3.3　无界闭集

本节我们讨论一类特殊的滤，它在现代集合论中扮演着十分重要的角色。

定义 3.3.1. 令 α 为极限序数，α 的子集 $C \subseteq \alpha$ 如果满足:

1. C 在 α 中无界，即 $\sup C = \alpha$，或等价地，对任意 $\beta < \alpha$，存在 $\xi \in C$，$\beta < \xi$;
2. C 在 α 中是**闭的**，即，对任意极限序数 $\gamma < \alpha$，如果 $\sup(C \cap \gamma) = \gamma$，则 $\gamma \in C$。

就称 C 是 α 的**无界闭集**。

注记 3.3.2. 假设 C 是极限序数 α 的子集，如果 γ 是 C 某一子集的上确界并且 $\gamma < \alpha$，则称 γ 是 C 的**极限点**。因此，C 在 α 中是闭集当且仅当 C 的极限点都属于 C。

练习 3.3.3. 回忆拓扑的概念。对任意非空的序数集合 X，令

$$B = \{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in X\} \cup \{\xi \cap X \mid \xi \in X\} \cup \{X - (\xi + 1) \mid \xi \in X\} \cup \{X\} \quad (3.5)$$

为拓扑基，则由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑称为 X 上的**序拓扑**。证明：定义中的闭集与 α 上序拓扑中闭集的意义一致。

以下讨论无界闭集的一些基本性质。

引理 3.3.4. 假设 α 是极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，则:

（*1*）　α 是 α 上的无界闭集。

（*2*）　任取 $\beta < \alpha$，则集合 $\{\delta < \alpha \mid \delta > \beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

（*3*）　集合 $X = \{\beta < \alpha \mid \beta$ 是极限序数$\}$ 是 α 上的无界闭集。

（*4*）　如果 X 在 α 中无界，则 $X' = \{\gamma \in X \mid \gamma < \alpha \wedge \gamma$ 是 X 的极限点$\}$ 是 α 上的无界闭集。

证明.（1），（2）留给读者。

（3）　X 显然是闭集。为证 X 是无界的，任取 $\xi \in \alpha$，定义序列

$$\xi = \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots \quad (n \in \omega)$$

其中 ξ_{n+1} 是严格大于 ξ_n 并且属于 α 的最小序数。令 η 为以上序列的极限，则 $\eta > \xi$ 并且属于 X。

（4）　X' 是无界的可用类似（3）中的方法证明：任取 $\xi \in \alpha$，定义严格递增的序列 $\langle \xi_n \rangle_{n \in \omega}$，其中每个 $\xi_n \in X$。这个序列的极限 η 是 X 的极限点，所以属于 X' 并且大于 ξ。为证明 X' 是闭集，任取 $\eta < \alpha$ 是 X' 的极限点，即，$\sup(X' \cap \eta) = \eta$，则对任意 $\sigma < \eta$，存在 X 的极限点 $\xi < \eta$ 使得 $\sigma + 1 < \xi$。由极限点的定义，存在 $\mu \in X \cap \xi$，使得 $\sigma < \mu$，所以 $\sup(X \cap \eta) = \eta$，即 η 也是 X 的极限点，故 $\eta \in X'$。

□

引理 3.3.5. *如果 α 是极限序数并且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，而 $f : \alpha \to \alpha$ 是严格递增的，并且是*连续的*，即对任意极限 $\beta < \alpha$，$f(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma)$，则：*

（1）　f 的值域是 α 的无界闭集；

（2）　反之，如果 α 是还是正则的，则 α 中的每个无界闭集 C 都是这样一个函数的值域。

证明. 对于（1）：f 是严格递增的，所以它的值域在 α 中无界；f 是连续的，所以它的值域是闭集。

对于（2），令 τ 为无界闭集 C 的序型，$f : \tau \to C$ 是关于序数上 $<$ 关系的同构，则 f 显然是严格递增和连续的。由于 C 是无界的，而 α 是正则的，所以 $\tau \geq \mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$。又由于对任意 $\eta < \tau$，$\eta \leq f(\eta)$，所以 $\tau \leq \sup f(\eta) = \alpha$。所以 $\tau = \alpha$。 □

练习 3.3.6. 如果 α 是极限序数，则存在一个函数 $g = f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$，$\mathrm{ran}(f)$ 是 α 的无界闭集。

注记 3.3.7. 我们在定义2.1.35中定义了类函数的连续性，如果将 $\mathbb{O}$ 看作一个“极限序数”，则有类似引理3.3.5结果：

> 假设 $F:\mathbb{O}\to\mathbb{O}$ 是严格递增的连续函数，则 F 的“值域”作为子类在 $\mathbb{O}$ 中是闭的，并且是无界的。反之亦然：如果 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{O}$ 是一个无界的闭的类，则存在 $F:\mathbb{O}\to\mathbb{O}$，$\mathcal{C}$ 是 F 的“值域”。

命题 3.3.8. 假设 α 是极限序数，且 $\mathrm{cf}(\alpha)>\omega$，则对任意 $\gamma<\mathrm{cf}(\alpha)$，如果 $\langle C_\xi\rangle_{\xi<\gamma}$ 是无界闭集的序列，则 $\bigcap_{\xi<\gamma}C_\xi$ 也是 α 的无界闭集。

证明. 假设 $\gamma=2$，只需证明 $C_1\cap C_2$ 是无界闭集。闭集的交显然是闭集，所以只需证明 $C_1\cap C_2$ 在 α 中无界。任取 $\delta<\alpha$，则存在 $\xi\in C_1,\eta\in C_2$（不妨设 $\xi<\eta$）使得 $\delta<\xi<\eta$，构造无穷序列：

$$\delta<\xi_0<\eta_0<\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2<\cdots$$

其中 $\xi_0=\xi,\eta_0=\eta$ 且对任意 $n\in\omega$，$\xi_n\in C_1,\eta_n\in C_2$。令 μ 是这个序列的极限，则 $\sup(C_1\cap\mu)=\mu$ 且 $\sup(C_2\cap\mu)=\mu$。由于 $\mathrm{cf}(\alpha)>\omega$，因此 $\mu\in C_1\cap C_2$，并且 $\delta<\mu$。

如果 γ 是后继序数，则凭借归纳假设，用 $\gamma=2$ 的方法容易证明。

假设 γ 是极限序数，令 $D=\bigcap_{\xi<\gamma}C_\xi$，$D$ 显然是闭集，以下证明它是无界的。根据归纳假设，对任意 $\eta<\gamma$，$D_\eta=\bigcap\{C_\xi\mid\xi<\eta\}$ 是无界闭集，而且 $D=\bigcap_{\eta<\gamma}D_\eta$，并且 $\eta<\eta'<\gamma$ 蕴涵 $D_\eta\supset D_{\eta'}$。任取 $\delta<\alpha$，构造序数的序列：

$$\delta<\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_\eta<\cdots,$$

对每一 $\eta<\gamma$，$\xi_\eta\in D_\eta$，并且是大于 $\sup\{\xi_\delta\mid\delta<\eta\}$ 的最小序数，最后令 $\xi=\sup\{\xi_\eta\mid\eta<\gamma\}$。由于 α 是正则的，所以这个序列在 α 中有界，所以 $\xi\in\alpha$。对任意 $\eta<\gamma$，任意 $\delta\geq\eta$，$\xi_\delta\in D_\delta\subseteq D_\eta$，所以 ξ 是 D_η 的极限点，因此 $\xi\in D_\eta$，所以 $\xi\in D$。 □

由此，我们可以定义：

定义 3.3.9. 对任意共尾数大于 ω 的极限序数 α，

$$F_{CB}(\alpha)=\{X\subseteq\alpha\mid\exists C(\,C\text{ 是 }\alpha\text{ 的无界闭子集}\wedge C\subseteq X)\},\tag{3.6}$$

是一个滤，这个滤称为 α 上的无界闭滤。

推论 3.3.10. 如果 κ 是不可数正则基数，则 κ 上的无界闭滤是 κ-完全的。

证明. 由命题3.3.8立得。 □

虽然不可数正则基数 κ 上的无界闭滤是 κ 完全的，但是可以找到一个长度为 κ 的无界闭集的序列，它的交为空集（见习题 3.4.6）。

定义 3.3.11. 对任意序数 α，$\langle X_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ 是 α 子集的序列，

（1） X_ξ 的对角线交定义为：

$$\bigtriangleup_{\xi<\alpha} X_\xi = \{\eta < \alpha \mid \eta \in \bigcap_{\xi<\eta} X_\xi\} \tag{3.7}$$

（2） X_ξ 的对角线并定义为：

$$\bigtriangledown_{\xi<\alpha} X_\xi = \{\eta < \alpha \mid \eta \in \bigcup_{\xi<\eta} X_\xi\} \tag{3.8}$$

注记 3.3.12. 如果令 $Y_\xi = \{\eta \in X_\xi \mid \eta > \xi\}$，则 $\bigtriangleup_{\xi<\alpha} X_\xi = \bigtriangleup_{\xi<\alpha} Y_\xi$。同时，$\bigtriangleup_{\xi<\alpha} X_\xi = \bigcap_{\xi<\alpha}(X_\xi \cup \{\eta \mid \eta \le \xi\})$（见习题 3.4.7、3.4.8）。另外，在不致引起混淆的情况下，我们常将 $\bigtriangleup_{\xi<\alpha} X_\xi$ 简记为 $\bigtriangleup X_\xi$。对于 $\bigtriangledown_{\xi<\alpha} X_\xi$，也类似。

命题 3.3.13. 对任意不可数正则基数 κ，以及 κ 上的无界闭集的序列 $\langle X_\gamma \mid \gamma < \kappa\rangle$，$\bigtriangleup_{\gamma<\kappa} X_\gamma$ 是无界闭集。即，$F_{CB}(\kappa)$ 关于对角线交封闭。

证明. 对任意 $\gamma < \kappa$，令 C_γ 为 $\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$，则 $\bigtriangleup X_\gamma = \bigtriangleup C_\gamma$。而我们有：

$$C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_\gamma \supset \cdots \quad (\gamma < \kappa).$$

令 $C = \bigtriangleup C_\gamma$。为证 C 是闭集，取 η 是 C 的极限点。我们需要证明 $\eta \in C$，即，对任意 $\xi < \eta$，$\eta \in C_\xi$。为此定义 $X = \{\nu \in C \mid \xi < \nu < \eta\}$，则 $X \subset C_\xi$；根据定理3.3.10，C_ξ 是无界闭集，所以 $\eta = \sup X \in C_\xi$，因此 $\eta \in C$。

为证 C 无界，取 $\mu < \kappa$。如下定义序列 $\langle \beta_n \mid n < \omega\rangle$：令 $\beta_0 > \mu$ 且 $\beta_0 \in C_0$，对每一 n，令 $\beta_{n+1} > \beta_n$ 且 $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$。由于 C_{β_n} 是无界的，所以这样的 β_{n+1} 总能找到。同时注意到

$$C_{\beta_0} \supset C_{\beta_1} \supset C_{\beta_2} \supset \ldots$$

所以对任意 $m > n$，$\beta_m \in C_{\beta_n}$。以下证明 $\beta = \sup\{\beta_n \mid n < \omega\} \in C$。为此，只需证明对任意 $\xi < \beta$，都有 $\beta \in C_\xi$。如果 $\xi < \beta$，则存在 n，$\xi < \beta_n$。而对每一 $m > n$，$\beta_m \in C_{\beta_n} \subset C_\xi$。由于 C_ξ 是闭集，故 $\beta \in C_\xi$。 □

推论 3.3.14. 对任意不可数正则基数 κ，如果 $f : \kappa \to \kappa$ 是函数，则集合

$$D = \{\alpha < \kappa \mid \forall \beta < \alpha (f(\beta) < \alpha)\} \tag{3.9}$$

是无界闭集。

证明. 对任意 $\alpha < \kappa$，定义 $C_\alpha = \{\beta < \kappa \mid f(\alpha) < \beta\}$，则 C_α 是无界闭集。对任意 $\alpha < \kappa$，$\alpha \in D$ 当且仅当对任意 $\beta < \alpha$，$f(\beta) < \alpha$ 当且仅当对任意 $\beta < \alpha$，$\alpha \in D_\beta$，所以 $D = \triangle C_\alpha$，是无界闭集。 □

若 α 是极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，则 α 上的无界闭滤 $F_{CB}(\alpha)$ 包含了 α 的“大子集”，与其对偶的“小子集”的族是 $I = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa - X \in F_{CB}\}$。有时候我们需要刻画“不小的”子集的族，即不属于 I 的那些子集，这等价于说 $\kappa - X$ 不以一个无界闭集为子集，即 X 与任何无界闭集相交不空。

定义 3.3.15. 令 α 为任意极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，

(1) 如果 $S \subseteq \alpha$ 满足对任意 α 的无界闭集 C 都有 $S \cap C \neq \emptyset$，就称 S 是 α 上的**平稳集**[1]。

(2) $I_{NS}(\alpha) = \{X \subseteq \alpha \mid \exists C(C$ 是 α 的无界闭子集 $\wedge X \cap C = \emptyset\}$ 称为 α 上的**非平稳理想**。

练习 3.3.16. 令 α 为任意极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$。

(1) 如果 $S \subseteq \alpha$ 是平稳集，$C \subseteq \alpha$ 是无界闭集，$C \cap S$ 是平稳集。

(2) $I_{NS}(\alpha)$ 是 $F_{CB}(\alpha)$ 的对偶理想。

引理 3.3.17. 假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，

[1]Stationary Set 有很多不同的译法，例如“稳定集”、“驻集”，新出的《数学大词典》中译为“荟萃集”。

（1）　α 上的无界闭集都是平稳集，若 S 是平稳集且 $S \subseteq T \subseteq \alpha$，则 T 是平稳集。

（2）　α 上的平稳集都是无界的。

（3）　存在 α 上无界子集 T，但 T 不是平稳集。

证明.　（1）　由命题3.3.8，任意两个无界闭集相交不空。

（2）　假设 S 是平稳集，任取 $\beta < \alpha$，$\{\gamma < \alpha \mid \beta < \gamma\}$ 是 α 上的无界闭集，它与 S 相交非空，这个交集中的任何序数都大于 β。

（3）　令 $T = \{\alpha + 1 \mid \alpha < \kappa\}$ 是无界的，但不是 κ 上的平稳集，因为 κ 中的所有极限序数构成的无界闭集与它相交为空。

□

练习 3.3.18. 假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，

（1）　对任意 $\gamma < \alpha$，如果 $D = \{X_\xi \mid \xi < \gamma\}$ 为非平稳集的族，则 $\bigcup D$ 也是非平稳集。因此，如果 κ 是不可数正则基数，则 κ 上的非平稳理想是 κ-完全的。

（2）　S 和 $\alpha - S$ 都是 α 上的平稳集当且仅当 S 不以任何无界闭集为子集。

命题 3.3.19. 假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，而 $\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$ 是正则的，定义

$$E^\alpha_\lambda = \{\eta < \alpha \mid \mathrm{cf}(\eta) = \lambda\}. \tag{3.10}$$

则 E^α_λ 是 α 上的平稳集。

证明. 任取 α 上的无界闭集 C，递归定义 C 上的长度为 λ 的严格递增的序列

$$\eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_\xi < \ldots < \ldots \qquad (\xi < \lambda). \tag{3.11}$$

令此序列的上确界为 η，则由于 C 是闭集并且 $\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$，$\eta \in C$，又因为 $\mathrm{cf}(\eta) = \lambda$，所以 $\eta \in E^\alpha_\lambda$。 □

注记 3.3.20. 当 $\alpha > \aleph_1$ 时，根据以上命题3.3.19，E^α_ω 和 $E^\alpha_{\omega_1}$ 是不相交的平稳子集，因此，E^α_ω 和 $\kappa - E^\alpha_\omega$ 都不是无界闭集，所以 α 上的无界闭滤不是超滤。

如果 $\alpha = \aleph_1$，要证明 α 上的无界闭滤不是超滤就需要选择公理，而且这种对选择公理的依赖是必须的，因为命题"$\aleph_1$ 上的无界闭滤是超滤"与 ZF 是一致的。

命题 3.3.21. 对任意不可数正则基数 κ，如果 $\langle X_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ 是非平稳集的序列，则 $\nabla_{\xi<\kappa} X_\xi$ 仍是非平稳集。即，$I_{NS}(\kappa)$ 关于对角线并封闭。

证明. 对任意 X_ξ，存在 C_ξ 使得 $X_\xi \cap C_\xi = \emptyset$，令 $C = \triangle C_\xi$，则 C 是无界闭集（命题3.3.13）。令 $X = \nabla X_\xi$。对任意 $\gamma < \kappa$，$\gamma \in C$ 当且仅当对任意 $\xi < \gamma$，$\gamma \in C_\xi$，这蕴涵对任意 $\xi < \gamma$，$\gamma \notin X_\xi$，所以 $\gamma \notin X$，所以 $X \cap C = \emptyset$。 □

在本节剩下的部分，我们证明索洛维（Robert Solovay）的一个重要结论。首先证明一个重要的定理——福道尔（Géza Fodor）定理，除了在索洛维定理中需要用到，它还有很多应用。

定义 3.3.22. 定义在序数的集合 S 上的函数 f 如果满足对任意非 0 的 $\alpha \in S$，都有 $f(\alpha) < \alpha$，就称 f 是退缩的。

定理 3.3.23 (福道尔)**.** 任取不可数正则基数 κ，平稳集 $S \subseteq \kappa$，如果 f 是定义在 S 上的退缩函数，则存在平稳集 $T \subseteq S$ 和序数 $\gamma < \kappa$ 使得对任意 $\alpha \in T$，$f(\alpha) = \gamma$。

证明. 反设对任意 $\gamma < \kappa$，集合 $A_\gamma = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$ 都不是平稳集。对每一 $\gamma < \kappa$，存在无界闭集 C_γ，$A_\gamma \cap C_\gamma = \emptyset$，即对任意 $\alpha \in S \cap C_\gamma$，$f(\alpha) \neq \gamma$。令 $C = \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$，即 $\alpha \in C$ 当且仅当对任意 $\gamma < \alpha$，$\alpha \in C_\gamma$，也就是说，对任意 $\gamma < \alpha$，$f(\alpha) \neq \gamma$，这意味着对任意 $\alpha \in C$，$f(\alpha) \geq \alpha$。集合 C 是无界闭集，所以 $S \cap C \neq \emptyset$，这与 f 是定义在 S 上的退缩函数矛盾。 □

引理 3.3.24. 令 κ 是不可数正则基数。$S \subseteq \kappa$ 是平稳集，f 是 S 上的退缩函数。如果对任意 $\eta < \kappa$，集合

$$X_\eta = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) \geq \eta\} \tag{3.12}$$

都是平稳集，则 S 可以划分为 κ 个互不相交的平稳集。

证明. 对任意 $\eta<\kappa$，$f\restriction X_\eta$ 是 X_η 上的退缩函数。应用 Fodor 引理，得到一个 $\gamma_\eta<\kappa$，$\gamma_\eta>\eta$，使得 $S_{\gamma_\eta}=\{\alpha\in S\mid f(\alpha)=\gamma_\eta\}$ 是平稳集。

递归定义 $g:\kappa\to\kappa$ 为：$g(0)=0$，如果对任意 $\xi<\eta$ 已经定义，令 $g(\eta)=\sup\{\gamma_{g(\xi)}+1\mid\xi<\eta\}$。如果 $\xi<\eta<\kappa$，则 $\gamma_{g(\xi)}<g(\eta)\le\gamma_{g(\eta)}$，所以 $\eta\mapsto\gamma_{g(\eta)}$ 是一个 κ 到 κ 上的递增的共尾函数。所以 $\{S_{\gamma_{g(\eta)}}\mid\eta<\kappa\}$ 的基数为 κ，并且是两两不交的。 □

引理 3.3.25. 假设 κ 是不可数正则基数，$\lambda<\kappa$ 是正则基数，

$$E^\kappa_\lambda=\{\alpha<\kappa\mid\mathrm{cf}(\alpha)=\lambda\} \tag{3.13}$$

的任意平稳子集都可以划分为 κ 个互不相交的稳定子集的并。

证明. 令 $S\subseteq E^\kappa_\lambda$ 是平稳集。对任意 $\alpha\in S$，选择一个严格递增的共尾函数 $f_\alpha:\lambda\to\alpha$。对任意 $\xi<\lambda$，定义函数 $g_\xi:\kappa\to\kappa$ 为：

$$g_\xi(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{如果 }\alpha\notin S;\\ f_\alpha(\xi) & \text{如果 }\alpha\in S。\end{cases} \tag{3.14}$$

注意到，对任意 $\xi<\lambda$，$g_\xi\restriction S$ 是一个退缩函数。

对任意 $\eta<\kappa$，任意 $\xi<\lambda$，定义以下集合：

$$X^\eta_\xi=\{\alpha\in S\mid g_\xi(\alpha)\ge\eta\}. \tag{3.15}$$

我们证明：存在 $\xi<\lambda$，对任意 $\eta<\kappa$，S^η_ξ 是一个平稳集。否则，对任意 $\xi<\lambda$，存在一个无界闭集 C_ξ，一个序数 $\eta_\xi<\kappa$，使得 $C_\xi\cap X^{\eta_\xi}_\xi=\emptyset$。令 $C=\bigcap_{\xi<\lambda}C_\xi$，$\eta=\sup\{\eta_\xi\mid\xi<\lambda\}$，则 C 是无界闭集。但是，对任意 $\alpha\in C\cap S$，任意 $\xi<\lambda$，$g_\xi(\alpha)<\eta$，所以 $C\cap S\subseteq\eta$，矛盾。

固定一个 $\xi<\lambda$，使得对任意 $\eta<\kappa$，X^η_ξ 是一个平稳集。应用引理 3.3.24，S 可以划分为 κ 个互不相交的平稳集。 □

推论 3.3.26. 令 κ 为不可数正则基数，$X=\{\alpha<\kappa\mid\mathrm{cf}(\alpha)<\alpha\}$。如果 $S\subseteq X$ 是平稳集，则 S 可以划分为 κ 个互不相交的平稳集的并。

证明. 令 $S \subseteq X$ 为平稳集，定义 $f : \kappa \to \kappa$ 为 $f(\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$，则 $f \restriction S$ 上为退缩函数。由 Fodor 引理，存在 $\lambda < \kappa$，$S_\lambda = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \lambda\}$ 是平稳集。注意到 $S_\lambda \subseteq E^\kappa_\lambda$，所以 S_λ 可以划分为 κ 个互不相交的平稳集的并。 □

引理 3.3.27. 令 κ 为不可数正则基数，$S \subseteq \kappa$ 为平稳集，$f : S \to \kappa$ 为退缩函数。对任意 $\beta < \kappa$，定义集合

$$S_\beta = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \beta\}, \tag{3.16}$$

令 $I = \{S_\beta \mid S_\beta\text{是平稳集}\}$，则以下命题有且只有一个成立：

(1) $|I| = \kappa$；

(2) $|I| < \kappa$ 并且存在一个无界闭集 C，$f \restriction C \cap S$ 的值域在 κ 中有界。

证明. 假设 (1) 不成立，则存在一个 $\beta < \kappa$，

$$X_\beta = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \geq \beta\} \tag{3.17}$$

不是平稳集，否则，由引理 3.3.24，S 可划分为 κ 个互不相交的平稳集，与题设矛盾。

现在，令 $\beta < \kappa$ 为使得 X_β 不是平稳集的序数。存在无界闭集 C，$C \cap X_\beta = \emptyset$。但是 $C \cap S \neq \emptyset$，而对于任意 $\alpha \in C \cap S$，$\alpha \notin X_\beta$，即 $f(\alpha) < \beta$。 □

引理 3.3.28. 令 κ 为不可数正则基数，$R = \{\omega < \gamma < \kappa \mid \mathrm{cf}(\gamma) = \gamma\}$ 小于 κ 的不可数正则基数的集合。定义 R 的子集：

$$D = \{\gamma \in R \mid R \cap \gamma \in I_{NS}(\gamma)\}, \tag{3.18}$$

如果 R 是 κ 的平稳子集，则 D 也是 κ 的平稳子集。

证明. 反设 D 不是平稳集，令 C 为无界闭集使得 $C \cap D = \emptyset$。同时，令 C' 为 C 的极限点的集合，C' 也是无界闭集。取 $C' \cap R$ 的最小元 γ，$\gamma \in R - D$。所以，$R \cap \gamma$ 是 γ 的平稳集。

现在考虑 $C \cap \gamma$，由于 γ 是 C 的极限点，这个集合在 γ 中无界，由引理3.3.4（4），$C' \cap \gamma$ 是 γ 的无界闭集。所以 $R \cap C' \cap \gamma \neq \emptyset$，但这与 γ 是 $R \cap C'$ 的最小元矛盾。 □

定理 3.3.29 (索洛维)**.** 对任意不可数的正则基数 κ，κ 上的任一平稳集都是 κ 个互不相交的平稳集的并。

证明. 令 $S \subseteq \kappa$ 为平稳集。令

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) < \alpha\} \\ S_1 &= \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \alpha\}, \end{aligned}$$

则 $S = S_0 \cup S_1$。所以，S_0 或 S_1 是平稳集。

如果 S_0 是，则根据引理3.3.26，S_0 可划分为 κ 个互不相交的平稳集。定理得证。

现在假设 S_1 是平稳集，令 $D = \{\alpha \in S_1 \mid S_1 \cap \alpha \in I_{NS}(\alpha)\}$。根据引理3.3.28，$D$ 是平稳集。

由于 $D \subseteq S_1$，所以对任意 $\alpha \in S_1$，$D \cap \alpha$ 不是 α 的平稳子集，所以存在 α 的无界闭集 C_α 使得 $C_\alpha \cap D \cap \alpha = \emptyset$。

对任意 $\alpha \in D$，定义 $f_\alpha : \alpha \to C_\alpha$ 为：对任意 $\xi < \alpha$，$f_\alpha(\xi) =$"C_α 的第 ξ 个元素。由于 C_α 是 α 的无界闭集，所以根据引理3.3.5，可以令 f_α 是连续且严格递增的函数。注意，对任意 $\alpha \in D$，任意 $\xi < \alpha$，$f_\alpha(\xi) \notin D$。现在我们证明以下命题：

断言 3.3.30. 存在 $\theta < \kappa$，使得对任意 $\eta \in \kappa$，

$$X_\eta = \{\alpha \in D \mid \theta < \alpha \wedge f_\alpha(\theta) \geq \eta\} \tag{3.19}$$

是平稳集。

证明断言. 反设对任意 $\theta < \kappa$，存在 $\eta(\theta)$，使得 $X_{\eta(\theta)}$ 不是平稳集。令 C_θ 为无界闭集且 $C_\theta \cap X_{\eta(\theta)} = \emptyset$。所以，对任意 $\alpha \in C_\theta \cap D$，如果 $\theta < \alpha$，则 $f_\alpha(\theta) < \eta(\theta)$。现在令 $C = \Delta_{\theta<\kappa} C_\theta$，$C$ 是无界闭集，根据定义，对任意 $\beta \in C$，对任意 $\theta < \beta$，$\beta \in C_\theta$。所以对任意 $\alpha \in C \cap D$，对任意 $\theta < \alpha$，都有 $f_\alpha(\theta) < \eta(\theta)$。定义

$$E = \{\gamma \in C \mid \forall \theta < \gamma(\eta(\theta) < \gamma)\} \tag{3.20}$$

以下证明 E 是无界闭集。

首先，假设 ξ 是 E 的极限点，则 ξ 是 C 的极限点，所以 $\xi \in C$。如果 $\theta < \xi$，由于 $\sup(E \cap \xi) = \xi$，所以存在 $\gamma \in E \cap \xi$，$\theta < \gamma$，所以 $\eta(\theta) < \gamma < \xi$，所以 $\xi \in E$。

其次，任取 $\alpha < \kappa$，令 $\xi_0 > \alpha$ 并且 $\xi_0 \in C$。如果 ξ_n 已经定义，令 $\gamma = \sup\{\eta(\theta) \mid \theta < \xi_n\}$，取 $\xi_{n+1} \in C$ 使得 $\xi_{n+1} > \gamma$。令 $\xi = \sup\{\xi_n \mid n \in \omega\}$，则 ξ 是 C 的极限点，所以 $\xi \in C$。同时，如果 $\theta < \xi$，则存在 $n \in \omega$，$\theta < \xi_n$，所以 $\eta(\theta) < \xi_{n+1} < \xi$，这蕴涵着 $\xi \in E$。

现在取 $\alpha, \beta \in E \cap D$，不妨设 $\beta < \alpha$。根据定义，对任意 $\theta < \beta$，$f_\alpha(\theta) < \eta(\theta) < \beta$，所以 $f_\alpha(\beta) = \beta$。但是 $f_\alpha(\beta) \notin D$，而 $\beta \in D$，矛盾。 □

固定 $\theta < \kappa$ 使得对任意 $\eta < \kappa$，X_η 都是平稳集。定义函数 $g_\theta : \kappa \to \kappa$ 为：对任意 $\alpha \in D$，$g_\theta(\alpha) = f_\alpha(\theta)$。还记得 $f_\alpha(\theta) \in C_\alpha \subseteq \alpha$，所以 g_θ 是 D 上的退缩函数。应用 Fodor 引理，对每一 $\eta < \kappa$，我们得到一个 $\eta \leq \eta_\theta < \kappa$，使得

$$S_{\eta_\theta} = \{\alpha \in X_\eta \mid g_\theta(\alpha) = \eta_\theta\} \tag{3.21}$$

是平稳集。

现在，我们递归定义 $h : \kappa \to \kappa$。$h(0) = 0$，假设对任意 $\xi < \eta$，$h(\xi)$ 已经定义，令 $h(\eta) = \sup\{h(\xi)_\theta + 1 \mid \beta < \alpha\}$。对任意 $\xi < \eta < \kappa$，$h(\xi)_\theta < h(\eta) \leq h(\eta)_\theta$，$h$ 是严格递增函数的共尾函数。所以 $\{S_{h(\eta)_\theta} \mid \eta < \kappa\}$ 的基数为 κ。显然，它们是两两不交的。

□

3.4　习题

3.4.1. 如果 $\mathcal{F}$ 是 S 上的滤构成的一个 $\subseteq$-链，则 $\bigcup \mathcal{F}$ 是 S 上的滤。

3.4.2. 如果 F 是非主超滤，则任意 $X \in F$ 都是无穷的。因此任何非主超滤必是弗雷歇滤的扩张。

3.4.3. 如果 F 是 S 上的滤，而 $F' = \{X \subseteq S \mid S - X \notin F\}$，则 $F \subseteq F'$，并且 $F = F'$ 当且仅当 F 是超滤。

3.4.4. 假设 $X \subseteq S$，证明：

（1） 如果 F 是 S 上的滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的滤；

（2） 如果 F 是 S 上的超滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的超滤；

（3） 如果 F 是 X 上的滤，则 F 能扩张为 S 上的超滤。

3.4.5. 假设 S 是无穷的，则

（1） 存在 S 上的超滤 F，对任意 $X \in F$，$|X| = |S|$。这样的滤称为 S 上的**均匀超滤**（uniform ultrafilter）；

（2） $\{F \mid F \text{ 是 } S \text{ 上的均匀超滤}\} = \{F \mid F \text{ 是 } S \text{ 上的非主超滤}\}$ 当且仅当 S 是可数的。

3.4.6. 令 κ 为不可数正则基数，举出一个例子，使得 $X = \{C_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是 κ 上的无界闭集的族，而 $\bigcap X = \emptyset$，但是 $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \kappa$。

3.4.7. 如果令 $Y_\alpha = \{\xi \in X_\alpha \mid \xi > \alpha\}$，则 $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$。

3.4.8. $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \cup \{\xi \mid \xi \le \alpha\})$。

3.4.9. 证明不存在 ω 上非主超滤 F 使得 F 对对角线交封闭。

3.4.10. 如果 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤，则以下命题等价：

（1） F 是非主滤；

（2） $\{X \subseteq S \mid S - X \text{ 是有穷的}\} \subseteq F$；

（3） F 的元素都是无穷的。

3.4.11. 如果 S 是无穷的，则 S 上的任何非主超滤都不是 $|S|^+$- 完全的。所以 ω 上的任何非主超滤都不是 σ-完全的。

3.4.12. 如果 F 是 S 上的非主超滤，并且是 $|S|$-完全的，则 F 是均匀超滤。

3.4.13. 一个不可数基数 κ 是**可测的**当且仅当 κ 上存在 κ 完全的非主超滤。证明任何可测基数都是不可达基数，即，都是正则和强极限的。

3.4.14. 如果 F 是 S 上的滤，并且令 $\mu = \sup\{\kappa \mid F \text{ 是 } \kappa \text{ 完全的}\}$，则 μ 是正则基数，并且 F 是 μ-完全的。

3.4.15. 假设 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤。证明 F 是 κ-完全的当且仅当对任意 $\tau < \kappa$ 和任意划分 $\langle X_\xi \mid \xi < \tau \rangle$，总存在 $X_\xi \in F$。

3.4.16. 如果 $\alpha > \aleph_0$ 是正则基数，并且 $f : \alpha \to \alpha$ 是函数，则集合 $C = \{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

3.4.17. 假设 α 为极限序数，则：

（1）α 上存在一个序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

（2）如果 A 是一集极限序数，则用选择公理可以证明：存在序列 $\langle C_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ 满足：C_α 是 α 上的序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

3.4.18. $\{\alpha < \omega_1 \mid \omega^\alpha = \alpha\}$ 是 ω_1 上的无界闭集。

3.4.19. κ 上的无界闭集都是平稳集。

3.4.20. 令 κ 为不可数正则基数，$S \subseteq \kappa$，证明以下命题等价：

（1）S 是平稳集；

（2）对任意递减函数 $f : S \to \kappa$，存在序数 $\alpha < \kappa$，使得 $f^{-1}[\alpha]$ 在 κ 中无界。

3.4.21. 如果 κ 是不可达基数（它当然是不可数正则的），则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是强极限基数$\}$ 是 κ 上的无界闭集。

3.4.22. 如果 κ 是最小的不可达基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是强极限的奇异基数$\}$ 是 κ 上的无界闭集。

3.4.23. 假设 κ 是第 α 个不可达基数，而 $\alpha < \kappa$，证明 $X = \{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是正则的$\}$ 不是 κ 上的平稳集。

3.4.24. 一个无穷基数 κ 是**马洛基数**（Mahlo cardinal）当且仅当 κ 是不可达的并且 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是正则基数$\}$ 是 κ 上的平稳集。如果 κ 是马洛基数，则 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是不可达基数$\}$ 是 κ 上的平稳集，因此 κ 是第 κ 个不可达基数。

3.4.25. 如果 $\kappa = \min\{\lambda \mid \lambda$ 是第 λ 个不可达基数$\}$，证明 κ 不是马洛基数。

3.4.26. 如果 κ 是马洛基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是第 λ 个不可达基数$\}$ 在 κ 中无界。