Set Theory2

Yao

2022 年 6 月 15 日

目录

1 集合的宇宙 2

1.1 数理逻辑 2
1.2 层垒的谱系 4
1.3 相对化 relativization 10
1.4 绝对性 14
1.5 基础公理的相对一致性 19
1.6 基于良基关系的归纳与递归 22
1.7 基础公理的绝对性 26
1.8 不可达基数与 ZFC 的模型 37
1.9 反映定理 46
1.10 Exercise 50

2 可构成集 61

2.1 可定义性与哥德尔运算 61
2.2 哥德尔的 **L** 70
2.3 可构成公理和相对一致性 75
2.4 练习 82

3 力迫 88

3.1 力迫法的基本思想 88

3.2 脱殊扩张 89
3.3 力迫 95
3.4 $M[G]$ 中的 ZFC 103
3.5 ZFC 的相对独立性 107
3.6 练习 110

1 集合的宇宙

1.1 数理逻辑

在 ZFC 下证明 ZFC ⊢ CH，希望将 "ZFC ⊢ CH" 表述为一阶句子

一般而言，给定一个 $\mathcal{L}$-理论 T 和一个 $\mathcal{L}$-句子 δ，"$T \vdash \sigma$" 不能用一个 $\mathcal{L}$-句子表示，只能用元语言表述

我们需要在 ZFC 中编码"元语言"

在 ZFC 中可以定义 $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$

即存在集合论语言 $\mathcal{L} = \{\in\}$ 中的 **公式**，在 ZFC 的任意模型中可以定义 $\mathbb{N}, +, \times, 0, 1$，以上公式与模型无关

用 $\ulcorner 0 \urcorner$，$\ulcorner 1 \urcorner$，$\ulcorner 2 \urcorner$... 表示 ZFC 中的"自然数"，以区别元语言中的自然数

Theorem 1.1. 如果 $R \subseteq \mathbb{N}^n$ 是一个递归关系。$T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ 是包含数论的适当丰富的理论，则存在公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 使得对任意自然数 $m_1, \dots, m_n$ 有

$$\text{如果}(m_1, \dots, m_n) \in R \text{则} T \vdash \varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$$
$$\text{如果}(m_1, \dots, m_n) \notin R \text{则} T \vdash \neg\varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$$

Remark. 1. $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \mathrm{ZFC}$

2. φ 是语言 $\{+, \times, 0, 1\}$ 上的公式

3. φ 可以还原为一个 $\{\in\}$ 上的公式

4. $\varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$ 是一个闭语句

编码

编码函数 $f : X \to \mathbb{N}$

存在解码函数 g, h，对 $a = a_0, \dots, a_n \in X$, $h(f(a)) = n+1$, $g(f(a), k) = a_k$ (分量)

性质：以上三种函数 f, g, h 均是递归函数 $\Rightarrow$ 都是可表示的

性质:“公式集”的编码集是递归的

性质：如果 $T \subseteq \mathrm{ZFC}$ 是可公理化的，则 T 的证明集的编码集是递归的

Corollary 1.2. *存在一个公式 ψ 和 θ 使得*

$$\mathrm{ZFC} \vdash \psi(n) \Leftrightarrow n \textit{ is a formula}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \neg\psi(n) \Leftrightarrow n \textit{ is not a formula}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \theta(n) \Leftrightarrow n \textit{ is a proof in } \mathrm{ZFC}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \neg\theta(n) \Leftrightarrow n \textit{ is not a proof in } \mathrm{ZFC}$$

称 ψ 定义了公式集，θ 定义了证明集

$\mathrm{FORM} = \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \text{ formula}\} \subseteq \mathbb{N}$

如果 $T \subseteq \mathrm{ZFC}$ 是可公理化的，则“T 是一致的”是一个一阶表述式“不存在一个有穷的证明序列 $D = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 使得 φ_n 形如 $\varphi \wedge \neg\varphi$，记作 $\mathrm{Con}(T)$

Theorem 1.3 (第二不完全)**.** *如果 T 是包含 ZFC 的一个递归公理集，且 T 一致，则*

$$T \nvdash \mathit{Con}(T)$$

特别地，ZFC $\nvdash$ Con(ZFC)

Theorem 1.4. *对任意可公理化的理论 T，ZFC $\vdash$ Con(T) 当且仅当存在 $M \vDash T$*

即不能在 ZFC 里证明 ZFC 有一个模型

需要可公理化来写出 $\mathrm{Con}(T)$，因此因为 ZFC $\nvDash \mathrm{Con}(T)$，我们只能假设这么一个模型

集合论的模型跟集合论没什么关系，就是一个集合带一个二元关系，是关于集合论语言的结构

Definition 1.5. 设 (M, E) 是集合论模型

1. 对任意公式 $\varphi(\bar{x}, y)$，定义 M^n 上的函数
$$h_\varphi : M^n \to M$$
满足条件
$$M \vDash \exists y \varphi(\bar{a}, y) \Rightarrow M \vDash \varphi(\bar{a}, h_\varphi(\bar{a}))$$
称 h_φ 为 φ 的 Skolem 函数（依赖于选择公理，不同的变量选择有不同的函数）

2. 令 $\mathcal{H} = \{h_\varphi \mid \varphi \text{ formula}\}$ 为 Skolem 函数集合，设 S 是 M 的任意子集，则 $\mathcal{H}(S)$ 表示包含 S 且对 $\mathcal{H}$ 封闭的最小集合，称之为 S 的 Skolem 壳

Lemma 1.6. 令 N 是集合论模型，$S \subseteq N$，如果 $M = \mathcal{H}(S)$，则 $M \prec N$

证明. Induction

对任意 $\bar{a} \in M^n$，有 $M \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \varphi(\bar{a})$

1. 不含量词，显然成立

2. φ 形如 $\exists y \psi(\bar{x}, y)$, $N \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y) \Rightarrow N \vDash \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a}))$，by IH, $M \vDash \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a})) \Rightarrow M \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y)$

□

Theorem 1.7 (Löwenheim–Skolem Theorem)**.**

1.2 层垒的谱系

工作于 ZF$^-$：ZF − 基础公理

$\alpha \mapsto V_\alpha$ 是 On 到 WF 的 1-1 映射，而 On 是真类

Lemma 1.8. *For any ordinal* α

1. V_α *is transitive*

2. *$\xi \leq \alpha \Rightarrow V_\xi \subseteq V_\alpha$*

3. *if κ is inaccessible, then $|V_\kappa| = \kappa$*

Definition 1.9. For any $x \in \mathrm{WF}$, **rank** of x is

$$\mathrm{rank}(x) = \min\{\beta \mid x \in V_{\beta+1}\}$$

$\mathrm{rank}(x) = \alpha \Rightarrow x \in V_{\alpha+1} \wedge x \notin V_\alpha$

- $x \in V_{\alpha+1} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(x) \leq \alpha$
- $x \subseteq V_\alpha \Leftrightarrow \mathrm{rank}(x) \leq \alpha$

Lemma 1.10. *1. $V_\alpha = \{x \in \mathrm{WF} \mid rank(x) < \alpha\}$*

2. *WF is transitive*

3. *$\forall x, y \in \mathrm{WF}, x \in y \Rightarrow rank(x) < rank(y)$*

4. *$\forall y \in \mathrm{WF}, rank(y) = \sup\{rank(x) + 1 \mid x \in y\}$*

证明. 1. by definition, $x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \setminus V_{\mathrm{rank}(x)}$, $\mathrm{rank}(x) < \alpha \Rightarrow x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \subseteq V_\alpha$

$\mathrm{rank}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \notin V_\alpha$

2. WF is the "union" of transitive sets

3. $y \in V_{\mathrm{rank}(y)+1} \setminus V_{\mathrm{rank}(y)}, y \subseteq V_{\mathrm{rank}(y)}, x \in y \Rightarrow x \in V_{\mathrm{rank}(y)} \Rightarrow \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$

4. by 3, $\sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \leq \mathrm{rank}(y)$.

   induction on $\mathrm{rank}(y) \leq \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

   - $\mathrm{rank}(y) = 0$

- rank$(y) = \beta + 1$, $y \in V_{\beta+2} \setminus V_{\beta+1}$
  $y \in V_{\beta+2} \Rightarrow y \subseteq V_{\beta+1}$. $y \notin V_{\beta+1} \Rightarrow y \nsubseteq V_\beta \Rightarrow y \setminus V_\beta$ nonempty. Let $x \in y \setminus V_\beta$, rank$(x) \geq \beta$, sup$\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \beta + 1 =$ rank(y)
- rank$(y) = \gamma$ for some limit, then $y \subseteq V_\gamma$ and for any $\xi < \gamma$, $y \nsubseteq V_\xi$, let $X_\xi \in y \setminus V_\xi$, then rank$(X_\xi) \geq \xi$, sup$\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq$ sup$\{\xi + 1 \mid \xi < \text{rank}(y)\} \geq$ rank(y)

□

- WF 中的集合按照秩分层
- 在 WF 中基础公理是成立的：$\forall y(y \neq \emptyset \to \exists x \in y(x \cap y = \emptyset))$，因为任何序数集都有最小元，挑一个有最小 rank 的就好了
- WF 类的构造没有用到选择公理
- On $\subseteq$ WF

Lemma 1.11. *for any ordinal* α

1. $\alpha \in$ WF *and rank*$(\alpha) = \alpha$
2. $V_\alpha \cap \text{On} = \alpha$

证明. 1. $0 \in V_1 \setminus V_0 \subset$ WF, rank$(0) = 0$

If $\alpha \in$ WF and rank$(\alpha) = \alpha$. $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$, $\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$, $\alpha + 1 \in V_{\alpha+2} \subset$ WF. If $\alpha + 1 \in V_{\alpha+1}$, then rank$(\alpha + 1) \leq \alpha$, but $\alpha \in \alpha + 1 \Rightarrow$ rank$(\alpha) = \alpha <$ rank$(\alpha + 1)$. A contradiction

suppose γ is a limit ordinal and for any $\alpha < \gamma$, $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$. $\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha = V_\gamma$. Thus $\gamma \in V_{\gamma+1}$, rank$(\gamma) \leq \gamma$ and rank$(\gamma) \not< \gamma$.

2. suppose $\beta \in V_\alpha \cap$On, then $\beta =$ rank$(\beta) < \alpha$. If $\beta \in \alpha$ and rank$(\beta) < \alpha$, $\beta \in V_\alpha \cap$ On

□

Lemma 1.12. *1. If $x \in \mathrm{WF}$, then $\bigcup x, \mathcal{P}(x), \{x\} \in \mathrm{WF}$, and their rank $<$ rank$(x) + \omega$*

2. If $x, y \in \mathrm{WF}$, then $x \times y, x \cup y, x \cap y, \{x, y\}, (x, y), x^y \in \mathrm{WF}$, and their rank $<$ rank(x) + rank$(y) + \omega$

3. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$

4. for any set x, $x \in \mathrm{WF} \Leftrightarrow x \subset \mathrm{WF}$

证明. 1. suppose $\mathrm{rank}(x) = \alpha$. $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$ and $x \subseteq V_\alpha$.

by transitivity, $\bigcup x \subseteq V_\alpha \Rightarrow \bigcup x \in V_{\alpha+1} \subset \mathrm{WF}$. $\mathrm{rank}(\bigcup x) \leq \alpha$

suppose $y \in \mathcal{P}(x)$, $y \subseteq x \Rightarrow y \subseteq V_\alpha \Rightarrow y \in V_{\alpha+1}$. $\mathcal{P}(x) \subseteq V_{\alpha+1}$, $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$, $\mathrm{rank}(\mathcal{P}(x)) \leq \alpha + 1$.

$\{x\} \in \mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$.

2. Suppose $\mathrm{rank}(x) = \alpha, \mathrm{rank}(y) = \beta$, $x \subset V_\alpha$, $y \subset V_\beta$

$x \cup y \subset V_\alpha \cup V_\beta = V_{\max(\alpha,\beta)}$, $\mathrm{rank}(x \cup y) \leq \max(\alpha, \beta)$

$x \cap y \subset V_{\min(\alpha,\beta)}$

$\{x, y\} \subseteq V_{\alpha+1} \cup V_{\beta+1} = V_{\max(\alpha,\beta)+1}$, $\mathrm{rank}(\{x, y\}) = \max(\alpha, \beta) + 1$

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subset V_{\max(\alpha,\beta)+2}$. $\mathrm{rank}((x, y)) = \max(\alpha, \beta) + 2$

$x \times y = \{(a, b) \mid a \in x, b \in y\}$. $a \in x \Rightarrow \mathrm{rank}(a) < \alpha$, $b \in y \Rightarrow \mathrm{rank}(b) < \beta$, $\mathrm{rank}(a, b) < \max(\alpha, \beta) + 2$, $(a, b) \in V_{\max(\alpha,\beta)+2}$. $x \times y \subseteq V_{\max(\alpha,\beta)+2}$, $\mathrm{rank}(x \times y) \leq \max(\alpha, \beta) + 2$.

$x^y \subseteq \mathcal{P}(x \times y) \subseteq V_{\max(\alpha,\beta)+3}$.

3. $\mathbb{N} = \omega \in V_{\omega+1}$

$\mathbb{Z}$: let $\sim$ be an equivalence relation on $\omega \times \omega$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, then $\mathbb{Z} = (\omega \times \omega)/\sim$. Hence $\mathbb{Z}$ is a partition of $\omega \times \omega$ and hence $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{P}(\omega \times \omega)$. $\mathbb{Z} \in V_{\omega+3}$

$\mathbb{Q}$: let $\sim$ be an equivalence on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+)$, $\mathbb{Q} \in V_{\omega+6}$

$\mathbb{R}$: set of dedekind cut on $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R} \in V_{\omega+8}$

4. $\Rightarrow$: WF is transitive

   $\Leftarrow$: x is a set and $x \subset \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$.

   Claim: there is an ordinal α s.t. $x \subset V_\alpha$

   Otherwise, let $f : \mathrm{On} \to \mathcal{P}(x)$ s.t. $f(\alpha) = x \setminus V_\alpha$. Then for any $y \in \mathcal{P}(x)$, $f^{-1}(y)$ is a set. On $= \bigcup_{y \in x} f^{-1}(y)$ and is thus a set, a contradiction

□

AC => Any set has cardinality

Lemma 1.13. *Assume AC* ($V \models \mathrm{ZFC}$)

1. *for any group G, there is a group G' in* WF *s.t.* $G \cong G'$
2. *for any topological space T, there is a topological space T' in* WF *s.t.* $T \cong T'$ (*homeomorphic*)

证明. 1. suppose $(G, *_G)$ is a group, $G, *_G \in V$. By AC, there is a cardinal α s.t. $|G| = \alpha$, that is, there is a bijection $f : \alpha \to G$. Define $*$: for any $x, y, z \in \alpha$, $x * y = z \Leftrightarrow f(x) *_G f(y) = f(z)$. Then $(\alpha, *) \cong (G, *_G)$, $* \subseteq \alpha \times \alpha$

□

V 中的任何结构都可以在 WF 中找到同构象（同构是在 V 里看到的）

Definition 1.14. 任意集合 A 上的二元关系 $<$ 是 **良基**的，当且仅当对 A 的任意非空子集 X，X 有 $<$ 下的极小元

Theorem 1.15. *If $A \in$ WF, then $\in$ is a well-founded relation on A*

证明. suppose $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$, $X \subseteq$ WF, then elements of X has ranks and $x \in y \Rightarrow \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$. Let x having least rank in X, then x is the $\in$-minimal element in X □

Lemma 1.16. *If A is a transitive set and $\in$ is a well-founded relation on A, then $A \in \mathrm{WF}$*

证明. Just need to prove $A \subset \mathrm{WF}$. If $A \not\subset \mathrm{WF}$, $X = A \setminus \mathrm{WF} \neq \emptyset$. Then X has a $\in$-minimal element x. Then $x \neq \emptyset \in \mathrm{WF}$. For any $y \in x$, $y \in A$. By the minimality of x, $y \in \mathrm{WF}$. Then $x \subset \mathrm{WF}$, $x \in \mathrm{WF}$, a contradiction □

Lemma 1.17. *For any set x, there is a minimal transitive set trcl(x) s.t. $x \subseteq$ trcl(x)*

证明. For any $n \in \omega$ define x_n

$$x_0 = x$$
$$x_{n+1} = \bigcup x_n$$

let $\mathrm{trcl}(x) = \bigcup_{n\in\omega} x_n$.

1. $\mathrm{trcl}(x)$is transitive

   $a \in \mathrm{trcl}(x) \Rightarrow a \in x_n \Rightarrow a \subseteq x_{n+1} \subseteq \mathrm{trcl}(x)$

2. $\mathrm{trcl}(x)$ is minimal

   If $y \supseteq x$ is transitive, recursively prove for any $n < \omega$, $x_n \subseteq y$.

□

$\mathrm{trcl}(x)$ is the **transitive closure** of x.

Lemma 1.18. *We can prove the following without axiom of power set*

1. *if x is transitive, trcl$(x) = x$*
2. *$y \in x \Rightarrow$ trcl$(y) \subseteq$ trcl(x)*
3. *trcl$(x) = x \cup \bigcup\{$trcl$(y) \mid y \in x\}$*

证明. 2. $y \in x \subset \mathrm{trcl}(x)$. $y \in \mathrm{trcl}(x)$. $\mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$.

3. $x \cup \bigcup\{\mathrm{trcl}(y) \mid y \in x\} \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ by (2)

   $\bigcup\{\mathrm{trcl}(y) \mid y \in x\}$ is transitive. For $y \in x$, $y \subseteq \mathrm{trcl}(y)$. Thus rhs is transitive

□

Theorem 1.19 (In ZF^-). *For any set X, TFAE*

1. $X \in \mathrm{WF}$
2. *trcl*$(X) \in \mathrm{WF}$
3. $\in$ *is a well-founded relation on trcl*(X)

证明. $1 \to 2$: WF is closed under union □

Theorem 1.20. *If $V \vDash ZF^-$, TFAE*

1. *axiom of foundation* ($V \vDash$) *axiom of foundation*
2. *for any set X, $\in$ is a well-founded relation on X*
3. $V = \mathrm{WF}$

   $V \vDash \mathrm{ZF} \Rightarrow V = \mathrm{WF}(\mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF})$
   Goal: $V \vDash \mathrm{ZF}^- \Rightarrow \mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF}^-$ 但是 WF 是一个类，我们并没有定义
   我们可以用相对化编码 $\mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF}^-$

1.3 相对化 relativization

工作在 ZF^-

Definition 1.21. M class, φ formula, φ 对 M 的 **相对化** φ^M

1. $(x = y)^M := x = y$
2. $(x \in y)^M := x \in y$
3. $(\varphi \to \psi)^M := \varphi^M \to \psi^M$

4. $(\neg\varphi)^M := \neg\varphi^M$

5. $(\forall x\varphi)^M := (\forall x \in M)\varphi^M$

φ^M 读作"φ 在 M 中为真"，表示为 $(M, \in) \subseteq (V, \in)$ 有 $M \vDash \varphi$，即如果 $V \vDash \varphi^M$，那么 $M \vDash \varphi$，而 V 知道得更多一点

重新定义了满足

若 M 被公式 $M(u)$ 定义，$(\forall x\varphi)^M$ 是公式 $\forall x(M(x) \to \varphi^M(x))$

Example 1.1. $M = \mathrm{On}$，$\mathrm{On} \vDash \forall x\forall y(x \in y \vee y \in x \vee x = y)$

"$M \vDash \varphi$" 可以形式化为 $V \vDash \varphi^M$，而 M 对应于 $M(u)$，即等价于 $T \vdash \varphi^M$，如果我们工作在某个 T 上

若函数 f 被公式 $\varphi(\bar{x}, y)$ 定义，则 $V \vDash \forall\bar{x}\exists! y\varphi(\bar{x}, y)$，但相对化后不一定对，因此 $f^M = \{(\bar{x}, y) \in M : \varphi^M(\bar{x}, y)\}$ 不一定是 M 上的函数

Definition 1.22. for any theory T, any class M, M is a **model** of T, $M \vDash T$, iff for any axiom φ of T, φ^M holds, i.e., $V \vDash \varphi^M$

V 中定义出语义

Theorem 1.23. $V \vDash ZF^- \Rightarrow \mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{Inf}$,

$V \vDash (\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf})^{\mathrm{WF}}$ 等价的 $ZF^- \vdash (\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf})^{\mathrm{WF}}$

- **存在公理**：$\exists x \in M(x = x)$

- **外延公理**：Ext^M

$$\forall x \in M \forall y \in M \forall u \in M((u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y)$$

Lemma 1.24. *If M is transitive, then Ext^M holds*

证明. suppose $X, Y \in M$, if $X \neq Y$, then there is $u \in X \triangle Y$ (by Ext in V), by transitivity, $u \in M$ $\square$

- 分离公理模式：for any M, any formula φ, $S(\varphi)^M$

  $$\forall x \in M \exists Y \in M \forall u \in M (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$$

  Therefore, if for any $X \in M$, $\{u \in X \mid \varphi^M(x)\} \in M$, then 分离公理模式在 M 中为真

  Lemma 1.25. *If M satisfies $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then $S(\varphi)^M$ holds for any M*

  证明. Suppose $X \in M$, suffices to find corresponding $Y \in M$ s.t. $\forall u \in M (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$

  根据 V 中的分离公理, $Y = \{x \in X \mid \varphi^M(u)\} \in V$ and $Y \subseteq X \subset M$, thus $Y \in M$ and $\forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$. But $x \in Y \Rightarrow x \in M$, thus this is equivalent to $\forall u \in M (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$ □

- **axiom of pairing** Pair

  $$\forall x \in M \forall y \in M \exists z \in M \forall u \in M (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

  只要 M 对对集函数 $x, y \mapsto \{x, y\}$ 封闭，则 $Pair^M$ 成立

- 幂集公理 Pow

  $$\forall X \in M \exists Y \in M \forall u \in M (u \in Y \leftrightarrow \forall a \in M (a \in u \to a \in X))$$

  Lemma 1.26. *If M satisfies $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then Pow^M holds*

  证明. for any $X \in M$, $\mathcal{P}(X) \in M$. and we prove $\mathcal{P}(X)$ is the Y, for any $u \in M$ □

- **axiom of infinity** Inf

  $$\exists X \in M (\emptyset \in X \wedge \forall y \in M (y \in X \to y^+ \in X))$$

  $\emptyset : \psi(x) := \forall u (u \in x \to u \neq u)$, $x = \emptyset \Leftrightarrow \psi(x)$

  $y^+ : \varphi(y, z) : \forall u \in z (u = y \vee u \in y) \wedge y \subseteq z \wedge y \in z$ 函数相对化后不一定是函数，所以放到下一节

- **axiom of foundation** Fod

  $\forall x \in M(\exists u \in M(u \in x) \to \exists y \in M(y \in x \land \neg \exists u \in M(u \in x \land u \in y)))$

  Lemma 1.27. *If M is transitive and elements of M is well-founded under $\in$, then Fod^M holds*

  证明. suppose $x_0 \in M$ and there is

  $\psi := \exists u(u \in x)$ and φ is the latter part

  $\psi^M(x_0) \leftrightarrow \exists u(u \in x_0)$ since M is transitive, $\varphi^M(x_0) \leftrightarrow \exists y(y \in x_0 \land \neg \exists u \in M(u \in x \land u \in y))$

  在 V 中,$x_0 \neq \emptyset$，由条件可知 $(x_0, \in)$ 是良基的，于是 φ 在 V 中对，那么当然在 M 中对 □

- **替换公理模式** $Rep(\varphi)$

  $\forall A \in M \forall x \in A \cap M \exists! y \in M \varphi^M(x, y) \to \exists B \in M \forall x \in A \exists y \in B \varphi^M(x, y)$

  $\exists! y \theta(y) : \exists y(\theta(y) \land \forall y'(\theta(y') \to y = y'))$

  Lemma 1.28. *if M satisfied $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then $Rep(\varphi)^M$ holds for any φ*

  证明. for any $A_0 \in M$, then $A_0 \cap M = A_0$, thus we have $\forall x \in A_0 \exists! y(\varphi^M(x, y) \land M(y))$.

  by $Rep(\varphi^M(x, y) \land M(y))$, $\exists B' \forall x \in A_0 \exists y \in B' \varphi^M(x, y) \land M(y)$

  Let $B = B' \cap M$, which is what we want □

  Thus in ZF^-, we can prove $\mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{inf}$

1.4 绝对性

$(V, \in) \supseteq (M, \in)$
对于哪些 φ，有 $V \vDash \varphi \Leftrightarrow M \vDash \varphi$

Definition 1.29. 公式 $\psi(\bar{x})$，对任意类 $M \subseteq N$，如果

$$\forall \bar{x} \in M(\psi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^N(\bar{x}))$$

就称 $\psi(\bar{x})$ 对于 M, N 是 **绝对的**，如果 $N = V$，则称 $\psi(\bar{x})$ 对于 M 是 **绝对的**

$\bar{a} \in M$, $(M, \in) \vDash \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow V \vDash \psi^M(\bar{a})$
ψ 相对于 M, N 绝对：$\forall \bar{a} \in M$, 有 $M \vDash \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \psi(\bar{a})$
if $\forall \varphi(\bar{x}) \in L$，均有 φ 相对于 M, N 绝对的，则 $M \preceq N$

Lemma 1.30. *suppose $M \subseteq N$, φ, ψ formula*

1. 如果 φ, ψ 相对于 M, N 绝对，*so are* $\neg\varphi, \varphi \to \psi$
2. *if φ is q.f., then* φ 对任意 M 绝对
3. *if M are transitive, and* φ 相对于它们绝对，*so is* $\forall x \in y\varphi$

证明. 3. $\forall x \in y\varphi := \forall x(x \in y \to \varphi(x, y, \bar{z}))$，故 $(\forall x \in y\varphi)^M = \forall x \in M(x \in y \to \varphi^M(x, y, \bar{z}))$，任取 $y_0, \bar{z}_0 \in M$, 则由 M 的传递性，都有 $x \in y_0 \Rightarrow x \in M$

目标：$\forall x \in M(x \in y_0 \to \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$ 当且仅当 $\forall x \in N(x \in y_0 \to \varphi^N(x, y_0, \bar{z}_0))$

由 φ 的绝对性，对每个 $x_0 \in M$，有

$$\varphi^M(x_0, y_0, \bar{z}_0) \leftrightarrow \varphi^N(x_0, y_0, \bar{z}_0)$$

故 $V \vDash \forall x \in M(x \in y_0 \to \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$，当且仅当 $V \vDash \forall x(x \in y_0 \to \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$ 当且仅当 $V \vDash \forall x \in N(x \in y_0 \to \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$

□

Lemma 1.31. 令 $M \subseteq N$ 且 M 传递，$\psi(\bar{x})$ 是一个公式，则

1. 如果 ψ 是 Δ_0 公式，则他它对 M, N 是绝对的

2. 如果 ψ 是 Σ_1 公式，则

$$\forall \bar{x} \in M(\psi^M(\bar{x}) \to \psi^N(\bar{x}))$$

3. 如果 ψ 是 Π_1 公式，则

$$\forall \bar{x} \in M^n(\psi^N(\bar{x}) \to \psi^M(\bar{x}))$$

证明. 1. 对公式的长度进行归纳证明

2. 例子：令 $M = \mathrm{On}, N = \mathrm{WF}$，令 $\psi(y) := \forall x \in y \forall u, v \in x(u \in v \lor v \in u \lor u = v)$，则 ψ 是 Δ_0 的，则

$$\psi^M(y) = \forall x \in M(x \in y \to \forall u, v \in M(u, v \in x \to (u \in v \lor v \in u \lor u = v)))$$
$$\psi^N(y) = \forall x \in N(x \in y \to \forall u, v \in N(u, v \in x \to (u \in v \lor v \in u \lor u = v)))$$

任取 $x_0 \in \mathrm{WF} \setminus \mathrm{On}$ 使得 $(x_0, \in)$ 不是线序，令 $y_0 = \{x_0\}$，则 $\psi^M(y_0)$ 的前件假，$\psi^M(y_0)$ 是真的，$\psi^N(y_0)$ 为假，因此

$$\forall \bar{x}(\psi^M(\bar{x}) \to \psi^N(\bar{x}))$$

错误

令 $x = \bar{x}, y = \bar{y}$

设 $\psi := \exists \varphi(x, y)$，$\varphi(x, y) \in \Delta_0, \psi^M := \exists y \in M(\varphi^M(x, y)), \psi^N := \exists y \in N(\varphi^N(x, y))$，任取 $a \in M^m$，目标 $\psi^M(a) \to \psi^N(a)$

若 $\psi^M(a)$ 成立, 则有 $b \in M^n$ 使得 $\psi^M(a, b)$, 由 Δ_0 的绝对性, $\psi^N(a, b)$, 因此 $\exists y \psi^N(a, y)$

3. 设 $\psi := \forall y \varphi(x, y)$ 其中 $\varphi \in \Delta_0$，则 $\psi^M := \forall y \in M \varphi^M(x, y)$，$\psi^N := \forall y \in N \varphi^N(x, y)$，设 $a \in M$ 使得 $\psi^N(a)$ 成立，目标 $\psi^M(a)$ 成立。

$\psi^N(a) \Rightarrow$ 对所有的 $b \in N$ 均有 $\varphi^N(a, b)$ 成立，故对一切 $b \in M$ 有 $\varphi^N(a, b)$ 成立，由 φ 的绝对性，$\forall y \in M \varphi^M(a, y)$

$\square$

Lemma 1.32. 设 $M \subseteq N$，均是句子集 Σ 的模型，而 $\Sigma \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$，则 φ 对 M 与 N 绝对当且仅当 ψ 也是

证明. $M, N \vDash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$

$\forall \bar{x} \in M^n(\varphi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^M(\bar{x}))$，$\forall \bar{x} \in N^n(\varphi^N(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^N(\bar{x}))$

若 φ 是绝对的,$\forall \bar{x} \in M^n(\varphi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^N(\bar{x}))$

因此 $\forall \bar{x} \in M^n(\psi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^N(\bar{x}))$ □

Definition 1.33. 假设 $M \subseteq N$，$f(x_1, \dots, x_n)$ 是函数（类），设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 被公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ 定义，称 f 相对于 M, N 是绝对的，是指

1. $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ 相对于 M, N 绝对

2. $\forall \bar{x} \in M^n \exists! y \in M(\varphi^N(\bar{x}, y))$

由上一引理，f 的绝对性与定义 f 的公式无关

$f^M = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in M^{n+1} \mid \varphi^M(\bar{x}, y)\}$,$f \upharpoonright M = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in M^{n+1} \mid \varphi(\bar{x}, y)\}$

f 是绝对的当且仅当 $\forall \bar{x} M \forall y \in M(\varphi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \varphi^M(\bar{x}, y))$ 当且仅当 $\varphi(M^n, M) = \varphi^M(M^n, M)$，即 $f \upharpoonright M = f^M$

即对任意 $\bar{a} \in M^n$，有 $f \upharpoonright M(\bar{a}) = f^M(\bar{a})$

Theorem 1.34. 以下关系和函数可以在 $ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 中用公式定义，且在 $ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 下等价于一个 Δ_0-*formula*

1. $x \in y$

2. $x = y$

3. $x \subset y$

4. $\{x, y\}$

5. $\{x\}$

6. (x, y)

7. $\emptyset$

8. $x \cup y$

9. $x \cap y$

10. $x - y$

11. $x^+ = x \cup \{x\}$

12. x 传递

13. $\bigcup x$

14. $\bigcap x$，且 $\bigcap \emptyset = \emptyset$

证明. 4. 函数 $z = \{x, y\}$ 被公式 $\forall u \in z(u = x \vee u = y) \wedge (x \in z \wedge y \in z)$

5. $y = \{x\}$ 被公式 $\forall u \in y(u = x) \wedge (x \in y)$

6. 函数 $z = (x, y)$ 被公式 $\forall u \in z(u = x \vee x = \{x, y\}) \wedge x \in z \wedge \exists u \in z(u = \{x, y\})$

7. $\forall y \in x(y \neq y)$

8. 函数 $z = x \cup y$ 被公式 $\forall x \subset z \wedge y \subset z \wedge \forall u \in z(u \in x \vee u \in y)$

9. 函数 $z = x \cap y$ 被公式 $z \subset x \wedge z \subset y \wedge \forall u \in x(u \in y \rightarrow u \in z)$

10. 函数 $z = x - y$ $\forall u \in z(u \in x \wedge u \notin y) \wedge \forall u \in x(u \notin y \rightarrow u \in z)$

11. 函数 $z = x^+$ $\forall u \in z(u \in x \vee u = x) \wedge x \in z \wedge x \subset z$

12. $\forall y \in x(y \subset x)$

13. 函数 $z = \bigcup x$, $\forall u \in z \exists y \in x(u \in y) \wedge \forall u \in x(u \subset z)$

14. 函数 $z = \bigcap x$, $x = \emptyset \rightarrow z = \emptyset \wedge \forall u \in z \forall y \in x(u \in y) \wedge \exists y \in x \forall u \in z(\forall w \in x(u \in w) \rightarrow u \in z)$

□

Lemma 1.35. 如果 M 是一个传递类，f 是一个被 Δ_0 公式定义的函数，如果 f 在 M 上封闭，即 $f(M^n) \subseteq M$, 则 f 相对于 M 绝对

证明. 设 f 被 $\varphi(\bar{x}, y)$ 定义，$\forall \bar{x}, y \in M(\varphi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \varphi^M(\bar{x}, y))$,$\forall \bar{x} \in M \exists! y \in M(\varphi(\bar{x}, y))$ □

Corollary 1.36. 之前的函数均在 $ZF^{-} - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的传递模型 M 中绝对的

$ZF^{-} - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 能够保证函数封闭，传递性保证定义它们的公式的绝对性

Lemma 1.37. 绝对性对复合运算封闭，即假设 $M \subseteq N$, 公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 函数 $f(x_1, \dots, x_n)$, $g_i(y_1, \dots, y_m)$,$1 \leq i \leq n$ 都相对于 M, N 绝对, 则 $\varphi(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ 与 $f(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ 也相对于 M, N 绝对

证明. 不妨设 $m = n = 1$

设 $g(y) = z$ 被 $\theta(y, z)$ 定义，$\varphi(g(y)) := \exists z(\theta(y, z) \wedge \varphi(z))$

$\varphi^M(g(y)) := \exists z \in M(\theta^M(y, z) \wedge \varphi^M(z))$,$\varphi^N(g(y)) := \exists z \in N(\theta^M(y, z) \wedge \varphi^M(z))$

由绝对性 $\forall z \in M \forall y \in M(\theta^M(y, z) \wedge \varphi^M(z) \leftrightarrow \theta^N(y, z) \wedge \varphi^N(z))$

任取 $y_0 \in M$，设 $\exists z \in N(\theta^N(y_0, z) \wedge \varphi^N(z))$，由函数 $g(y) = z$ 的绝对性，$\forall y \in M \exists! z \in M(\theta^N(y, z))$，存在唯一的 $z_0 \in M$ 使得 $\theta^N(y_0, z_0) \wedge \varphi^N(z_0)$ □

Theorem 1.38. 以下关系和函数对任意 $ZF^{-} - \mathrm{Pow}\,\mathrm{Inf}$ 的传递模型 M 都是绝对的

1. z 是有序对
2. $A \times B$
3. R 是关系
4. $\mathrm{dom}(R)$
5. $\mathrm{ran}(R)$
6. f 是函数

7. $f(x)$

8. f 是一一函数

证明. 1. “z 是有序对”：$\exists u, v(z = (u, v))$，但是这不是 Δ_0，因此考虑 $\exists u \in \bigcup z \exists v \in \bigcup z(z = (u, v))$，注意这里不是平常的受囿量词，但是令 $g_1(z) = \bigcup z$, $g_2(z) = \bigcup z$, $g_3(z) = z$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) := \exists u \in x_1 \exists v \in x_2(x_3 = (u, v))$，则 g_1, g_2, g_3, φ 绝对，故 $\varphi(g_1(z), g_2(z), g_3(z))$ 绝对

2. 函数 $z = x \times y$: $\forall u \in z \exists s \in x \exists t \in y(u = (s, t)) \wedge \forall s \in x \forall t \in y \exists u \in z(u = (s, t))$

3. R 是关系 $\Leftrightarrow \forall u \in R(u$是有序对$)$

4. 函数，$D = \text{dom}(R)$: $\forall x \in D \exists z \in R \exists u \in z \exists y \in u(z = (x, y))$ 且 $\forall z \in R \forall u \in z \forall x \in u \forall y \in u(z = (x, y) \to x \in D)$

5. 同理

6. f是关系 $\wedge \forall x \in \text{dom}(f) \exists! y \in \text{ran}(f) \exists u \in f(u = (x, y))$

7. $\varphi(f(x))$ 表示 f 是函数且 $x \in \text{dom}(f)$, 则 “$y = f(x)$” 定义为 $\varphi(f, x) \to \exists u \in f(u = x, y) \vee (\neg\varphi(f, x) \to y \neq \emptyset)$

8. “f 是函数” 且 $\forall s \in \text{dom}(f) \forall t \in \text{dom}(f)(f(s) = f(t) \to s = t)$

$\square$

1.5 基础公理的相对一致性

如果 ZF^- 一致，则 ZF 一致

目标：$V \vDash \text{ZF}^-$，证明 $\text{WF} \vDash \text{ZF}$，等价于 $\text{ZF}^- \vdash (\text{ZF})^{\text{WF}}$

Lemma 1.39. *若传递类 M 是 $ZF^- - \text{Pow} - \text{Inf}$ 的模型，且 $\omega \in M$，则无穷公理在 M 中为真，因此无穷公理在 WF 中为真（$ZF^- \vdash (\text{Inf})^{\text{WF}}$）*

证明. • 由于 $\emptyset$ 与 x^+ 都被 Δ_0 公式定义

• 若 $M \vDash \text{ZF}^- - \text{Pow} - \text{Inf}$，则 x^+ 在 M 中封闭，且 $\emptyset \in M$

- $\emptyset^M = \emptyset$, $(x^+)^M = x^+$
- 无穷公理的相对化为 $\exists x \in M(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y^+ \in x))$
- 即 $\exists x \in M(\emptyset \in M \wedge \forall y \in x(y^+ \in x))$
- 由于 $\omega \in M$，令 $x = \omega$

$\square$

结论：WF $\models$ ZF
目标：$Con(\text{ZF}^-) \vdash Con(ZF)$

Theorem 1.40. 设 T (ZF^-) 是集合论的的理论，Σ (ZF) 是一个句子集，设 M 是一个类且非空，如果 $T \vdash (M \models \Sigma)$，即 $T \vdash \Sigma^M$ 或者"若 $V \models T$，则 $V \models \Sigma^M$"，则

1. 对集合论语言的任何语句 φ，如果 $\Sigma \vdash \varphi$，则 $T \vdash \varphi^M$
2. 如果 T 一致，则以 Σ 为公理的理论也一致

证明. 1. 设 $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ 是 Σ 的一个证明，对 $k \leq n$，归纳证明 $T \vdash \varphi_k^M$

   - 若 $\varphi_i \in \Sigma \cup Ax$,$Ax$ 一阶逻辑的公理，$T \vdash \varphi_i^M$
   - 若 $i, j < k$ 使得 $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_k$，由归纳假设 $T \vdash \varphi_i^M$, $T \vdash \varphi_i^M \to \varphi_k^M$, 因此 $T \vdash \varphi_k^M$

2. 若 Σ 不一致，则存在 φ 使得 $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$，从而 $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)^M$，故 T 不一致

$\square$

Theorem 1.41. 基础公理相对于 ZF^- 一致，即如果 ZF^- 一致，则 ZF 一致

证明. • $\text{ZF}^- \vdash (\text{ZF})^{\text{WF}}$

- 故 ZF^- 一致能推出 ZF 一致

$\square$

选择公理：任何非空集合都可被良序化 $\forall X \exists R$(R是 X 上的良序)

1. $R \subseteq X \times X$

2. R 是线序

3. $\forall Y \subseteq X, Y \neq \emptyset \Rightarrow$Y 存在 R-极小元

Lemma 1.42 (ZF$^-$)**.** *设 M 是 $ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的传递模型，如果 $X, R \in M$ 并且 R 是 X 上的一个良序，则 (R是 X 的良序)^M*

证明. "R 是 X 上的线序"被公式 $\varphi(X, R)$ 表达

- R 是关系
- $\forall x \in X(\neg R(x, x))$
- $\forall x, y, z \in X(R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)$
- $\forall x, y \in X(R(x, y) \vee R(y, x) \vee x = y)$

  $R(x, y)$ 表示 $(x, y) \in R$,$\exists z \in R(z = (x, y))$

因此 $\varphi(X, R)$ 是 Δ_0-公式

令公式 $\psi(X, Y, R)$ 为 $Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \to \exists y \in Y \forall x \in Y(\neg R(x, y))$，则 $\psi(X, Y, R)$ 是 Δ_0-公式,"R 是 X 上的良序"可以表达为 $\theta(X, Y) = \varphi(X, R) \wedge \forall Y \psi(X, Y, R)$

则 θ 是一个 Π_1-公式

$\forall X \in M \forall R \in M(\theta(X, R) \to \theta^M(X, R))$，任取 $X_0, R_0 \in M$ 使得 R_0 是 X_0 上的良序，则 $\theta(X_0, R_0)$，故 $\theta^M(X_0, R_0)$ 也成立，即 □

Theorem 1.43 (ZF$^-$)**.** *V_ω 是 $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg \mathrm{Inf}$ 的模型*

证明. 与 WF 类似，V_ω 是传递的，且关于 $\{x, y\}$,$\bigcup x$,$\mathcal{P}(x)$ 封闭，故而是 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf}$ 的模型（练习）

$\neg$ Inf: $\forall x \neg(\emptyset \in X) \wedge \forall y \in x(y^+ \in x)$

$\neg$ Inf^M: $\forall x \in M(\emptyset^M \in X \wedge \forall y \in x((y^+)^M \in x))$

由于 $M = V_\omega$ 传递，故 $(\neg \mathrm{Inf})^M$: $\forall x \in M(\emptyset \in X \wedge \forall y \in x(y^+ \in x))$

由于 V_ω 中没有无穷集，故 $(\neg \mathrm{Inf})^M$ 在 V 中成立

AC^M: 任取 $X \in V_\omega$, 若 $X \neq \emptyset$，存在 $R \in V_\omega$ 使得 R 是 X 上的良序

rank$(\mathcal{P}(x \times y)) <$ max(rank(x), rank(y))，故 $\mathcal{P}(x \times x) \in V_\omega$ □

Corollary 1.44. $Con(ZF^-) \vdash Con(\text{ZFC} - \text{Inf} + \neg\,\text{Inf})$

1.6 基于良基关系的归纳与递归

Definition 1.45. 类 R（$\varphi(x,y)$）是类 X（$\psi(x)$）上的良基关系当且仅当

$$\forall U \subset X(U \neq \emptyset \to \exists y \in U(\neg \exists z \in U(zRy)))$$

U 是集合

Example 1.2. $\in$ 是 On 上的良基关系

如果 Fnd 成立，则 $\in$ 是 V 上的良基关系

Theorem 1.46 (超穷归纳原理)**.** *设 $\varphi(x)$ 是一个公式，若 $\forall \alpha \in On$ 有 $\forall \beta(\beta < \alpha \to \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)$，则 $\forall \alpha \in \text{On}(\varphi(\alpha))$*

Theorem 1.47 (超穷递归定理)**.** *设 $G : V \to V$ 的函数，则存在唯一的函数 $F : \text{On} \to V$ 使得*

$$F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

Definition 1.48. 类 X 上的关系，类 R 是 **似集合**的当且仅当对任意 $x \in X$，有 $\{y \in X \mid yRx\}$ 是一个集合

类的元素一定是集合，因为类是集合宇宙的一个子区域

一般称 $\{y \in X \mid yRx\}$ 中的元素为 x 的前驱，$\in$ 是任何类 X 上的似集合关系

Definition 1.49. 如果 R 是 X 上的似集合关系，且 $x \in X$，则递归定义

- $\text{pred}^0(X,x,R) = \{y \in X \mid yRx\}$
- $\text{pred}^{n+1}(X,x,R) = \bigcup\{\text{pred}(X,y,R) \mid y \in \text{pred}^n(X,x,R)\}$
- $\text{cl}(X,x,R) = \bigcup_{n\in\omega} \text{pred}^n(X,x,R)$

对每个 n,$\mathrm{pred}^n(X,x,R)$ 是集合

故 $\mathrm{cl}(X,x,R)$ 是集合

若 R 是 $\in$，且 X 是传递的，则 $\mathrm{cl}(X,x,R)=x$

Lemma 1.50. 如果 R 是 X 上的似集合关系，则对任意 $y\in cl(X,x,R)$，都有 $pred(X,y,R)\subseteq cl(X,x,R)$

证明. 设 $y\in\mathrm{cl}(X,x,R)$，则存在 $n\in\omega$ 使得 $y\in\mathrm{pred}^n(X,x,R)$，故 $\mathrm{pred}(X,y,R)\subseteq\mathrm{pred}^{n+1}(X,x,R)$ □

Theorem 1.51. 如果 R 是 X 上的良基关系，且是似集合的，则 X 的每个非空子类 Y 都有 R-极小元

证明. 任取 $x\in Y$，若 x 不是 Y 的 R-极小元，则 $\mathrm{pred}(X,x,R)\cap Y$ 非空，于是 $Y\cap\mathrm{cl}(X,x,R)$ 非空，令 $x_0\in Y\cap\mathrm{cl}(X,x,R)$ 为极小元，则 x_0 是 Y 的极小元，否则 $\mathrm{pred}(X,x_0,R)\cap Y=\emptyset$，任取 $z_0\in\mathrm{pred}(X,x_0,R)\cap Y$，则 $z_0\in Y$, $z_0\in\mathrm{cl}(X,x,R)$，于是 $z_0\in Y\cap\mathrm{cl}(X,x,R)$ 且 z_0Rx_0，与 x_0 的极小性矛盾 □

Remark. 假设基础公理，则 $\in$ 是 V 上的良基关系，若 $V\neq\mathrm{WF}$，则 $V\setminus\mathrm{WF}$ 有极小元 x_0 非空，但是 $\forall y\in x_0(y\in\mathrm{WF})$，于是 $x_0\subset\mathrm{WF}$，矛盾，因此 $V=\mathrm{WF}$

Theorem 1.52. 设 R 是 X 上的似集合的良基关系，如果 $F:X\times V\to V$ 是“函数”，则存在唯一的“函数”$G:X\to V$ 使得 $\forall x\in X(G(x)=F(x,G\restriction pred(X,x,R)))$

练习

证明. 1. 存在性

令公式 $\theta(x,t)$ 表示

- t 是一个函数（集合）
- $\mathrm{dom}(t)=\{x\}\cup\mathrm{pred}(X,x,R)$
- $\forall y\in\mathrm{dom}(t)(t(y)=F(y,t\restriction\mathrm{pred}(X,y,R)))$

- $\forall y \notin \mathrm{dom}(t)(t = \emptyset$

令 $G = \{(x, y) \mid \theta(x, y)\}$，证明 G 是函数:

1. 唯一性

   若不唯一，则存在最小的 $x \in X$ 使得 $G(x) \neq G(x')$. 但是 $G(x) = F(x, G \upharpoonright (X, x, R)) = F(x, G' \upharpoonright (X, x, R)) = G'(x)$

$\square$

Definition 1.53. 如果 R 是 X 上的似集合关系，设 $x \in X$，则定义

$$\mathrm{rank}(x, X, R) = \sup\{\mathrm{rank}(y, X, R) + 1 \mid yRx \wedge y \in X\}$$

(来自超穷递归)

Definition 1.54 (ZF$^-$)**.** 如果类 X 传递, 且 $\in$ 是 X 上的良基关系, 则 $X \subseteq \mathrm{WF}$ 且对任意 $x \in X$ 有 $\mathrm{rank}(x, X, \in) = \mathrm{rank}(x)$

证明. 若 $X \nsubseteq \mathrm{WF}$, 取极小元 $x_0 \in X \setminus \mathrm{WF}$，显然 $x_0 \neq \emptyset$。任取 $z \in x_0$，由传递性，有 $z \in X \cap \mathrm{WF}$，于是 $x_0 \subseteq \mathrm{WF}$，于是 $X \subseteq \mathrm{WF}$

令 $Y = \{x \in X \mid \mathrm{rank}(x, X, \in) \neq \mathrm{rank}(x)\}$，如果 Y 非空，令 x_0 为 Y 的极小元，根据传递性,$x_0 \subseteq X$，且 $\forall z \in x_0$,$\mathrm{rank}(z, X, \in) = \mathrm{rank}(z)$

$\mathrm{rank}(x_0, X, \in) = \sup\{\mathrm{rank}(z, X, \in) + 1 \mid z \in x_0\}$

$\mathrm{rank}(x_0) = \sup\{\mathrm{rank}(z) + 1 \mid z \in x_0\}$ $\square$

Definition 1.55. 令类 R 是 X 上似集合的良基关系, 则 (X, R) 上的 **mostowski 函数** G 定义为

$$G(x) = \{G(y) \mid y \in X \wedge yRx\}$$

G 的值域记作 M，称之为 (X, R) 的 **Mostowski 坍塌**

Lemma 1.56. *设 R 是 X 上的一个似集合的良基关系，G 是其上的 Mostowski 函数，M 为其 Mostowski 坍塌，则*

1. *$\forall x, y \in X(xRy \to G(x) \in G(y))$, $G : (X, R) \to (V, \in)$ 同态*

2. M 是传递集

3. 如果幂集公理成立，则 $M \subseteq \mathrm{WF}$ ($ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$)

4. 如果幂集公理成立，且 $x \in X$，则 $rank(x, X, R) = rank(G(x))$

证明. 3. 断言：$(M, \in)$ 是良基的

任取 $Y \subseteq M$ 非空，则 $G^{-1}(Y) \subseteq X$ 非空，有极小元 x_0，若 $G(x_0)$ 不是 Y 的极小元，则 $G(x_0) \cap Y \neq \emptyset$。令 $z \in G(x_0) \cap Y$，则存在 $y \in G^{-1}(Y)$ 使得 $G(y) = z$ 且 yRx_0，与 x_0 极小矛盾

4. 设 $x \in X$, $\mathrm{rank}(G(x)) = \sup\{\mathrm{rank}(v)+1 \mid v \in G(x)\} = \sup\{\mathrm{rank}(G(y))+1 \mid y \in X \wedge yRx\}$

设 x_0 是使得等式不成立的极小元,则对任意 $y \in X$, $yRx_0 \to \mathrm{rank}(y, X, R) = \mathrm{rank}(G(y))$

$\mathrm{rank}(x, X, R) = \sup\{\mathrm{rank}(y, X, R)+1 \mid yRx \wedge y \in X\} = \sup\{\mathrm{rank}(G(y))+1 \mid yRx \wedge y \in X\} = \mathrm{rank}(G(x))$

□

那么 G 在什么条件下是个同构

Definition 1.57. R 是 X 上的 **外延**的关系当且仅当

$$\forall x, y \in X (\forall z \in X (zRx \leftrightarrow zRy) \to x = y)$$

Lemma 1.58. 如果 X 是传递的，则 $\in$ 在 X 上是外延的

证明. $\mathrm{pred}(X, x, \in) = x$ □

Lemma 1.59. 令 R 是 X 上的似集合良基关系，如果 R 在 X 上是外延的，则 G 是同构

证明. 若 G 不是单射，即 $Y = \{x \in X \mid \exists y \in X (x \neq y \wedge G(x) = G(y))\}$ 非空，则有极小元 x_0，取极小的 $y_0 \in Y$ 使得 $x_0 \neq y_0$ 且 $G(x_0) = G(y_0)$，存在 $z_0 \in X$ 使得 $\neg(z_0Rx_0 \leftrightarrow z_0Ry_0)$

若 z_0Rx_0，$\neg z_0Ry_0$，则 $G(z_0) \in G(x_0), G(z_0) \notin G(y_0)$ □

Theorem 1.60 (莫斯托夫斯基坍塌定理)**.** 令 R 是 X 上的似集合良基关系，并且在 X 上是外延的，则存在传递类 M 和双射 G 满足 $G : X \to M$ 满足：G 是 (X, R) 与 $(M, \in)$ 之间的同构。另外 M 和 G 唯一

1.7 基础公理的绝对性

已知 ZF^- 一致 $\Rightarrow$ ZF 一致
本节工作于 ZF 中

Theorem 1.61. 以下关系和函数可以在 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 中用公式定义，且 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 可以证明这些公式等价于 Δ_0 公式，所以它们对任意 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的传递模型绝对

1. x 是序数
2. x 是极限序数
3. x 是后继序数
4. ω
5. x 是有穷序数
6. $0, 1, 2, \ldots, 20, \ldots$

证明. 1. $\in$ 良基

x 是序数 $\Leftrightarrow$ x 是传递集且 $\in$ 是 x 上的线序

即 $\forall y \in x(y \subset x) \wedge \forall y, z \in x(y \in z \vee y = z \vee z \in y)$

2. 令 $\psi(x)$ 为"x 是序数"且 $\forall y \in x \exists z \in x(y \in z)$

4. 令 $\psi(x)$ 为"x 是极限序数"且 $\emptyset \in x$ 且 $\forall y \in x(y \text{ is limit} \to y = \emptyset)$

5. 令 $\psi(x)$ 为"x 是序数"且 $x \neq \omega$ 且 $\forall y \in x(y \neq \omega)$

6. 归纳证明：$\emptyset$: $\forall y \in x(y \neq y)$ $\psi_0(x)$

假设 n 被 $\psi_n(x)$ 定义，则 $\psi_{n+1}(x) : \exists y \in x(\psi_n(y) \wedge x = y^+)$

$\square$

Remark. 令 $\psi_{limit}(x)$ 定义极限序数,即使 $V \vDash \neg\,\mathrm{Inf}$, $\psi_{limit}(x)$ 相对于 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}+\neg\,\mathrm{Inf}$ 的传递模型 M 仍然是绝对的，此时，$V \vDash \forall x(\psi_{limit}(x) \to x = \emptyset)$

同理定义 ω 的 $\psi_\omega(x)$ 也是绝对的，此时 $V \vDash \neg\exists(\psi_\omega(x))$

若 V 和 M 均满足 Inf，则 $\omega \in M$ 且 $\psi_\omega(\omega) \leftrightarrow \psi_\omega^M(\omega)$

Lemma 1.62. 如果 M 是 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的传递模型，则 M 的所有有穷子集都是 M 的元素

证明. 令 σ_n 为

$$\forall x \subset M(|x| = n \to x \in M)$$

V 看到的

1. σ_0,$V \vDash (\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow})^M$，由于 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow} \vdash \exists x(x = \emptyset)$，故 $V \vDash \exists x \in M(x = \emptyset^M)$，而空集是一个绝对概念，因此 $V \vDash \exists x \in M(x = \emptyset)$

2. 假设 σ_n 成立，任取 $x \subset M$ s.t. $|x| = n+1$, 任取 $y \in x$，则 $y \in M$，

□

Theorem 1.63. 以下概念对 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的

1. x 是有穷的

2. X^n

3. $X^{<\omega}$ 即 X 上所有有穷序列的集合

证明. 1. 令 $\psi(x, f)$ 表示“f 是函数”且 $\mathrm{dom}(f) = x$ 且 $\mathrm{ran}(f) \in \omega$ 且 “f 是一一的”

显然 $\psi(x, f)$ 是绝对的，x 有穷 $\Leftrightarrow \exists f \psi(x, f)$

目标：$\forall x \in M(x \text{ finite} \leftrightarrow (x \text{ finite})^M)$，即 $\forall x \in M(\exists f \psi(x, f) \leftrightarrow \exists f \in M \psi(x, f))$

任取 $x_0 \in M$，若存在 $f_0 \in M$ 使得 $\psi^M(x_0, f_0)$ 成立，则 $\psi(x_0, f_0)$ 成立，

若存在 f 使得 $\psi(x_0,f)$ 成立，下面证明 $f_0\in M$。存在 $n\in\omega$ 使得 $f_0: x\to n$ 是一一的函数，$f_0\subseteq x_0\times n$ 是有穷集

n 与 x_0 均属于 M, 故 $x_0\times n\in M$，故 $x_0\times n\subset M$, 故 $f_0\subseteq M$ 是有穷子集，

2. X^n 是 n 到 X 的所有函数的集合

   令 $f: n\to X$ 表示"f 是函数"且 $\mathrm{dom}(f)=n$ 且 $\mathrm{ran}(f)\subseteq X$

   f 是绝对的，于是 $\forall f,n,X\in M((f: n\to X)\leftrightarrow(f: n\to X)^M)$

   定义函数

$$F(X,n)=\begin{cases}0 & n\notin\omega\\ \{f\mid f: n\to X\} & n\in\omega\end{cases}$$

   $Z=F(X,n)$ 被公式 $\psi(X,n,Z)$ 表示：$(n\notin\omega\to Z=0)\wedge(n\in\omega\to Z=\{f\mid f: n\to X\})$

   下面证明 ψ 的绝对性，只需证明 $\forall n\in\omega$ 以及 $X_0,Z_0\in M$，

$$\forall y\in Z_0(y: n\to X_0)\wedge\forall f((f: n\to X_0)\to f\in Z_0)$$

   有绝对性，唯一的障碍是 $\forall f$，但是因为当 $n,X_0\in M$ 且 $f: n\to X_0$，则 f 是 M 的有穷子集

   故 $\psi(X,n,Z)$ 是绝对的

   下面验证, $X^n\subseteq\mathcal{P}(n\times X)\in M$，于是 F 有绝对性

$$V\vDash\forall X\in M\forall n\in M\exists! Z\in M\psi(X,n,Z)$$

   任取 $X\in M$, 若 $n\notin\omega$, 则 $F(X,n)=\emptyset\in M$, 若 $n\in\omega$, 定义 $\theta_n(x,y)$ 为

$$\exists a_0\dots a_{n-1}(x=(a_0,\dots,a_{n-1})\wedge y=\{(0,a_0),\dots,(n-1,a_{n-1})\})$$

   令 $[X^n]$ 表示 n 次笛卡儿积，显然 $[X^n]\in M$

   $\forall x\in[X^n]\exists! y\in M\theta_n^M(x,y)$

由于 M 满足替换公理，故存在 $z \in M, X^n \subseteq z$

根据分离公理

$$V \models \exists u \in M \forall f \in M(f \in u \leftrightarrow f \in z \wedge (f : n \to x))$$

故 $u = X^n \in M$

3. 先证明封闭，再证明绝对

   首先证明函数 $Z = X^{<\omega}$ 是绝对的

   令 $F(X, n) = X^n$，则 $Z = \bigcup\{F(X,0), F(X,1), \dots\} = \bigcup \mathrm{ran}(F(X,-)) \restriction \omega$

   由于 $\omega \in M$，于是 $\mathrm{ran}(F(X,-) \restriction \omega) \in M$，由并集公理，$\bigcup \mathrm{ran}(F(X,-) \restriction \omega) \in M$

   即 $X \in M \Rightarrow X^{<\omega} \in M$

   $Z = X^{<\omega}$ 被公式 $\varphi(x, z)$ 定义：$\forall f (f \in z \leftrightarrow \exists n (n \text{ fintie ordinal} \wedge f \in X^n))$

   验证：$\forall x \in M \forall z \in M(\varphi(x, z) \leftrightarrow \varphi^M(x, z))$

   V 看到所有有穷序数都在 M 中

   于是 φ 绝对，$\forall x \in M \exists! z \in M \varphi(x, z)$

□

Theorem 1.64. 以下概念对 ZF $-$ Pow 的任何传递模型都是绝对的

1. R 是 X 上的良序（集合）
2. $\mathrm{type}(x, R)$

证明. 1. 已证明：$\forall R \in M \forall x \in M(R$是 X 的良序 $\to (R$ 是 X 的良序$)^M)$ (1.42)

   另一方面，ZF $-$ Pow $\vdash \forall R \forall X[R$是 X 的良序 $\to \exists \alpha \exists f(\alpha \text{ ordinal} \wedge f : (\alpha, \in) \cong (X, R)]$

后面的部分是绝对的

同时这个也有 M 的相对化 $(\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow})^M \vdash \forall R \in M \forall X \in M[(R\text{是 } X \text{ 的良序})^M \to \exists \alpha \in M \exists f \in M(\alpha \text{ ordinal} \wedge f:(\alpha,\in) \cong (X,R)]$

若 $R_0, X_0 \in M$ 且 $(R_0\text{是 } X_0 \text{ 的良序})^M$，则存在 $\alpha \in M$, $f \in M$,$f:(\alpha,\in) \cong (X_0,R_0)$，因此 $V \vDash R_0\text{是 } X_0$ 的良序

2. 令 $W(X,R)$ 表示 R 是 X 的良序，令 $\chi(X,R,Z)$ 表示 Z 是序数且 $W(X,R)$ 且 $\exists f:(Z,\in) \cong (X,R)$

   则 $Z = \text{type}(X,R) \Leftrightarrow \chi(X,R,Z)$，而 χ 是绝对（这里的问题是 $\exists f$，要证明 f 一定在 M 中，参考良序绝对性的证明，$f \subset Z \times X \in M$）的且 $\forall X, R \in M \exists! Z \in M \chi(X,R,Z)$ (练习)

□

Theorem 1.65. 以下概念对 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的

1. $\alpha + 1$

2. $\alpha - 1$

3. $\alpha + \beta$

4. $\alpha \cdot \beta$

证明. 2. $x = \alpha - 1$ 被

$$\alpha \neq 0 \wedge ((\alpha\text{后继} \wedge \alpha = x+1) \vee (\alpha\text{极限} \wedge \alpha = x))$$

3. 没有递归定义的绝对性

   $\alpha + \beta$ 的定义为 $\text{type}(\alpha \oplus \beta)$

   由于 $\text{type}(-,-)$ 是绝对的，只需证明 $\alpha \oplus \beta$ 是绝对的

   令 $F(\alpha,\beta) = W$，其中 $W = \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$，再令 $G(\alpha,\beta) = R$，其中 $R \subseteq W^2$ 且满足 $\forall x \in \alpha \times \{0\} \forall y \in \beta \times \{1\}(xRy)$ 且 $\forall x, y \in \alpha((x,0)R(y,0) \leftrightarrow x \in y)$ 且 $\forall x, y \in \beta((x,1)R(y,1) \leftrightarrow x \in y)$

显然 R 是 W 的良序集

F 是绝对的

令 $\psi(\alpha,\beta,R)$ 为

$$
\begin{aligned}
&\forall x\in R[\exists a\in\alpha\exists b\in\alpha(a\in b\wedge x=((a,0),(b,0)))\\
&\qquad\vee\exists a\in\beta\exists b\in\beta(a\in b\wedge x=((a,1),(b,1)))\\
&\qquad\vee\exists a\in\alpha\exists b\in\beta(x=((a,0),(b,1)))]\\
&\wedge\forall a,b\in\alpha\exists x\in R(x=((a,0),(b,0)))\\
&\wedge\forall a,b\in\beta\exists x\in R(x=((a,1),(b,1)))\\
&\wedge\forall a\in\alpha\forall b\in\beta\exists x\in R(x=((a,0),(b,1)))
\end{aligned}
$$

用 $\theta(\alpha,\beta,x)$ 表示方括号，则 $V\vDash\forall z(z\in R\leftrightarrow\theta(\alpha,\beta,z))$

于是 $G(\alpha,\beta)=R\Leftrightarrow\psi(\alpha,\beta,R)$

ψ,θ 是绝对的

若 $\alpha,\beta\in M$，则 $\{x\mid\theta(\alpha,\beta,x)\}=\{x\in M\mid\theta(\alpha,\beta,x)\}=\{x\in M\mid\theta^M(\alpha,\beta,x)\}\subseteq M$, $R=\{x\in W^2\mid\theta^M(\alpha,\beta,x)\}$，由分离公理，$R\in M$

故 $G(\alpha,\beta)=R$ 是绝对的，

$\alpha+\beta=\text{type}(F(\alpha,\beta),G(\alpha,\beta))$ 是绝对的

4. 同理：$\alpha\cdot\beta=\text{type}(\alpha\otimes\beta)$ 是绝对的

   令 $F(\alpha,\beta)=W$，其中 $W=\alpha\times\beta$，再令 $G(\alpha,\beta)=R$，其中 $R\subseteq W^2$ 满足 $\forall x,y\in\alpha\forall u,v\in\beta((x,u)R(y,v)\leftrightarrow(x<y\vee(x=y\wedge u<v)))$，于是 R 是 W 的良序集，F 是绝对的，同理令 $V\vDash\forall z(z\in R)\leftrightarrow\theta(\alpha,\beta,z)$，$G(\alpha,\beta)=R\Leftrightarrow\psi(\alpha,\beta,R)$，$\psi,\theta$ 绝对。

   若 $\alpha,\beta\in M$，由分离公理，$R\in M$，因此 $G(\alpha,\beta)=R$ 是绝对的，故

   $\alpha\cdot\beta=\text{type}(F(\alpha,\beta),G(\alpha,\beta))$ 是绝对的

□

设 X 是一个类，被公式 $X(x)$ 定义，称 X 绝对是指 $\forall x\in M(X(x)\leftrightarrow X^M(x))$

令 X^M 表示 $\{x \in M \mid X^M(x)\}$，X 对于 M 绝对 $\Leftrightarrow X^M = X \cap M$

若 M 是 $ZF - \mathrm{Pow}$ 的传递模型，则 $\mathrm{On}^M = M \cap \mathrm{On}$

作为函数的类，$G : X \to Y$ 其中 X, Y 是类，是一个公式 $G(x, y)$ 满足函数的条件

称 G 相对于类 M 是绝对的是指

1. $\forall x \in X^M \exists! y \in Y^M G^M(x, y)$，即 $G^M : X^M \to Y^M$
2. $\forall x \in M \forall y \in M (G^M(x, y) \leftrightarrow G(x, y))$

Theorem 1.66. 设 R 是 X 的似集合的良基关系，$F : X \times V \to V$，令 $G : X \to V$ 如递归定理所定义的：

$$\forall x \in X(G(x) = F(x, G \restriction \mathit{pred}(X, x, R)))$$

令 M 是 $ZF - \mathrm{Pow}$ 的传递模型，且假设

1. F 相对于 M 绝对的
2. X, R 相对于 M 是绝对的
3. $(R$在 X 上是似集合的$)^M$
4. $\forall x \in M(\mathit{pred}(X, x, R) \subseteq M)$

则 G 对 M 是绝对的

证明. 阅读书中证明

$V \vDash (X^M = X \cap M)$

$V \vDash (R^M = R \cap (M \times M))$

$V \vDash R^M = (X^M)^2 \cap R$

$V \vDash (X^M, R^M)$ 是良基的

R 在 X 上是似集合的，$\forall x \in X \exists z \forall y \in X(y \in z \leftrightarrow yRx)$，它的相对化就是 $\forall x \in X^M \exists z \in M \forall y \in X^M(y \in z \leftrightarrow yR^M x)$，取 $M \cap z$ 就行了

故 (X^M, R^M) 是似集合的且 $\forall x \in M(\mathrm{pred}(X^M, x, R^M) \in M)$

由 X 与 R 的绝对性，$\mathrm{pred}(X^M, x, R^M) = \mathrm{pred}(X, x, R) \cap M$

由于 $\forall x \in M(\text{pred}(X,x,R)) \subseteq M$，故 $\forall x \in M(\text{pred}(X^M,x,R^M) = \text{pred}(X,x,R))$

断言 1： 函数 $y = \text{pred}(X,x,R)$ 是绝对的

$y = \text{pred}(X,x,R)$ 被公式 $\psi(x,y)$ 表示：

$$\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in X \wedge zRx)$$

则 $\psi^M(x,y)$ 为

$$\forall z \in M(z \in y \leftrightarrow z \in X^M \wedge zR^Mx)$$

若 $x_0, y_n \in M$，有 $z \in y_0 \to z \in M, zRx_0 \to z \in M$

故 ψ 绝对，由以上分析，若 $x \in M$，则 $\text{pred}(X,x,R) \in M$。故 $y = \text{pred}(X,x,R)$ 是作为函数是绝对的

对任意的 $x \in M$，有 $(\text{pred}(X,x,R))^M = \text{pred}(X,x,R) = \text{pred}(X^m,x,R^M)$

先在 (X^M,R^M) 是似集合的的良基关系，由绝对性，$F^M : X^M \times M \to M$，这些都是 V 看到的，那么由递归定理，存在函数 $g : X^M \to V$ 满足

$$\forall x \in X^M(g(x) = F^M(x, g \restriction \text{pred}(X^M,x,R^M)))$$

目标：证明 $g = G^M$（书本）

问题：递归定理中的 “G” 只刻画了 G 的性质并非定义（元语言）

回忆：$G(x)$ 的定义令公式 $\theta(x,t)$ 表示

- t 是一个函数（集合）
- $x \in X$
- $\text{dom}(t) = \{x\} \cup \text{pred}(X,x,R)$
- $\forall y \in \text{dom}(t)(t(y) = F(y, t \restriction \text{pred}(X,y,R)))$
- $\forall y \notin \text{dom}(t)(t = \emptyset)$

则 $G(x) = y \Leftrightarrow \exists t(\theta(x,t) \wedge y = t(x))$

下面证明 $\exists t(\theta(x,t) \wedge y = t(x))$ 的绝对性

断言 2： $\theta(x,t)$ 是绝对的

只需证明 $t\restriction \mathrm{pred}(X,y,R)$ 是绝对的，即若 $x_0\in X^M, y_0\in \mathrm{pred}(X,x_0,R)$，$t_0\in M$，则 $t_0\restriction \mathrm{pred}(X,y_0,R)=(t_0\restriction \mathrm{pred}(X,y_0,R))^M$

函数 $s=t\restriction \mathrm{pred}(X,y,R)$ 被公式

$$\eta(y,t,s):=\forall x\in s\exists u\exists v(uRy\wedge v=t(u)\wedge x=(u,v))\wedge\forall u\forall v(uRy\wedge v=t(u)\to(u,v)\in s)$$

验证：η 是绝对的（练习），但是 uRy，因此 $u\in M$,

故 $\theta(x,t)$ 是绝对的

断言 3： $\theta(x,t)$ 定义了一个类函数，即 $V\vDash\forall x\in X\exists!t\theta(x,t)$ 练习（对 $x\in X$ 归纳证明）

下面证明 θ 作为函数是绝对的 **断言 4**：若 $x\in M$，则 $\forall t(\theta(x,t)\to t\in M)$

否则，存在一个极小的 $x_0\in M$,t_0 使得 $\theta(x_0,t_0)$ 且 $t_0\notin M$

若 $\mathrm{pred}(X,x_0,R)=\emptyset$，则由 θ 的定义，$t_0=\{(x_0,F(x_0,\emptyset))\}\in M$，矛盾

若 $\mathrm{pred}(X,x_0,R)\neq\emptyset$，令 $t^*=\{y\mid\exists x\in\mathrm{pred}(X,x_0,R)\wedge\theta(x,y)\}$，由极小性，$t^*\subseteq M$

$t^*=\mathrm{ran}(\theta\restriction\mathrm{pred}(X,x_0,R))$

由归纳假设，$\forall x\in\mathrm{pred}(X,x_0,R)\exists!y\in M(\theta(x,y))$

于是 $\forall x\in\mathrm{pred}(X,x_0,R)\exists!y\in M(\theta^M(x,y))$

因此 $t^*=\mathrm{ran}(\theta^M\restriction\mathrm{pred}(X,x_0,R))$

由替换公理，$t^*\in M$，由绝对性

$$t_0=(\bigcup t^*)\cup\{(x_0,F^M(x_0,\bigcup t^*))\}\in M$$

矛盾

故 $\forall x\in M\exists!t\in M\theta(x,t)$，即 $\theta(x,t)$ 作为函数绝对

记 $\phi(x,y):=\exists t(\theta(x,t)\wedge y=t(x))$，则

$$\phi^M(x,y)=\exists t\in M(\theta(x,t)\wedge y=t(x))$$

但是 $\forall x\in M\forall y\in M$

$$(\exists t(\theta(x,t)\wedge y=t(x)))\leftrightarrow\exists t\in M(\theta(x,t)\wedge y=t(x))$$

下面证明 $G(x)$ 作为函数绝对，即 $G(x)$ 封闭

回亿：$g : X^M \to M$ 满足

$$\forall x \in X^M(g(x) = F^M(x, g \upharpoonright \mathrm{pred}(X^M, x, R^M)))$$

断言 5： $\forall x \in X^M(G(x) = g(x))$

否则，存在“极小”的 $x_0 \in X^M = X \cap M$ 使得 $G(x_0) \neq g(x_0)$

显然 $\mathrm{pred}(X, x_0, R) = \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M) \neq \emptyset$，否则 $g(x_0) = F^M(\emptyset, g \upharpoonright \emptyset) = F^M(\emptyset, \emptyset) = F(\emptyset, g \upharpoonright \emptyset) = G(x_0)$

假设 $\mathrm{pred}(X, x_0, R) = \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M) \neq \emptyset$，由 x_0 的极小性，有 $\forall x \in \mathrm{pred}(X, x_0, R) \cap \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M)$ 时，有 $G(x) = g(x)$

因此 $G \upharpoonright \mathrm{pred}(X, x_0, R) = g \upharpoonright \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M)$

$g(x_0) = F^M(x_0, g \upharpoonright \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M)) = G(x_0)$，矛盾 □

Theorem 1.67. 一下概念对 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$ 的传递模型都是绝对的

1. α^β (序数)
2. *rank*(x)
3. *trcl*(x)

证明. 1. 若 $\alpha = 0$，则 $\alpha^\beta = 0$

它是递归定义的，因此是绝对的

规定 $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ 上的关系 R 为

$$R = \{((\alpha, \beta_1), (\alpha, \beta_2)) \mid \beta_1 \in \beta_2\} \subseteq \mathrm{On}^2$$

显然 R 是良基关系，R 是似集合的，$\mathrm{pred}(\mathrm{On}^2, (\alpha, \beta), R) = \{\alpha\} \times \beta$

定义 $F : \mathrm{On}^2 \times V \to V$ 为

$$F(\alpha, \beta, x) = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \vee x \notin \mathrm{On}^3 \\ 1 & \beta = 0 \wedge \alpha \neq 0 \\ \left(\bigcup_{y \in x} \pi_3(y)\right) \cdot \alpha & \text{otherwise}, x \in \mathrm{On}^3 \end{cases}$$

有 M 的传递性，$x = (x_1, x_2, x_3) \in M \Rightarrow x_1, x_2, x_3 \in M$

由 (x_1, x_2, x_3) 的绝对性，$y = \pi_3(x)$ 是绝对的，因为 $y = \pi_3(x)$ 为

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x = (x_1, x_2, x_3) \wedge y = x_3)$$

验证 $G(\alpha, \beta) = \alpha^\beta$ 是基于 F 递归定义的，因此 G 是绝对的

2. $\text{rank}(x)$，即 $\text{rank}(V, x, \in)$

   $\text{rank}(x) = \sup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$，找 F，并证明绝对性，练习

3. $\text{trcl}(x) = x \cup \bigcup\{\text{trcl}(y) \mid y \in x\}$ 练习

$\square$

Remark. $\alpha + \beta$ 也是递归定义的

Remark.

- $\text{rank}(x)$ 的定义用到 V_α
- 当 $M \nvDash \text{Pow}$，V_α^M 没有意义
- $\text{rank}(x)$ 仍可递归定义为 $\sup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$
- 当 $M \vDash \text{Pow}$，则两种定义等价

定义公式 $\varphi(x, y)$ 为

$$\forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

当 $V \vDash \text{Pow}$，则 $V \vDash \forall x \exists ! y \varphi(x, y)$，即 $\varphi(x, y)$ 定义了一个函数，记作 $\mathcal{P}(x) = y$

若 $M \vDash \text{Pow}$，则

$$V \vDash \forall x \in M \exists ! y \in M \varphi^M(x, y)$$

当 M 传递时，$\subseteq^M \Leftrightarrow \subseteq$，若 $M \vDash \text{Pow}$，则

$$V \vDash (\varphi^M \text{定义了 } M \text{ 到 } M \text{ 的函数})$$

记该函数为 $\mathcal{P}^M(x)$，即 $\mathcal{P}^M(x) = \{z \in M \mid z \subseteq^M x\}$ 当 M 传递时，$\mathcal{P}^M(x) = \{z \in M \mid z \subseteq x\} = \mathcal{P}(x) \cap M$

同理 $V_\alpha^M = \{x \in M \mid (\text{rank}(x) < \alpha)^M\}$

Lemma 1.68. 若 M 是 ZF 的传递模型，则

1. 若 $x \in M$，则 $\mathcal{P}^M(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$

   只需 Pow 加传递

2. 如果 $\alpha \in M$，则 $V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$

   只需 ZF − Pow，若有 Pow，则 V_α^M 是由 $\mathcal{P}^M$ 得到的

Remark. $\mathcal{P}$ 与 V_α 作为函数不是绝对的

固定 $x \in M$，则 $\mathcal{P}(x)$ 可以是带参数 x 的公式

$$\mathcal{P}(x)(y) : \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x)$$

此时谓词 $\mathcal{P}(x)$ 是绝对的，$(\mathcal{P}(x))^M = \mathcal{P}(x) \cap M$

固定 $\alpha \in M \cap \mathrm{On}$，则 V_α 可以看成带参数 α 的谓词，此时 $(V_\alpha)^M = V_\alpha \cap M$ 是绝对的

1.8 不可达基数与 ZFC 的模型

一般来讲，V_α 不是 ZF 的模型，比如 $\mathrm{ZF}^- \vdash (V_\omega \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf})$

令 Z 表示 ZF − 替换公理模式（Rep）

ZC 表示 ZFC −Rep

Theorem 1.69. 如果 $\gamma > \omega$ 是无穷极限序数，则 $\mathrm{ZF} \vdash (V_\gamma \vDash Z)$，$\mathrm{ZFC} \vdash (V_\gamma \vDash ZC)$

证明. 假设 $V \vDash \mathrm{ZF}$

- 存在公理:
- 外延公理：$\forall x \in V_\gamma \forall y \in V_\gamma \forall u \in V_\gamma((u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y)$，$V_\gamma$ 传递
- 分离公理模式：假设 $x \in V_\gamma$，则存在 $\beta < \gamma$ 使得 $x \in V_\beta$，故 $x \subseteq V_\beta$，$\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1} \subseteq V_\gamma$，则若 $x \in V_\gamma$，则 X 的子集均属于 V_γ

分离公理

$$\forall x \in V_\gamma \exists Y \in V_\gamma \forall u \in V_\gamma (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$$

在 V 里面可以看到这些是 X 的子集，且能看到 X 的所有子集在 V_γ 里

- 对集公理，$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$

  设 $x, y \in V_\gamma \subseteq \mathrm{WF} = V$，有 $\mathrm{rank}(\{x, y\}) < \max\{\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y)\} + \omega$，故 $\{x, y\} \in V_\gamma$

- 并集公理，类似

- 幂集公理，类似

- 无穷公理

  对于 $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Rep}$ 的传递模型，$\emptyset$ 与后继运算是绝对的

  $\omega \in V_\gamma$，故无穷公理的相对化成立

- 基础公理

  $\forall x \in V_\gamma ((x \neq \emptyset)^{V_\gamma} \to \exists y \in V_\gamma (y \in x \wedge (y \cap x = \emptyset)^{V_\gamma}))$

  对于 $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Rep}$ 的传递模型，$\emptyset$ 与 $\cap$ 是绝对的

  而 $V_\gamma \subseteq \mathrm{WF} = V$，故 Fnd 成立

若 $V \vDash \mathrm{ZFC}$，设 $X \in V_\gamma$，则 $V \vDash \exists R(R$是 X 的良序)。$R \subseteq X \times X \Rightarrow R \in V_\gamma$，对于 $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf} - \mathrm{Rep}$ 的传递模型 V_γ 有

$$V \vDash (R\text{是 } X \text{ 的良序})^{V_\gamma}$$

□

Exercise 1.8.1. 证明 $V_{\omega+\omega}$ 不满足 Rep

证明. $f : n \to \omega + n$ □

Proposition 1.70. 工作在 ZFC

- ZF 不能证明“V_ω 存在”
- ZF 不能证明“对任意 x，$trcl(x)$ 存在”

证明. 构造模型否定这两个命题

令 $V \models$ ZFC，令 $X_0 = \omega$, $X_{\alpha+1} = \mathcal{P}(X_\alpha)$, $X_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta$（$\gamma$ 极限序数）

显然 $\overline{X} = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{On}} X_\alpha = \mathrm{WF} = V$ （练习）

$X_0 \subseteq V_\omega$, $X_0 \in V_{\omega+1}$, $X_\alpha \subseteq V_{\omega+\alpha}$, $\overline{X} \subseteq \mathrm{WF}$

$V_0 \subseteq X_0$, $V_\alpha \subseteq X_\alpha$, $\mathrm{WF} \subseteq \overline{X}$

容易验证以下事实：X_α 传递（归纳），设 $f(x,y)$ 表示 $\{x,y\}$,$(x-y)$,$x\times y$,$\bigcup x$,$\cap x$,$\mathcal{P}(x)$,...

若 $x\in X_\alpha$,$y\in X_\beta$，则 $f(x,y)\in X_{\max\{\alpha,\beta\}+\omega}$

类似可证 X_ω 是 $\mathrm{ZC}-\mathrm{Inf}$ 的传递模型

由于 $\omega\in X_\omega$，故 $X_\omega \models \mathrm{Inf}$，即 $X_\omega\models \mathrm{ZC}$

显然 $V_\omega \nsubseteq \omega = X_0$，于是存在 $V_n \nsubseteq X_0$，故 $\mathcal{P}(V_n)\nsubseteq \mathcal{P}(X_0)$，即 $\forall k<\omega$，$V_{n+k}\nsubseteq X_k$，故 $\forall n<\omega$，都有 $V_\omega \nsubseteq X_n$，故 $V_\omega\notin X_\omega$

但要严格地说的话得找到一个东西定义 V_ω 然后证明它的相对化在 X_ω 不满足

另一方面，$V_0\subseteq X_0 \Rightarrow V_n\subseteq X_n$，于是 $V_\omega\subseteq X_\omega$

令 $G:\omega\to \mathrm{WF}$ 为 $G(n)=V_n$

验证 G 相对于 X_ω 是绝对的，G 的任何一个片段都是有穷的，因此片段的值域都在 X_ω 中，因为 X_ω 对于任何有穷集合封闭

注：当 $M\models \mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$，我们知道递归函数 G 的绝对性，此时 $X_\omega \not\models \mathrm{Rep}$，然而 X_ω 的任何有穷子集都属于 X_ω，故而对任何 $f:\omega\to X_\omega$，有 $f(\{0,\dots,n\})\in X_\omega$，可以证明 G 的绝对性（练习）

V_ω 被公式 $\eta(x):\exists n\in\omega(x\in G(n))$

(V_ω 被“$\alpha\in V_\omega$”定义，但是 X_ω 不一定认为 V_ω 是集合，必需用 X_ω 认可的方式定义)

V_ω 存在指的是

$$\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow \eta(x))$$

由于 G 是绝对的，$\eta(x)$ 绝对，因此 X_ω 认为“V_ω 存在”当且仅当 $\exists y\in X_\omega \forall x\in X_\omega(x\in y\leftrightarrow\eta(x))$

由于 $V_\omega \subseteq X_\omega$ 且 X_ω 是传递的，以上的公式等价于

$$\exists y \in X_\omega \forall x(x \in y \leftrightarrow \eta(x))$$

而这样的 y 只能是 V_ω，而 $V_\omega \notin X_\omega$，因此以上句子不成立

即 ZFC $\vdash$ "$X_\omega \models$ ZC $+ V_\omega$不存在"

证明“x 存在且 trcl(x) 不存在”,假设 $V \models$ ZFC,令 $t(u) = \{u\}$, $x_n = t^n(n)$, rank$(x_n) = 2n$，$x = \{x_n \mid n < \omega\}$，令 $X_0 = x$,$X_1 = \bigcup X_0$,...,$X_{n+1} = \bigcup X_n$，则 trcl$(x) = \bigcup_{n<\omega} X_n$

令 $Y_0 = \omega \cup X_0$，$Y_{n+1} = \mathcal{P}(Y_n) \cup Y_n \cup X_n$，验证 $Y_\omega = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ 是传递的，验证 $Y_\omega \models$ ZC，验证 $x \in Y_1 \subseteq Y$，验证 trcl$(x) = \bigcup_{n<\omega} X_n \notin Y$，即验证 $\forall n \exists m(X_m \not\subseteq Y_n)$

后面类似，证明 $Y_\omega \models$ " trcl(x)不存在" □

Theorem 1.71. 如果 κ 是不可达基数，则在 ZF^- 中可以证明 $V_\kappa \models$ ZF，在 ZFC^- 中可以证明 $V_\kappa \models$ ZFC

证明. 已知 ZF$^- \models (V_\kappa \models Z)$,ZFC$^- \models (V_\kappa \models$ ZC)，下面验证替换公理模式

$$\forall A(\forall x \in A \exists! y \psi(x,y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x,y))$$

相对化

$$\forall A \in M(\forall x \in A \exists! y \in M \psi^M(x,y) \to \exists B \in M \forall x \in A \exists y \in B \psi(x,y))$$

假设 $A \in V_\kappa$ 且 $\forall x \in A \exists! y \in V_\kappa \psi^M(x,y)$

由于 κ 是极限序数，故 $A \in V_\kappa \Rightarrow \exists \alpha < \kappa(A \in V_\alpha)$，因此 $A \subseteq V_\alpha$，而 $V \models (\psi^M : A \to V_\kappa)$，于是 $V \models |A| \leq |V_\alpha| < \kappa$, $V \models |f(A)| < \kappa$,$V \models f(A) \subseteq V_\kappa$，由 κ 的正则性，所以存在 $\beta < \kappa$，$f(A) \subseteq V_\beta$，于是 $f(A) \in V_{\beta+1} \subseteq V_\kappa$，即 $B = f(A)$ 即可 □

注：V_κ 的基数小于 κ 的子集都是 V_κ 的元素

若 M 的有穷子集都是 M 的元素，则 $M \models$ 有穷 Rep

Corollary 1.72. ZFC 中不能证明“存在不可达基数”

证明. 若 ZFC ⊢“存在不可达基数”，则 ZFC ⊢ "$V_\kappa \models$ ZFC"，即 ZFC ⊢ $\exists X(\mathrm{ZFC})^X$，因为 V_κ 是个集合，因此 ZFC ⊢ Con(ZFC)

若只能找到一个真类，我们不能得到能证明一致性 □

若 T 是可公理化的，则

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(T) \leftrightarrow \exists M(T)^M$$

（粗略的完全性定理）取一个适当大的子集 $P \subseteq \mathrm{ZFC}$，有

$$P \vdash \mathrm{Con}(T) \leftrightarrow \exists M(T)^M$$

已知若 $V \models \mathrm{ZF}^-$，则 $\mathrm{WF} \models \mathrm{ZF}, \mathrm{ZF}^- \vdash (\mathrm{ZF})^{\mathrm{WF}} \nRightarrow \mathrm{ZF}^- \models Con(\mathrm{ZF})$，因为 WF 不是集合

Lemma 1.73. *设 κ 是不可达基数（极限序数），则以下概念对 V_κ 都是绝对的*

1. *x 是一个基数*
2. *x 是正则基数*
3. *x 是一个不可达基数*

证明. 1. x 是基数被公式 $\varphi(x)$ 表示:“x 是序数”$\wedge \forall f \forall y \in x((f : y \to x) \to \mathrm{ran}(f) \neq x)$

三个子公式对 ZF − Pow − Inf −Rep 的传递模型都是绝对的

若 κ 是极限序数，则

$$V_\kappa \models \mathrm{ZF} - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf} - \mathrm{Rep}$$

由于 $\varphi(x)$ 是一个 Π_1 公式，故

$$\forall x \in V_\kappa(\varphi(x) \to \varphi^{V_\kappa}(x))$$

另一方面，要证明 $\forall x \in V_\kappa(\varphi^{V_\kappa}(x) \to \varphi(x))$，只需证明若 $x, y \in V_\kappa$ 且 $f : y \to x$，则 $f \in V_\kappa$

显然若 $f : y \to x$，则 $f \in x^y$，而 $x, y \in V_\alpha$，$x^y \in V_{\alpha+\omega}$，故 $f \in V_\kappa$，$\mathrm{rank}(f) \leq \max\{\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y)\} + 2$

2. x 是正则基数被公式 $\varphi(x)$ 表示: "x 是基数"$\wedge\forall f\forall y\in x[(f:y\to x)\to\exists z\in x(\mathrm{ran}(f)\subseteq z)]$

   与 1 类似

3. x 是不可达基数被公式 $\varphi(x)$ 表示: "x 是正则基数"$\wedge\forall f\forall y\in x((f:2^y\to x)\to\mathrm{ran}(f)\neq x)$

   2^y 是 y 到 2 的全体函数为绝对概念

□

用"I"表示"存在不可达基数"

Lemma 1.74. 如果 ZFC 一致，则 ZFC $+\neg I$ 也是一致的，即

$$\mathrm{ZFC}\vdash \mathit{Con}(\mathrm{ZFC})\to \mathit{Con}(\mathrm{ZFC}+\neg I)$$

证明. 设 $V\vDash\mathrm{ZFC}+\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$，$V\vDash\exists M(ZFC)^M$

先在 $M\vDash\mathrm{ZFC}$，视 M 为集合宇宙，若 κ 是 M 中最小的不可达基数，则 $V_\kappa\vDash\mathrm{ZFC}+\neg I$，即 $M\vDash(\mathrm{ZFC}+\neg I)^{V_\kappa}$

存在 M 中的元素 X 使得 $M\vDash$ "$(X,\in)\vDash\mathrm{ZFC}+\neg I$",即 $M\vDash(\mathrm{ZFC}+\neg I)^X$，则 $V\vDash((\mathrm{ZFC}+\neg I)^X)^M$，即 $\forall y\rightsquigarrow\forall y\in X\rightsquigarrow\forall y\in X\cap M$，因此 $V\vDash(\mathrm{ZFC}+\neg I)^{X\cap M}$ （验证：归纳）

注：M 看到 $(X,\in)$ 恰好是 V 看到的 $(X\cap M,\in)$

因此 $V\vDash\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\neg I)$

若 M 中不存在不可达基数，则 $M\vDash\mathrm{ZFC}+\neg I$，因此 $V\vDash(\mathrm{ZFC}+\neg I)^M$

事实上 $(\mathbb{N},+,\times,0,1)+AC+\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\vdash\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\neg I)$ （完全性要 AC） □

以上引理表明：ZFC $\nvdash I$

以上证明没有使用哥德尔不完全定理

最好的情况是，"ZFC $+I$"一致，即我们希望 ZFC 下构造"ZFC $+I$"的模型

Corollary 1.75. 在 ZFC 中不能生成"$ZFC+I$"的模型，即

$$\mathrm{ZFC}+\mathit{Con}(\mathrm{ZFC})\nvdash \mathit{Con}(\mathrm{ZFC}+I)$$

证明. 否则，假设 ZFC 一致，则 ZFC $+I$ 一致，目标 ZFC $+I \vdash$ Con(ZFC $+I$)

任取 $V \vDash$ ZFC $+I$，则 $V \vDash (\text{ZFC})^{V_\kappa}$，由完全性，$V \vDash$ Con(ZFC)，因此有了矛盾 □

Definition 1.76. 对任意的无穷基数 κ

$$H_\kappa = \{x \mid |\text{trcl}(x)| < \kappa\}$$

称 H_κ 的元素为 **遗传基数 $< \kappa$ 的基数**

称 $x \in H_\omega$ 为 **遗传有穷集**

Lemma 1.77 ($V \vDash$ ZFC)**.** *对任意的无穷基数 κ 有*

$$H_\kappa \subseteq V_\kappa$$

证明. $V = \text{WF}$，只需验证 $\forall x \in H_\kappa$，有 $\text{rank}(x) < \kappa$

设 $x \in H_\kappa$，令 $t = \text{trcl}(x)$，令 $s = \{\text{rank}(y) \mid y \in t\} \subseteq \text{On}$，验证 s 是序数

假设 α 是最小的不属于 s 的序数，$\alpha \subseteq s$，若 $\alpha \neq s$，令 $\beta = \min(s \setminus \alpha)$，因此 $\beta > \alpha$，令 $y \in t$ 使得 $\beta = \text{rank}(y)$，$\forall z \in y$，$z \in t$ 且 $\text{rank}(z) < \text{rank}(y)$，由 β 的极小性，$\forall z \in y(\text{rank}(z) < \alpha)$，$\beta = \text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(z)+1 \mid z \in y\}$，因此 $\beta \leq \alpha$，矛盾

故 $s = \alpha$，且 $|s| \leq |t| = |\text{trcl}(x)| < \kappa$，所以 $\alpha < \kappa$，$x \subseteq \text{trcl}(x) \subseteq V_s$ □

Lemma 1.78. *如果 κ 是正则基数，则 $H_\kappa = V_\kappa$ 当且仅当 κ 是不可达基数*

证明. 设 κ 不可达，只需证明 $V_\kappa \subseteq H_\kappa$

对 $\alpha < \kappa$ 进行归纳证明：$|V_\alpha| < \kappa$ (练习)

设 $x \in V_\kappa$，则存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $x \in V_\alpha$，$\text{trcl}(x) \subseteq V_\alpha$，因此 $|\text{trcl}(x)| < \kappa$

假设 κ 不是不可达基数，则存在 $\lambda < \kappa$，$2^\lambda \geq \kappa$，$\mathcal{P}(\lambda) \in V_{\lambda+\omega} \subseteq V_\kappa$,$|\text{trcl}(P(\lambda))| \geq 2^\lambda \geq \kappa$，因此 $P(\lambda) \in V_\kappa \setminus H_\kappa$ □

Lemma 1.79. *对于任意无穷基数 κ*

1. *H_κ 传递*

2. $H_\kappa \cap \mathrm{On} = \kappa$

3. $x \in H_\kappa \Rightarrow \bigcup x \in H_\kappa$

4. $x, y \in H_\kappa \Rightarrow \{x, y\} \in H_\kappa$

5. $x \in H_\kappa$ 且 $y \subseteq x$，则 $y \in H_\kappa$

6. 如果 κ 正则，则

$$\forall x(x \in H_\kappa \leftrightarrow x \subset H_\kappa \wedge |x| < \kappa)$$

证明. 1. 设 $x \in y \in H_\kappa$，则 $|\mathrm{trcl}(y)| < \kappa$，而 $\mathrm{trcl}(x) \subset \mathrm{trcl}(y)$，因此 $x \in H_\kappa$

2. 若 $\alpha < \kappa$，则 $\alpha = \mathrm{trcl}(\alpha)$，因此 $\alpha \in H_\kappa$

   若 $\alpha \in H_\kappa$，则 $|\alpha| < \kappa$，因此 $\alpha < \kappa$

3. $\bigcup x \subseteq \mathrm{trcl}(x) \Rightarrow \mathrm{trcl}(\bigcup x) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$，故 $x \in H_\kappa \Rightarrow \bigcup x \in H_\kappa$

4. $\mathrm{trcl}(\{x, y\}) = \{x, y\} \cup \mathrm{trcl}(x) \cup \mathrm{trcl}(y)$

5. $\mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$

6. 若 $x \in H_\kappa$，由传递性，$x \subset H_\kappa$，$|x| \leq |\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$

   若 $x \subset H_\kappa$,$|x| < \kappa$, 设 $x = \{x_i \mid i < \lambda\}$，则 $\mathrm{trcl}(x) = x \cup \bigcup_{i<\lambda} \mathrm{trcl}(x_i)$，若 $|\mathrm{trcl}(x)| \geq \kappa$，则 $\forall \alpha < \kappa$，存在 $i < \lambda$ 使得 $|\mathrm{trcl}(x_i)| > \alpha$，故 λ 与 κ 共尾

□

Theorem 1.80 (ZFC)**.** 若 κ 是不可数正则基数，则 $H_\kappa \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{Pow}$

证明. H_κ 传递 $\Rightarrow$ 外延公理

H_κ 非空 $\Rightarrow$ 存在公理

由于 $x \in H_\kappa \leftrightarrow x \subset H_\kappa \wedge |x| < \kappa$，故分离公理 + 替换公理成立

H_κ 对 $\bigcup x$ 与 $\{x, y\}$ 封闭，故对集公理 + 并集公理成立

H_κ 满足以上公理 $\Rightarrow \emptyset, \omega, x^+, x \cap y$ 的绝对性

由于 $\omega \in H_\kappa$, $H_\kappa \vDash \mathrm{Inf}$

$\emptyset, x \cap y$ 的绝对性，$H_\kappa \vDash Fnd$

选择公理：$\forall x \in H_k \exists R \in H_\kappa (R\text{是 } X \text{ 的良序})^{H_\kappa}$

已知，若 $x, R \in H_\kappa$，则 R 是 x 的良序当且仅当 $(R\text{是 } X \text{ 的良序})^{H_\kappa}$ $(\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow})$

只需验证：如果 $X \in H_\kappa$，则 $\forall R \subseteq X \times X$，有 $R \in H_\kappa$

显然 $|X| < \kappa$，因此 $|X \times X| < \kappa$，若 $a, b \in X$，则 $|\mathrm{trcl}((a,b))| < |\mathrm{trcl}(x)| + \aleph_0$，因此 $(a,b) \in H_\kappa$，因此 $R \subset H_\kappa$，根据 (6)，有 $R \in H_\kappa$ □

Theorem 1.81 (ZFC)**.** *如果 κ 是不可数正则基数，TFAE*

1. $H_\kappa \vDash \mathrm{ZFC}$
2. $H_\kappa = V_\kappa$
3. κ 不可达

证明. 已知 $2 \leftrightarrow 3$

$1 \to 2+3$: 若 κ 不是不可达基数，则存在 $\lambda < \kappa$ 使得 $2^\lambda \geq \kappa$，$\lambda \in H_\kappa$ 且 $\mathcal{P}(\lambda) \notin H_\kappa$，于是 $H_\kappa \nvDash \mathrm{Pow}$

$V \vDash \forall z \in H_\kappa \forall x \in H_\kappa (x \in z \leftrightarrow x \subseteq \lambda)$

$2 \to 1$ 显然 □

以上引理表明，若 κ 正则且不是不可达的，则

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\mathrm{ZFC} - \mathrm{Pow} + \neg\, \mathrm{Pow})^{H_\kappa}$$

故 $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} - \mathrm{Pow} + \neg\,\mathrm{Pow})$，即 Pow 不能由 ZFC 中的其它公理推出

Corollary 1.82. *Con*(ZFC) $\to$ *Con*(ZFC $-$ Pow $+ \forall(x$ *countable*))

证明. $H_{\omega_1} \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{Pow}$

x 可数：存在 f，$(f : x \to \omega)$ 是双射，只需要这个 f 是属于 H_{ω_1} 就行了，但这是显然的 $\forall x, y \in H_\kappa$, $x^y \in H_\kappa$ 用性质 6

这个可数我们得在 H_{ω_1} 里看到 □

1.9 反映定理

已知 $V \vDash \mathrm{ZF} \Rightarrow V_\alpha \vDash Z\ \alpha > \omega$

$V \vDash \mathrm{ZFC} \Rightarrow V_\alpha \vDash \mathrm{ZC}\ (\alpha > \omega)$

$V_\omega \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf}$

V_α 不能"反映"V 的全貌，除非 α 是不可达基数

对不可达基数 κ，V_κ 能"反映"V 的全貌（不全对）

H_κ 也类似，

本节讨论另一个方向：对给定的句子 φ，若 φ 在 V 中成立，则能否找到 α 使得 $V_\alpha \vDash \varphi$

问：是否存在 φ，它在 V 中成立，但是 $\forall\alpha(V_\alpha \nvDash \varphi)$ (因为 ZC 少了无穷条 Rep)

Theorem 1.83 (反映定理). *对于任意有穷 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$，存在 α 使得*

$$V \vDash \varphi_i \Leftrightarrow V_\alpha \vDash \varphi_i (i = 1, \dots, n)$$

即

$$V \vDash \varphi_i \leftrightarrow \varphi_i^{V_\alpha}$$

设 F 是一个集合论语言的公式集，如果对每个 $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F$，对每个 $a_1, \dots, a_n \in M$，有 $M \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow N \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$，则称 M 是 N 的相对于 F 的初等子模型，记作 $M \prec_F N$

反映定理是 Löwenheim–Skolem Theorem 的有穷"版本"，等价地说 F 中的公式相对于 V_α 绝对

Lemma 1.84. *令 $M \subseteq N$ 都是类，$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 是对子公式封闭的公式集，则以下命题等价*

1. *$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 相对于 M 和 N 绝对*

2. *如果 φ_i 是形如 $\exists x \varphi_j(x, y_1, \dots, y_m)$ 的公式，则*

$$\forall \bar{y} \in M(\exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y}) \to \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}))$$

证明. $1 \to 2$: 设 φ_i 形如这样的形式，由绝对性

$$\forall \bar{y} \in M(\varphi_i^N(\bar{y}) \leftrightarrow \varphi_i^M(\bar{y}))$$

再由 φ_j 的绝对性,$\forall \bar{y}(\exists x \in M \varphi_j^M(x, \bar{y}) \leftrightarrow \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}))$

$2 \to 1$: 对 φ_i 的长度归纳证明：若 $|\varphi_i|$ 最小，则 φ_i 无量词，因此绝对

若长度小于 $|\varphi_i|$ 的公式都是绝对的，则 φ_i 的所有子公式都绝对，而 φ_i 的形式有以下形式

1. $\varphi_j \to \varphi_k$
2. $\neg \varphi_j$
3. $\exists x \varphi_j(x, \bar{y})$

只需验证情形 3: 任取 $\bar{y} \in M$，由题设条件，

$$\exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y}) \to \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y})$$

由 φ_j 的绝对性，有

$$\forall x \in M(\varphi_j^N(x, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi_j^M(x, \bar{y}))$$

而显然

$$\exists x \in M \varphi_j^M(x, \bar{y}) \to \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}) \to \exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y})$$

□

这个证明没有用到有穷性，因此无穷情况也成立

Theorem 1.85 (反映定理，ZF). 对于任意有穷公式集 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$，对任意 $\alpha \in \mathrm{On}$，存在 $\beta \geq \alpha$ 使得 F 对 V_β 绝对

在 ZF 中，$\mathrm{WF} = V$

证明. 由于没有选择公理，无法“构造”$\mathcal{H}(V_\alpha)$，V_α 的 Skolem hull

由于有了前面的引理，本质上，我们只需要找到一个 V_β 使得每个形如 $\exists x \varphi(x, \bar{y})$ 的公式以及每一组参数 $\bar{b} \in V_\beta$ 有 $V \vDash \exists x \varphi_j(x, \bar{b}) \Leftrightarrow V_\beta \vDash \exists x \varphi_j(x, \bar{b})$，即系数来自 V_β 的方程若有解，则有一个解 $\in V_\beta$

设 $\varphi_i \in F$ 且形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$，定义函数 h_i 如下:

- 任取 $\bar{x} \in V$，令 $U = \{y \mid \varphi_j(\bar{x}, y)\}$
- 若 $U = \emptyset$，则 $h_i(\bar{x}) = 0$
- 若 $U \neq \emptyset$，则存在最小的 ξ 使得 $U \cap V_\xi \neq \emptyset$，此时令 $h_i(\bar{x}) = V_\xi$（用了序数的良序性）
- 函数 h_i 满足

$$\forall \bar{x}(\exists y \varphi_j(\bar{x}, y) \to \exists y \in h_i(\bar{x}) \varphi_j(\bar{x}, y))$$

定义 h_F 为:

$$h_F(x_1, \dots, x_m) = \bigcup \{h_i(x_1, \dots, x_m) : i = 1, \dots, n\}$$

这里必需要求只能有穷多个，因为 h_i 是类

则 h_F 满足：对每个形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$ 的公式，有

$$\forall \bar{x}(\exists y \varphi_j(\bar{x}, y) \to \exists y \in h_F(\bar{x}) \varphi_j(\bar{x}, y))$$

任取 α，递归定义 V_α^i，$i \in \omega$ 如下:

- $V_\alpha^0 = V_\alpha$
- $V_\alpha^{i+1} = V_\alpha^i \cup \bigcup \{h_F(\bar{y}) \mid \bar{y} \in V_\alpha^i\}$

令 $V_\beta = \bigcup V_\alpha^i$，相当于 V_α 的 F-Skolem hull，若 $\varphi_i \in F$ 形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$ 任取 $\bar{x} \in V_\beta$，则存在 $k < \omega$ 使得 $\bar{x} \in V_\alpha^k$，若 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$，则

$$\exists y \in h_F(\bar{x}) \varphi_j(\bar{x}, y)$$

$\square$

Corollary 1.86 (ZF)**.** 令 $F = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ 为 ZF 的有穷子集，则

$$\forall \alpha \exists \beta \geq \alpha(\sigma_1^{V_\beta} \wedge \dots \wedge \sigma_n^{V_\beta})$$

证明. 将 F 扩张为 F'，有穷且对子公式封闭，于是 $\forall\alpha\exists\beta\geq\alpha$ 使得 F' 相对于 V_β 绝对

对于 F' 中的句子，有

$$\mathrm{ZF}\vdash\sigma\leftrightarrow\sigma^{V_\beta}$$

□

Corollary 1.87. 设 $F=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}\subseteq\mathrm{ZF}$，除非 ZF 不一致，否则 “$F\nvdash\mathrm{ZF}$”

证明. 存在 V_β 使得 $\mathrm{ZF}\vdash(F)^{V_\beta}$，若 $F\vdash\mathrm{ZF}\Rightarrow\mathrm{ZF}\vdash(\mathrm{ZF})^{V_\beta}$，故 $\mathrm{ZF}\vdash(\mathrm{ZF})^{V_\beta}\to\mathrm{Con(ZF)}$ (无需 AC，反过来要)，因此 $\mathrm{ZF}\vdash\mathrm{Con(ZF)}$ □

Remark. 以上推论对 ZF 的任意扩张成立

若 AC 成立，则反映定理可以改进为存在可数 $(M,\in)$ 使得 $M\prec_F V$（绝对性强于 $\prec_F$，用 Skolem hull）

- 若 F 含有无穷公理，则 $M\neq V_\omega$
- 若 F 含有幂集公理，若 M 传递，则没有绝对性
  - 令 $\psi(x,y)$ 表示 $\forall u(u\in y\leftrightarrow u\subseteq x)$，令 Pow : $\forall x\exists y\psi(x,y)$，则 ψ 与 Pow 不能同时绝对

    M 传递时，$\subseteq\leftrightarrow\subseteq^M$，若 ψ 绝对，则 V 看到的幂集跟 M 看到的幂集，而 M 是可数的
- 若 $F\subseteq_f\mathrm{ZFC}$，由 Mostowski collapsing 定理，存在传递模型使得 $(M,\in)\cong(N,\in)$

  F 相对于 N 绝对，但是 F 的子公式不一定绝对（比如 ψ 与 Pow）

Theorem 1.88 (ZFC)**.** 对任意有穷公式集 F，对任意集合 N，存在集合 M 使得

1. $N\subseteq M$
2. $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ 相对于 $(M,\in)$ 绝对

3. $|M| \leq |N| + \aleph_0$

4. 若 N 至多可数，则 M 可数

证明. 不妨设 F 对于子公式封闭，令 $\mathcal{H}_F$ 为 F 对应的 Skolem 函数集，令 $M = \mathcal{H}_F(N)$ （练习） □

Corollary 1.89 (ZFC)**.** 对任意有穷 **句子** 集 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$，对任意的传递集 N，存在 M 满足

1. $N \subseteq M$

2. F 相对于 $(M, \in)$ 是绝对的

3. $|M| \leq |N| + \aleph_0$

4. M 传递

证明. 不妨设外延公理 $\in F$，则存在 $(M', \in)$ 满足 $1 - 3$

$(M', \in)$ 良基似集合且满足外延公理

故 $G : M' \to V, x \mapsto \{G(y) \mid y \in M' \wedge y \in x\}$ 是 M' 到 $M = G(M')$ 的同构，M 传递，由 M' 的绝对性, $V \vDash \varphi_i \leftrightarrow \varphi_i^{M'}$

由同构

$$\varphi_i^{M'} \Leftrightarrow M' \vDash \varphi_i \Leftrightarrow M \vDash \varphi_i \Leftrightarrow \varphi_i^M$$

故 F 相对于 M 绝对

设 $N \subseteq M'$ 传递，对 N 中元素的 rank 归纳证明：$\forall x \in N(G(x) = x)$，即 $G(N) = N \subseteq M$ □

句子集的绝对性被同构保持，而公式不是这样（例子是幂集公理）

Remark. 若 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 是一个公式，且 $(M, \in) \cong (M', \in)$ 则 φ 相对于

1.10 Exercise

Exercise 1.10.1 (7.10.1). 令 N 是集合论模型，$S \subseteq N$，如果 $M = \mathcal{H}(S)$，则 $M \prec N$

证明. Induction

对任意 $\bar{a} \in M^n$，有 $M \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \varphi(\bar{a})$

1. 不含量词，显然成立

2. φ 形如 $\exists y \psi(\bar{x}, y)$, $N \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y) \Rightarrow N \vDash \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a}))$，by IH, $M \vDash \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a})) \Rightarrow M \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y)$

□

Exercise 1.10.2 (7.10.2). 对任何集合 $x \in \mathrm{WF}$，如果 rank$(x) = \alpha$，则 $x \subseteq V_\alpha$，$x \notin V_\alpha$，并且对任意 $\gamma > \alpha$，$x \in V_\gamma$

证明. 根据定义, $x \notin V_\alpha$, $x \in V_{\alpha+1}$, 因此 $x \subseteq V_\alpha$, 对于任意 $\gamma > \alpha$, $V_{\alpha+1} \subseteq V_\gamma$, 因此 $x \in V_\gamma$ □

Exercise 1.10.3 (7.10.3).

1. $V_\alpha = \{x \in \mathrm{WF} \mid \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$

2. WF is transitive

3. $\forall x, y \in \mathrm{WF}$, $x \in y \Rightarrow \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$

4. $\forall y \in \mathrm{WF}$, $\mathrm{rank}(y) = \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

证明.

1. by definition, $x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \setminus V_{\mathrm{rank}(x)}$, $\mathrm{rank}(x) < \alpha \Rightarrow x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \subseteq V_\alpha$

   $\mathrm{rank}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \notin V_\alpha$

2. WF is the "union" of transitive sets

3. $y \in V_{\mathrm{rank}(y)+1} \setminus V_{\mathrm{rank}(y)}$, $y \subseteq V_{\mathrm{rank}(y)}$, $x \in y \Rightarrow x \in V_{\mathrm{rank}(y)} \Rightarrow \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$

4. by 3, $\sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \leq \mathrm{rank}(y)$.

   induction on $\mathrm{rank}(y) \leq \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

   - $\mathrm{rank}(y) = 0$

- rank$(y) = \beta + 1$, $y \in V_{\beta+2} \setminus V_{\beta+1}$

  $y \in V_{\beta+2} \Rightarrow y \subseteq V_{\beta+1}$. $y \notin V_{\beta+1} \Rightarrow y \not\subseteq V_\beta \Rightarrow y \setminus V_\beta$ nonempty. Let $x \in y \setminus V_\beta$, rank$(x) \geq \beta$, sup$\{$rank$(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \beta + 1 =$ rank(y)

- rank$(y) = \gamma$ for some limit, then $y \subseteq V_\gamma$ and for any $\xi < \gamma$, $y \not\subseteq V_\xi$, let $X_\xi \in y \setminus V_\xi$, then rank$(X_\xi) \geq \xi$, sup$\{$rank$(x) + 1 \mid x \in y\} \geq$ sup$\{\xi + 1 \mid \xi <$ rank$(y)\} \geq$ rank(y)

$\square$

Exercise 1.10.4 (7.10.4).

1. If $x \in$ WF, then $\bigcup x, \mathcal{P}(x), \{x\} \in$ WF, and their rank $<$ rank$(x) + \omega$

2. If $x, y \in$ WF, then $x \times y, x \cup y, x \cap y, \{x, y\}, (x, y), x^y \in$ WF, and their rank $<$ rank$(x) +$ rank$(y) + \omega$

3. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$

4. for any set x, $x \in$ WF $\Leftrightarrow x \subset$ WF

证明. suppose rank$(x) = \alpha$. $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$ and $x \subseteq V_\alpha$.

by transitivity, $\bigcup x \subseteq V_\alpha \Rightarrow \bigcup x \in V_{\alpha+1} \subset$ WF. rank$(\bigcup x) \leq \alpha$

suppose $y \in \mathcal{P}(x)$, $y \subseteq x \Rightarrow y \subseteq V_\alpha \Rightarrow y \in V_{\alpha+1}$. $\mathcal{P}(x) \subseteq V_{\alpha+1}$, $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$, rank$(\mathcal{P}(x)) \leq \alpha + 1$.

$\{x\} \in \mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$.

1. Suppose rank$(x) = \alpha$, rank$(y) = \beta$, $x \subset V_\alpha$, $y \subset V_\beta$

   $x \cup y \subset V_\alpha \cup V_\beta = V_{\max(\alpha,\beta)}$, rank$(x \cup y) \leq \max(\alpha, \beta)$

   $x \cap y \subset V_{\min(\alpha,\beta)}$

   $\{x, y\} \subseteq V_{\alpha+1} \cup V_{\beta+1} = V_{\max(\alpha,\beta)+1}$, rank$(\{x, y\}) = \max(\alpha, \beta) + 1$

   $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subset V_{\max(\alpha,\beta)+2}$. rank$((x, y)) = \max(\alpha, \beta) + 2$

$x \times y = \{(a,b) \mid a \in x, b \in y\}$. $a \in x \Rightarrow \text{rank}(a) < \alpha$, $b \in y \Rightarrow \text{rank}(b) < \beta$, $\text{rank}(a,b) < \max(\alpha,\beta)+2$, $(a,b) \in V_{\max(\alpha,\beta)+2}$. $x \times y \subseteq V_{\max(\alpha,\beta)+2}$, $\text{rank}(x \times y) \leq \max(\alpha,\beta)+2$.

$x^y \subseteq \mathcal{P}(x \times y) \subseteq V_{\max(\alpha,\beta)+3}$.

2. $\mathbb{N} = \omega \in V_{\omega+1}$

   $\mathbb{Z}$: let $\sim$ be an equivalence relation on $\omega \times \omega$, $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$, then $\mathbb{Z} = (\omega \times \omega)/\sim$. Hence $\mathbb{Z}$ is a partition of $\omega \times \omega$ and hence $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{P}(\omega \times \omega)$. $\mathbb{Z} \in V_{\omega+3}$

   $\mathbb{Q}$: let $\sim$ be an equivalence on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$, $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+)$, $\mathbb{Q} \in V_{\omega+6}$

   $\mathbb{R}$: set of dedekind cut on $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R} \in V_{\omega+8}$

3. $\Rightarrow$: WF is transitive

   $\Leftarrow$: x is a set and $x \subset \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha$.

   Claim: there is an ordinal α s.t. $x \subset V_\alpha$

   Otherwise, let $f : \text{On} \to \mathcal{P}(x)$ s.t. $f(\alpha) = x \setminus V_\alpha$. Then for any $y \in \mathcal{P}(x)$, $f^{-1}(y)$ is a set. $\text{On} = \bigcup_{y \in x} f^{-1}(y)$ and is thus a set, a contradiction

□

Exercise 1.10.5 (7.10.5). 对任意拓扑空间 T，存在 WF 中的拓扑空间 T' 和 T 同胚

证明. 假设 T 是一个拓扑空间，由 AC，存在基数 α 使得 $|T| = \alpha$，于是有一个双射 $f : \alpha \to T$。令 T' 是 α 上的拓扑空间，$x \in T'$ 是开集当且仅当 $f(x)$ 是 T 中的开集，于是 f 是一个同胚 □

Exercise 1.10.6 (7.10.6). 令 $M \subseteq N$ 且 M 传递，$\psi(\bar{x})$ 是一个公式，则

1. 如果 ψ 是 Δ_0 公式，则他它对 M, N 是绝对的

2. 如果 ψ 是 Σ_1 公式，则

$$\forall \bar{x} \in M(\psi^M(\bar{x}) \to \psi^N(\bar{x}))$$

3. 如果 ψ 是 Π_1 公式，则

$$\forall \bar{x} \in M^n(\psi^N(\bar{x}) \to \psi^M(\bar{x}))$$

证明. 1. 对公式的长度进行归纳证明

2. 例子：令 $M = \mathrm{On}$,$N = \mathrm{WF}$，令 $\psi(y) := \forall x \in y \forall u, v \in x(u \in v \vee v \in u \vee u = v)$，则 ψ 是 Δ_0 的，则

   $$\psi^M(y) = \forall x \in M(x \in y \to \forall u, v \in M(u, v \in x \to (u \in v \vee v \in u \vee u = v)))$$
   $$\psi^N(y) = \forall x \in N(x \in y \to \forall u, v \in N(u, v \in x \to (u \in v \vee v \in u \vee u = v)))$$

   任取 $x_0 \in \mathrm{WF} \setminus \mathrm{On}$ 使得 $(x_0, \in)$ 不是线序，令 $y_0 = \{x_0\}$，则 $\psi^M(y_0)$ 的前件假，$\psi^M(y_0)$ 是真的，$\psi^N(y_0)$ 为假，因此

   $$\forall \bar{x}(\psi^M(\bar{x}) \to \psi^N(\bar{x}))$$

   错误

   令 $x = \bar{x}, y = \bar{y}$

   设 $\psi := \exists \varphi(x, y)$，$\varphi(x, y) \in \Delta_0$, $\psi^M := \exists y \in M(\varphi^M(x, y))$, $\psi^N := \exists y \in N(\varphi^N(x, y))$，任取 $a \in M^m$，目标 $\psi^M(a) \to \psi^N(a)$

   若 $\psi^M(a)$ 成立, 则有 $b \in M^n$ 使得 $\psi^M(a, b)$, 由 Δ_0 的绝对性, $\psi^N(a, b)$, 因此 $\exists y \psi^N(a, y)$

3. 设 $\psi := \forall y \varphi(x, y)$ 其中 $\varphi \in \Delta_0$，则 $\psi^M := \forall y \in M \varphi^M(x, y)$，$\psi^N := \forall y \in N \varphi^N(x, y)$，设 $a \in M$ 使得 $\psi^N(a)$ 成立，目标 $\psi^M(a)$ 成立。

   $\psi^N(a) \Rightarrow$ 对所有的 $b \in N$ 均有 $\varphi^N(a, b)$ 成立，故对一切 $b \in M$ 有 $\varphi^N(a, b)$ 成立，由 φ 的绝对性，$\forall y \in M \varphi^M(a, y)$

$\square$

Exercise 1.10.7 (7.10.7). 证明莫斯托夫斯基定理中的 **M** 和 **G** 唯一

证明. 假设 M, N 是传递类且 $f:(M,\in)\cong(N,\in)$，$S=\{x\in M\mid f(x)\neq x\}$。因为 $M\neq N$，因此 S 非空，取 S 的极小元 x_0，则对于任意 $y\in x_0$，$y=f(y)\in f(x_0)$，于是 $x_0\subset f(x_0)$，又因为 f 是双射，同理有 $f(x_0)\subset x_0$，于是 $f(x_0)=x_0$，矛盾。因此 $M=N$。

若 $f_1:(X,R)\cong(M,\in)$，$f_2:(X,R)\cong(N,\in)$，则 $M=N$，于是 $f_1f_2=f_2f_1=\mathrm{id}$，因此 $f_1=f_2$ □

Exercise 1.10.8 (7.10.8). 证明以下概念对任意 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的传递模型绝对

1. $X^{<\omega}$
2. $\alpha+\beta$
3. $\alpha\cdot\beta$
4. α^{β}
5. $\mathrm{rank}(x)$
6. $\mathrm{trcl}(x)$

证明. 1. 先证明封闭，再证明绝对

首先证明函数 $Z=X^{<\omega}$ 是绝对的

令 $F(X,n)=X^n$,则 $Z=\bigcup\{F(X,0),F(X,1),...\}=\bigcup\mathrm{ran}(F(X,-))\restriction\omega$

由于 $\omega\in M$,于是 $\mathrm{ran}(F(X,-)\restriction\omega)\in M$,由并集公理,$\bigcup\mathrm{ran}(F(X,-)\restriction\omega)\in M$

即 $X\in M\Rightarrow X^{<\omega}\in M$

$Z=X^{<\omega}$ 被公式 $\varphi(x,z)$ 定义：$\forall f(f\in z\leftrightarrow\exists n(n\text{ fintie ordinal}\wedge f\in X^n))$

验证：$\forall x\in M\forall z\in M(\varphi(x,z)\leftrightarrow\varphi^M(x,z))$

V 看到所有有穷序数都在 M 中

于是 φ 绝对，$\forall x \in M \exists! z \in M \varphi(x,z)$

2. 没有递归定义的绝对性

   $\alpha+\beta$ 的定义为 type$(\alpha \oplus \beta)$

   由于 type$(-,-)$ 是绝对的，只需证明 $\alpha \oplus \beta$ 是绝对的

   令 $F(\alpha,\beta)=W$，其中 $W=\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}$，再令 $G(\alpha,\beta)=R$，其中 $R\subseteq W^2$ 且满足 $\forall x\in\alpha\times\{0\}\forall y\in\beta\times\{1\}(xRy)$ 且 $\forall x,y\in\alpha((x,0)R(y,0)\leftrightarrow x\in y)$ 且 $\forall x,y\in\beta((x,1)R(y,1)\leftrightarrow x\in y)$

   显然 R 是 W 的良序集

   F 是绝对的

   令 $\psi(\alpha,\beta,R)$ 为

$$\begin{aligned}&\forall x\in R[\exists a\in\alpha\exists b\in\alpha(a\in b\wedge x=((a,0),(b,0)))\\&\qquad\vee\exists a\in\beta\exists b\in\beta(a\in b\wedge x=((a,1),(b,1)))\\&\qquad\vee\exists a\in\alpha\exists b\in\beta(x=((a,0),(b,1)))]\\&\wedge\forall a,b\in\alpha\exists x\in R(x=((a,0),(b,0)))\\&\wedge\forall a,b\in\beta\exists x\in R(x=((a,1),(b,1)))\\&\wedge\forall a\in\alpha\forall b\in\beta\exists x\in R(x=((a,0),(b,1)))\end{aligned}$$

   用 $\theta(\alpha,\beta,x)$ 表示方括号，则 $V\vDash\forall z(z\in R\leftrightarrow\theta(\alpha,\beta,z))$

   于是 $G(\alpha,\beta)=R\Leftrightarrow\psi(\alpha,\beta,R)$

   ψ,θ 是绝对的

   若 $\alpha,\beta\in M$，则 $\{x\mid\theta(\alpha,\beta,x)\}=\{x\in M\mid\theta(\alpha,\beta,x)\}=\{x\in M\mid\theta^M(\alpha,\beta,x)\}\subseteq M$, $R=\{x\in W^2\mid\theta^M(\alpha,\beta,x)\}$，由分离公理，$R\in M$

   故 $G(\alpha,\beta)=R$ 是绝对的，

   $\alpha+\beta=$ type$(F(\alpha,\beta),G(\alpha,\beta))$ 是绝对的

3. 同理：$\alpha\cdot\beta=$ type$(\alpha\otimes\beta)$ 是绝对的

令 $F(\alpha,\beta)=W$，其中 $W=\alpha\times\beta$，再令 $G(\alpha,\beta)=R$，其中 $R\subseteq W^2$ 满足 $\forall x,y\in\alpha\forall u,v\in\beta((x,u)R(y,v)\leftrightarrow(x<y\vee(x=y\wedge u<v)))$，于是 R 是 W 的良序集，F 是绝对的，同理令 $V\vDash\forall z(z\in R)\leftrightarrow\theta(\alpha,\beta,z)$，$G(\alpha,\beta)=R\Leftrightarrow\psi(\alpha,\beta,R)$，$\psi,\theta$ 绝对。

若 $\alpha,\beta\in M$，由分离公理，$R\in M$，因此 $G(\alpha,\beta)=R$ 是绝对的，故

$\alpha\cdot\beta=\mathrm{type}(F(\alpha,\beta),G(\alpha,\beta))$ 是绝对的

4. 若 $\alpha=0$，则 $\alpha^\beta=0$

   它是递归定义的，因此是绝对的

   规定 $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$ 上的关系 R 为

$$R=\{((\alpha,\beta_1),(\alpha,\beta_2))\mid\beta_1\in\beta_2\}\subseteq\mathrm{On}^2$$

   显然 R 是良基关系，R 是似集合的，$\mathrm{pred}(\mathrm{On}^2,(\alpha,\beta),R)=\{\alpha\}\times\beta$

   定义 $F:\mathrm{On}^2\times V\to V$ 为

$$F(\alpha,\beta,x)=\begin{cases}0 & \alpha=0\vee x\notin\mathrm{On}^3\\ 1 & \beta=0\wedge\alpha\neq 0\\ \left(\bigcup_{y\in x}\pi_3(y)\right)\cdot\alpha & \text{otherwise}, x\in\mathrm{On}^3\end{cases}$$

   有 M 的传递性，$x=(x_1,x_2,x_3)\in M\Rightarrow x_1,x_2,x_3\in M$

   由 (x_1,x_2,x_3) 的绝对性，$y=\pi_3(x)$ 是绝对的，因为 $y=\pi_3(x)$ 为

$$\exists x_1\exists x_2\exists x_3(x=(x_1,x_2,x_3)\wedge y=x_3)$$

   验证 $G(\alpha,\beta)=\alpha^\beta$ 是基于 F 递归定义的，因此 G 是绝对的

5. $\mathrm{rank}(x)$，即 $\mathrm{rank}(V,x,\in)$

   $\mathrm{rank}(x)=\sup\{\mathrm{rank}(y)+1\mid y\in x\}$，找 F，并证明绝对性，练习

6. $\mathrm{trcl}(x)=x\cup\bigcup\{\mathrm{trcl}(y)\mid y\in x\}$ 练习

□

Exercise 1.10.9 (7.10.9). $V_\omega \vDash \mathrm{ZF}-\mathrm{Inf}+\neg\,\mathrm{Inf}$

证明. 与 WF 类似，V_ω 是传递的，且关于 $\{x,y\}$,$\bigcup x$,$\mathcal{P}(x)$ 封闭，故而是 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Inf}$ 的模型（练习）

$\neg\,\mathrm{Inf}$: $\forall x \neg(\emptyset \in X) \wedge \forall y \in x(y^+ \in x)$

$\neg\,\mathrm{Inf}^M$: $\forall x \in M(\emptyset^M \in X \wedge \forall y \in x((y^+)^M \in x))$

由于 $M = V_\omega$ 传递，故 $(\neg\,\mathrm{Inf})^M$: $\forall x \in M(\emptyset \in X \wedge \forall y \in x(y^+ \in x))$

由于 V_ω 中没有无穷集，故 $(\neg\,\mathrm{Inf})^M$ 在 V 中成立

AC^M: 任取 $X \in V_\omega$, 若 $X \neq \emptyset$，存在 $R \in V_\omega$ 使得 R 是 X 上的良序

$\mathrm{rank}(\mathcal{P}(x \times y)) < \max(\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y))$，故 $\mathcal{P}(x \times x) \in V_\omega$ □

Exercise 1.10.10 (7.10.10). ZC 不能证明 “V_ω 存在”，ZC 不能证明“对任意 x,$\mathrm{trcl}(x)$ 存在”

证明. 构造模型否定这两个命题

令 $V \vDash \mathrm{ZFC}$，令 $X_0 = \omega$, $X_{\alpha+1} = \mathcal{P}(X_\alpha)$, $X_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta$（$\gamma$ 极限序数）

显然 $\overline{X} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} X_\alpha = \mathrm{WF} = V$ （练习）

$X_0 \subseteq V_\omega$, $X_0 \in V_{\omega+1}$, $X_\alpha \subseteq V_{\omega+\alpha}$, $\overline{X} \subseteq \mathrm{WF}$

$V_0 \subseteq X_0$, $V_\alpha \subseteq X_\alpha$, $\mathrm{WF} \subseteq \overline{X}$

容易验证以下事实：X_α 传递（归纳），设 $f(x,y)$ 表示 $\{x,y\}$,$(x-y)$,$x \times y$,$\bigcup x$,$\cap x$,$\mathcal{P}(x)$,...

若 $x \in X_\alpha$,$y \in X_\beta$，则 $f(x,y) \in X_{\max\{\alpha,\beta\}+\omega}$

类似可证 X_ω 是 $\mathrm{ZC}-\mathrm{Inf}$ 的传递模型

由于 $\omega \in X_\omega$，故 $X_\omega \vDash \mathrm{Inf}$，即 $X_\omega \vDash \mathrm{ZC}$

显然 $V_\omega \nsubseteq \omega = X_0$，于是存在 $V_n \nsubseteq X_0$，故 $\mathcal{P}(V_n) \nsubseteq \mathcal{P}(X_0)$，即 $\forall k < \omega$，$V_{n+k} \nsubseteq X_k$，故 $\forall n < \omega$，都有 $V_\omega \nsubseteq X_n$，故 $V_\omega \notin X_\omega$

但要严格地说的话得找到一个东西定义 V_ω 然后证明它的相对化在 X_ω 不满足

另一方面，$V_0 \subseteq X_0 \Rightarrow V_n \subseteq X_n$，于是 $V_\omega \subseteq X_\omega$

令 $G : \omega \to \mathrm{WF}$ 为 $G(n) = V_n$

验证 G 相对于 X_ω 是绝对的，G 的任何一个片段都是有穷的，因此片段的值域都在 X_ω 中，因为 X_ω 对于任何有穷集合封闭

注：当 $M \models \mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$，我们知道递归函数 G 的绝对性，此时 $X_\omega \not\models$ Rep，然而 X_ω 的任何有穷子集都属于 X_ω，故而对任何 $f:\omega\to X_\omega$，有 $f(\{0,\dots,n\})\in X_\omega$，可以证明 G 的绝对性（练习）

V_ω 被公式 $\eta(x):\exists n\in\omega(x\in G(n))$

(V_ω 被"$\alpha\in V_\omega$"定义，但是 X_ω 不一定认为 V_ω 是集合，必需用 X_ω 认可的方式定义)

V_ω 存在指的是

$$\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow\eta(x))$$

由于 G 是绝对的，$\eta(x)$ 绝对，因此 X_ω 认为"V_ω 存在"当且仅当 $\exists y\in X_\omega\forall x\in X_\omega(x\in y\leftrightarrow\eta(x))$

由于 $V_\omega\subseteq X_\omega$ 且 X_ω 是传递的，以上的公式等价于

$$\exists y\in X_\omega\forall x(x\in y\leftrightarrow\eta(x))$$

而这样的 y 只能是 V_ω，而 $V_\omega\notin X_\omega$，因此以上句子不成立

即 ZFC $\vdash$ "$X_\omega\models$ ZC $+$ V_ω不存在"

证明"x 存在且 $\mathrm{trcl}(x)$ 不存在"，假设 $V\models$ ZFC，令 $t(u)=\{u\}$，$x_n=t^n(n)$，$\mathrm{rank}(x_n)=2n$，$x=\{x_n\mid n<\omega\}$，令 $X_0=x$，$X_1=\bigcup X_0$，…，$X_{n+1}=\bigcup X_n$，则 $\mathrm{trcl}(x)=\bigcup_{n<\omega}X_n$

令 $Y_0=\omega\cup X_0$，$Y_{n+1}=\mathcal{P}(Y_n)\cup Y_n\cup X_n$，验证 $Y_\omega=\bigcup_{n<\omega}Y_n$ 是传递的，验证 $Y_\omega\models$ ZC，验证 $x\in Y_1\subseteq Y$，验证 $\mathrm{trcl}(x)=\bigcup_{n<\omega}X_n\notin Y$，即验证 $\forall n\exists m(X_m\not\subseteq Y_n)$

后面类似，证明 $Y_\omega\models$ " $\mathrm{trcl}(x)$不存在" □

Exercise 1.10.11 (7.10.11). 对任意 $\kappa>\omega$，$H_\kappa\models Z-\mathrm{Pow}$

证明. H_κ 传递 $\Rightarrow$ 外延公理

H_κ 非空 $\Rightarrow$ 存在公理

由于 $x\in H_\kappa\leftrightarrow x\subset H_\kappa\wedge|x|<\kappa$，故分离公理 + 替换公理成立

H_κ 对 $\bigcup x$ 与 $\{x,y\}$ 封闭，故对集公理 + 并集公理成立

H_κ 满足以上公理 $\Rightarrow \emptyset,\omega,x^+,x\cap y$ 的绝对性

由于 $\omega\in H_\kappa$，$H_\kappa\models$ Inf

$\emptyset, x\cap y$ 的绝对性，$H_\kappa \models Fnd$

选择公理：$\forall x \in H_k \exists R \in H_\kappa (R\text{是 } X \text{ 的良序})^{H_\kappa}$

已知，若 $x, R \in H_\kappa$，则 R 是 x 的良序当且仅当 $(R\text{是 } X \text{ 的良序})^{H_\kappa}$ $(\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow})$ □

Exercise 1.10.12 (7.10.12). "R 是良基的" 对 ZF − Pow 的所有传递模型是绝对的

证明. "R 是良基的" 被 $\varphi := \forall x (x \neq \emptyset \to \exists y \in x \neg \exists z \in x (zRy))$

是 Π_1 句子，只要证明 $\varphi^M \to \varphi$，由于 rank 是绝对的，对于任何 x,rank$(x) = \alpha$，若对于任何 $y \in x$ 都存在 $z \in x$ 使得 zRy， □

Exercise 1.10.13 (7.10.13). $(\mathrm{On}, \in)$ 满足哪些公理

证明. 存在公理，外延公理

无穷公理，选择公理

分离公理，对集，并集，幂集，替换不满足， □

Exercise 1.10.14 (7.10.14). 证明在 $V_{\omega+\omega}$ 中，替换公理不成立

证明. 考虑 $f : n \mapsto \omega + n$ □

Exercise 1.10.15 (7.10.15). $X \in \mathrm{WF}$, 则 X 可良序化当且仅当 $(X\text{可良序化})^{\mathrm{WF}}$，由此证明 AC 蕴含 $(AC)^{\mathrm{WF}}$，及 $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}^-) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$

证明. 因为 $X \in \mathrm{WF}$，因此 X 是集合，而 X 上的任何良序关系 $R \subseteq X \times X \in \mathrm{WF}$，因此 $R \in \mathrm{WF}$

因为 $\mathrm{ZF}^- \vdash (\mathrm{ZF})^{\mathrm{WF}}$，所以 $\mathrm{ZFC}^- \vdash (\mathrm{ZFC})^{\mathrm{WF}}$，因此 $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}^-) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ □

Exercise 1.10.16 (7.10.16). 假设 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ 是 ZF 公理的有穷子集，并且 F 可以推出 ZF 的所有公理。同时假设 β 是使得 V_β 满足 F 的最小的 β，证明：ZF 的定理"存在 α 使得 $V_\alpha \models F$"在 V_β 中不成立，所以第一个满足 F 的 V_β 不是 ZF 模型

证明. 若 ZF $\vDash (\exists\alpha(V_\alpha \vDash F))^{V_\beta}$，即 $\exists\alpha \in V_\beta((F)^{V_\alpha})^{V_\beta}$，如果能证明 $\alpha \mapsto V_\alpha$ 对 V_β 绝对，那么由于 $\alpha \in V_\beta$，$V_\alpha \in V_\beta$，于是 $((F)^{V_\alpha})^{V_\beta} = F^{V_\alpha \cap V_\beta} = F^{V_\alpha}$，这与 β 最小矛盾。

因为 $\alpha \mapsto V_\alpha$ 是递归定义的，只需证明 $\mathcal{P}(x), \bigcup x$ 对 V_β 绝对，因为 V_β 传递，所以 $\bigcup x$ 对 V_β 绝对。

对于任意 $x \in V_\beta$, 因为 V_β 传递且 $V_\beta \vDash \mathrm{Pow}$, 所以 $\mathcal{P}^{V_\beta}(x) = \mathcal{P}(x) \cap V_\beta = \mathcal{P}(x)$，因此 $\mathcal{P}(x)$ 对 V_β 绝对。所以 $\alpha \mapsto V_\alpha$ 对 V_β 绝对。 □

Exercise 1.10.17 (7.10.18). 对任意公式 φ，存在序数的无界闭集 C_φ 使得对任意 $\alpha \in C_\varphi, V_\alpha$ 反映 φ，即 φ 对 V_α 绝对

证明. 令 $\psi := \forall x \exists y \forall u(u \in x \leftrightarrow u \subseteq y)$，于是 $C = \{\alpha \mid V_\alpha \text{反映} \varphi \wedge \psi\}$ 是极限序数的集合，同时又是闭的，因此是一个无界闭集。 □

Exercise 1.10.18 (3.10.19). 假设 $\mathbf{M}$ 是集合论的传递模型

1. 如果 $|M| \vDash |X| < |Y|$，则 $|X| < |Y|$

证明. 1.

□

2 可构成集

2.1 可定义性与哥德尔运算

Definition 2.1. 令 M 是集合，$X \subseteq M^n$ 是 **相对于 M 由 ψ 通过参数可定义的**是指存在 $y_1, \ldots, y_m \in M$ 使得

$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi^M(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\}$$

简称 X 为 M 的可定义子集

Def(M) 为 M 的可定义子集, $\bar{a} \in X \in \mathrm{Def}(M) \Leftrightarrow \exists\psi(\bar{x}, \bar{y})\exists\bar{b} \in M^m M \vDash \psi(\bar{a}, \bar{b})$

Def(M) 看起来不是个集合，因为量词在公式上

Remark.

- $\text{Def}(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$
- $|\text{Def}(M)| \leq |M| + \aleph_0$ (AC)
- $\text{Def}(M)$ 的定义是一个"2 阶"表达式
- 在 ZF 下，该"2 阶"表达式可形式化为一个一阶表达式

  $\text{FORM}(x)$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{FORM}(n) \Leftrightarrow n$ 是某公式 φ 的编码，于是 $\exists\varphi \Leftrightarrow \exists x\text{FORM}(x)$
- 对任意公式 ψ，ψ^M 都是 Δ_0 公式
- 故 $\text{Def}(M)$ 中的集合被某个 Δ_0 公式定义

  $X = \{\bar{a} \mid \bar{a} \in M^n \wedge \psi^M(\bar{a}, \bar{b})\}$
- 本节的目标是刻画 $\text{Def}(M)$

Definition 2.2. 以下运算称为 **哥德尔运算**

$$
\begin{aligned}
&G_1(X,Y) = \{X,Y\}\\
&G_2(X,Y) = X \times Y\\
&G_3(X,Y) = \in\restriction X \times Y\\
&G_4(X,Y) = X - Y\\
&G_5(X,Y) = X \cap Y\\
&G_6(X,Y) = \bigcup X\\
&G_7(X,Y) = \text{dom}(X)\\
&G_8(X,Y) = \{(x,y) \mid (y,x) \in X\}\\
&G_9(X,Y) = \{(x,y,z) \mid (x,z,y) \in X\}\\
&G_{10}(X,Y) = \{(x,y,z) \mid (y,z,x) \in X\}
\end{aligned}
$$

对任意集合 M，$\text{cl}_G(M)$ 表示 M 的 **哥德尔闭包**

Definition 2.3. 满足以下条件的公式 ψ 称为 **范式**

1. ψ 中的逻辑符号只有 $\neg, \wedge, \exists$

2. $=$ 不出现

3. 若 $x_i \in x_j$ 出现在 ψ 中，则 $i \neq j$

4. $\exists$ 只以这样的形式出现：$\exists x_{m+1} \in x_i \varphi(x_1, \dots, x_{m+1})$，其中 $1 \leq i \leq m$

Lemma 2.4. 每一 Δ_0 公式都可改写为范式，即若 ψ 是 Δ_0 公式，则存在一个范式 ψ' 对任意包含外延公理的句子集 Σ

$$\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$$

证明. $\neg, \wedge, \exists$ 是功能完全的，可以假设 ψ 仅含这些

公式 $x_i = x_j$ 在外延公理下等价于 $\forall u \in x_i(u \in x_j) \wedge \forall u \in x_j(u \in x_i)$

$x_i \in x_i \Leftrightarrow \exists u \in x_i(u = x_i)$

约束变元的下标的改变不影响公式的一阶性质

$$\forall \bar{x}(\exists y \varphi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \exists z \varphi(\bar{x}, z))$$

$\square$

Theorem 2.5. 对任意的 Δ_0 公式 $\psi(x_1, \dots, x_n)$，存在函数 G，G 是哥德尔运算的复合，并且对任意 $Y_1, \dots, Y_n$，$G(Y_1, \dots, Y_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid (\bigwedge x_i \in Y_i) \wedge \psi(x_1, \dots, x_n)\}$

证明. 不妨设 ψ 是范式，对 ψ 的复杂度归纳

1. $\psi(x_1, \dots, x_n)$ 是原子公式，此时 ψ 形如 $x_i \in x_j, i \neq j$，对 n 用归纳法证明

   $x_1 \in x_2$，有 $\psi(x_1, x_2)$，$\theta(x_1, \dots, x_{10})$ 在此处对应的 G 不是一个东西，因为它们定义出来的集合不一样，因此 G 不一样

   (a) 如果 $n = 2$，则 $\psi(x_1, x_2)$ 为 $x_1 \in x_2$ 或 $x_2 \in x_1$

   - 若 ψ 为 $x_1 \in x_2$，令 $G = G_3$
   - 若 ψ 为 $x_2 \in x_1$，令 $G(Y_1, Y_2) = G_8(G_3(Y_2, Y_1), Y_2)$

(b) 若 $n > 2$ 且 $i, j \neq n$，则 $\psi = \psi(x_1, \dots, x_{n-1})$

由归纳假设，存在 $n-1$ 元哥德尔运算 G'，令 $G(Y_1, \dots, Y_n) = G_2(G'(Y_1, \dots, Y_{n-1}), Y_n)$

(c) $n > 2$，$i, j \neq n-1$

则 $\psi = \psi(x_1, \dots, x_{n-2}, x_n)$，令 $u_1 = x_1, \dots, u_{n-2} = x_{n-2}, u_{n-1} = x_n, u_n = x_{n-1}$，令 $\theta(\bar{u}) = \psi(\bar{x}) = \psi(\bar{u})$, 但它们定义的集合不同，加了个变元

设 ψ 为 $x_{n-2} \in x_n$

则 $\psi(\bar{x})$：第 $n-2$ 个分量属于第 $n-1$ 个分量

$\theta(\bar{u})$：第 $n-2$ 个分量属于第 $n-1$ 个分量

由 1.2 可知，存在哥德尔运算 $G_\theta(Y_1, \dots, Y_n) = \{(a_1, \dots, a_n) : \bigwedge_{k=1}^n a_k \in Y_k \wedge \theta(\bar{a})\}$，将 $((a_1, \dots, a_{n-2}), a_{n-1}, a_n)$ 看作三元组

则 $G' = G_9(G_\theta(Y_1, \dots, Y_n), Y_n)$

令 $G(Y_1, \dots, Y_n) = G'(Y_1, \dots, Y_{n-2}, Y_n, Y_{n-1})$

(d) 设 $n > 2, i = n-1, j = n$，$x_{n-1} \in x_n$

令 $G'(Y_1, \dots, Y_n) = G_3(Y_{n-1}, Y_n) \times (Y_1 \times \dots \times Y_{n-2})$

$(x_{n-1}, x_n, (x_1, \dots, x_{n-2}))$ 是三元组, 故 $G = G_{10}(G'(Y_1, \dots, Y_n), Y_n)$

(e) $n > 2, i = n, j = n-1$，类似

2. 设 $\psi(x_1, \dots, x_n)$ 是 $\neg\varphi(x_1, \dots, x_n)$，

$$G'(Y_1, \dots, Y_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \bigwedge_{i=1}^n x_i \in Y_i \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n)\}$$

令 $G(Y_1, \dots, Y_n) = Y_1 \times \dots \times Y_n - G'(Y_1, \dots, Y_n)$

3. 设 $\psi(x_1, \dots, x_n)$ 为 $\varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x})$

设 G', G'' 分别对应 φ_1, φ_2, 则 $G(Y_1, \dots, Y_n) = G'(Y_1, \dots, Y_n) \cap G''(Y_1, \dots, Y_n)$

4. 设 $\psi(x_1, \dots, x_n)$ 形如 $\exists x_{n+1} \in x_i \varphi(x_1, \dots, x_{n+1})$

设 G_φ 对应 φ，则不难找到

$$\varphi'(x_1, \dots, x_{n+1}) = \varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \in x_i$$

对应的哥德尔运算的复合 G'，显然

$$\psi(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow \exists x_{n+1}(\varphi'(x_1,\dots,x_{n+1}))$$

$$\mathrm{dom}(G'(Y_1,\dots,Y_n,Y_{n+1})) = \{(x_1,\dots,x_n) \mid \exists x_{n+1}(\bigwedge_{i=1}^{n+1} x_i \in Y_i \wedge \varphi(x_1,\dots,x_{n+1} \wedge x_{n+1} \in x_i))\}$$

注意到 $x_{n+1} \in x_i \wedge x_i \in Y_i \Rightarrow x_{n+1} \in \bigcup Y_i$

令 $G(Y_1,\dots,Y_n) = \mathrm{dom}(G'(Y_1,\dots,Y_n,\bigcup Y_i))$

$\square$

Corollary 2.6. 如果 M 传递且 $cl_G(M) = M$，则对任意 Δ_0 公式 $\psi(x,y_1,\dots,y_m)$，对任意集合 $X \in M$，对任意 $y_1,\dots,y_m \in M$，如果

$$Y = \{x \in X \mid \psi(x,y_1,\dots,y_m)\}$$

则 $Y \in M$，注意到 $\psi = \psi^M$，则有

$$\forall \bar{y} \in M \forall X \in M \exists Y \in M \forall u \in M(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \psi^M(u,\bar{y}))$$

这是 $\psi(x,\bar{y})$ 对应的分离公理，故 Δ_0-分离公理模式在 M 中为真

证明. $y_1,\dots,y_m \in M \overset{G_1}{\Longrightarrow} \{y_1\},\dots,\{y_m\} \in M$

设 $G(Y_0,Y_1,\dots,Y_m)$ 是 $\psi(x,\bar{y})$ 对应的哥德尔运算的组合，则 $Y = \mathrm{dom}^{(m)}(G(X,\{y_1\},\dots,\{y_m\}))$

$\square$

Remark. 以上证明给出了一个更强的结论：若 $\psi(x,\bar{y})$ 是一个 Δ_0 公式，则存在哥德尔运算的复合 G 使得

$$G(X,\{y_1\},\dots,\{y_m\}) = \{x \in X \mid \psi(x,\bar{y})\}$$

设 M 是集合，对任意 ψ，ψ^M 是 Δ_0 公式

Lemma 2.7. 如果 $G(X_1,\dots,X_n)$ 是哥德尔运算的复合，则 $Z = G(X_1,\dots,X_n)$ 等价于一个 Δ_0-公式，故 G 作为函数相对于 ZF 的传递模型是绝对的

证明. 对 G 的复杂度归纳证明绝对

1. G 是某个 G_i

   $G_1, G_2, G_4, G_5, G_6, G_7$ 已证

   $G_3(X, Y) = \in \restriction X \times Y$，取 $\psi(X, Y, Z)$ 为

   $$\forall u \in Z \exists x \in X \exists y \in Y (x \in y \wedge z = (x, y)) \wedge \forall x \in X \forall y \in Y (x \in y \to \exists z \in Z (z = (x, y)))$$

   于是 $\psi(X, Y, Z) \Leftrightarrow Z = G_3(X, Y)$

   $\mathrm{ZF} \vdash \forall X \forall Y \exists! Z \psi(X, Y, Z)$，若 $M \vDash \mathrm{ZF}$，则

   $$\forall x \in M \forall y \in M \exists! z \in M \psi^M(X, Y, Z)$$

   即 $X, Y \in M \Rightarrow G_3(X, Y) \in M$

   $G_8(X, Y) = \{(x, y) \mid (y, z) \in X\}$，令 $\psi(X, Y, Z)$ 为

   $$\begin{aligned} &\forall u \in Z \exists x \in \bigcup X \exists y \in \bigcup X \exists w \in X (w = (x, y) \wedge u = (y, x)) \\ &\wedge \forall x \in \bigcup X \forall y \in \bigcup X \forall w \in X (w = (x, y) \to \exists u \in Z (u = (y, x))) \\ &\wedge (Y = Y) \end{aligned}$$

   因为 $\{y, \{x, y\}\} \in X \Rightarrow x, y \in \bigcup X$

   同理 $M \vDash \mathrm{ZF} \Rightarrow (X, Y \in M \Rightarrow G_8(X, Y) \in M)$

   G_9, G_{10} 与 G_8 类似

对 $G(X_1, \ldots, X_n)$ 的复杂度归纳证明

1. $u \in G(X_1, \ldots, X_n)$ 是 Δ_0 的
2. 若 φ 是 Δ_0 的，则 $\forall u \in G(X_1, \ldots, X_n) \varphi$ 是 Δ_0 的
3. $Z = G(X_1, \ldots, X_n)$ 是 Δ_0 的

设 $G(X_1, \ldots, X_n) = G_i(F_1(X_1, \ldots, X_n), F_2(X_1, \ldots, X_n))$

1. $u \in G_1(F_1, F_2) \Leftrightarrow u = F_1 \vee u = F_2$

   $u \in G_2(F_1, F_2) \Leftrightarrow \exists x \in F_1 \exists y \in F_2 (u = (x, y))$

$u \in G_3(F_1, F_2) \Leftrightarrow \exists x \in F_1 \exists y \in F_2 (x \in y \wedge u = (x, y))$

$u \in G_4(F_1, F_2) \Leftrightarrow u \in F_1 \wedge u \notin F_2$

$u \in G_5(F_1, F_2) \Leftrightarrow u \in F_1 \wedge u \in F_2$

$u \in G_6(F_1, F_2) \Leftrightarrow \exists x \in F_1 (u \in x)$

$u \in G_7(F_1, F_2) \Leftrightarrow \exists x \in F_1 \exists y \in \bigcup F_1 (x = (u, y))$

$u \in G_8(F_1, F_2) \Leftrightarrow \exists x \in F_1 \exists y \in \bigcup F_1 \exists z \in \bigcup F_2 (x = (y, z) \wedge u = (z, y))$

(练习)

2. $\forall u \in G_1(F_1, F_2)\varphi \Leftrightarrow (u = F_1 \to \varphi) \wedge (u = F_2 \to \varphi)$

   $\forall u \in G_2(F_1, F_2)\varphi \Leftrightarrow \forall x \in F_1 \forall y \in F_2 (u = (x, y) \to \varphi)$

   $\forall u \in G_3(F_1, F_2)\varphi \Leftrightarrow \forall x \in F_1 \forall y \in F_2 (u = (x, y) \wedge x \in y \to \varphi)$

   $\forall u \in G_4(F_1, F_2)\varphi \Leftrightarrow \forall u \in F_1 (u \notin F_2 \to \varphi)$

   (练习)

3. $Z = G(X_1, \dots, X_n)$ 可表示为

$$\forall u \in Z (u \in G(\overline{X})) \wedge u \in G(\overline{X})(u \in Z)$$

□

Remark. 我们证明了“$u \in G(x)$”与“$\forall u \in G(\bar{x})\varphi$”是 Δ_0 公式

Theorem 2.8. 对任意传递集

$$\text{Def}(M) = cl_G(M \cup \{M\}) \cap \mathcal{P}(M)$$

证明. $\subseteq$: 设 $X \in \text{Def}(M)$ 形如 $\{x \in M \mid \psi^M(x, y_1, \dots, y_m)\}$，$\psi$ 公式，$\bar{y} \in M$
由于 ψ^M 是一个 Δ_0 公式，故存在哥德尔运算的组合 G 使得

$$G(M, \{y_1\}, \dots, \{y_m\}) = \{x \in M \mid \psi^M(x, y_1, \dots, y_m)\}$$

故 $X \in \text{cl}_G(M \cup \{M\})$

$\supseteq$: 设 $y_1, \dots, y_m \in M$ 以及哥德尔运算的组合 G 使得

$$X = G(M, \{y_1\}, \dots, \{y_m\})$$

且 $X \subseteq M$，存在 Δ_0 公式 $\varphi(u, M, y_1, \dots, y_m)$ 使得

$$\varphi(u, M, \bar{y}) \Leftrightarrow u \in G(M, \bar{y})$$

显然 $X = \{u \mid \varphi(u, M, y_1, \dots, y_m)\}$，将 φ 中形如 “$\forall x \in M$”，“$\exists x \in M$” 的量词改为“$\forall x$”, “$\exists x$”，则 φ 变为 ψ

由于 M 是传递模型，受囿量词（如 $\exists x \in y$）关于 M 的相对化不改变，故 $\psi^M = \varphi$

即 $X = \{u \in M \mid \psi^M(u, M, \bar{y})\} \in \mathrm{Def}(M)$ $\square$

Remark.

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall X((X\text{传递}) \to \forall u(u \in \mathrm{Def}(X) \leftrightarrow u \in \mathrm{cl}_G(X \cup \{X\}) \wedge u \subseteq X))$$

若 $M \vDash \mathrm{ZF}$

$$\forall X \in M((X\text{传递})^M \to \forall u\left((u \in \mathrm{Def}(X))^M \leftrightarrow (u \in \mathrm{cl}_G(X \cup \{X\}) \wedge u \subseteq X)\right)^M)$$

Lemma 2.9. 如果（类）M 是 ZF 的传递模型，则类函数 $X \mapsto \mathrm{Def}(X)$ 相对于 M 是绝对的

证明. 关键要证明 $X \mapsto \mathrm{cl}_G(X)$ 的绝对性

递归定义函数 $F : \omega \times V \to V$ 为

$$F(0, X) = X$$
$$F(n+1, X) = F(n, X) \cup \{G_i(X, Y) \mid X, Y \in F(n, X), i = 1, \dots, 10\}$$

则 $\mathrm{cl}_G(X) = \bigcup \mathrm{ran}(F(-, X))$

故只需验证 F 的绝对性，只需验证 $F(n)$ 到 $F(n+1)$ 的运算绝对

将 $F(n, X)$ 看作变元 W，只需验证函数

$$W \cup \{G_i(X, Y) \mid X, Y \in W, i = 1, \dots, 10\}$$

绝对

只需验证 $Z=G(W)=\{G_i(X,Y)\mid X,Y\in W, i=1,\dots,10\}$ 绝对，由

$$\forall u\in Z\exists x,y\in W(\bigvee_{i=1}^{10} u=G_i(x,y))\land\forall x,y\in W\exists u\in z(\bigvee_{i=1}^{10} u=G_i(x,y))$$

故 $Y=\mathrm{cl}_G(X)$ 是 Δ_0 公式, M 作为 ZF 的传递模型, 对 G_i 封闭, 故 $\mathrm{cl}_G(X)\in M$，因此它作为函数绝对

由于 $M\vDash$ ZF，若 $X\in M$ 传递，则 $\forall u\in M$ 有

$$\begin{aligned} V\vDash(u\in \mathrm{Def}(X))^M &\leftrightarrow[u\in \mathrm{cl}_G(X\cup\{X\})\land u\subseteq X]^M\\ &\leftrightarrow(u\in \mathrm{cl}_G(X\cup\{X\}))^M\land(u\subseteq X)^M\\ &\leftrightarrow u\in \mathrm{cl}_G(X\cup\{X\})\land u\subseteq X\\ &\leftrightarrow u\in \mathrm{Def}(X)\end{aligned}$$

最后 $Z=\mathrm{Def}(X)$ 当且仅当 $\varphi(X,Z)$:

$$\forall u\in Z(u\in \mathrm{Def}(X))\land\forall u(u\in \mathrm{Def}(X)\to u\in Z)$$

它的相对化只在与 $\forall u$

设 $X,Z\in M$，显然 $\varphi(X,Z)\to\varphi^M(X,Z)$

另一方面，$u\in \mathrm{Def}(X)\Rightarrow u\in \mathrm{cl}_G(X\cup\{X\})\subseteq M\Rightarrow u\in M$，因为哥德尔函数是绝对的

最后，若 $X\in M$ 传递，则 $\mathrm{Def}(X)\in M$，这是因为

$$\mathrm{Def}(X)=\{u\mid u\in \mathrm{cl}_G(X\cup\{X\})\land u\subseteq X\}=\{u\in M\mid(u\in \mathrm{cl}_G(X\cup\{X\}))^G\land(u\subseteq^M X)\}$$

由分离公理，$\mathrm{Def}(X)\in M$

故 $X\mapsto \mathrm{Def}(X)$ (X 传递) 是绝对的 □

Lemma 2.10. 对任意传递集

1. $\mathrm{Def}(M)\subseteq\mathcal{P}(M)$
2. $M\subseteq \mathrm{Def}(M)$

3. *若 $X \subseteq_f M$，则 $X \in \mathrm{Def}(M)$*

4. *若 AC 且 $|M| \geq \omega$, 则 $|\mathrm{Def}(M)| = |M|$*

证明. 2. 若 $a \in M$，则 $a \subseteq M$，且

$$a = \{u \in M \mid u \in a\} = \{u \in M \mid (u \in a)^M\} \in \mathrm{Def}(M)$$

3. 对 n 归纳证明：$a_1, \dots, a_n \in M \Rightarrow \{a_1, \dots, a_n\} \in M$

   第 0 步：空集是可以定义的

   第 1 步：若 $a \in M$，$\{a\}$ 来自 G_1

   第 $n+1$ 步: $\{a_1, \dots, a_n\}, \{a_{n+1}\} \in \mathrm{Def}(M)$, 故 $\{\{a_1, \dots, a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \in \mathrm{Def}(M)$，故 $\{a_1, \dots, a_{n+1}\} \in \mathrm{Def}(M)$

4. $x \in M \Rightarrow \{x\} \in \mathrm{Def}(M) \Rightarrow |M| \leq |\mathrm{Def}(M)|$

   若 $X \in \mathrm{Def}(M)$,则存在 G 以及 $a_1, \dots, a_n \in M$ 使得 $X = G(M, a_1, \dots, a_n)$，$G$ 是哥德尔运算的组合，只有 ω 个，故 $|\mathrm{Def}(M)| \leq |M| \cdot \aleph_0 = |M|$

□

2.2 哥德尔的 L

Definition 2.11. 对任意 α，递归定义 L_α

1. $L_0 = \emptyset$

2. $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$

3. 对与极限序数，$L_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} L_\beta$

定义 $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L_\alpha$，$\mathbf{L}$ 的元素称为 **可构成集**

Lemma 2.12. *对任意序数 α*

1. *L_α 传递*

2. *$\alpha < \beta \Rightarrow L_\alpha \subseteq L_\beta$*

3. $L_\alpha \subseteq V_\alpha$

传递集有 $M \subseteq \mathrm{Def}(M)$

证明. 1. 归纳

(a) 空集传递

(b) $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$
$a \in L_{\alpha+1} \Rightarrow a \subseteq L_\alpha \subseteq \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$

2. $L_\alpha \subseteq \mathrm{Def}(L_\alpha)$

□

Definition 2.13.

$$\mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) := \min\{\beta \mid x \in L_{\beta+1}\}$$

Lemma 2.14. $\forall\alpha$

$$L_\alpha = \{x \in \mathbf{L} \mid \mathit{rank}_{\mathbf{L}}(x) < \alpha\}$$

Definition 2.15. $x \in L_{\mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x)+1}$
若 $\mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) < \alpha$,$L_{\mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x)+1} \subseteq L_\alpha \Rightarrow x \in L_\alpha$
若 $x \in L_\alpha$, $\alpha \geq \mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) + 1$,$\alpha > \mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x)$

Lemma 2.16. $\forall\alpha$

1. $L_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$

2. $\alpha \in \mathbf{L} \wedge \mathit{rank}_{\mathbf{L}}(\alpha) = \alpha$

证明. 1. 归纳

(a) $L_0 \cap \mathrm{On} = 0$

(b)

$$\begin{aligned} L_{\alpha+1} \cap \mathrm{On} &= \{x \in \mathrm{On} \mid \mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) < \alpha + 1\} \\ &= (L_\alpha \cap \mathrm{On}) \cup \{x \in \mathrm{On} \mid \mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) = \alpha\} \\ &= \alpha \cup \{x \in \mathrm{On} \mid \mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) = \alpha\} \end{aligned}$$

只需证明 $\{x \in \mathrm{On} \mid \mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) = \alpha\} = \{\alpha\}$，因为 $\alpha \subseteq L_\alpha$

在基础公理下“x 是序数”是一个 Δ_0 公式 φ，故若 $x \in L_\alpha$,$\varphi(x) \leftrightarrow \varphi^{L_\alpha}(x)$

故 $\alpha = \{x \in L_\alpha \mid \varphi(x)\} = \{x \in L_\alpha \mid \varphi^{L_\alpha}(x)\} \in \mathrm{Def}(L_\alpha)$，故 $\alpha \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$

同时 $L_{\alpha+1} \cap \mathrm{On} \subseteq V_{\alpha+1} \cap \mathrm{On} = \alpha + 1$

(c) 极限：作业

$L_\alpha \cap \mathrm{On} = \mathrm{On} \cap \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta = \alpha$

□

Lemma 2.17. $\forall \alpha \in \mathrm{On}$

1. $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$
2. L_α 的任意有穷子集属于 $L_{\alpha+1}$

证明. 1. $L_\alpha = \{x \in L_\alpha \mid x = x\} = \{x \in L_\alpha \mid (x = x)^{L_\alpha}\} \in \mathrm{Def}(L_\alpha)$

2. 2.10

□

不能断言实数属于 $\mathbf{L}$，也不能断言 $\mathbf{L}$ 关于 Pow 封闭

Lemma 2.18. 1. $\forall n \in \omega$, $L_\alpha = V_\alpha$

2. $L_\omega = V_\omega$

Lemma 2.19. 如果 AC，则 $\forall \alpha \geq \omega$, $|L_\alpha| = |\alpha|$

证明. 对 $\alpha \geq \omega$ 归纳

- $\alpha = \omega$
- 若 $\alpha = \beta + 1$

$$|L_\alpha| = \left|\mathrm{Def}(L_\beta)\right| = \left|L_\beta\right| = |\beta| = |\alpha|$$

- 若 α 极限序数, $|L_\beta| = \left|\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta\right| \leq |\alpha|$

  另一方面，$\alpha \subseteq L_\alpha$

$\square$

Lemma 2.20 (**L** 的反映定理)**.** 对于任意有穷公式集 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$，对任意 $\alpha \in \mathrm{On}$，存在 $\beta \geq \alpha$ 使得 F 对 L_β 和 $\mathbf{L}$ 绝对

证明. 目标：找到 L_β 使得对每个形如 $\exists x\varphi(x,\bar{y})$ 的公式及每一组参数 $\bar{b} \in L_\beta$ 有 $\mathbf{L} \vDash \exists x\varphi(x,\bar{b}) \Leftrightarrow L_\beta \vDash \exists x\varphi_j(x,\bar{b})$

设 $\varphi_i \in F$ 且形如 $\exists y\varphi_j(x,\bar{y})$，定义函数 h_i 如下

- 任取 $\bar{y} \in \mathbf{L}$，令 $U = \{x \mid \varphi_j(x,\bar{y})\}$
- 若 $U = \emptyset$，则 $h_i(\bar{y}) = 0$
- 若 $U \neq \emptyset$，则存在最小的 ξ 使得 $U \cap L_\xi \neq \emptyset$，此时令 $h_i(\bar{y}) = L_\xi$

于是函数 h_i 满足

$$\forall\bar{y}(\exists y\varphi_j(x,\bar{y}) \to \exists x \in h_i(\bar{y})\varphi_j(x,\bar{y}))$$

定义 h_F 为

$$h_F(y_1, \dots, y_m) = \bigcup\{h_i(y_1, \dots, y_m) : i = 1, \dots, n\}$$

则 h_F 满足：对每个形如 $\exists x\varphi_j(x,\bar{y})$ 的公式，有

$$\forall\bar{y}(\exists x\varphi_j(x,\bar{y}) \to \exists x \in h_F(\bar{y})\varphi_j(x,\bar{y}))$$

任取 α，定规定义 L_α^i，$i \in \omega$，如下

- $L_\alpha^0 = L_\alpha$
- $L_\alpha^{i+1} = V_\alpha^i \cup \bigcup\{h_F(\bar{y}) \mid \bar{y} \in V_\alpha^i\}$

令 $L_\beta = \bigcup_{i\in\omega} L_\alpha^i$ $\square$

Theorem 2.21 (ZF)**.** $\boldsymbol{L}$ 是 ZF 的模型

证明.

- 存在公理
- 外延公理（$\mathbf{L}$ 传递）
- 对集公理

  若 $a, b \in \mathbf{L}$，则存在 α 使得 $a, b \in L_\alpha$，因此 $\{a, b\} \in L_{\alpha+1}$

- 并集公理

  $y = \bigcup x$ 被 Δ_0 公式 $\psi(x, y)$ 定义，相对化为 $\forall x \in \mathbf{L}\, \exists y \in \mathbf{L}\, \psi(x, y)$，只需验证 $x \in \mathbf{L} \Rightarrow \bigcup x \in \mathbf{L}$

  若 $x \in L_\alpha$，则 $\bigcup x = \{y \mid \exists u \in x(y \in u)\}$，由 L_α 的传递性，$\bigcup x = \{y \in L_\alpha \mid [\exists u \in x(y \in u)]^{L_\alpha}\} \in L_{\alpha+1}$

  $\bigcup x$ 是哥德尔运算，$x \in L_\alpha \Rightarrow \bigcup x \in \mathrm{Def}(L_\alpha)$

- 分离公理 $\forall x \in \mathbf{L}\, \exists y \in \mathbf{L}\, \forall u \in \mathbf{L}(u \in y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^{\mathbf{L}}(u))$

  断言：$\forall \alpha \exists \beta > \alpha$ 使得 φ 相对于 L_β 和 $\mathbf{L}$ 绝对（练习）($\mathbf{L}$ 的反映定理)

  设 $x \in L_\alpha$,$y = \{u \mid u \in X \wedge \varphi^{L_\beta}(u)\} = \{u \in L_\beta \mid u \in x \wedge \varphi^{L_\beta}(u)\} \in L_{\beta+1}$

  显然 $\forall u \in \mathbf{L}(u \in y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^{L_\beta}(u) \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^{\mathbf{L}}(u))$

- $\mathbf{L}$ 满足以上公理，$x^+, \emptyset, \omega$ 均绝对

  故无穷公理，基础公理成立

- 幂集公理：$\forall x \in \mathbf{L}\, \exists y \in \mathbf{L}\, \forall u \in \mathbf{L}(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$, $y = \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{L}$，只需验证 $\mathbf{L} \cap \mathcal{P}(x) \in \mathbf{L}$

  设 $x \in L_\alpha$, $\mathcal{P}(x) \cap \mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}$ 是集合

  存在充分大的 $\beta > \alpha$ 使得 $\mathcal{P}(x) \cap \mathbf{L} = \mathcal{P}(x) \cap L_\beta$

  $y = \{u \in L_\beta \mid (u \subseteq x)^{L_\beta}\} = \{u \in \mathbf{L} \mid u \subseteq x\} = \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{L} \in L_{\beta+1} \subseteq \mathbf{L}$

- 替换公理

  $\forall x \in \mathbf{L}\, \exists! y \in \mathbf{L}\, \psi^{\mathbf{L}}(x, y) \to \forall A \in \mathbf{L}\, \exists B \in \mathbf{L}\, \forall a \in A \exists b \in B \psi^{\mathbf{L}}(a, b)$

  任取 $A \in L_\alpha$，取 $\beta > \alpha$ 使得

1. $\forall a \in A \exists b \in L_\beta \psi^{\mathbf{L}}(a,b)$ 因为 $\psi^{\mathbf{L}}$ 是 $\mathbf{L}$ 上的函数，$V \vDash \exists B \forall a \in A \exists b \in B \psi^{\mathbf{L}}(a,b)$，于是 $B \subseteq L$
2. ψ 相对于 L_β 和 $\mathbf{L}$ 绝对

则 $B = \{b \in \mathbf{L} \mid \exists a \in \psi^{\mathbf{L}}(a,b)\} = \{b \in L_\beta \mid \exists a \in A \psi^{L_B}(a,b)\} \in L_{\beta+1}$

□

2.3 可构成公理和相对一致性

可构成公理：$\mathbf{L} = V$

Remark.

- $\mathbf{L} \subset \mathbf{V}$
- 但不能证明 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{L}$ 的真子类，因为 $\mathrm{ZF} \vdash (\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{L}}$，因此 $\mathbf{V} = \mathbf{L} + \mathrm{ZF}$ 一致
- 将证明 $\mathbf{L}$ 是 $\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ 的模型
- $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ 为 $\forall x \exists \alpha \in \mathrm{On}(x \in L_\alpha)$
- 相对化为 $\forall x \in \mathbf{L} \exists \alpha \in \mathrm{On}^{\mathbf{L}}(x \in L_\alpha)^{\mathbf{L}}$ 等价于 $\forall x \in \mathbf{L} \exists \alpha \in \mathrm{On}(x \in L_\alpha)^{\mathbf{L}}$

Lemma 2.22. 函数 $\alpha \mapsto L_\alpha$ 对 ZF (ZF − Pow) 的任何传递模型是绝对的

证明. "$\alpha \mapsto L_\alpha$" 是递归定义的

- $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$，Def 是绝对的
- $L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$，$\bigcup$ 是绝对的

故 $\alpha \mapsto L_\alpha$ 是绝对的 □

Theorem 2.23. $\boldsymbol{L}$ 是 $\mathrm{ZF} + \boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$ 的模型

证明. $\forall x \in \mathbf{L}((x \in L_\alpha)^{\mathbf{L}} \leftrightarrow x \in L_\alpha)$ □

Theorem 2.24. 设 $\boldsymbol{M}$ 是传递真类且是 ZF − Pow 的模型，则

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{M}} \subseteq \boldsymbol{M}$$

$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathbf{L}} \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$

$\forall x \in \mathbf{L}(x \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}})$，$\mathbf{L} \vDash \forall x(x \in \mathbf{L})$

证明. $\mathbf{L}(x) := \exists\alpha(\alpha \text{ ordinal}) \wedge (x \in L_\alpha))$

$\mathbf{L}^{\mathbf{M}}(x) := \exists\alpha \in \mathbf{M}((\alpha \text{ ordinal})^{\mathbf{M}}) \wedge (x \in L_\alpha)^{\mathbf{M}})$

括号里都是绝对的，若 On, $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}$，则 $\forall x(\mathbf{L}(x) \leftrightarrow \mathbf{L}^{\mathbf{M}}(x))$

由于 $\mathbf{M}$ 是真类, 于是存在 $x \in \mathbf{M} \setminus V_\alpha$, 因此 $\text{rank}(x) > \alpha$, 由于 rank 相对于 $\mathbf{M}$ 绝对, 则 $x \in \mathbf{M} \Rightarrow x \in \text{rank}(x) \in \mathbf{M}$, 由传递性, $\alpha \in \text{rank}(x) \Rightarrow \alpha \in \mathbf{M}$

由于 $\alpha \mapsto L_\alpha$ 是绝对的，故 $\alpha \in \mathbf{M} \Rightarrow L_\alpha \in \mathbf{M} \Rightarrow L_\alpha \subseteq \mathbf{M}$，因此 $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}$ □

Definition 2.25. 如果 ZF 的传递模型 $\mathbf{M}$ 包含了所有的序数，则称 $\mathbf{M}$ 是 **内模型**

因此 $\mathbf{L}$ 是最小的内模型

Lemma 2.26 (ZF)**.** *存在 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 的有穷子集 $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ 使得序数，秩，L_α 对 $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ 的任意传递模型都是绝对的*

证明. 序数:

- 存在一个 Δ_0 公式 $\varphi(x)$（良序不是 Δ_0，但是假设了良基公理，就只用说明线序了）使得

$$\text{ZF} - \text{Pow} \vdash \text{"}x \text{ ordinal"} \leftrightarrow \varphi(x)$$

因此存在 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 的有穷子集 Δ 证明这件事, 于是 $\Delta^M \vdash (x \text{ ordinal})^M \leftrightarrow \varphi^M(x)$

若 $M \vDash \Delta$，则 $\text{ZF} \vdash \Delta^M$

故 $\text{ZF} \vdash (x \text{ ordinal})^M \leftrightarrow \varphi^M(x)$，因此 $\text{ZF} \vdash \forall x \in M((x \text{ ordinal})^M \leftrightarrow (x \text{ ordinal}))$

秩:

- rank$(x): V \to \mathrm{On}$, $x \mapsto \sup\{\mathrm{rank}(y)+1 \mid y \in x\} = \bigcup\{\mathrm{rank}(y)+1 \mid y \in x\}$

  rank 是用 x^+ 和 $\bigcup x$ 递归定义的，由超穷递归定理，若 M 是 ZF − Pow 的传递模型，则 rank 绝对，即 rank$(x) = y$ 被公式 $\varphi(x,y)$ 定义

  将集合论语言扩张为 $\mathcal{L}' = \{\in, M\}$，$M$ 可以看作常元或者一元谓词

  则超穷递归定理可以表述为

  $$\begin{aligned}&\mathrm{ZF} \cup (\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow})^M \cup (M \text{ transitive}) \cup (x^+, \bigcup \text{相对 } M \text{ 绝对})^M \\ &\vdash \forall x \in M \forall y \in M(\varphi(x,y) \leftrightarrow \varphi^M(x,y)) \wedge \forall x \in M \exists! y \in M \varphi(x,y)\end{aligned}$$

  根据紧致性，存在 ZF − Pow 的有穷子集 Δ 证明这件事，将 M 解释为满足以上条件的某个类 **M**，则

  $$\mathrm{ZF} \cup \Delta^{\mathbf{M}} \cup (\mathbf{M}\text{ 传递}) \vdash \cdots$$

$\alpha \mapsto L_\alpha$ 证明方法与秩类似（练习）

L_α 由 $\bigcup$, Def 递归定义得到， □

Remark. 定理 8.3.5 可以表述为，对任意类 **M**, ZF $\vdash$ **M** 真类 $\wedge$ **M** 传递 $\wedge\, \psi_1^{\mathbf{M}} \wedge \cdots \wedge \psi_n^{\mathbf{M}} \to \mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}$

Lemma 2.27. *如果 M 是传递集，则 $M \cap \mathrm{On}$ 是序数且是最小的不属于 M 序数，记作 α^M*

证明. 只要证明 $M \cap \mathrm{On}$ 传递就行了 □

Theorem 2.28. *存在 ZF − Pow 公理的有穷子集 $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ 使得 $\forall M(M$传递$\wedge\, \psi_1^M \wedge \cdots \wedge \psi_n^M \to (L_{\alpha^M} = \boldsymbol{L}^M \subseteq M))$*

证明. 取有穷子集 $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq$ ZF − Pow 使得 Δ 的任何传递模型对序数、秩、L_α 绝对且 $\Delta \vdash$ " 不存在最大序数"

$\forall x(x \in \mathbf{L}^M \leftrightarrow \exists \alpha \in \mathrm{On}^M (x \in L_\alpha)^M)$，由于序数绝对，$\mathrm{On}^M = M \cap \mathrm{On} = \alpha^M$

由于 L_α 的绝对性，$\alpha \in M \cap \mathsf{On} \Rightarrow L_\alpha \in M$ 且 $x \in L_\alpha \leftrightarrow (x \in L_\alpha)^M$，故

$$\forall x(x \in \mathbf{L}^M \leftrightarrow \exists \alpha \in \alpha^M (x \in L_\alpha))$$

同时 $\Delta^M \vdash \forall \alpha \in \mathsf{On}^M \exists \beta \in \mathsf{On}^M (\beta > \alpha)$，于是 α^M 中没有最大元，α^M 是极限序数，于是 $L_{\alpha^M} = \bigcup_{\alpha \in M} L_\alpha$，即 $\exists \alpha \in \alpha^M (x \in L_\alpha) \leftrightarrow x \in L_{\alpha^M}$ □

Remark.

- 若 $M \models (\mathbf{V} = \mathbf{L})$，则 $\forall x \in M(x \in \mathbf{L}^M)$，且满足 Δ，$M \subseteq \mathbf{L}^M = L_{\alpha^M} \subseteq M$
- 若 $\mathbf{M} \models (\mathbf{V} = \mathbf{L})$ 且满足 Δ，则 $\forall x \in \mathbf{M}(x \in \mathbf{L}^\mathbf{M})$，于是 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}^\mathbf{M} = \mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}$，于是 $\mathbf{M} = \mathbf{L}$

Corollary 2.29. *存在 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow} + (\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L})$ 的有穷子集 Δ 满足*

1. *如果 $\boldsymbol{M}$ 是传递真类且 $\boldsymbol{M} \models \Delta$ 则 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}$*
2. *$\forall M(M 传递 \wedge M \models \Delta \to L_{\alpha^M} = M)$*

Theorem 2.30 (ZF)**.** *$\boldsymbol{L}$ 上存在良序，因此 $(\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L})$ 蕴含选择公理，$\mathrm{ZF} + \boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} \models \mathrm{ZFC}$*

证明. 递归定义映射 $\alpha \mapsto <_\alpha \subseteq L_\alpha^2$ 满足

1. $\forall \alpha \in \mathsf{On}$，$<_\alpha$ 是 L_α 上的良序
2. $\forall \alpha < \beta, <_\alpha \subseteq <_\beta$
3. $\forall \alpha < \beta \forall x \in L_\alpha \forall y \in L_\beta \in L_\beta - L_\alpha (x <_\beta y)$

递归定义如下: $\mathrm{rank}_\mathbf{L}(x) < \mathrm{rank}(y) \Rightarrow x <_L y, <_L = \bigcup_{\alpha \in \mathsf{On}} <_\alpha$
设 $\forall \beta < \alpha, <_\beta$ 已定义，且满足以上条件
若 α 是极限序数，$<_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} <_\beta$
若 $\alpha = \beta + 1$, 则 $L_\alpha = \mathrm{Def}(L_\beta) \subseteq \mathrm{cl}_G(L_\beta \cup \{L_\beta\})$，故 L_α 有分层结构，即定义

- $F(0) = L_\beta \cup \{L_\beta\}$

- $F(n+1) = F(n) \cup \{G_i(x,y) \mid x,y \in F(n), i = 1,\dots,10\}$

  则 $L_\alpha = \bigcup_{n<\omega} F(n)$
  对于每个 $n \in \omega$ 递归定义 $F(n)$ 上的良序 $<_\alpha^n$ 满足

1. $m < n \Rightarrow <_\alpha^m \subseteq <_\alpha^n$

2. $m < n \Rightarrow \forall x \in F(m) \forall y \in (F(n) - F(m))(x <_\alpha^n y)$

- $F(0)$ 规定 $\forall x \in L_\beta$,$x <_\alpha^0 L_\beta$

- $\forall x, y \in F(n+1)$，规定 $x <_\alpha^{n+1} y$ 当且仅当以下情形之一成立

  1. $x, y \in F(n)$ 且 $x <_\alpha^n y$
  2. $x \in F(n)$ 且 $y \notin F(n)$
  3. $x, y \in F(n+1) - F(n)$ 且以下情形之一成立
     (a) 令 $i_0 = \min\{i \leq 10 \mid \exists u, v \in F(n)(G_i(u,v) = x)\}$, $j_0 = \min\{j \leq 10 \mid \exists u, v \in F(n)(G_j(u,v) = y)\}$ 且 $i_0 < j_0$
     (b) 若 i_0, j_0 如上且 $i_0 = j_0$
     令 $u_0 = \min_{<\alpha^n}\{u \in F(n) \mid \exists v \in F(n)(G_{i_0}(u,v) = x)\}$，同样算 s_0 且 $u_0 < s_0$
     (c) i_0, j_0, u_0, s_0 如上且相当
     再看 v

- 令 $<_\alpha = \bigcup_{n<\omega} <_\alpha^n$，则 $<_\alpha$ 是 L_α 上的良序

- 令 $<_{\mathbf{L}} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} <_\alpha$ 则 $<_{\mathbf{L}}$ 是良序

$\square$

Theorem 2.31 (ZF)**.** 如果 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$ 则对任意序数 α

$$\mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq L_{|\alpha|^+}$$

证明. 令 Δ 是 $\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 的有穷子集使得

$$\forall M(M\text{传递}\wedge\Delta^M\to(L_{\alpha^M}=M))$$

任取 $X\subseteq L_\alpha$，令 $Y=L_\alpha\cup\{X\}$，显然 Y 传递，由选择公理，有 ZFC 下的反映定理，故存在传递的 $M\supseteq Y$，使得

- Δ 相对于 M 绝对，于是 $V\vDash\Delta^M$，因此 $M=L_{\alpha^M}$
- $|M|=|Y|\cdot\aleph_0$

  由于 $|L_{\alpha^M}|=|M|=|Y|\cdot\omega=\left|\alpha^M\right|=|\alpha|\cdot\omega\Rightarrow\alpha<\alpha^M<|\alpha|^+$
  故 $X\in Y\subseteq L_{\alpha^M}\subset L_{|\alpha|^+}$ □

$\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}\vdash\forall\alpha\in\mathrm{On}(\mathcal{P}(L_\alpha)\subseteq L_\alpha^+)$
$\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}\vdash\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}$
$\mathrm{ZF}\vdash(\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L})^{\mathbf{L}}$
$\mathrm{ZF}\vdash(\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH})^{\mathbf{L}}$

Corollary 2.32. $\mathit{Con}(\mathrm{ZF})\to\mathit{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH})$

若 $\mathcal{P}(\omega)\in\mathbf{L}$, 则 $\forall x\subseteq\omega(x\in\mathbf{L}\wedge x\subseteq\omega)$, $x\in\mathbf{L}\Rightarrow x\subseteq\omega\leftrightarrow(x\subseteq\omega)^{\mathbf{L}}$ 而 $(x\subseteq\omega)^{\mathbf{L}}\Rightarrow(x\in L_{\omega^1})^{\mathbf{L}}\Rightarrow x\in L_{\omega_1}$，故 $\mathrm{ZFC}\vdash|\mathcal{P}(\omega)|=|\omega_1|$

Theorem 2.33. Δ 是 $\mathrm{ZF}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}$ 的有穷子集 $\mathrm{ZF}\vdash\exists M(|M|=\omega\wedge M\text{传递}\wedge\Delta^M)$

证明. 令 $\varphi=\exists M(|M|=\omega\wedge M\text{传递}\wedge\Delta^M)$

则 $\mathrm{ZF}+(\mathbf{V}=\mathbf{L})\vdash\varphi$ （练习，反映定理）

因为 $\mathrm{ZF}+(\mathbf{V}=\mathbf{L})\vdash\mathrm{ZFC}+(\mathbf{V}=\mathbf{L})$，故 $\mathrm{ZF}+(\mathbf{V}=\mathbf{L})\vdash\varphi$，由于 $\mathbf{L}\vDash\mathrm{ZF}+(\mathbf{V}=\mathbf{L})$,$\mathbf{L}\vDash\varphi$，故 $\mathrm{ZF}\vdash\varphi^{\mathbf{L}}$

$(|M|=\omega)^{\mathbf{L}}$ 表示

$$\exists f\in\mathbf{L}(f:\omega\to M\text{双射})^{\mathbf{L}}$$

而双射关于 ZF 的传递模型绝对，故 $(|M|=\omega)^{\mathbf{L}}\leftrightarrow|M|=\omega$

传递性也是绝对的
$(\Delta^M)^{\mathbf{L}}\leftrightarrow\Delta^{M\cap\mathbf{L}}=\Delta^M$
故 $\mathrm{ZF}\vdash\varphi^{\mathbf{L}}\to\varphi$，故 $\mathrm{ZF}\vdash\varphi$ □

如果 Δ 足够丰富，$\Delta^M \Rightarrow M = L_{\alpha^M}$，故 $\mathrm{ZF} \vdash \exists\alpha \in \mathrm{On}(|\alpha| = \omega \wedge \Delta^{L_\alpha})$

Lemma 2.34. 假设 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$，则对任意不可数正则基数 κ 有

$$L_\kappa = H_\kappa$$

证明. $L_\kappa \subseteq H_\kappa$

若 $x \in L_\kappa$，则存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $x \in L_\alpha \Rightarrow \mathrm{trcl}(x) \subseteq L_\alpha$，故 $|\mathrm{trcl}(x)| \leq |\alpha| < \kappa$,$x \in H_\kappa$

反设 $H_\kappa - L_\kappa$ 非空，由基础公理，有极小元 x，由传递性 $x \subseteq H_\kappa$, $x \subseteq L_\kappa$

$|\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$，$|x| < \kappa$，由于 κ 的正则性，存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $x \subseteq L_\alpha$，故 $x \in L_{|\alpha|^+} \subseteq L_\kappa$，矛盾 □

Remark.

- 若 κ 是不可数正则基数，则 $H_\kappa \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$，因此 $L_\kappa \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$
- 对任意的 $\alpha \in \mathrm{On}$，$(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{L_\alpha}$ 为公式

$$\forall x \in L_\alpha \exists \beta \in L_\alpha (\beta\text{序数} \wedge x \in L_\beta)^{L_\alpha}$$

由于 $L_\kappa \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$，故 $\alpha \mapsto L_\alpha$ 相对 L_κ 绝对，故 $(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{L_\kappa}$ 成立，故 κ 不可数正则能够推出 $L_\kappa \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{Pow} + (\mathbf{V} = \mathbf{L})$

Corollary 2.35. 如果 κ 不可数正则，则

$$L_\kappa \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{Pow} + (\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L})$$

如果 κ 不可达，则

$$L_\kappa \vDash \mathrm{ZF} + (\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L})$$

证明. 只需验证 Pow^{L_κ} $\forall x \in L_\kappa \exists y \in L_\kappa \forall u \in L_\kappa (u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$

设 $x \in L_\kappa$，则存在 α 使得 $x \in L_\alpha$

$\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \forall\alpha(\mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq L_{|\alpha|^+})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} \vDash \mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} &\Rightarrow \forall\alpha(\mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq L_{|\alpha|^+})^{\mathbf{L}} \\
&\Rightarrow \forall u \in \mathbf{L}(u \subseteq L_\alpha \to u \in L_{|\alpha|^+})^{\mathbf{L}} \\
&\Rightarrow \forall u \in \mathbf{L}(u \subseteq L_\alpha \to u \in L_{|\alpha|^+})
\end{aligned}$$

故 $\forall u \in L_\kappa(u \subseteq x \to u \in L_{|\alpha|^+})$

令 $y = \{u \in L_{|\alpha|^+} \mid (u \subseteq x)^{L_{|\alpha|^+}}\} = \{u \in L_{|\alpha|^+} \mid u \subseteq x\}$

则 $y \in \mathrm{Def}(L_{|\alpha|^+})$，所以

$$\forall u \in L_\kappa(u \subseteq x \leftrightarrow u \in y)$$

由于 κ 不可达,$|\alpha|^+ + 1 < \kappa$，因此 $y \in L_\kappa$ □

2.4 练习

Lemma 2.36 (**L** 的反映定理). 对于任意有穷公式集 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$，对任意 $\alpha \in \mathrm{On}$，存在 $\beta \geq \alpha$ 使得 F 对 L_β 和 $\mathbf{L}$ 绝对

证明. 目标：找到 L_β 使得对每个形如 $\exists x\varphi(x, \bar{y})$ 的公式及每一组参数 $\bar{b} \in L_\beta$ 有 $\mathbf{L} \vDash \exists x\varphi(x, \bar{b}) \Leftrightarrow L_\beta \vDash \exists x\varphi_j(x, \bar{b})$

设 $\varphi_i \in F$ 且形如 $\exists y\varphi_j(x, \bar{y})$，定义函数 h_i 如下

- 任取 $\bar{y} \in \mathbf{L}$，令 $U = \{x \mid \varphi_j(x, \bar{y})\}$
- 若 $U = \emptyset$，则 $h_i(\bar{y}) = 0$
- 若 $U \neq \emptyset$，则存在最小的 ξ 使得 $U \cap L_\xi \neq \emptyset$，此时令 $h_i(\bar{y}) = L_\xi$

于是函数 h_i 满足

$$\forall \bar{y}(\exists y\varphi_j(x, \bar{y}) \to \exists x \in h_i(\bar{y})\varphi_j(x, \bar{y}))$$

定义 h_F 为

$$h_F(y_1, \dots, y_m) = \bigcup\{h_i(y_1, \dots, y_m) : i = 1, \dots, n\}$$

则 h_F 满足：对每个形如 $\exists x\varphi_j(x, \bar{y})$ 的公式，有

$$\forall \bar{y}(\exists x\varphi_j(x, \bar{y}) \to \exists x \in h_F(\bar{y})\varphi_j(x, \bar{y}))$$

任取 α，定规定义 L^i_α，$i \in \omega$，如下

- $L^0_\alpha = L_\alpha$

- $L_{\alpha}^{i+1} = V_{\alpha}^{i} \cup \bigcup \{h_F(\bar{y}) \mid \bar{y} \in V_{\alpha}^{i}\}$

令 $L_{\alpha} = \bigcup_{i\in\omega} L_{\alpha}^{i}$，只要证明存在 $\gamma \in \mathrm{On}$ 使得 $L_{\alpha} \subseteq L_{\gamma}$ □

Lemma 2.37 (ZF)**.** *存在 ZF − Pow 的有穷子集 $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ 使得序数，秩，L_{α} 对 $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ 的任意传递模型都是绝对的*

Exercise 2.4.1. 令 Δ 是 $\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ 的有穷子集，令 $\varphi = \exists M(|M| = \omega \wedge M\text{传递} \wedge \Delta^{M})$

则 $\mathrm{ZF} + (\mathbf{V} = \mathbf{L}) \vdash \varphi$ （练习，反映定理）

证明. 取 L_{ω} □

Exercise 2.4.2 (8.4.1). 对任意集合 A，递归定义 $L_{\alpha}(A)$ 如下

1. $L_0(A) = \mathrm{trcl}(\{A\})$
2. $L_{\alpha+1}(A) = \mathrm{Def}(L_{\alpha}(A))$
3. 对任意极限序数 α，$L_{\alpha}(A) = \bigcup_{\beta<\alpha} L_{\beta}(A)$

令 $\mathbf{L}(A) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} L_{\alpha}(A)$，证明

1. $\mathbf{L}(\emptyset) = \mathbf{L}$
2. 对任意 A，$\mathbf{L}(A)$ 是传递的，且 $\mathbf{L}(A) \vDash \mathrm{ZF}$
3. 如果 $A \subseteq \omega$，则 $\mathbf{L}(A) \vDash \mathrm{GCH}$
4. 如果 $A \subseteq \omega_1$ 且假设 $\mathbf{V} = \mathbf{L}(A)$，则 GCH 成立

证明. 1. $L_0(\emptyset) = \emptyset = L_0$

2. 首先 $L_0(A)$ 传递，同时 $\alpha \in L_{\alpha+1}(A) = \mathrm{Def}(L_{\alpha}(A)) \subseteq \mathcal{P}(L_{\alpha}(A))$，于是 $\alpha \subseteq L_{\alpha}(A) \subseteq \mathrm{Def}(L_{\alpha}(A)) = L_{\alpha+1}(A)$，极限情况显然

   存在公理、外延公理、对集公理显然

   传递推出并集公理

   而 $\mathbf{L}(A)$ 也有反映定理，因此有分离公理

于是 $x^+, \emptyset, \omega$ 绝对，因此无穷公理、基础公理成立

幂集公理（证明 $\mathbf{L} \cap \mathcal{P}(x) \in \mathbf{L}$）

替换公理（来自于反映定理）

3. 令 $B = \text{trcl}(\{A\})$，对 α 归纳能证明对任意 $\alpha \geq |B|$ 都有 $|L_\alpha(A)| = |\alpha|$。或者 $|L_\alpha(A)| = \max|\alpha|, |A|$ 因为 B 上有良序，因此 $\mathbf{L}(A)$ 上有良序，

   类似的，可以找到 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 的有限子集 F 使得序数、秩、$L_\alpha(A)$ 对 F 的任意包含 B 的传递模型绝对，因此有 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 的有限子集 F' 使得

   $$\forall M(B \subseteq M \wedge M\text{传递} \wedge F^M \to L_{\alpha^M}(A) = \mathbf{L}(A)^M \subseteq M)$$

   又因为有 $\mathbf{L}(A)$ 版本的反映原理，因此对任意 $\alpha \geq |M|$，有 $\mathbf{L}(A) \vDash \mathcal{P}(L_\alpha(A)) \subseteq L_{|\alpha|^+}(A)$

4. 只需证明 CH，证明 $\mathcal{P}(\omega) \subseteq \bigcup\{L_\alpha(A \cap \beta) : \alpha, \beta < \omega_1\}$

□

Exercise 2.4.3 (8.4.4). 不用 AC 证明对任意 $\alpha \geq \omega$，$|L_\alpha| = |\alpha|$

证明. □

Exercise 2.4.4 (8.4.5). 假设 AC，对任意 $\alpha > \omega$, $|L_\alpha| = |V_\alpha|$ 当且仅当 $\alpha = \beth_\alpha$

证明. $\Rightarrow$: 若 $\alpha \geq \omega^2$, 则 $|\alpha| = |L_\alpha| = |V_\alpha| = |V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$，于是 $|\alpha| \leq \beth_{|\alpha|} \leq \beth_\alpha$，因此 $\alpha = |\alpha| = \beth_\alpha$

若 $\omega < \alpha < \omega^2$，不存在

$\Leftarrow$：显然 $\alpha \geq \omega^2$，因此 $|V_\alpha| = \beth_\alpha = \alpha = |L_\alpha|$ □

Exercise 2.4.5 (8.4.6). 如果 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$，则

1. 对任意 $\alpha > \omega$, $L_\alpha = V_\alpha$ 当且仅当 $\alpha = \beth_\alpha$

2. 对任意无穷基数 κ，$L_\kappa = V_\kappa$

link

证明. 注意到 $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$

1. $\Rightarrow$：若 $\alpha \geq \omega^2$，则 $\omega + \alpha = \alpha$，因此 $|\alpha| = |L_\alpha| = |V_\alpha| = \beth_\alpha$

   如果 $\omega < \alpha < \omega^2$，则 $|\alpha| = \aleph_0 = \beth_0$，但是 $|L_\alpha| = |V_\alpha| > \aleph_0$，矛盾

   注意到，$|\alpha| \leq \beth_{|\alpha|} \leq \beth_\alpha$，因此 $|\alpha| = \beth_{|\alpha|} = \beth_\alpha$，于是 $|\alpha| = \alpha = \beth_\alpha$

   $\Leftarrow$：首先证明对任意 β，$V_\beta \subseteq L_{\beth_\beta}$。当 $\beta = 0$ 时显然成立，假设 β 成立，则 $V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta) \subseteq \mathcal{P}(L_{\beth_\beta}) \subseteq L_{\beth_\beta^+} = L_{\beth_{\beta+1}}$，极限情况显然成立

   因此 $V_\alpha \subseteq L_{\beth_\alpha} = L_\alpha \subseteq V_\alpha$

2. 因为 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$，所以 GCH 成立，所以 $\beth_\kappa = \kappa^+$，若 κ 是无穷基数，则 $\kappa = \beth_\kappa$

□

Exercise 2.4.6 (8.4.7). 证明整数 $\mathbb{Z}$ 有理数 $\mathbb{Q}$ 都属于 $L_{\omega+\omega}$

证明. 因为 $L_{\omega+1} \cap \mathrm{On} = \omega + 1$，因此 $\omega \in L_{\omega+1}$，因此 $\mathbb{Z} \in L_{\omega+1}$ □

Exercise 2.4.7 (8.4.8). $\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH} + \neg\exists\alpha(\alpha\text{弱不可达}))$

证明. 令 $\mathbf{M} = \bigcap\{L_\kappa \mid \kappa\text{是弱不可达基数}\}$，于是 ZF 不能知道 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{L}$ 还是 L_κ □

证明. 注意到 GCH 可以推出任何弱不可达基数是强不可达基数 □

证明. 若 $M \vDash \mathrm{Con(ZF)}$，若 M 包含 □

Exercise 2.4.8 (8.4.9). 假设 M 是集合，A 是集合，考虑结构 $(M, \in, A \cap M)$，它是在 $(M, \in)$ 中加入一个新的一元谓词 $x \in A$，令 $\mathrm{Def}^A(M)$ 表示 M 的所有能在结构 $(M, \in, A \cap M)$ 中可定义的子集，定义

1. $L_0[A] = \emptyset$
2. $L_{\alpha+1}[A] = \mathrm{Def}^A(L_\alpha[A])$
3. 对任意极限序数 α，$L_\alpha[A] = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta[A]$

令 $\mathbf{L}[A] = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{On}} L_\alpha[A]$，证明

1. 如果 $\alpha \le \beta$，则 $L_\alpha[A] \subseteq L_\beta[A]$
2. 对任意 α, $L_\alpha[A] \subseteq V_\alpha$
3. 每个 $L_\alpha[A]$ 都是传递的
4. 如果 $\alpha < \beta$，则 $L_\alpha[A] \in L_\beta[A]$
5. $L_\alpha[A] \cap \alpha = \alpha$
6. $n \in \omega \Rightarrow L_n[A] = V_n$
7. $\forall \alpha \ge \omega$, $|L_\alpha[A]| = |\alpha|$

证明. $\mathrm{Def}^A(M) = \mathrm{Def}(M \cup \{M \cap A\})$

1. 对 $\alpha = 0$ 显然成立，若对 α 成立且 $\alpha + 1 \le \beta$，$a \in L_{\alpha+1}[A] \Rightarrow a \subseteq L_\alpha[A] \subseteq \mathrm{Def}^A(L_\alpha[A]) = L_{\alpha+1}[A]$
2. Obviously, $L_{\alpha+1}[A] \subseteq \mathcal{P}(L_\alpha[A])$
3. 空集传递

   $a \in L_{\alpha+1}[A] \Rightarrow a \subseteq L_\alpha \subseteq \mathrm{Def}^A(L_\alpha) = L_{\alpha+1}[A]$
4. $L_\alpha = \{x \in L_\alpha \mid (x = x)^{L_\alpha}\}$
5. $L_\alpha \subseteq L_\alpha[A]$
6. 一样
7. 归纳

   $|L_{\alpha+1}[A]| = \left|\mathrm{Def}^A(L_\alpha[A])\right| = |\mathrm{Def}(L_\alpha[A] \cup \{A \cap L_\alpha[A]\})| = |L_\alpha[A] \cup \{A \cap L_\alpha[A]\}| = |\alpha + 1|$

□

Exercise 2.4.9 (8.4.10). 如果 $A \subseteq \mathbf{L}$，则 $\mathbf{L}[A] = \mathbf{L}$

证明. $\square$

Exercise 2.4.10 (8.4.11). 任给集合 A，$\mathbf{L}[A]$ 是 ZF 的传递模型

证明. 因为对任意 $\alpha \in \mathrm{On}$，$L_\alpha[A]$ 传递，因此 $\mathbf{L}[A]$ 传递

存在公理：

外延公理：$\mathbf{L}[A]$ 传递，所以成立

对集公理：若 $a, b \in \mathbf{L}[A]$，则存在 α 使得 $a, b \in L_\alpha[A]$，因此 $\{a, b\} \in L_{\alpha+1}[A]$

并集公理：$y = \bigcup x$ 被 Δ_0 公式 $\psi(x, y)$ 定义，于是并集公理相对化为 $\forall x \in \mathbf{L}[A] \exists y \in \mathbf{L}[A] \psi(x, y)$。若 $x \in L_\alpha[A]$，则 $\bigcup x = \{y \mid \exists u \in x(y \in u)\} \subseteq L_\alpha[A] \in L_{\alpha+1}[A]$，

分离公理：证明 $\forall x \in \mathbf{L}[A] \exists y \in \mathbf{L}[A] \forall u \in \mathbf{L}[A](u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \varphi^{\mathbf{L}[A]}(u))$

跟 $\mathbf{L}$ 的反映定理类似，我们也有 $\mathbf{L}[A]$ 的反映定理

假设 $x \in L_\alpha[A]$，则存在 $\beta > \alpha$ 使得 φ 相对于 $L_\beta[A]$ 和 $\mathbf{L}[A]$ 绝对，于是 $y = \{u \in \mathbf{L}[A] \mid u \in x \wedge \varphi^{\mathbf{L}[A]}(u)\} = \{u \in L_\alpha[A] \mid u \in x \wedge \varphi^{L_\beta[A]}(u)\} \in L_{\beta+1}[A]$，因此

于是 $\mathbf{L}[A]$ 满足 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow} - \mathrm{Rep} - \mathrm{Inf}$，于是 $x^+, \emptyset, \omega$ 均绝对，于是无穷公理成立

幂集公理：对于任意 $x \in \mathbf{L}[A]$，要证明 $y = \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{L}[A] \in \mathbf{L}[A]$，

存在 $\alpha \in \mathrm{On}$ 使得 $x \in L_\alpha[A]$，因为 $\mathcal{P}(x) \cap \mathbf{L}[A]$ 是集合，因此存在充分大的 $\beta > \alpha$ 使得 $\mathcal{P}(x) \cap \mathbf{L} = \mathcal{P}(x) \cap L_\beta[A]$，同时因为 $L_\beta[A]$ 传递，$y = \{u \in L_\beta[A] \mid (u \subseteq x)^{L_\beta}\} \in L_{\beta+1} \subseteq \mathbf{L}$

替换公理：要证明

$$\forall x \in \mathbf{L}[A] \exists! y \in \mathbf{L}[A] \psi^{\mathbf{L}[A]}(x, y) \to \forall C \in \mathbf{L}[A] \exists B \in \mathbf{L}[A] \forall a \in C \exists b \in B \psi^{\mathbf{L}}(a, b)$$

任取 $C \in L_\alpha[A]$，取 $\beta > \alpha$ 使得

1. ψ 相对于 $L_\beta[A]$ 和 $\mathbf{L}[A]$ 绝对

2. $\forall a \in C \exists b \in L_\beta[A] \psi^{\mathbf{L}[A]}(a, b)$

则 $B = \{b \in \mathbf{L}[A] \mid \exists a \in C \psi^{\mathbf{L}[A]}(a, b)\} = \{b \in L_\beta[A] \mid \exists a \in C \psi^{L_\beta[A]}(a, b)\} \in L_{\beta+1}[A]$ $\square$

Exercise 2.4.11 (8.4.12). 任给集合 A，$\mathbf{L}[A]$ 满足选择公理

Lemma 2.38. 令 $\overline{A} = A \cap \boldsymbol{L}[A]$，则 $\boldsymbol{L}[\overline{A}] = \boldsymbol{L}[A]$ 且 $\overline{A} \in L[\overline{A}]$

证明. 对 α 归纳证明 $L_\alpha[A] = L_\alpha[\overline{A}]$

令 $U = L_\alpha[A]$，则

$$A \cap U = A \cap U \cap \mathbf{L}[A] = \overline{A} \cap U$$

因此

$$L_{\alpha+1}[A] = \mathrm{Def}^{A}(U) = \mathrm{Def}^{A\cap U}(U) = \mathrm{Def}^{\overline{A}}(U) = L_{\alpha+1}[\overline{A}]$$

□

证明. 可以假设 $A \in \mathbf{L}[A]$，因此 $A \in L_\alpha[A]$ □

3 力迫

目标：Con(ZFC) $\to$ Con(ZFC $+\neg$ CH)

已知 $V \vDash 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$

为了得到 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 的模型，构造了 $\mathbf{L}$，在 $\mathbf{L}$ 中，ω 的子集均出现在 L_{ω_1} 中

如果要构造 $2^\omega > \aleph_1$ 的模型，要扩张集合宇宙

运用外模型的方法，显然 Con(ZFC $+\neg$ CH) $\to$ Con(ZFC $+\,\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$)

因为 $M \vDash$ ZFC $+\,\mathbf{V} = \mathbf{L} \Rightarrow M \vDash$ GCH

内模型的方法不能得到 Con(ZFC $+\,\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$)

设传递真类 $\mathbf{N} \vDash$ ZFC $+\,\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$，由于 $\mathbf{L}$ 的极小性，$\mathbf{L} \subseteq$

3.1 力迫法的基本思想

假设 ZFC 一致，令 $\mathbf{V} \vDash$ ZFC +Con(ZFC)，由 LST，ZFC 有一个可数模型，由 Mostowski 坍塌定理，存在 ZFC 的可数传递模型 M

我们要构造 $M \vDash$ ZFC 的扩张使得 $\neg$CH 成立，比如 $2^\omega = \omega_2$

$\mathrm{On}^M = \mathrm{On} \cap M = \alpha^M$ 是可数的，记作 $o(M)$，$\omega_1^M < \omega_2^M < o(M)$ 为 M 看到的 ω_1, ω_2，$\omega_1^M \neq \omega_1 \cap M$

在 V 看来，$\omega_1^M, \omega_2^M, o(M)$ 可数

若 $M \vDash \mathrm{CH}$，即 $\exists f \in M(f : \mathcal{P}(\omega)^M \cong \omega_1^M)$，这里 $\mathcal{P}(\omega)^M = \mathcal{P}(\omega) \cap M$

为了破坏 CH，可以在 M 中添加 $\mathcal{P}(\omega)$ 的子集得到 M 的扩张 N 使得 $N \vDash \mathcal{P}(\omega) = \omega_2$

难点

1. $M \vDash \mathrm{ZFC}, a \notin M, M \cup \{a\} \nvDash \mathrm{ZFC}$，故 N 要对集合运算封闭

2. 要保证 $\omega_1^M = \omega_1^N, \omega_2^M = \omega_2^N$，在 $\mathcal{P}(\omega)^M$ 中添加 ω_2^M 个元素后得到 $\mathcal{P}(\omega)^N$，$N \vDash \exists f(f : \mathcal{P}(\omega) \to \omega_2^M) \Rightarrow \mathcal{P}^N(\omega) \cong \omega_2^N$

3.2 脱殊扩张

设 $M \vDash \mathrm{ZFC}$ 是可数传递模型，令 $\mathbb{P} \in M$ 是一个偏序集，$\mathbb{P}$ 的脱殊滤 G 一般不属于 M，将 G 添加到 M 得到 M 的扩张 $M[G]$，$M[G]$ 的性质由 $\mathbb{P}$ 决定

Definition 3.1. 设 $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ 是偏序集，其中 $\leq$ 是其上的偏序，而 $\mathbb{1}$ 是 $\mathbb{P}$ 最大元，

1. $\mathbb{P}$ 称为 **力迫偏序**或 **力迫**，$\mathbb{P}$ 的元素称为 **力迫条件**，$\forall p, q \in \mathbb{P}$，$p \leq q$ 称为力迫条件 p 强于 q

2. $D \subseteq \mathbb{P}$ 是 **稠密**的指 $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D(q \leq p)$

3. $G \subseteq \mathbb{P}$ 是 $\mathbb{P}$ 上的滤指

   (a) $\mathbb{1} \in G$

   (b) $\forall p, q \in G \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$

   (c) $\forall p, q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \in G \to p \in G)$

4. 设 M 是一个集合（如 ZF 的传递模型），如果 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是滤，且对任意稠密子集 $D \subseteq \mathbb{P}$ 有
$$D \in M \to G \cap D \neq \emptyset$$
   则称 G 是 M 上的 **$\mathbb{P}$-脱殊滤**

Lemma 3.2. *如果 M 是 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的可数传递模型，且 $\mathbb{P}\in M$ 则 $\forall p\in\mathbb{P}$ 存在 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤 G 使得 $p\in G$*

证明. M 可数，$\{D_n\mid n\in\omega\}$ 是 $\mathbb{P}$ 的属于 M 的全体可数子集

令 $p_0=p$ 且 $\forall n\in\omega$，令 $p_{n+1}\in D_n$ 使得

$$p_0\geq p_1\geq\ldots$$

令 G 为 $\{p_n\mid n\in\omega\}$ 生成的滤，则 $P\in G$ 且 G 与每个 D_n 相交，从而脱殊 □

Definition 3.3. 偏序集 $\mathbb{P}$ 的元素 p,q 称为不相容是指 $\neg\exists r\in\mathbb{P}(r\leq p\wedge r\leq q)$，记作 $p\perp q$，$\mathbb{P}$ 是无原子的指 $\forall p\in\mathbb{P}\exists r,q\in\mathbb{P}(r\leq p\wedge q\leq p\wedge r\perp q)$

Proposition 3.4. *令 M 是 ZFC 的传递模型，$\mathbb{P}\in M$，如果 $\mathbb{P}$ 是无原子的且 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤，则 $G\notin M$*

证明. 只要证明 $\mathbb{P}-G\notin M$，由于 $\mathbb{P}$ 无原子，$\forall p\in\mathbb{P}\exists r,q\leq p,r\perp q$，$r,q$ 至多有一个在 G 中，设 $q\notin G$，则有 $\forall p\in\mathbb{P}\exists q\in\mathbb{P}-G(q\leq p)$，故而 $\mathbb{P}-G$ 稠密，若 $\mathbb{P}-G\in M$，由于 G 是脱殊滤，$G\cap(\mathbb{P}-G)\neq\emptyset$，矛盾 □

Example 3.1. 令 $M\vDash\mathrm{ZFC}$ 是可数传递模型，$I,J\in M$，令 $\mathrm{Func}_\omega(I,J)=\{p\mid p$是 I 到 J 的部分函数 $\wedge\,|p|<\omega\}$，则它无原子，令 $\mathbb{P}=(\mathrm{Func}(I,J),\supseteq,\emptyset)$，由于 $I,J\in M$，故 $\mathbb{P}\in M$（练习，$\mathrm{Func}_n(I,J)$ 属于 M,$\mathrm{Func}_1(I,J)=I\times J$）

如果 I 是无穷集，则对每个 $x\in I$ 与 $y\in J$，$D_x=\{p\in\mathbb{P}\mid x\in\mathrm{dom}(p)\}$，$E_y=\{p\in\mathbb{P}\mid y\in\mathrm{ran}(p)\}$ 都是稠密的且都属于 M(分离公理，dom, ran 都绝对)

设 G 是 $\mathbb{P}$ 的滤，则 G 中的函数两两相容，故 $\bigcup G=f_G$ 是 I 到 J 的部分函数

若 G 是 M 上的脱殊滤，$G\notin M$，则 $G\cap D_x$，$G\cap E_y$ 均非空，故 $f_G=\bigcup G$ 是 I 到 J 的满射

接下来构造 $M[G]$，称为 M 的脱殊扩张。M 中的人知道 $M[G]$ 中的元素如何构造，如以上例子中的 $f_G\notin M$，但 M 中的人知道如何逼进 f_G，$M[G]$ 中的元素都有一个“名字”，用于描述其构造，生活在 M 中的人可以讨论

Definition 3.5. 设 $\mathbb{P}$ 是一个力迫，$\forall \alpha \in \mathrm{On}$，递归定义 $V_\alpha^{\mathbb{P}}$

1. $V_0^{\mathbb{P}} = \emptyset$
2. $V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} = \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P})$
3. $V_\lambda^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta^{\mathbb{P}}$

$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 中的元素称为 $\mathbb{P}$**-名字**

若 $\tau \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \Leftrightarrow \exists \alpha(\tau \in \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P})) \Leftrightarrow \tau \subseteq V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}$，因此 τ 是一个二元关系

Definition 3.6. 对任意力迫 $\mathbb{P}$，对任意集合 x 递归定义

$$\hat{x} = \{(\hat{y}, \mathbb{1}) \mid y \in x\}$$

直观上 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 比 $\mathbf{V}$ 丰富，$x \mapsto \hat{x}$ 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 的嵌入，同时 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}} \subseteq \mathbf{V}$

Definition 3.7. 对任意力迫 $\mathbb{P}$，任意 $\mathbb{P}$ 上的滤 G，以及任意 $\mathbb{P}$-名字 τ，递归定义 τ 的值 τ_G 或 $Val(\tau, G)$ 为:

如果对任意 $\beta < \alpha$ 以及 $\sigma \in V_\beta^{\mathbb{P}}$，$\sigma_G$ 已定义，若 $\tau \in V_\alpha^{\mathbb{P}}$，$\tau_G = \{\sigma_G \mid \exists p(\sigma, p) \in \tau \wedge p \in G\}$

$\forall x(\hat{x})_G = x$ (练习，用 rank 归纳)

Lemma 3.8. *“τ 是 $\mathbb{P}$ 名字”，“τ_G 是 $\mathbb{P}$ 名字的值” 对 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$ 的传递模型 M 都是绝对的*

对 $\mathbb{P}$ 跟 M 都没有要求

证明. 设 $\psi(\tau)$ 表示“τ 是 $\mathbb{P}$-名字”，对 $\mathrm{rank}_{\mathbf{V}}(\tau)$ 归纳证明 $\psi(\tau) \leftrightarrow \psi^M(\tau)$，不用 $V^{\mathbb{P}}$ 的 rank 是因为不是所有元素都属于它，$\psi(\tau)$ 为公式

$$\tau\text{是关系} \wedge \forall \sigma \in \mathrm{dom}(\tau)(\sigma\text{是 }\mathbb{P}\text{-名字}) \wedge \forall p \in \mathrm{ran}(\tau(p \in \mathbb{P}))$$

若 $\tau \in M$，则 $\mathrm{dom}(\tau), \mathrm{ran}(\tau) \in M$，因此 $\mathrm{dom}(\tau), \mathrm{ran}(\tau) \subseteq M$，由归纳假设 $\forall \sigma \in \mathrm{dom}(\tau)(\psi(\sigma) \leftrightarrow \psi^M(\sigma))$，故 $\psi^M(\tau) \leftrightarrow \psi(\tau)$

这里 $\mathbb{P}$ 是个参数，不过在不在 M 中无所谓

令 $\theta(x,y)$ 表示 $x \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \wedge y = x_G$，则 $\theta(x,y)$ 当且仅当

$$\psi(x) \wedge \forall \sigma \in \text{dom}(x) \forall p \in \text{ran}(x)((\sigma,p) \in x \wedge p \in G \to \exists u \in y \theta(\sigma,u))$$
$$\wedge \forall u \in y \exists \sigma \in \text{dom}(x) \exists p \in \text{ran}(x)((\sigma,p) \in X \wedge p \in G \wedge \theta(\sigma,u))$$

对 rank(x) 归纳证明

$$\forall x,y \in M(\theta(x,y) \leftrightarrow \theta^M(x,y))$$

令 $\varphi(y)$ 表示 $\exists x \theta(x,y)$，于是我们要证

$$\forall y \in M(\varphi(y) \leftrightarrow \varphi^M(y))$$

即

$$\forall y \in M(\exists x \theta(x,y) \leftrightarrow \exists x \in M \theta^M(x,y))$$

只要证明 $\forall y \in M \exists x \in M \theta(x,y)$，容易验证 $y \in M \Rightarrow \hat{y} \in M$（替换公理），而 $y = (\hat{y})_G$，因此 $\theta(\hat{y},y)$ □

我们证明了 $\varphi(y) := \exists x \theta(x,y)$ 是绝对的，但是 $\theta(x,y)$ 作为函数不一定绝对，$x \in M \nRightarrow x_G \in M$，若 $G \in M$ 则 $x \in M \cap \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \Rightarrow x_G \in M$（练习，对 rank$(x)$ 归纳）

1. $\psi(x)$ 绝对
2. $\theta(x,y)$ 绝对
3. $\varphi(y)$ 绝对

若 $\mathbb{P} \notin M$，则 1 成立，但是 $\psi^M(x) \Leftrightarrow \mathbb{M} \vDash \psi(x)$，虽然是对的，但是在 M 看来 ψ 不是公式

Definition 3.9. 令 M 是 ZFC 的传递模型，$\mathbb{P} \in M$，定义 $M^{\mathbb{P}} = \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \cap M$，即 $M^{\mathbb{P}} = \{\tau \in M \mid (\tau\text{是 }\mathbb{P}\text{-名字})^M\}$

如果 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是 $\mathbb{P}$ 上的滤，则

$$M[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$$

- $M[G]$ 是 M 的扩张
- M 中的人可以部分了解 $M[G]$
- 如 $f_G = \bigcup G \in M[G]$，M 可以看到 f_G 的“任意多”的部分信息，但 $f_G \notin M$

Lemma 3.10. 设 M 是 ZFC 的传递模型，$\mathbb{P} \in M$ 为力迫，$G \subseteq \mathbb{P}$ 是非空滤，则

1. 若 $N \vDash$ ZFC 是传递模型，$M \subseteq N$ 且 $G \in N$，则 $M[G] \subseteq N$
2. $M[G]$ 传递
3. $\forall x \in M(\hat{x} \in M^{\mathbb{P}} \wedge \hat{x}_G = x)$，故 $M \subseteq M[G]$
4. $\Gamma = \{(\hat{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\}$，则 $\Gamma_G = G$，故 $G \in M[G]$
5. $\forall \tau \in M^{\mathbb{P}}(rank(\tau_G)) \leq rank(\tau)$
6. $o(M) = o(M[G])$

证明. 1. 已证明，若 $x \in N^{\mathbb{P}}$ 且 $G \in N$，则 $x_G \in N$，由于 $M^{\mathbb{P}} \subseteq N^{\mathbb{P}}$，故 $M[G] \subseteq N$

2. $y \in x_G \Leftrightarrow \exists\sigma\exists p((\sigma, p) \in x \wedge p \in G \wedge y = \sigma_G)$，故 $y \in x_G \in M[G] \Rightarrow y \in M[G]$

3. 替换公理证明 $\hat{x} \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}$，对 rank$(x)$ 归纳证明 $\hat{x}_G = x$

4. 替换公理，$\Gamma \in M$，

5. 对 rank(x) 归纳证明，若 $x \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$，则 rank$(x_G) \leq$ rank(x)
   - rank$(x) = 0 \Rightarrow x = \emptyset$
   - 设当 $y \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 且 rank$(y) <$ rank$(x) \Rightarrow$ rank$(y_G) \leq$ rank(y)

$$\begin{aligned}\text{rank}(x_G) &= \sup\{\text{rank}(y_G)+1 \mid \exists p \in G((y,p)\in X)\}\\ &\le \sup\{\text{rank}(y)+1 \mid \exists p \in G((y,p)\in X)\}\\ &\le \text{rank}(x)\end{aligned}$$

因为 $y \in (y,p) \in x \Rightarrow \text{rank}(y)+1 \le \text{rank}(x)$

6. $M \subseteq M[G] \Rightarrow o(M) \subseteq o(M[G])$

   $\forall \alpha \in o(M[G])$, 设 $\alpha = x_G$, 其中 $x \in M^{\mathbb{P}}$, 则 $\alpha = \text{rank}(\alpha) \le \text{rank}(x) \in M$，由 M 的传递性，$\alpha \in M$

□

Definition 3.11. 如果 $D \subseteq \mathbb{P}$ 且 $p \in \mathbb{P}$，则 D 是 p **下稠密**的是指 $\forall q \le p \exists r \le q(r \in D)$

Proposition 3.12. *设 M 是 ZFC 的传递模型 $\mathbb{P} \in M$, $D \subseteq \mathbb{P}$ 且 $D \in M$，令 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤，则*

1. *或者 $G \cap D \neq \emptyset$ 或者 $\exists q \in G$ 使得 $\forall r \in D(r \perp q)$, $q \perp D$*
2. *如果 $p \in G$ 且 D 是 p 下稠密的，则 $G \cap D \neq \emptyset$*

证明. 1. 令 $D' = \underbrace{\{q \mid \exists r \in D(q \le r)\}}_{D_1} \cup \underbrace{\{q \mid \forall r \in D(r \perp q)\}}_{D_2}$

   任取 $q \in \mathbb{P}$，

   (a) 若 $q \perp D \Rightarrow q \in D'$
   (b) 若 $\exists r \in D$ 使得 $q \not\perp r$，则 $\exists t \le q, r$，因此 $t \in D'$，

   故 D' 是稠密的，因此 $G \cap D' \neq \emptyset$，若 $G \cap D_1 \neq \emptyset$，由于 G 向上封闭，故 $G \cap D \neq \emptyset$；若 $G \cap D_2 \neq \emptyset$，就存在 $q \in G$ 使得 $q \perp D = \emptyset$

2. 若 $p \in G$ 且 D 是 p 下稠密的，则 $\forall q \in G \exists s \in G$ 使得 $s \le p, q$，由稠密性，$\exists r \in D$ 使得 $r \le s \le p, q$，则 $q \not\perp r$，故 $G \cap D \neq \emptyset$

□

设 $\theta(x,y)$ 是一个公式，$\pi,\sigma\in\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$，则 $\theta(\pi,\sigma)$ 可视为 $\mathcal{L}_{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}}$ 句子

因此记法 $M[G]\vDash\theta(\pi,\sigma)$ 是合理的，不区分 $M[G]\vDash\theta(\pi_G,\sigma_G)$ 和 $M[G]\vDash\theta(\pi,\sigma)$

称 $\mathcal{L}_{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}}$，$\mathcal{L}_{M^{\mathbb{P}}}$ 称为 **力迫语言**

3.3 力迫

设 M 是 ZFC 的传递模型，$\mathbb{P}$ 是 M 中的一个力迫，$(\mathbb{P},\mathbb{1},\leq)\in M$，$G$ 是 M 上的一个脱殊滤且 $G\notin M$（即要求 G 无原子）

我们希望证明 $M[G]\vDash$ ZFC

考虑分离公理:

设 $\psi(x,y)$ 是公式，$\sigma,\tau\in M^{\mathbb{P}}$，要证明

$$X=\{x\in\tau_G\mid\psi^{M[G]}(x,\sigma_G)\}\in M[G]$$

即要找到 $\pi\in M^{\mathbb{P}}$ 使得 $X=\pi_G$，定义

$$\pi=\{(\rho,p)\mid\rho\in\mathrm{dom}(\sigma)\wedge p\in\mathbb{P}\wedge p\Vdash\psi(\rho,\sigma)\}$$

$p\Vdash\psi(\rho,\sigma)$ 表示对任意包含 p 的脱殊滤 G，$M[G]\vDash\psi(\rho_G,\sigma_G)$，即 $M[G]\vDash\psi(\rho,\sigma)$

我们首先证明关系“$p\Vdash\psi(\rho,\sigma)$”是在 M 中可定义的

Definition 3.13. 令 $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ 为公式，M 是 ZFC 的可数传递模型，$\mathbb{P}\in M$ 为力迫，$\tau_1,\dots,\tau_n\in M^{\mathbb{P}}$ 且 $p\in\mathbb{P}$，则

$$p\Vdash_{\mathbb{P},M}\varphi(\tau_1,\dots,\tau_n)$$

当且仅当

$$\forall G[(G\text{是 }M\text{ 上的 }\mathbb{P}\text{-脱殊滤}\wedge p\in G)\to M[G]\vDash\varphi(\bar{\tau})]$$

简记 $p\Vdash\varphi$，读作 p 力迫 φ

Example 3.2. 设 $M,\mathbb{P}$ 如上，$p\in\mathbb{P}$，则

1. 如果 $q \in \mathbb{P}$ 且 $p \le q$（p 的力迫条件强于 q），则 $p \Vdash \hat{q} \in \Gamma, \Gamma = \{(\hat{x}, x) \mid x \in \mathbb{P}\}$

2. 设 $\pi = \{(\hat{p}, q) \mid p, q \in \mathbb{P} \wedge p \perp q\}$，则 $\mathbb{1} \Vdash (\pi \cap \Gamma = \emptyset)$

3. 设 $\theta = \theta(\tau_1, \dots, \tau_n)$，$\tau_i \in M$，则 $\mathbb{1} \Vdash \theta$ 当且仅当对每个 M 上的脱殊滤 G，都有 $M[G] \vDash \theta(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})$

4. 设 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$，$(\pi, p) \in \tau, q \le p,$ 则 $q \Vdash (\pi \in \tau)$

证明.

1. $p \in G \Rightarrow q \in G$，而 $\hat{q}_G = q, \Gamma_G = G$

2. 练习, $\mathbb{1} \Vdash (\pi \cap \Gamma = \emptyset) \Leftrightarrow$ 对每个 M 上的脱殊滤 G 有 $M[G] \vDash \pi_G \cap G = \emptyset$

3.

4.

□

Lemma 3.14. *如果 $p \Vdash \theta, q \le p$，那么 $q \Vdash \theta$*

证明. $q \le p \Rightarrow$ 包含 q 的滤包含 p □

引入力迫关系的目的是将 M 上的脱殊滤所包含的信息转换为 M 内部的信息

我们可以通过力迫 $\mathbb{P}$ 的组合性质来分析力迫扩张 $M[G]$ 的一阶性质

给定力迫公式 $\theta(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 以及力迫 p，期望

1. 要么包含 p 的脱殊滤 G 都满足 $M[G] \Vdash \theta$，即 $p \Vdash \theta$

2. 要么存在 $q < p$ 使得包含 q 的脱殊滤 H 满足 $M[H] \vDash \neg\theta$，$q \Vdash \neg\theta$

如果以上期望是真的，那么

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid (p \Vdash \theta) \vee (p \Vdash \neg\theta)\}$$

是 $\mathbb{P}$ 的一个稠密子集（练习）

如果 $p \Vdash \theta$ 还在 M 中可定义，则 $D \in M$，于是 D 与 M 上每一个 $\mathbb{P}$-脱殊滤相交，设 $p \in G \cap D$，若 $p \Vdash \theta$，则 $M[G] \Vdash \theta$，于是 $M[G] \nvDash \neg\theta$，于是 $p \nVdash \neg\theta$，因此 $p \Vdash \theta$

即 $p \Vdash \theta \Leftrightarrow M[G] \vDash \theta$

以上分析表明，如果这两个条件成立，则

“$M[G] \vDash \theta$ 可以由 $p \in G \cap D$ 来见证

而这两个条件由以下两个引理保证

Lemma 3.15 (真相引理)**.** 设 $M, \mathbb{P}$ 如上，$\theta(x_1, \dots, x_n)$ 是公式，$\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$，$G$ 是 M 上的脱殊滤，则

$$M[G] \vDash \theta(\tau_1, \dots, \tau_n) \Leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \theta(\tau_1, \dots, \tau_n))$$

证明. $\Leftarrow$：定义

$\Rightarrow$：揭示了具体力迫扩张与所有力迫之间的关系

对于给定的 θ，某个具体的 $M[G] \vDash \theta$ 并不是巧合，是因为它包含了 p 这个决定性条件 □

Example 3.3. 设 $M, \mathbb{P}, G$ 如上，$p_1, p_2 \in \mathbb{P}$，令 $\Gamma = \{(\tilde{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\}$ 令 θ 为 $\hat{p}_1 \in \Gamma \wedge \hat{p}_2 \in \Gamma$，则

$$\begin{aligned} M[G] \vDash \theta &\Leftrightarrow p_1 \in G \wedge p_2 \in G \\ &\Leftrightarrow \exists p \in G(p \leq p_1 \wedge p \leq p_2) \end{aligned}$$

显然 $p \Vdash \theta$：任何包含 p 的滤一定包含 p_1, p_2

Lemma 3.16 (可定义性引理)**.** 设 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 是一个公式，M 是 ZFC 的可数传递模型，则如下集合 A_φ 在模型 $(M, \in)$ 中是免参数可定义的

$$A_\varphi = \{(p, \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}, \tau_1, \dots, \tau_n) \mid (\mathbb{P}, \leq, 1) \in MM \ \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}} \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}, M} \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)\}$$

但是一个问题是脱殊滤不一定在 M 里，M 说不了，得换一种方式

Lemma 3.17 (内在力迫)**.** 设 $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ 是一个力迫，$p \in \mathbb{P}$ 是一个力迫条件，$\tau_1, \tau_2 \in \boldsymbol{V}^{\mathbb{P}}$，则

1. $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ 当且仅当

$$\forall \sigma \in (\mathrm{dom}(\tau_1) \cup \mathrm{dom}(\tau_2)) \forall q \leq p [q \Vdash^* (\sigma \in \tau_1) \leftrightarrow q \Vdash^* (\sigma \in \tau_2)]$$

(递归定义要基于似集合的良序关系，*rank*)

2. $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ 当且仅当

$$\{q \leq p \mid \exists (\sigma, r) \in \tau_2 (q \leq r \wedge q \Vdash^* (\sigma = \tau_1))\}$$

在 p 下稠密

3. 若 ϕ 是 $\tau_1 = \tau_2$ 或 $\tau_1 \in \tau_2$，则

$$p \Vdash^* \neg\phi \Leftrightarrow \neg(\exists q \leq r (q \Vdash^* \phi))$$

以上关系是递归定义的,“$\Vdash^*$”对 ZFC 的传递模型绝对
$\exists q \leq p$ 事实上是一个受囿量词，因为

Lemma 3.18. 设 $\tau_1, \tau_2 \in \boldsymbol{V}^{\mathbb{P}}$，$\theta$ 是 $\tau_1 \in \tau_2$ 或 $\tau_1 = \tau_2$

1. 如果 $p \Vdash^* \theta$ 且 $q \leq p$，则 $q \Vdash^* \theta$

2. $p \Vdash^* \theta$ 当且仅当 $\{q \leq p \mid q \Vdash^* \theta\}$ 在 p 下稠密

证明. 1. 定义

2. $\Rightarrow$：由 1

$\Leftarrow$：设 $\{q \leq p \mid q \Vdash^* \theta\}$ 在 p 下稠密

若 θ 是 $\tau_1 \in \tau_2$

令 $D_q = \{s \leq q \mid \exists (\sigma, r) \in \tau_2 (s \leq r \wedge s \Vdash^* \sigma = \tau_1)\}$

于是条件等价于 $\{q \leq p \mid D_q$在 q 下稠密$\}$ 在 p 下稠密

显然 $q \leq p \Rightarrow D_q \subseteq D_p$，故以上条件推出 $\{q \leq p \mid D_p$在 q 下稠密$\}$ 在 p 下稠密

断言：D_p 在 p 下稠密

$\forall r \leq p \exists q \leq p$ 使得（$q \leq r \wedge D_p$在 q 稠密）于是 $\exists s \in D_p(s \leq q)$，于是 $s \leq r$

因此 $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$

若 θ 是 $\tau_1 = \tau_2$，且 $\{q \leq p \mid q \Vdash^* \theta\}$ 在 p 下稠密，任取 $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau_1) \cup \mathrm{dom}(\tau_2)$ 以及 $q \leq p$

由稠密性，取 $r \leq q$ 使得 $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$

由于 $q \Vdash^* \sigma \in \tau_1$，于是 $r \Vdash^* \sigma \in \tau_1$

$r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2 \Rightarrow r \vDash^* \sigma \in \tau_1 \leftrightarrow r \Vdash^* \sigma \in \tau_2$（练习）

注意到满足"$r \Vdash^* \sigma \in \tau_2$"的 r 在 q 下稠密

□

Lemma 3.19. *设 θ 是 $\tau_1 = \tau_2$ 或 $\tau_1 \in \tau_2$，$p \in \mathbb{P}$，则*

$$p \Vdash^* \theta \Leftrightarrow \neg(\exists q \leq p(q \Vdash^* \neg\theta))$$

证明. $\Rightarrow$ 设 $p \Vdash^* \theta$ 且 $q \leq p$，则 $q \Vdash^* \theta$（由引理）

若存在 $r \leq p$ 且 $r \Vdash^* \neg\theta$，则由定义 $\forall s \leq r(s \nVdash^* \theta)$，矛盾

$\Leftarrow$：即 $\forall q \leq p(q \nVdash^* \neg\theta)$，由定义 $q \nVdash^* \neg\theta$，于是 $\exists r \leq q(r \Vdash^* \theta)$

故 $\forall q \leq p \exists r \leq q(r \Vdash^* \theta)$，因此 $\{r \leq p \mid r \Vdash^* \theta\}$ 在 p 下稠密，因此 $p \Vdash^* \theta$ □

Lemma 3.20 (原子公式的真相引理)**.** *设 M 是 ZFC 的传递模型，$\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$，$\theta$ 为 $\sigma = \tau$ 或 $\sigma \in \tau$，G 为 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤，则*

1. *若 $p \in G$ 且 $(p \Vdash^* \theta)^M$，则 $M[G] \Vdash \theta(\sigma_G, \tau_G)$*
2. *若 $M[G] \vDash \theta$，那么 $\exists p \in G(p \Vdash^* \theta)^M$*

证明. 对 rank 归纳证明（不怎么正确，应该是基于某个良序结构）

1. 固定 $p \in G$

(a) 若 $p \Vdash^* \sigma \in \tau$，则

$$D_p = \{q \leq p \mid \exists(\pi, r) \in \tau(q \leq r \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma)\}$$

在 p 下稠密且 $D_p \in M$

于是 $D_p \cap G \neq \emptyset$（引理），令 $q \in D_p \cap G$，由归纳假设 $q \Vdash^* \pi = \sigma \Rightarrow M[G] \vDash \pi_G = \sigma_G$

由于 $r \geq q$，故 $r \in G \Rightarrow \pi_G \in \tau_G \Rightarrow M[G] \vDash \sigma_G \in \pi_G$

(b) 若 $p \Vdash^* (\sigma = \tau)$

由对称性，只需证明 $\sigma_G \subseteq \tau_G$

设 $\pi_G \in \sigma_G$，于是 $M[G] \vDash \pi \in \sigma$ 则存在 $r \in G$，$\pi \in M^{\mathbb{P}}$ 使得 $(\pi, r) \in \sigma$

由归纳假设（2），则 $\exists r \in G(r \Vdash^* \pi \in \sigma)$

由相容性，可以假设 $q \leq p, r$ 且 $q \Vdash^* \pi \in \sigma$，而 $q \Vdash^* \sigma = \tau$，因此 $q \Vdash^* (\pi \in \tau)$（练习），应用 1.1 中归纳假设，于是 $M[G] \vDash \pi_G \in \tau_G$

2. 设 $M[G] \vDash \theta(\sigma_G, \tau_G)$

(a) θ 是 $\sigma \in \tau$

$D_p = \{q \leq p \mid \exists(\pi, r) \in \tau(q \leq r \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma)\}$

$p \Vdash^* \sigma \in \tau$ 当且仅当 D_p 在 p 下稠密

$M[G] \vDash \sigma_G \in \tau_G \Leftrightarrow \exists r \in G \exists \delta \in M^{\mathbb{P}}((\delta, r) \in \tau \wedge \delta_G = \sigma_G)$

由归纳假设，$\delta_G = \sigma_G \Rightarrow \exists p_1 \in G(p_1 \Vdash^* \delta = \sigma)$

取 $p \leq p_1, r$ 且 $p \in G$，则 $p \Vdash^* \delta = \sigma$，此时 $q \leq p \Rightarrow q \in D_p$，故 D_p 在 p 下稠密

(b) 设 θ 是 $\sigma = \tau$ 且 $M[G] \vDash \sigma_G = \tau_G$，对 $p \in \mathbb{P}$ 定义 $p \in D$ 当且仅当以下条件之一成立

i. $p \Vdash^* \sigma = \tau$

ii. $\exists \delta \in \mathrm{dom}(\sigma) \cup \mathrm{dom}(\tau)(p \Vdash^* (\delta \in \sigma) \wedge p \Vdash^* (\delta \notin \tau))$

iii. $\exists \delta \in \mathrm{dom}(\sigma) \cup \mathrm{dom}(\tau)(p \Vdash^* (\delta \notin \sigma) \wedge p \Vdash^* (\sigma \in \tau))$

断言 D 是稠密集（练习）

显然 $D \in M$，故 $D \cap G \neq \emptyset$，取 $p \in D \cap G$

假设 p 满足条件 2，令 δ 为证据，由归纳假设 $p \Vdash^* (\delta \in \sigma) \Rightarrow M[G] \vDash \delta_G \in \sigma_G = \tau_G$

而 $\sigma_G \in \tau_G \Rightarrow \exists G \in G(r \Vdash^* \delta \in \tau)$，取 $s \in G$ 使得 $s \leq r, p$，则 $s \Vdash^* \delta \in \tau$

而条件 $p \Vdash^* (\neg(\delta \in \tau)) \Rightarrow \forall s \leq p(s \nVdash^* \delta \in \tau)$，于是得到矛盾，故 p 不满足 2，同理也不满足 3

□

Lemma 3.21 (力迫原子公式的可定义性)**.** 各记号如上,$p \Vdash \theta \Leftrightarrow (p \Vdash^* \theta)^M \Leftrightarrow p \Vdash^* \theta$

证明. $\Leftarrow$ 是以上引理

$\Rightarrow$：设 $p \Vdash \theta$ 且 $p \nVdash^* \theta$，由引理 9.3.9，则 $\exists q_0 \leq p(q_0 \Vdash^* \neg\theta)$，由定义，$\forall r \leq q_0(r \nVdash^* \theta)$

$p \Vdash \theta \Rightarrow \forall G(p \in G \Rightarrow M[G] \vDash \theta)$，令 G 为包含 q_0 的一个脱殊滤，则 $p \in G$，由于 θ 是原子公式，由原子公式的真相引理，

$$M[G] \Vdash \theta \Rightarrow \exists s \in G(s \Vdash^* \theta)$$

取 $r \leq q_0, s$ 且 $r \in G$，则 $r \Vdash^* \theta$，于是矛盾 □

Definition 3.22. 设 $\mathbb{P}$ 是力迫，$p \in \mathbb{P}$，$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 为公式，$\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$，定义 $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ 如下

1. 若 φ 为 $x_1 = x_2$ 一样
2. $x_1 \in x_2$ 一样
3. φ 是 $\psi_1 \wedge \psi_2$ 为

$$p \Vdash^* \varphi(\bar{\tau}) \Leftrightarrow p \Vdash^* \psi_1(\bar{\tau}) \text{或} p \Vdash^* (\bar{\tau})$$

Lemma 3.23. 设 $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个公式，$\tau_1, \ldots, \tau_n \in \boldsymbol{V}^{\mathbb{P}}$，$p \in \mathbb{P}$ 则

1. $p \Vdash^* \theta$，则 $\forall q \leq p$ 有 $q \Vdash^* \theta$

2. $p \Vdash^* \theta$ 当且仅当 $\{q \leq p \mid q \Vdash^* \theta\}$ 在 p 下稠密

3. $p \Vdash^* \theta \Leftrightarrow \neg(\exists q \leq p(q \Vdash^* \neg\theta))$

证明. 1. 归纳，练习

2. $\Leftarrow$：复杂度归纳

   (a) θ 是 $\phi \wedge \psi$，定义 $E_{p,\theta} = \{q \leq p \mid q \Vdash^* \theta\}$ 在 p 下稠密，于是 $E_{p,\phi}$ 和 $E_{p,\psi}$ 在 p 下稠密

   (b) $\neg\psi$

   由定义 $\neg(\exists r \leq p(r \Vdash^* \psi))$，若 $\exists q_0 \leq p(q_0 \Vdash^* \psi)$

   由 $E_{p,\theta}$ 在 p 下稠密，存在 $r_0 \in E_{p,\theta}$ 使得 $r_0 \leq q_0$，即 $r_0 \Vdash^* \neg\psi$ 且 $r_0 \leq q_0$，取 $s \leq r_0 \leq q_0$，于是 $s \Vdash^* \psi$，矛盾

   (c) θ 是 $\exists x \varphi(x)$

   $q_0 \Vdash^* \theta$ 表明

   $$F_{q_0} = \{r \leq q_0 \mid \exists \sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \varphi(\sigma))\}$$

   在 q_0 下稠密，取 $r_0 \in F_{q_0}$，则 $r_0 \leq q_0 \leq s_0$，故 $\{r \leq p \mid \exists \sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \varphi(\sigma))\}$ 在 $\mathbb{P}$ 下稠密

□

注意内在力迫是绝对的

Theorem 3.24 (力迫定理). $\mathbb{P}, G, \psi$ 是 $\mathcal{L}_{M^{\mathbb{P}}}$-句子

1. $\forall P \in G, P \Vdash \psi \Rightarrow M[G] \vDash \psi$

2. $M[G] \Vdash \psi \Rightarrow \exists p \in G(p \Vdash \psi)$

3. “$p \vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$” 是 M 中可定义的，即 $\exists \varphi^M(x_1, \ldots, x_n, y)$ 使得 $p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Leftrightarrow \varphi^M \tau_1, \ldots, \tau_n, p$

（要考）

3.4 $M[G]$ 中的 ZFC

GOAL：若 M 是 ZFC 的可数传递模型，则脱殊扩张 $M[G]$ 也是 ZFC 的模型

1. 存在公理：$M[G]$ 非空

2. 外延公理：$M[G]$ 传递

3. 对集公理：设 $\sigma_G, \pi_G \in M[G]$，令 $\delta = \{(\sigma, \mathbb{1}), (\pi, \mathbb{1})\}$，则 $\delta_G = \{\sigma_G, \pi_G\}$

4. 并集公理：设 $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$，令

$$\delta = \{(\eta, p) \mid \exists(\pi, q) \in \sigma \exists r((\eta, r) \in \pi \wedge p \leq r, q)\}$$

   断言：$\delta_G = \bigcup \sigma_G$：设 $(\eta, p) \in \delta$ 使得 $\eta_G \in \delta_G$，则 $p \in G$，以上定义 $q, r \in G$, $\eta_G \in \pi_G \in \sigma_G$，故 $\delta_G \subset \bigcup \sigma_G$

   设 $(\pi, q) \in \sigma$ 且 $q \in G$，即 $\pi_G \in \sigma_G$，设 $(\eta, r) \in \pi$ 且 $r \in G$，由相容性，有 $p \in G$ 使得 $p \leq r, q$，由定义，$(\eta, p) \in \delta$，故 $\eta_G \in \delta_G$

5. 基础公理：显然

6. 无穷公理：$\omega \in M \Rightarrow \omega \in M[G]$

7. 分离公理

   不失一般性，设 $\psi = \psi(x, y)$，$\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$，证明 $X = \{a \in \sigma_G \mid \psi(a, \tau_G)^{M[G]}\}$ 属于 $M[G]$

   令 $\rho = \{(\pi, p) \in \operatorname{dom}(\sigma) \times \mathbb{P} \mid p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \psi(\pi, \tau))\}$

   由于 “$\Vdash$” 在 M 中可定义，故 $\rho \in M \cap \mathbf{V}^{\mathbb{P}} = M^{\mathbb{P}}$

   断言：$X = \rho_G$

   $\subseteq$: 设 $a \in X$，则 $\exists p \in G, \pi \in \operatorname{dom}(\sigma)$ 使得

$$(\pi, p) \in \sigma, \pi_G = a, M[G] \models \psi(\pi, \tau)$$

   由力迫定理，$\exists q \in G(q \Vdash \psi(\pi, \tau))$，由相容性，取 $r \in G$ 使得 $r \leq p, q$，于是 $r \Vdash \psi(\pi, \tau)$

由于 $(\pi,p)\in\sigma$ 且 $r\le p$，有 $r\Vdash\pi\in\sigma$，因此 $(\pi,r)\in\rho$, $a=\pi_G\in\rho_G$

$\supseteq$: 设 $b\in\rho_G$，则存在 $(\pi,p)\in\mathrm{dom}(\sigma)\times G$ 使得 $b=\pi_G$，且 $p\Vdash(\pi\in\sigma\wedge\psi(\pi,\tau))$ 由力迫定理，$p\in G\Rightarrow M[G]\Vdash\pi\in\sigma\wedge\psi(\pi,\tau)$，于是 $b=\pi_G\in X$，$\rho_G\subseteq X$

8. 幂集公理，即

$$X\in M[G]\Rightarrow\mathcal{P}^{M[G]}(X)=\mathcal{P}(X)\cap M[G]\in M[G]$$

由分离定理，只需证明

$$\exists Y\in M[G](\mathcal{P}(X)\cap M[G]\subseteq Y)$$

设 $X=\sigma_G$，其中 $\sigma\in M^{\mathbb{P}}$

令 $S=\mathcal{P}^M(\mathrm{dom}(\sigma)\times\mathbb{P})\in M^{\mathbb{P}}$，即 $S=\{\delta\in\mathbb{M}^{\mathbb{P}}\mid\mathrm{dom}(\delta)\subseteq\mathrm{dom}(\sigma)\}$

断言：令 $P=S\times\{\mathbb{1}\}$ $\mathcal{P}(\sigma_G)\cap M[G]\subseteq S_G$

$\pi_G\subseteq\sigma_G\Rightarrow\forall(\eta,p)\in\pi(p\in G\to\exists q^\eta\in G\exists\epsilon^\eta(\epsilon^\eta,q^\eta)\in G\wedge\eta_G=\epsilon^\eta_G)$

取 $(\eta,p)\in\pi$ 且 $p\in G$，令 $(\epsilon^\eta,q^\eta)\in\sigma$ 满足 $q^\eta\in G$ 且 $q^\eta\in G$ 且 $\eta_G=\epsilon^\eta_G$，令 $\delta=\{(\epsilon^\eta,q^\eta)\mid\exists p\in G((\eta,p)\in\pi)\}$ 显然 $\mathrm{dom}(\delta)\subseteq\sigma$ 且

$$\delta_G=\{\epsilon^\eta_G\mid\exists p\in G((\eta,p)\in\pi)\}=\{\eta_G\mid\exists p\in G((\eta,p)\in\pi)\}=\pi_\sigma$$

故 $\pi_G\in S_G$，但是这个证明是错的，因为 δ 是用 $M[G]$ 的选择函数做出来的

令 $\delta=\{(\epsilon,q)\mid\epsilon\in\mathrm{dom}(\sigma)\wedge q\Vdash\epsilon\in\pi\}$

断言：$\pi_G=\delta_G$

任取 $(\eta,p)\in\pi$ 且 $p\in G$，由以上分析，存在 $(\epsilon^\eta,q^\eta)\in\sigma$ 且 $\epsilon^\eta_G=\eta_G$, $q\in G$ 由力迫定理，$\exists r\in G(r\Vdash\epsilon^\eta=\eta)$

取 $q\in G$ 使得 $q\le p,r$，则 $q\Vdash\eta\in\pi$ 且 $q\Vdash\epsilon^\eta=\eta$，因此 $q\Vdash\epsilon^\eta\in\pi$ 即 $(\epsilon^\eta,q)\in\delta$ 且 $q\in G$，故 $\epsilon^\eta_G\in\delta_G$，因此 $\pi_G\subseteq\delta_G$

设 $(\epsilon,p)\in\delta$ 且 $p\in G$, 则由定义 $p\Vdash\epsilon\in\pi$, 由力迫定理, $M[G]\Vdash\epsilon\in\pi$, 即 $\epsilon_G\in\pi_G$，故 $\delta_G\subseteq\pi_G$

9. 替换公理

设 $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$，$\psi(x,y)$ 是一个公式且

$$M[G] \vDash \forall x \in \sigma \exists ! y \psi(x,y)$$

我们要证明存在 $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ 使得

$$M[G] \vDash \forall x \in \sigma \exists y \in \rho \psi(x,y)$$

下面是一个错误的证明：固定 σ 定义 ρ 为

$$\rho = \{(\sigma, p) \mid \exists x \in \sigma (p \Vdash \psi(x, \delta))\} \subseteq M, \in V^{\mathbb{P}}$$

但这不能推出 $\rho \in M^{\mathbb{P}}$

断言 ρ 满足要求

任取 $\eta \in \sigma$，则存在 $\epsilon \in M^{\mathbb{P}}$ 使得 $M[G] \vDash \psi(\eta, q)$，令 $r \in G$ 使得 $r \Vdash \psi(\eta, q)$

“$p \Vdash \psi(\eta, \epsilon)$” 被公式 $\varphi^M(p, \eta, \epsilon)$ 定义，把 M 看作 V

由反映定理，存在 $\alpha \in o(M)$ 使得

- $V_\alpha^M \ni \sigma, \mathbb{P}$
- $\exists z \varphi^M(x,y,z)$ 关于 V_α^M 绝对
  即，$\forall p, \eta \in V_\alpha^M (\exists (p \Vdash \psi(\eta, z) \to \exists z \in V_\alpha^M (p \Vdash \psi(\eta, z))))$

定义

$$\rho = \{(\delta, p) \mid \delta \in M^{\mathbb{P}} \cap V_\alpha^M, p \in \mathbb{P}, \exists x \in \sigma (p \Vdash \psi(x, \sigma))\}$$

断言 ρ 满足要求设 $\eta \in \sigma$，则 $\exists \delta \in M^{\mathbb{P}}$ 使得 $M[G] \vDash \psi(\eta, \delta)$，由力迫定理，$\exists p \in G (p \Vdash \psi(\eta, \delta))$ $p \Vdash \psi(\eta, \delta) \Rightarrow \exists \epsilon \in V_\alpha^M \cap M^{\mathbb{P}} (p \Vdash \psi(\eta, \epsilon))$（反映定理）

故 $(\epsilon, p) \in \rho$,$p \in G$,$\epsilon_G \in \rho_G$，而 $p \Vdash \psi(\eta, \epsilon)$，于是 $M[G] \vDash \psi(\eta_G, \epsilon_G)$

以上证明表明，在 ZF 中

$$\forall x \in A \exists y \psi(x,y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x,y)$$

10. 选择公理：验证以下公理

$$\forall x \exists \alpha \in \mathrm{On}\, \exists f (f\text{函数} \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge x \subseteq \mathrm{ran}(f))$$

这样 x 就被良序化了

目标：任取 $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$，找到一个 $\alpha \in o(M)$ 与 $f \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}$ 使得 f_G 是函数且 $\mathrm{dom}(f_G) = \alpha$ 且 $\sigma_G \subseteq \mathrm{ran}(f_G)$

利用 M 战偶归纳的选择公理，$\exists \alpha \in o(M)$ 使得

$$\mathrm{dom}(\sigma) = \{\pi_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$$

即 $\gamma \mapsto \pi_\gamma$ 是 α 到 $\mathrm{dom}(\sigma)$ 的双射

断言：M 中的可定义函数 $pair : M^{\mathbb{P}} \times M^{\mathbb{P}} \to M^{\mathbb{P}}$ 使得 $(pair(x,y))_G = (x_G, y_G)$，练习

令 $S = \{pair(\hat{\gamma}, \pi_\gamma) \mid \gamma < \alpha\} \subseteq M^{\mathbb{P}}$

令 $\tau = S \times \{\mathbb{1}\}$，则以上构造保证 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$($S \in M$ 替换公理)

起 $\tau_G = \{(\hat{\gamma}_G, \pi_{\gamma G}) \mid \gamma < \alpha\} = \{(\gamma, \pi_{\gamma G}) \mid \gamma < \alpha\}$ 是一个函数

$\mathrm{dom}(\tau_G) = \alpha$ 且 $\mathrm{ran}(\tau_G) \supseteq \sigma_G$

Theorem 3.25. 设 M 是 ZFC 的可数模型，$\mathbb{P} \in M$ 为偏序，G 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤，则

1. $M[G]$ 是包含 $M \cup \{G\}$ 的最小的 ZFC 模型
2. $o(M) = o(M[G])$

Corollary 3.26. *Con*(ZFC) $\to$ *Con*(ZFC $\vdash \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{L}$)

证明. M 是 ZFC 的可数传递模型，P 是 M 的无原子力迫，G 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤，由于 $o(M) = o(M[G])$，故 $\mathbf{L}^M = L_{o(M)} = L_{o(M[G])} = \mathbf{L}^{M[G]} \subseteq M$

故 $\mathbf{L}^{M[G]} \neq M[G] \Rightarrow M[G] \vDash \mathbf{L} \neq \mathbf{V}$ □

3.5 ZFC 的相对独立性

Definition 3.27. 定义力迫 $\mathbb{P} = \text{Func}(I, J)$ 为

$$\text{Func}(I, J) = \{p \mid |p| < \omega \wedge p\text{函数} \wedge \text{dom}(p) \subseteq I \wedge \text{ran}(p) \subseteq J\}$$

令 $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}) = (\text{Func}(I, J), \supseteq, \emptyset)$

Lemma 3.28. *如果 $I, J \in M$，I 无穷且 J 非空，G 是 M 上的 Func(I, J) 脱殊滤，则 $\bigcup G$ 是 I 到 J 的满射*

Example 3.4. 设 $\kappa \in M$ 且 $M \vDash$ "κ是不可数基数"，设 G 是 $\text{Func}(\omega, \kappa)$ 脱殊滤，令 $f_G = \bigcup G \in M[G]$，则 f_G 是 ω 到 κ 的满射，则 $M[G] \vDash$ "κ可数"，事实上，κ 在 $M[G]$ 中不再是基数（但仍是序数），这是因为 $M[G]$ 中的可数基数只有 ω，故 $\kappa = \omega$，则 $M \vDash$ "κ可数"

Lemma 3.29. *如果 $\alpha \in o(M)$，G 是 Func$(\alpha \times \omega, 2)$-脱殊滤，则*

$$(2^\omega \geq |\alpha|)^{M[G]}$$

证明. 令 $f_G = \bigcup G : \alpha \times \omega \to 2$，固定 $\beta < \alpha$，则 $f_G(\beta, -)$ 是 ω 到 2 的函数，故 f_G 可以视作一个 α-序列 $(f_\beta \mid \beta < \alpha)$,$f_\beta = f_G(\beta, -)$，$(f_\beta \mid \beta < \alpha) \in M[G]$，

$\forall a < b < \alpha$，定义

$$E_b^a = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \omega(\{(a, n), (b, n)\} \subseteq \text{dom}(p) \wedge p(a, n) \neq p(b, n))\}$$

则 $\forall a < b < \alpha$,E_b^a 在 $\mathbb{P}$ 中稠密

若 $p \in G \cap E_b^a$，则 $\exists n < \omega(p(a, n) \neq p(b, n))$，$p \subseteq f_G \Rightarrow p(a, -) \subseteq f_a$ 且 $p(b, -) \subseteq f_b$，故 $f_a \neq f_b$，故 $\beta \to f_\beta$ 是 α 到 2^ω 的一一映射 □

Remark. 取 $\alpha \in M$ 为 ω_2^M，若 $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$，则以上引理表明 $M[G] \vDash 2^\omega > \omega_2$，故下一步的关键是保证 $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$

Definition 3.30. 设 $\mathbb{P}$ 是偏序，$D \subseteq \mathbb{P}$，若

$$\forall x, y \in D(x \neq y \to x \perp y)$$

就称 D 是 $\mathbb{P}$ 的 **反链**，若 $\mathbb{P}$ 的任意反链可数，则称 $\mathbb{P}$ 有可数反链性质，记作 c.c.c.(countable chain conditoin)

Lemma 3.31 (Δ-系统引理)**.** *如果 $\mathcal{A}$ 是有穷集合族，且 $|\mathcal{A}| > \omega$，则存在不可数的 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ 以及有穷集合 R 使得*

$$\forall X, Y \in \mathcal{A}(X \cap Y = R)$$

称有这样性质的集合族 $\mathcal{A}_0$ 称为 Δ-系统，R 称为 $\mathcal{A}_0$ 的根

证明. 令 $\mathcal{B}_n = \{x \in \mathcal{A} \mid |x| = n\}$，则 $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$，故存在 $n \in \omega$ 使得 $\mathcal{B}_n$ 不可数，不失一般性，假设 $\mathcal{A} = \mathcal{B}_n$，对 n 归纳证明

$n = 1$ 时，$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$，根为 0

$n + 1$ 两种可能性

1. 存在 y 使得 $\mathcal{A}_y = \{X \in \mathcal{A} \mid y \in X\}$ 不可数

   令 $\mathcal{B} = \{X \setminus \{y\} \mid X \in \mathcal{A}_y\}$，由归纳假设，$\mathcal{B}$ 有 Δ-系统 $\mathcal{B}_0$, 其根为 R_0，则 $\mathcal{A}_0 = \{Y \cup \{y\} \mid Y \in \mathcal{B}_0\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的 Δ 系统，其根为 $R = R_0 \cup \{y\}$

2. $\forall y \in \bigcup \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_y = \{x \in \mathcal{A} \mid y \in X\}$ 均可数，对每个 $X \in \mathcal{A}$，$\{Y \in \mathcal{A} \mid Y \cap X \neq \emptyset\}$ 可数，设 $\mathcal{A} = \{X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$，对每个 $\alpha < \omega_1$，有 $D_\alpha = \{Y \in \mathcal{A} \mid \exists \beta < \alpha(Y \cap X_\beta \neq \emptyset)\}$ 可数

   令 $Y_0 = X_0$，则存在 $Y_1 = X_\alpha$ 与 Y_0 不相交，因为 ω_1 正则，因此对每个 α 都可找到 β 使得 $\{Y_i \mid i < \alpha\} \subseteq \{X_j \mid j < \beta\}$，而 D_β 可数，取最小的 δ 使得 $X_\delta \in \mathcal{A} \setminus D_\beta$，令 $Y_\alpha = X_\delta$，则 $\{Y_i : i < \alpha\}$ 也不相交

□

Lemma 3.32. *若 J 可数，则 Func(I, J) 有 c.c.c.*

证明. 若 $I = \emptyset$ 或 $J = \emptyset$，则 Func$(I, J) = \emptyset$，显然有 c.c.c.

若 Func(I, J) 可数，显然也有

假设 Func(I, J) 不可数，（I 不可数）

设 $X \subseteq$ Func(I, J) 不可数，我们要找到相容的 $p, q \in X$

令 $\mathcal{A} = \{\text{dom}(p) \mid p \in X\}$

断言：$\mathcal{A}$ 不可数

这是因为 $X \subseteq$ Func$(\mathcal{A}, J)$，若 $\mathcal{A}, J$ 均可数，则 Func$(\mathcal{A}, J)$ 可数

不妨假设 $\mathcal{A}$ 是一个 Δ-系统，根为 R，注意到定义域不交的函数总是相容的，因此 R 非空

$p \perp q \Leftrightarrow p \upharpoonright R \neq q \upharpoonright R$，令 J^R 是所有 R 到 J 的函数，则 $p \mapsto p \upharpoonright R$ 是 X 到 J^R 的单射，故 $|X| \leq \left|J^R\right|$，但 J^R 可数，X 不可数 □

Lemma 3.33. 设 $\mathbb{P} \in M$ 且 $(\mathbb{P}$有 *c.c.c.*$)^M$，G 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤，令 $A, B \in M$,$(f : A \to B) \in M[G]$，则存在 M 中的映射 $F : A \to \mathcal{P}(B)$ 使得

$$\forall a \in A(f(a) \in F(a) \wedge \forall a \in A((|F(a)| \leq \omega))^M)$$

证明. 令 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ 是 $f \in M[G]$ 的名字，$M[G] \vDash (\tau : \hat{A} \to \hat{B})$，由力迫定理，$\exists p \in G(p \Vdash (\tau : \hat{A} \to \hat{B}))$，对每个 $a \in A$，定义

$$F(a) = \{b \in B \mid \exists q \leq p(q \Vdash \tau(\hat{a}) = \hat{b})\}$$

对每个 $a \in A$，定义

$$F(a) = \{b \in B \mid \exists q \leq p(q \Vdash \tau(\hat{a}) = \hat{b})\}$$

由力迫定理，F 在 M 中可定义,$F \in M$,$M[G] \vDash \forall a \in A \exists b \in B(b = f(a))$ 任取 $a \in A$, $\exists b \in B \exists r \in G$ 使得 $r \Vdash \hat{b} = \tau(\hat{a})$

取 $q \in G$ 使得 $q \leq r, p$，则 $q \Vdash \tau(\hat{a}) = \hat{b} \wedge \tau$函数，故 $b = f(a) \in F(a)$

下面验证 $M \vDash |F(a)| < \omega$

由选择公理，存在 $Q : F(a) \to \mathbb{P}, b \mapsto Q(b)$ 满足 $Q(b) \leq p$ 且 $Q(b) \Vdash \hat{b} = \tau(\hat{a})$

显然 $Q(b) \Vdash (\tau : \hat{A} \to \hat{B})$

若 $b_1, b_2 \in F(a)$ 使得 $Q(b_1), Q(b_2)$ 相容，则存在滤 $G \ni Q(b_1), Q(b_2)$，

$Q(b_i) \Vdash \hat{b}_i = \tau(\hat{a}) \Rightarrow M[G] \vDash \tau_G$是函数 $\wedge \tau_G(a) = b_1 \wedge \tau_G(a) = b_2$，故 $b_1 \neq b_2 \Rightarrow Q(b_1) \perp Q(b_2)$，即 Q 的像是 $\mathbb{P}$ 中反链，故 $F(a)$ 可数 □

Definition 3.34. 称 $\mathbb{P} \in M$ 是 **保持基数**的当且仅当对任意 P-脱殊滤 G 有 $\forall \beta \in o(M((\beta\text{基数})^M \leftrightarrow (\beta\text{是基数})^{M[G]}))$

保持共尾是它们的共尾一样

Lemma 3.35. 令 $\mathbb{P} \in M, G$ 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤

1. $(\kappa\text{正则})^M \to \forall G((\kappa\text{正则})^{M[G]})$，则 $\mathbb{P}$ 保持共尾

Lemma 3.36. 若 $\mathbb{P} \in M$ 且 $(\mathbb{P}\text{有可数反链})^M$，则 $\mathbb{P}$ 保持基数

Theorem 3.37. $Con(\text{ZFC}) \to Con(\text{ZFC} + \neg\,\text{CH})$

证明. 令 $\mathbb{P} = \text{Func}((\omega_2)^M \times \omega, 2)$，则 $\mathbb{P}$ 有可数反链性质，故而保持序数，故 $(\omega_2)^M = (\omega_2)^{M[G]}$，故 $M[G] \vDash 2^\omega \geq \omega_2 > \omega_1$ □

3.6 练习

Exercise 3.6.1. 令 $M \vDash \text{ZFC}$ 是可数传递模型，$I, J \in M$，令 $\text{Func}_\omega(I,J) = \{p \mid p\text{是 } I \text{ 到 } J \text{ 的部分函数} \wedge |p| < \omega\}$，则它无原子，令 $\mathbb{P} = (\text{Func}(I,J), \supseteq, \emptyset)$，由于 $I, J \in M$，故 $\mathbb{P} \in M$

证明. 对于任何 $n \in \omega$，令 $\text{Func}_n(I,J) = \{p \mid p\text{是 } I \text{ 到 } J \text{ 的部分函数} \wedge |p| < n\}$，下面证明 $\text{Func}_n(I,J) \in M$

$n = 0$ 显然

$\text{Func}_{n+1}(I,J) = \{p \cup \{(a,b) \subseteq I \times J\} \mid p \in \text{Func}_n(I,J) \wedge a \notin \text{dom}(p) \wedge a \in I \wedge b \in J\}$，因此 $\text{Func}_{n+1}(I,J) \in M$ □

Exercise 3.6.2. $\forall x (\hat{x})_G = x$

证明. $\hat{\emptyset}_G = \emptyset$

假设对于所有 $y \in x$，都有 $(\hat{y})_G = y$，则 $(\hat{x})_G = (\{(\hat{y}, \mathbb{1}) \mid y \in x\})_G = \{(\hat{y})_G \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$ □