小的不可达基数。如果 $\gamma<\kappa$ 是极限序数，则 $f(\gamma)=\bigcup_{\alpha<\gamma}f(\alpha)$，注意 $f(\gamma)$ 不一定是不可达基数，它不一定是正则的。f 是连续的无界函数。根据马洛基数的定义，它有一个不可达的不动点 λ，而 $\lambda>\eta$ 并且是第 λ 个不可达基数。 □

习题 1.22. (1) 令 κ 是极限基数，并且集合 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda$是强极限基数$\}$ 在 κ 中无界，则 κ 是强极限基数。因此，

(2) 令 κ 是弱不可达基数，并且集合 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda$是强极限基数$\}$ 在 κ 中无界，则 κ 是强不可达基数。

(3) 令 κ 是弱马洛基数，并且集合 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda$是强极限基数$\}$ 在 κ 中无界，则 κ 是马洛基数。

证明. (1) 对任意 $\lambda<\kappa$，取 $\eta<\kappa$ 使得 $\lambda<\eta<\kappa$ 并且 η 是强极限基数，则 $2^\lambda<\eta<\kappa$，所以 κ 是强极限。

(2) 由（1），κ 是强极限的，所以是不可达基数。

(3) 根据弱马洛基数的定义，不难看出 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda$是正则的$\}$ 平稳集。但（1）和（2）蕴含 κ 是不可达基数。所以 κ 是马洛基数。 □

习题 1.23. 证明不存在 ω 上的正则的非主超滤。

证明. 定义函数 $f(n)=n-1$，这是 ω 上的退缩函数，如果 F 是正则非主超滤，则存在 $k\in\omega$，$\{n\in\omega \mid f(n)=k\}=\{k-1\}$ 具有正测度。由于 F 是非主滤，所以这是不可能的。 □

Schindler

习题 1.24 (4.1). 如果 $\alpha<\omega_1$ 是序数，证明存在 $X\subseteq\mathbb{Q}$，$(\alpha,<)\cong(X,<_{\mathbb{Q}})$。【对 α 归纳。】

证明. 定理2.1.16的第二部分。 □

习题 1.25 (4.2)**.** 令 κ 为基数，$y = \kappa \cup \{\alpha \mid |\alpha| = \kappa\}$，则 $y = \kappa^+$。

证明. 首先，根据基数的定义，$y \subseteq \kappa^+$ 是显然的。反过来，对任意 $\alpha \in \kappa^+$，$|\alpha| \leq \kappa$。如果 $|\alpha| < \kappa$，则 $\alpha \in \kappa \subseteq y$。如果 $|\alpha| = \kappa$，则 $\alpha \in y$。 □