Homework5

陈淇奥
21210160025

2021 年 11 月 1 日

Exercise 1 (2.1.31). 如果 X 是冯 · 诺伊曼基数的集合，则 $\bigcup X$ 也是冯 · 诺伊曼基数

证明. 若 X 的元素都是有穷的，则 X 中有一个最大的元素 n，且 $\bigcup X = n$，于是 $\bigcup X$ 也是冯诺依曼序数。

否则，假设 $\alpha = Card(\bigcup X)$ 且 $\alpha < \bigcup X$。则存在一个双射 $f : \bigcup X \to \alpha$。因为 $\alpha \in \bigcup X$，于是存在一个 X 中的冯诺依曼序数 κ 使得 $\alpha \in \kappa$。因为 $\kappa \subseteq \bigcup X$，于是 $f \restriction \kappa$ 是一个从 κ 到 $f(\kappa) \subseteq \alpha$ 的双射，于是 $Card(\kappa) < \kappa$，矛盾。因此 $\alpha = \bigcup X$，$\bigcup X$ 是冯诺依曼序数。 $\square$

Exercise 2 (2.1.39). 令 X 是一个不可良序化的集合，令 $\lambda = H(X)$。λ 是冯诺依曼基数。证明：$\lambda \not\precsim X$ 并且 $X \not\precsim \lambda$

证明. 若 $X \precsim \lambda$，则存在单射 $f : X \to \lambda$，于是有双射 $g : X \to f(X)$，而 $f(X) \subseteq \lambda$ 是良序集，于是 X 可良序，矛盾。

若 $\lambda \precsim X$，而 λ 是最小的不与 X 的子集等势的序数，矛盾。 $\square$

Exercise 3 (2.1.37). 如果 $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 是严格递增的，并且是连续的，则对任意序数 α，存在 $\epsilon > \alpha$，$F(\epsilon) = \epsilon$。即，F 有任意大的不动点

证明. 首先证明对任意序数 α 都有 $F(\alpha) \geq \alpha$。

若 $\alpha = 0$，则 $F(0) \geq 0$。

若 $\alpha = \beta + 1$，则 $F(\alpha) = F(\beta + 1) > F(\beta) \geq \beta + 1$。

若 $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$，则 $F(\alpha) = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \geq \bigcup\{\beta < \alpha\} = \alpha$。

注意到 $F(\alpha) \leq F(\alpha)^\alpha$, $F(\alpha)^{F(\alpha)^\alpha} \geq F(\alpha)^\alpha$, 令 $\epsilon_0 = \alpha$, 对于任意 $i \in \omega$, 构造 ϵ_{i+1} 为

$$\begin{aligned} &\epsilon_{i+1,0} = F(\epsilon_i) \\ &\epsilon_{i+1,n+1} = F(\epsilon_i)^{\epsilon_{i+1,n}} \quad n \in \omega \\ &\epsilon_{i+1} = \bigcup_{n\in\omega} \epsilon_{i,n} \end{aligned}$$

于是 $F(\epsilon_i)^{\epsilon_{i+1}} = \bigcup\{F(\epsilon_i)^{\epsilon_{i+1,n}} \mid n \in \omega\} = \bigcup\{\epsilon_{i+1,n+1} \mid n \in \omega\} = \epsilon_{i+1}$。令 $\epsilon = \bigcup_{i\in\omega} \epsilon_i$，则 $\epsilon = F(\epsilon)^\epsilon$。由于 $F(\epsilon) \geq \epsilon$ 且 $F(\epsilon) \leq F(\epsilon)^\epsilon = \epsilon$，我们有 $F(\epsilon) = \epsilon$。 $\square$