集合论

2021 年 9 月 14 日

作者弁言

这是“逻辑与形而上学”丛书的第一本，讨论集合论的基本知识，其主要目的是和丛书的另一本《数理逻辑——证明及其限度》一起，为丛书的第三本《数学哲学——逻辑与形而上学重逢》做必要的数学基础知识的准备。在《数学哲学》中，我们将为一种“古老而又崭新的”哲学立场做全面的辩护，这种立场可以称为“柏拉图主义”或“数学实在论”，而我们更愿称其为“哥德尔主义”。这里不谈这种的立场的具体内容，只想指出它的一个主要方面，这就是逻辑与形而上学的紧密结合。事实上，从逻辑学的创立者亚里士多德那里开始，逻辑学就是探求形而上学的工具。此后，莱布尼兹、弗雷格、哥德尔这些伟大的逻辑学家，以及像康德、黑格尔、胡塞尔这些伟大的哲学家，都保持着逻辑与形而上学密不可分的传统。但随着分析哲学的兴起，经验论、自然主义和物理主义在 20 世纪盛行起来，逻辑学反倒成了“拒斥形而上学”的利器，而上述传统被有意无意地遗忘了。在哲学界，人们总是把逻辑学与分析哲学或经验论联系在一起，从而把逻辑学视为纯形式的、空洞的符号演算。所以我们在一本文集的编者按里曾指出：“……（逻辑经验主义）言知识不过是经验归纳之罗列，言逻辑不过是同语反复之句法。遂使亚里士多德探索玄学奥义之工具，沦为维也纳学派拒斥形而上学之手段。”[1]

但是，纵观从 19 世纪末康托创立集合论，弗雷格创立数理逻辑以来的 100 多年，整个逻辑学和数学基础的研究实践与经验论的传统完全不相容。任何物理主义和自然主义的哲学立场都不能很好地解释这种科学实践，虽然自然主义者常常宣称对科学实践的尊重是第一位的。我们将在《数学哲学》中详细讨论这一点，而这就不可避免地涉及当代数学，特别是集合论中的一些

[1]《逻辑与形而上学》，思想史研究第五辑，上海人民出版社，2008。

重要的结果，它们具有极强的技术性。在准备《数学哲学》的过程中，我们日益感觉到必须有一些数理逻辑和集合论的预备知识先行让读者了解，而国内几乎没有合乎这一目的的教材，这就形成了这套 3 本系列丛书的编写计划。

当然，本书的上述目的一点也不影响它作为一本标准的初等集合论教材使用。在编写过程中我们并未刻意于针对哲学系的学生。在我们看来，逻辑只有一个，并不存在哲学系的逻辑与数学系的逻辑，中国的逻辑与西方的逻辑之分。事实上，本书源自我们在复旦大学教授集合论课程的讲义。这门课在复旦大学开设多年，听众非常广泛。虽然数学系的学生占多数，但不乏来自计算机、软件工程、物理系，甚至生物系、经管类的学生，当然也包括哲学系的学生。

本书的编写得到了许多朋友和同事的帮助。复旦大学杨睿之先是作为学生，后是作为同事，对本书编写给出了许多有益的帮助。感谢曾两次作为集合论课程助教的复旦大学数学系徐天一同学，他和数学系于静同学一起积极参与了本书的排版和校订工作，指出了初稿中的很多错误，提出了良好的改进意见。北京师范大学数学系施翔晖、南京大学数学系喻良都曾看过初稿，并给出了有意的建议。而且，与他们日常的交流和讨论也令我们受益匪浅，在此谨致谢意。复旦大学出版社编辑范仁梅老师对本书的出版付出大量心血，正是她细致、认真的工作，使本书得以顺利出版。

最后，感谢复旦大学哲学学院对本书的慷慨资助。

欢迎来到康托乐园

任何人都不能把我们从康托创造的乐园里赶出去。

大卫 · 希尔伯特

我的理论坚如磐石，每支射向它的箭都会迅速弹回，射向那些射手自己。

格奥尔格 · 康托

1922 年，一向温和的德国数学家希尔伯特（David Hilbert），那个时代世界数学的领袖，发表了一篇言辞激烈的演讲。他说：

> 外尔和布劳维尔的所作所为归根结底是在步克罗内克的后尘：他们要将一切他们感到麻烦的东西扫地出门，并且以克罗内克的方式建立起禁止这些东西的独裁统治，试图以此为数学奠定基础。但这将意味着肢解和破坏我们的科学，如果顺从这些改革者，我们就要冒险，就有可能丧失大部分最宝贵的财富。外尔和布劳维尔把无理数的一般概念、函数甚至是数论函数、康托的超限 [基] 数等等都宣布为不合法。……我相信，正如克罗内克不能废除无理数一样……外尔和布劳维尔今天也不可能获得成功。不！布劳维尔 [纲领] 并不像外尔所相信的那样是正在进行的革命，他只不过是在重演一场有人尝试过的暴动，这场暴动在当初曾以更凶猛的形式进行，结果却彻底失败了。何况今日，由于弗雷格、戴德金

> 和康托的工作，数学王国已经是武装齐备，空前强固。因此，这些努力从一开始就注定要遭受同样的厄运。[2]

赫尔曼 · 外尔（Hermann Weyl）是希尔伯特最好的学生之一，后来成了他在哥廷根的接班人。布劳维尔（Luitzen Egberus Jan Brouwer）是希尔伯特曾大力提携的荷兰数学家。他们两个都是 20 世纪最重要的数学家中的一员。这样的两个人竟然受到希尔伯特如此激烈的批判，主要是因为他们反对另一位数学家格奥尔格 · 康托（Georg Cantor）的理论。这门理论现在称为集合论。克罗内克（Leopold Kronecker）是康托在柏林读书时的老师，也是康托最早、最激烈的批判者之一。康托的反对者中还有更强大的，这就是和希尔伯特一样伟大的彭加勒（Jules Henri Poincaré），后者反对康托的言词甚至更为激烈，一则传说认为彭加勒曾经说康托的理论是数学的疾病，应当被治愈。单单听说过这些名字的人就能感到这是一场关系重大的争论。

拒绝无穷的数学

潜无穷是古希腊的哲学家亚里士多德（Aristotle）首先提出的：

> 至于‘无穷’虽在潜能上有此存在，然而这类潜能的命意并不指望其实现，这只在意识上有此潜在而已。实际是这样，分割一条线永不能分割完毕。在分割过程中，潜在的‘无穷’是有的。但这无限毕竟不得实现为独立的存在。[3]

从这以后一直到康托的时代，整个数学界都只接受潜在的无穷概念，而拒绝“实无穷”的观念。[4] 伟大的数学家高斯（Carl Friedrich Gauss）的这段话常被引用：

---

[2] 希尔伯特，Neubegründung der Mathematik（1922），这里依据的是威廉 · 爱华德（William Ewald）的英译，收录于爱华德编 *From Kant to Hilbert*, Volume II, Oxford University Press, 1996 年，1119 页。

[3] 亚里士多德，《形而上学》，吴寿彭译，商务印书馆，1959 年，178 页

[4] 也许莱布尼茨是个例外。

> 我极力反对把无穷量当成一种完成的东西来使用，这在数学上是绝对不允许的。无穷只不过是在实际谈论极限时的一个说法，有些关系可以要多接近就多接近极限，而另一些则允许无限制地增长。[5]

然而这种认识论倾向不断受到数学实践的挑战，同时它也阻碍着对一些基本的数学概念的理解。希尔伯特多次提到的无理数概念就是其中之一。虽然任何有理数可表示为两个整数之比，然而无理数却不能用有穷个有理数来表达。这就意味着在拒绝实无穷的数学中，无理数的概念无法得到说明，因而实数概念也不能得到说明，所以克莱因（Morris Kline）在《古今数学思想》中慨叹说：

> 数学史上最使人惊奇的事实之一，是实数系的逻辑基础竟迟至 19 世纪后叶才建立起来。在那以前，即使正负有理数与无理数的最简单的性质也没有逻辑地建立，连这些数的定义也还没有。[6]

直到柯西（Augustin-Louis Cauchy）提出极限的概念，情况才有所转机。按照这种方法，无理数，例如 $\sqrt{2}$ 可以被看作有理数序列：

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$$

的极限。这样，无理数得到了说明，同时又保持了潜无限的认识论。因为以上序列并非完成了的无穷，而只是不断接近的过程。可是，这里面存在着逻辑上的循环。按照柯西关于极限的的定义，必须先知道极限 $\sqrt{2}$，才能确定这个有理序列是否收敛于 $\sqrt{2}$。但是在定义$\boxed{\text{F}}$无理数之前，我们并不知道 $\sqrt{2}$ 是什么。对此，魏尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass）做了改进，以避免这种逻辑循环。他把序列

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$$

[5]高斯，《1931 年 7 月 12 日致舒马赫（Schumacher）的信》，这里据爱华德的英译，收录于爱华德编 *From Kant to Hilbert*, Volume I, Oxford University Press, 1996 年，303 页。

[6]克莱因，《古今数学思想》，上海科学技术出版社，2002 年，第四卷 41 页。

的极限看作集合

$$\{1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...\}$$

而无理数 $\sqrt{2}$ 就被定义为这个集合。这样，就像有理数由整数来定义一样，无理数总算可以用有理数来定义了。可是以上定义却把一个无穷集合看作了“完成了的整体”，这就超出了潜无穷的认识论。

康托对无穷的探索

一个集合的基数是其所包含的元素的个数。一般人们通过“数数”来确定一个集合的基数，例如

$$\begin{array}{cccc} \clubsuit & \diamondsuit & \heartsuit & \spadesuit \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

确立了集合 $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ 有 4 个元素。而这个数数的过程可以抽象为在集合 $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ 与集合 $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 之间建立了一个一一对应。所以，如果两个集合之间有一一对应，那它们的基数一定相等：

A 和 B 基数相等，或者称为“等数”的当且仅当 A 和 B 之间有一一对应。

康托注意到可以确定两个集合等数，而不必知道其中任何一个的基数。例如，如果你看到教室里座无虚席，又没有人站着，你就可以确定椅子的基数与人的基数是相等的，虽然你不知道教室里到底有多少人和椅子。现在考虑一个无穷的集合，例如，全体自然数的集合 $\mathbb{N}$。人们很早就发现：

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{array}$$

全体自然数和全体平方数是等数的！而后者是前者很小的一部分。这似乎违背了基本的数学原则：整体大于部分。但这并不是真正的困难。整体大于部分只是有穷集合的性质，而与自己的一部分等数，是无穷集合区别于有穷集合的性质。

康托继续考虑更大的集合，全体有理数的集合 $\mathbb{Q}$。很快他就发现 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 也是等数的！（毫无疑问，你将在本书中看到证明，所以此处就不提及细节了。）这个惊人的结果促使我们猜想，也许所有的无穷集合都是等数的，如果真是那样，无穷不就只是个乏味而平凡的概念了吗？幸运的是，康托很快就利用对角线法证明全体实数的集合 $\mathbb{R}$ 不与 $\mathbb{N}$ 等数。换句话说，$\mathbb{R}$ 的基数是比 $\mathbb{N}$ 的基数更大的无穷。这一结果打开了康托的乐园——对无穷进行研究的大门！实际上，运用对角线法，康托证明了对任意集合 X，X 的幂集（即 X 的所有子集组成的集合）$\mathcal{P}(X)$ 的基数总是大于 X 的基数。因此，无论一个集合的基数有多大，总可以通过它的幂集找到比它更大的基数。例如 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 就是比实数集合 $\mathbb{R}$ 的基数更大的集合。康托把无穷基数称为超穷数。第一个超穷数是 $\mathbb{N}$ 的基数，康托用 $\aleph_0$ 表示，而下一个超穷数就是 $\aleph_1$，于是有超穷数的序列：

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots。$$

同时康托把实数集合 $\mathbb{R}$ 的基数记为 $\mathfrak{c}$，这是因为实数集合常常被称为“连续统（continuum）”。如上所说，康托已经证明 $\mathfrak{c} > \aleph_0$。由此，他作出如下猜想：

$$\mathfrak{c} = \aleph_1。$$

他认为自己很快就能证明这个猜想。可是，康托没有想到的是，这个被称为“连续统假设”的猜想，经过数学家一个多世纪的努力，至今仍未彻底地解决。

希尔伯特第一问题

1900 年夏天，巴黎迎来了新世纪的第一次数学家大会。这一年 38 岁的希尔伯特在事业上正如日中天。他在受邀发表的报告中，展望了新世纪数学的前景，紧接着提出了 23 个他认为重要的、在当时却尚未解决的问题，向 20 世纪的数学家提出挑战。这 23 个数学问题对 20 世纪数学发展的影响怎样估计都不会过分。在此后的 100 多年里，它们成为年轻数学家的行路指南。任何能解决其中某个问题的人都会在数学界赢得声望。到今天，除了有两个被认为太过模糊或者不属于数学问题外，这 23 个问题中，只有两个尚未有任何

形式的解决。其中一个是“黎曼假设”（Riemann Conjecture），它又作为新的世纪，即 21 世纪最重要的数学问题被提出来，并且悬以百万美元的奖励。

位于这 23 个神奇的问题首位的就是康托的连续统假设。所以连续统问题也称为“希尔伯特第一问题”。除了表明这是一个伟大的数学问题外，还表明希尔伯特对康托超穷数理论的巨大肯定。联想到本章开始所叙述的对康托理论的强烈反对，有希尔伯特这种有巨大影响力的数学家的坚定的支持，对集合论之后的发展具有决定性的意义。他的名言：

任何人都不能把我们从康托创造的乐园里赶出去。

直到今天还在鼓舞着数学家们对集合论的探索。1938 年，库尔特 · 哥德尔（Kurt Gödel），“亚里士多德以来最伟大的逻辑学家”，在希尔伯特第一问题上获得重要突破，这时距离希尔伯特提出这个问题已经近 40 年了。哥德尔的结果将在本书的第八章中讲述，这里我们先用最直观的方式陈述于下：

在现有数学的框架内，不能证明连续统假设是假的。

时间又过了 20 多年，美国数学家保罗 · 科恩（Paul Cohen）在 1963 年再次取得进展，他证明：

在现有数学的框架内，不能证明连续统假设是真的。

科恩因此获得了数学界的最高荣誉菲尔兹奖。哥德尔和科恩的结果表明，连续统问题的解决，依赖于更强有力的手段，而这是现今的数学所不具备的。科恩的结果将在第九章讨论。

集合论早期和其后的发展是一个广泛的课题，我们在本书的最后还会回到这个话题上来，此处的介绍难免挂一漏万。它只是在这个广阔的领域内选取一条花香四溢的小径，目的是引领你来到康托乐园的门前。而此刻，假设我们目的已经达到，你已被带到一个美丽的所在，门口写着“康托乐园”，透过大门，你甚至看到了园中绽放的美丽花朵“连续统假设”。如果你已被眼前的美景所吸引，那么，请进！

目录

第一章　集合与公理

> 对于一个科学工作者来说，最不幸的事情莫过于：当他的工作接近完成时却发现那大厦的基础已经动摇。
>
> 哥特洛布 · 弗雷格

1902 年 6 月, 居住在德国小镇耶拿的数学家哥特洛布 · 弗雷格（Gottlob Frege）收到了寄自贝特兰 · 罗素（Bertrand Russell）的来信。此时的弗雷格已经 53 岁，正踌躇满志地等待他的巨著《算术基本规律》第二卷（*Grundgesetze der Arithmetic*, Band II）的出版，它已被送往印刷厂，而第一卷已经于 1893 年就出版了。他相信自己完成了一项重大的工程：把全部数学置于逻辑的牢固基础之上。

可是，罗素的信却使弗雷格的工程面临巨大挑战。

在翌年出版的《算术基本规律》第二卷中, 人们发现增加了作者写于 1902 年 10 月的《附录二》，它的开头是这样的：

> 对于一个科学工作者来说，最不幸的事情莫过于：当他的工作接近完成时却发现那大厦的基础已经动摇。而贝特兰 · 罗素的一封信却置我于这样的境地[1]

是什么使弗雷格如此绝望？罗素的信中有什么东西如此沉重地打击了这位数学家？如何拯救那“基础已经动摇的大厦”？本章就来回答这些问题。

[1] 弗雷格，The Baisc Laws of Arithmetic，福尔茨（Montgomery Furth）编译，加利福尼亚大学出版社，1964 年，127 页。

1.1　罗素悖论

康托是在素朴（直观）的意义上理解集合并进行其开创性研究的。他在《超穷数理论基础》一书中为集合做了这样的“定义”:

> 我们将“集合（*Menge*）”理解为任何将我们的直觉或思维能够确定和加以区分的对象 m 所汇集成的总体。[2]

而与康托不同，弗雷格则考虑的是“概念”，并且默认每个概念都有一个外延。弗雷格的基础研究中，概念的外延就相当于康托使用的集合。因此，弗雷格的公理系统中实际包含了以下称之为“概括原则”的公理:

对任意性质 ψ，存在 $X = \{x|\psi(x)\}$，X 恰好含有所有具有性质 ψ 的对象。 (∗)

可就在以上提到的 1902 年致弗雷格的信中，罗素指出这是一条自相矛盾的原则!

令 φ 为性质“不属于自己的集合”，即 $\varphi(x) =$ “x 是集合并且 $x \notin x$”，则根据（∗），存在以下集合

$$R = \{x|\varphi(x)\}。$$

R 恰好包含所有“不属于自身”的集合。由于 R 本身是集合，所以可以问 R 是否属于 R 呢？如果 R 属于 R，根据 R 的定义，R 有性质 φ，可性质 φ 是说不属于自身，因此 $R \notin R$；如果 $R \notin R$，则 R 是不属于自身的集合，因此有性质 φ，根据 R 的定义，就有 $R \in R$。所以，R 属于 R 当且仅当 R 不属于 R。这个矛盾就是著名的罗素悖论。

罗素悖论的发现并不是突然的。在此之前很多类似的悖论已被注意到，例如康托自己发现的关于最大基数的悖论和布拉里-福尔弟（Burali-Forti）悖论。然而，由于它们不像罗素悖论那样简明而未受重视。

不过在如何看待罗素悖论的问题上有着很大的分歧。布劳维尔、外尔以及彭加勒等把悖论视为是对康托集合论的致命一击，认为人类应该抛弃这个

[2] 康托，《超穷数理论基础》（中译第二版），陈杰、刘小力译，商务印书馆，2016 年，62 页。

学科，即，放弃对超穷数的探索。希尔伯特虽然认为康托的理论必须保留，但希望能用数学“有穷的部分”来证明超穷部分的一致性，这就是他的元数学思想，一般称为“希尔伯特纲领”。

哥德尔没有把罗素悖论看作是数学的严重问题，他认为悖论出现于“数学的边界上”，而且是靠近哲学的边界上，对数学本身影响不大。他还认为，通过对康托集合论的公理化，悖论已经被“完美地”解决了。[3]

在介绍这种分歧时不可避免地要涉及哲学，而本书的至少一部分读者是数学家，他们本能地会对哲学抱有某种并不亲切的态度。但是，集合论作为数学的一个非常独特的领域，是不可能完全避免哲学讨论的。在哥德尔看来，集合论甚至可以说是某种数学化了的哲学。其实，任何数学家，无论从事具体的哪个领域，都会面临至少一个问题：像自然数、有理数以及实数这样的“数学对象”是客观存在的呢，还是出自人类的构造？我们证明的数学定理是像物理定律那样是对某个客观世界的真实描述，还是只不过是我们玩的一种文字游戏？那些把数学世界看作独立于我们、独立于物理世界的客观存在，把数学定理视为是对这个客观世界的真实描述的观点，在哲学上被称为“实在论”，或者“柏拉图主义”。哥德尔是柏拉图主义最好的代表。

回到罗素悖论。在哥德尔看来，悖论的出现只有一个原因，就是我们对客观的集合宇宙认识的不够清楚。在物理理论中类似的情况经常出现，而且是物理学向前发展的一种基本形式。例如，有关麦克斯韦方程和经典力学伽利略变换之间的矛盾，是因为我们对物理时空的认识尚不准确。通过解决这个矛盾而出现的相对论则把我们对时空的认识推进了一大步。基于其实在论的立场，哥德尔有强烈的将数学、数学世界与物理、物理世界相类比的倾向。他认为罗素悖论像物理中出现的一些矛盾一样，并不造成对整个学科的困扰，而且随着策梅罗（Ernst Zermelo）公理化集合论的提出，这个问题已经完美地解决了，而解决之道就是基于数理逻辑的公理化方法。

---

[3]哥德尔，The modern development of the foundations of mathematics，载于 *Collected Works, Volume III. Unpublished Essays and Lectures*，费弗曼（Solomon Feferman）等人编辑，Oxford University Press，375—387 页。

1.2　一点数理逻辑

我们假定读者已经知道形式语言、逻辑符号、非逻辑符号、项、公式、自由变元、约束变元、语句(即不含自由变元的公式),等等这些句法概念。事实上,可以把形式语言的初始符号指定为自然数,如 1 表示左括号 (,5 表示否定词 $\neg$,等等,而公式或语句就可看作自然数的有穷序列。假设 $\varphi = \langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ 是这样的一个公式,令 $p_1, \ldots, p_m$ 为前 m 个素数,则

$$p_1^{n_1+1} p_2^{n_2+1} \cdots p_m^{n_m+1}$$

就是由 φ 唯一决定的一个自然数,所以每个公式和语句作为数学对象,也可视为是自然数。我们令 $_{set}$ 表示集合论的语言,除了逻辑符号和括号,它只包含一个二元谓词 $\in$。

假设 Σ 是一个公式集,φ 是一个公式,所谓从 Σ 到 φ 的一个推演,是指一个有穷的公式序列 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$,其中每个 φ_i 或者属于 Σ,或者是逻辑公理,或者由在它之前的公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ 得到,并且 $\varphi = \varphi_n$,通常记作 $\Sigma \vdash \varphi$。特别地,对于语句集 T 和语句 σ,$T \vdash \sigma$ 就表示存在 T 到 σ 的一个证明。

如果语句集 T 满足:对任意语句 σ,$T \vdash \sigma$ 当且仅当 $\sigma \in T$,即 T 是一个对证明封闭的语句集,就称 T 为一个理论。假设 T 是理论,如果存在一个语句集 $A \subseteq T$ 使得对任意 $\sigma \in T$ 都有 $A \vdash \sigma$,就称 A 是 T 的一集公理。如果理论 T 的公理集 A 是递归的,即,任给一个语句,我们可以在有穷步内用完全机械的方法判定它是否属于 A,就称 T 是可公理化的。“递归”的有时也称为可判定的或可计算的。这些概念都源自自然数上的关系和函数的性质,之所以能应用到此处,是因为如上所述,公式和语句,乃至证明作为数学对象,都可看作自然数。

事实上,前面提到的形式语言的公式、语句、“从 T 到 σ 的证明”等句法概念都是递归的,还有,对公式编码的运算也是递归的。不过理论本身,作为自然数的一个集合,通常不是递归的,而仅仅是“半递归的”,即如果 $\sigma \in T$,我们可以在有穷步内知道这一点,但如果 $\sigma \notin T$,我们却可能无法在有穷步内得出结论,这样的集合通常称为递归可枚举的。

我们用“理论 T”这个短语既指理论 T 本身，也指它的公理集，如我们下一节会介绍的理论 ZFC。一个理论 T 是一致的当且仅当没有语句 σ 使得 $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$。以上简单的讨论涉及了数理逻辑的两个很重要的思想。首先，虽然我们可以在 ZFC 内谈论很大的无穷，例如，不可达基数，但是叙述 ZFC 的形式语言以及形式理论 ZFC 本身却都是“有穷”对象：自然数或自然数的有穷序列，以及自然数上的递归关系。

ZFC 是我们谈论的对象，被称为“对象理论”，它是可以严格形式化的，即可以被看作明确的数学对象。而用来谈论和研究它的理论，即“元理论”，却是“直观”的，不能严格地形式化，不是数学的对象。元理论的边界通常是模糊的，但从以上的讨论可以看出，它至少需要包含一些初等算术的内容，否则我们根本不能有形式语言、语句、证明以及编码这些概念。不同哲学立场人容许不同强度的元理论。柏拉图主义者会容许更强的元理论，而有穷主义者或形式主义者则通常会要求元理论中不能涉及“实无穷”的概念。不过以上讨论的所有句法概念都是递归的，因而是严格有穷的对象，所以不与任何哲学立场冲突。

1.3　公理

我们不可能证明所有的命题。所以任何理论必须有一些作为出发点的命题，它们是不需要证明的。而所有其他命题则是这些初始命题根据逻辑的推论。这些初始的命题称为公理。形式主义者认为，在满足一致性的前提下，我们可以随便选取一些命题作为公理，只要它们足够推出我们所需的定理来就可以了。但是，在数学发展的实践中，选取哪些命题作为公理总是依赖于一些原则。其中最重要的标准就是直观上的显然性。公理既然是不需要证明的，那它的真理性就应该一目了然，使任何人都不会怀疑它是真的。当然，这条标准并不是严格明确的，历史上也多次为某个公理的自明性发生争论。早的如欧几里得 (Euclid) 的第五公设。晚近一点的如选择公理。虽然如此，关于自明性我们还是有一些基本的判断。比如，绝大部分人会认为“如果两个集合有相同的元素，那么这两个集合就会相等”是显然真的；而很少人会觉得“不存在一个无穷基数，它大于全体自然数的基数，而小于全体实数的基数”是显然真的。

任何形式的公理系统都包含一些逻辑公理。读者可以在任何一部关于数理逻辑的书中找到这些公理[4]。就本书的目的来讲，我们不必细究这些逻辑公理。它们所陈述的是一些逻辑真理。反过来，如果我们的证明已经直观地遵循了那些众所周知的逻辑原则，也就已经承认并使用了这些逻辑公理。但是，有一条逻辑公理值得强调：

存在公理 0（Exi）[5] *存在一个集合，*

$$\exists x(x = x). \tag{1.1}$$

这条逻辑公理提醒我们，我们所遵循的逻辑有一个本体论上的承诺：我们所谈论的世界不能是虚无的，它至少存在着一个事物；具体到当前的课题，就是说至少存在一个集合时，我们所有的讨论才会获得意义。虽然策梅罗最早使用了比这更强的公理：

存在一个不含任何元素的集合。

但后面将会看到，不含任何元素的集合可以定义出来。

外延公理 1（Ext）*两个集合相等当且仅当它们有相同的元素：*

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y. \tag{1.2}$$

"外延"通常被理解为概念的一个方面：每个概念都有"内涵"，即一组规定性，和外延，即满足这些规定性的所有对象落入其中的那个范围。例如，"能被 2 整除"就是一个规定性，它是"偶数"这个概念的内涵，而 $\{2, 4, 6, \cdots\}$ 则是偶数的外延。在很多情形下，不同的规定性，或者说不通的内涵所确定的外延是相同的。但是，如果我们打算对概念进行科学研究，通常不能允许一个概念有不同的外延。前面提到的罗素悖论，它定义的 R 就是一个不能用外延决定的概念，不能确定 R 是不是自己的元素。

所以，从哲学上说，外延公理的意义就是：集合是由元素完全决定的。反过来说，只有能以元素完全确定的对象才有可能是集合。这是我们对集合进

[4]可以参考文献 **?**。

[5]括号中为该公理的简称，并非都是通行，只不过本书中时常使用。

行科学研究最基本的要求。试想一下，如果我们没有一个明确的标准判断两个集合是否相等，那集合论这个学科就难以建立起来。

从不那么哲学的角度看，外延公理也的确给了我们证明两个集合相等的数学方法。在后面我们会“定义”很多不同的集合，判定这些定义是否合理的一个重要方面是被定义的集合是不是唯一的，而证明这一点的工具就是外延公理。另外，外延公理还使得 $\{u, v, w, x, y, \cdots\}$ 这种关于集合的记法成为合理的：这个集合由这些元素唯一决定。

我们在叙述外延公理时使用了“当且仅当”，事实上只需要一个方向就够了。因为另一个方向：如果 $X = Y$，那么 $\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$ 是逻辑的定理。这实际上是“相等”的含义：两个对象相等，当且仅当在任何公式中将其中一个替换为另一个，所得到的结果都不会改变真值。而外延公理中的那个公式就是 $\forall u(u \in X)$。因此，在没有等词的逻辑语言中，我们还可以将外延公理理解为“两个集合相等”的定义。

下面一个练习不是关于外延公理的 = 本身的，而是为了理解“一个命题在一个结构或模型中为真”的一般含义。也就是说，我们倾向于将 $\in$ 理解为“属于”，但也可以解释为别的含义，同时保持外延公理为真。

练习 1.3.1. 令 $\mathbb{N}$ 是自然数的集合，$<$ 是自然数上的序关系，证明：外延公理在 $(\mathbb{N}, <)$ 中成立。即，证明，如果我们把符号“$\in$”理解为自然数上的 $<$，把量词“$\forall$（所有的）”理解为“所有的自然数”，把“$\exists$（至少存在一个）”理解为“至少存在一个自然数”，那么外延公理是真的。

分离公理模式 2（Sep）令 $\varphi(u)$ 为公式。对任意集合 X，存在一个集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$：

$$\text{给定公式 } \phi\text{，以下语句是公理：} \quad \forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u)). \tag{1.3}$$

我们称其为分离公理模式，是因为它实际上代表着无穷多条公理。对于每一公式 φ，都存在相应的一个分离公理。之所以不能用 $\forall\phi(u)\forall X\exists Y\forall u\cdots$ 这样的方式将其表达为一条公理，是因为我们限定自己的逻辑为一阶逻辑。我们只能将量词 $\forall$ 和 $\exists$ 作用于对象，即集合，而不能作用于公式 ϕ 这样的非一阶对象。这个限制的确在很多情况下带来不便，但是一阶逻辑有着高阶逻辑

和其他逻辑所不具备的良好性质，这些性质被 Lindeström 定理所刻画，具体可以参见 **?** 或**?** 等。

分离公理有很多不同的称呼。由于它是对概括原则的限制，所以有时就称为概括公理。又由于公理中的 Y 实际上是 X 的一个子集，所以有时也称为子集公理。分离公理则（Axiom der Aussondrung）是策梅罗使用的称呼。

分离公理是对“概括原则” $(*)$ 的限制。给定一个性质 $\psi(x)$，概括原则允许我们定义集合 $Y = \{x \mid \psi(x)\}$，但分离公理却不允许这样做。除了给定的性质 $\psi(x)$，我们还需要已经存在的集合 X，才能利用 $\psi(x)$ 从 X 中分离F集合 Y。正如策梅罗指出的，这条公理不同于概括原则之处就在于“它有以下的限制。首要的是集合不能通过这条公理独立地定义，而是必须从已经存在的集合中被分离出来；这样，包含矛盾的概念，如‘所有集合的集合’……就被排除了。”（**?**）策梅罗所提到的排除“所有集合的集合”这一概念，正是为了避免罗素悖论这样的困境。

令 $\varphi(x)$ 为 $x \notin x$，分离公理不能确定 $R = \{x \mid \varphi(x)\}$ 这样的类为集合，而是断定对任意已经存在的集合 X，$R_X = \{x \in X \mid \varphi(x)\}$ 是集合。显然，或者 $R_X \notin R_X$ 或者 $R_X \in R_X$。如果 $R_X \in R_X$，则 $R_X \in X$ 且 $R_X \notin R_X$，与 $R_X \in R_X$ 矛盾，所以 $R_X \in R_X$ 不成立。现在假设 $R_X \notin R_X$。这蕴涵着 $R_X \notin X$ 或者 $R_X \in R_X$。由于或者与假设矛盾，所以我们只能得到 $R_X \notin R_X$ 蕴涵 $R_X \notin X$，而这并不矛盾。

事实上，通过以上分析，我们证明了：对任意集合 X，总存在一个集合 R_X，使得 $R_X \notin X$，因此所有集合的集合不再是集合（见 **?** 定理 10）。

令 $\varphi(u)$ 为一个性质。如果存在集合 X 满足：对任意 u，$\varphi(u)$ 蕴涵 $u \in X$，则 $\{u \mid \varphi(u)\} = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$，根据分离公理，这样的集合存在，并且这个集合不依赖于 X，即，如果有 X' 也满足 $\varphi(u)$ 蕴含着 $u \in X'$，则 $\{u \in X \mid \varphi(u)\} = \{u \in X' \mid \varphi(u)\}$。这种情况下，$\{u \mid \varphi(u)\} = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$，其中 X 是满足以上条件的任意集合。据此，由于 $x \neq x \to x \in X$ 总是真的，而且根据公理 0，至少存在一个集合，所以：

定义 1.3.2. $\{x \mid x \neq x\}$ 是集合，并且根据外延公理，它是唯一的，称为**空集**，记为 $\emptyset$。

练习 1.3.3. 利用外延公理，证明集合 $\{x \mid x \neq x\}$ 是唯一的。

应该注意的是，如果不存在集合 X 满足对任意 u，$\varphi(u)$ 蕴含着 $u \in X$，则 $\{u \mid \varphi(u)\}$ 就不是集合。因此我们有如下定义：

定义 1.3.4. 令 $\varphi(u)$ 为一个性质，则依据上面的分析 $\{u \mid \varphi(u)\}$ 不一定是集合，这样的对象称之为**类**（class），特别地，不是集合的类又称为**真类**（proper class）。

显然，每个集合都是类，例如 $\{x \mid x \neq x\}$。但有些类不是集合，例如，$R = \{X \mid X \notin X\}$ 就是真类。

注记 1.3.5. 由于集合论谈论的都是集合，所以不是集合的真类不是集合论的合法对象。但是为了方便，今后我们一般用大写字母表示类，例如用 V 表示"所有集合"的类，而公式 $x \in V$ 不过是说 x 是集合，等价于公式 $x = x$。再例如，以上罗素类会记作 $R = \{x \mid x \notin x\}$，而 $x \in R$ 就是说 $x \notin x$。读者要注意的是，$x \in V$ 不是集合论语言中的公式，它不过是集合论公式 $x = x$ 的一种记法。

定义 1.3.6. 由分离公理，我们可以断定任意两个集合的**交**和**差**仍然是集合，分别定义如下：

$$X \cap Y = \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\} \qquad X - Y = \{u \mid u \in X \wedge u \notin Y\}.$$

事实上，对任意集合 $X \neq \emptyset$，它的**任意交**

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y(Y \in X \to u \in Y)\}$$

也是集合。

练习 1.3.7. 证明对任意集合 X, Y，$X \cap Y$，$X - Y$ 都是集合，并且是唯一的：即如果 $X = X', Y = Y'$，则 $X \cap Y = X' \cap Y'$；证明当 $X \neq \emptyset$ 时，$\bigcap X$ 是集合并且是唯一的。如果 $X = \emptyset$ 会为什么不成立？

对集公理 3（Pai）对任意 a 和 b，存在一个集合只以 a,b 为元素：

$$\forall a\forall b\exists c\forall x(x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b). \tag{1.4}$$

根据外延公理，这样的集合 c 是唯一的，我们把它表示为 $\{a,b\}$。由对集公理立即可得，**单点集** $\{a\}=\{a,a\}$ 是集合。

定义 1.3.8. 对任意集合 x,y，令 (x,y) 表示 $\{\{x\},\{x,y\}\}$，称为 Kuratovski **对**，也称为**有序对**。

练习 1.3.9. 证明：$(x,y)=(x',y')$ 当且仅当 $x=x'\wedge y=y'$。

大部分读者熟悉并集的概念，即将两个集合的元素合为一个集合。下面的公理确立的是更为一般的并集的概念。它是说给定一个集合 X，我们可以用 X 的所有元素的元素构造一个新的集合。这就好像饼干罐里装满了一些独立包装的饼干，数块饼干为一小包。现在将这些独立的包装打开，就形成了另一罐饼干。第一罐的元素是包在一起的饼干，而第二罐的元素则是一块块的饼干。

并集公理 4（Uni）对任意集合 X，存在集合 Y 满足：$u\in Y$ 当且仅当存在 $z\in X$ 使得 $u\in z$：

$$\forall X\exists Y\forall u(u\in Y\leftrightarrow\exists z(z\in X\wedge u\in z)). \tag{1.5}$$

这样的 Y 是唯一的，称为 X 的**并**，记为 $\bigcup X$。特别地，我们定义 $X\cup Y=\bigcup\{X,Y\}$。

练习 1.3.10. 证明如果 $X=X'$，则 $\bigcup X=\bigcup X'$，即 $\bigcup X$ 是唯一的。另外，思考一下为什么并集公理是必须的？我们不能像定义一般交那样，由其他公理直接定义一般并。

定义 1.3.11. 如果 X 的元素都是 Y 的元素，则称 X 是 Y 的**子集**，表示为 $X\subseteq Y$。如果 $X\subseteq Y$ 并且 $X\neq Y$，则称 X 是 Y 的**真子集**，记为 $X\subset Y$。

练习 1.3.12. 1、证明对任意集合 X，$\emptyset\subseteq X$。

2、证明 $X=Y$ 当且仅当 $X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X$。

下面的公理断言，一个集合的所有子集组成一个新的集合。

幂集公理 5（Pow）对任意集合 X，存在集合 Y 满足 $u \in Y$ 当且仅当 $u \subseteq X$：

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{1.6}$$

这样的集合 Y 是唯一的，称为 X 的**幂集**，记为 $\mathcal{P}(X)$。

前面定义了有序对，而数学中经常讨论的“关系”概念在集合论中定义为“有序对的集合”。

定义 1.3.13. 令 X 和 Y 为集合，则 X 和 Y 的**卡氏积**定义为：

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}. \tag{1.7}$$

如果 $X = Y$，则将 $X \times X$ 简记为 X^2。

要证明 $X \times Y$ 是集合，需要用到幂集公理。

练习 1.3.14. 证明 $X \times Y$ 是集合。

定义 1.3.15. 一集合 R 称为**二元关系**，如果存在集合 X, Y，$R \subseteq X \times Y$。这样，二元关系 R 的所有元素都是有序对，即，对任意 $z \in R$ 存在 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 满足 $z = (x, y)$。

一般地，用 $R(x, y)$ 表示 $(x, y) \in R$，称 x 和 y 有关系 R。有时习惯地写作 xRy。如果 $X = Y$，则称 R 为 X 上的二元关系。

定义 1.3.16. 如果集合 X 上的二元关系 $<$ 满足（1）传递性：$x < y$ 并且 $y < z$ 蕴涵 $x < z$，（2）反对称：$x < y$ 蕴涵 $y \not< x$，就称 $<$ 为**偏序**。

如果偏序关系 $<$ 还满足（3）三歧性：对任意 $x \neq y$，$x < y$ 或 $y < x$，就称 $<$ 为**线序**或全序。

如果偏序集 $<$ 满足（4）良基性：如果 $Y \subseteq X$ 是非空的，则存在 $y_0 \in Y$，对任意 $y \in Y$，都有 $y_0 = y$ 或 $y_0 < y$，就称 $<$ 是**良序**。

今后我们用 $x \leq y$ 表示 $x < y$ 或 $x = y$。

练习 1.3.17. 如果 $<$ 是良序，则它也是线序。

练习 1.3.18. 证明自然数 $\mathbb{N}$ 上的小于关系 $<$ 是良序；整数 $\mathbb{Z}$，有理数 $\mathbb{Q}$，实数 $\mathbb{R}$ 上的小于关系是线序，但不是良序。

定义 1.3.19. 对任意集合 α，如果 $\in$ 是 α 上的良序，就称 α 是**序数**。

例 1.3.20. $\emptyset$ 是序数；不难验证

$$\{\emptyset\}, \quad \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \quad \cdots \tag{1.8}$$

也是序数，将它们记为 $0,1,2,3,\cdots$。容易看出，$0 \in 1 \in 2 \in 3 \cdots$。

对任意序数 α,β，我们记 $\alpha \in \beta$ 为 $\alpha < gb$，并称 α 小于 β。

定义 1.3.21. 对任意集合 x，集合 $x \cup \{x\}$ 称为 x 的**后继**，一般记为 $S(x)$ 或者 x^+。

一个序数 α 如果是另一个集合的后继，就称 α 为**后继序数**。不是后继的非 0 序数称为**极限序数**。

显然，$1,2,3,\cdots$ 都是后继虚数。那么，自然的问题是：是否存在极限序数呢？我们定义以下集合：

$$\omega = \{n \mid n = 0 \vee (n \text{ 是后继序数} \wedge \text{所有小于 } n \text{ 的序数也是后继序数})\} \tag{1.9}$$

可以看出，$0,1,2,3,\cdots$ 都属于 ω，简单说，ω 包含 0 以及通过有穷次取后继得到的序数。但是，现有的公理不能保证 ω 是一个集合，我们需要找到一个集合 X 使得 $\omega \subseteq X$，然后应用分离公理。

无穷公理 6（Inf）存在一个集合 X，$\emptyset \in X$，并且对任意 $x \in X$，x 的后继 $S(x)$ 也属于 X。这样的集合通常称为**归纳集**。

练习 1.3.22. 证明：对任意归纳集 X，$\omega \subseteq X$，因此无穷公理保证了它是一个集合，并且是最小的归纳集。【提示：假设 n 是最小的满足 $n \in \omega$，$n \notin X$ 的后继序数，令 $n = S(m)$，则 $m \in X$，由此得到矛盾。】

练习1.3.22实际上是我们熟悉的数学归纳原理，因为它等价于以下命题：

引理 1.3.23. 对任意 $X \subseteq \omega$，如果 X 是归纳集，则 $X = \omega$。

借助数学归纳，我们可以证明 ω 是一个序数，而且是第一个极限序数，也是第一个无穷序数。

定理 1.3.24. ω 是一个极限序数。

证明. □

下面一个公理有些与众不同。以上公理都是构造性的或存在性的，即都是断定某个集合存在，或由已知的集合构造新的集合。而下一个公理却是“否定性的”，它是说某些类不是集合。

基础公理 7（Fnd）对任意集合 $x \neq \emptyset$，存在 $y \in x$ 使得 $y \cap x = \emptyset$：

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)). \tag{1.10}$$

基础公理有时也叫做正则公理，它实际上断定的是：对任意非空集合 x，x 总有一个元素 y 是关系 $\in$ 限制在 x 上的“最小元”。也就是说，x 中再没有元素属于 y 了。

它的一个直接推论就是：

定理 1.3.25. 任意集合 x 都不属于自身。

证明. 反设存在集合 $x \in x$，令 $I = \{x\}$，则对 I 的任意元素，事实上 I 只有一个元素，x，都有 $x \cap I = x \neq \emptyset$。与基础公理相矛盾。 □

练习 1.3.26. 证明不存在集合 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$，其中对任意 n，$x_{n+1} \in x_n$。这样的集合称为无穷下降链，基础公理确保不存在无穷下降链。

为了进一步的叙述，我们引入一个记法：

记法 1.3.27. $\exists! x\psi(x)$ 表示 $\exists x\psi(x) \wedge \forall x \forall y(\psi(x) \wedge \psi(y) \to x = y)$。

显然，$\exists! x\psi(x)$ 的意思是：有**唯一的** x 具有性质 ψ。

替换公理模式 8（Rep）给定公式 $\psi(x, y)$，并且对任意 x，都有唯一的 y，使得 $\psi(x, y)$ 成立。则对任意集合 A，以下集合存在：

$$B = \{y \mid \exists x(x \in A \wedge \psi(x, y))\}. \tag{1.11}$$

用公式表示就是

$$\forall A \forall x \in A \exists ! y \psi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y). \tag{1.12}$$

首先注意到对每一公式 ψ，都有一个相应的替换公理，因此与概括公理模式一样，替换公理模式代表了无穷多条公理。其次，公式 $\forall x \in A \exists ! y \psi(x, y)$ 实际上是说 ψ 表示的性质是一个函数 [6]。所以替换公理是说，任何集合在一个函数下的像仍然是一个集合。因为这个像的元素个数不会比原像的元素个数多，所以它是一个不会更大的集合，因而是没有危险的。引起麻烦的集合都是因为它们太“大”了！

练习 1.3.28. 按照前面我们对 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 的理解，证明

$$\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \cdots\}$$

是集合。

选择公理 9（AC）对任意集合 $X \neq \emptyset$，如果它满足

1. $\emptyset \notin X$；

2. X 中的元素是两两不交的，即，如果 $x, y \in X$ 并且 $x \neq y$，则 $x \cap y = \emptyset$，

则存在集合 S，对任意 $x \in X$，$S \cap x$ 是单点集，即，

$$\forall X[\emptyset \notin X \wedge \forall x \in X \forall y \in X(x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists S \forall x \in X \exists ! y(S \cap x = \{y\})] \tag{1.13}$$

选择公理，一般简记为 AC，具有构造性公理的形式：如果 X 是集合，则存在集合 S……。但与前面的构造性公理很不相同的是，它断定存在的 S，一般称为 X 的选择集，不是唯一的！而且这条公理只断言了这类集合的存在，却没有给出具体构造它的方法。这种非构造性引起了对选择公理的很大争论，很多

[6] 当然，我们还没有给出函数的定义。所以也许在后面的章节叙述这条公理更为简便，事实上许多教科书也是这样做的。但我们相信本书的读者知道函数是什么，后面给出函数的定义，以及类似的像自然数、实数这样的概念，并不是要告诉读者它们是什么，而不过是用集合论的语言再现它们，是为了让读者相信集合论语言的强大。

人拒绝接受选择公理，这其中包括博雷尔（Félix Édouard Justin Émile Borel）、勒贝格（Henri Léon Lebesgue）这样的大数学家。然而，关于选择公理的争论已经成为过去，今天的大部分数学家已经愿意接受它了[7]。选择公理在集合论中扮演了非常重要，非常独特的角色，我们会在第**??**节专门讨论这个公理。

公理 0 到 9 组成的公理系统称为 ZFC，而 0 到 8 组成的则称为 ZF。这个公理系统是由策梅罗在 1908 年提出的 (**?**)，其后很多人做了改进，一般称为策梅罗- 弗兰克尔（Zermelo-Fraenkel）系统。

1.4 习题

1.4.1. 证明以下关于集合运算的性质。

子集的性质：对任意集合 X，Y，Z：

（1）$\emptyset \subseteq X$；

（2）$X \subseteq X$；

（3）如果 $X \subseteq Y$ 并且 $Y \subseteq X$，则 $X = Y$；

（4）如果 $X \subseteq Y$ 并且 $Y \subseteq Z$，则 $X \subseteq Z$。

交换律：

$$\begin{aligned} X \cup Y &= Y \cup X \\ X \cap Y &= Y \cap X \end{aligned} \tag{1.14}$$

结合律：

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cup Z &= X \cup (Y \cup Z) \\ (X \cap Y) \cap Z &= X \cap (Y \cap Z) \end{aligned} \tag{1.15}$$

分配律：

$$\begin{aligned} X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \end{aligned} \tag{1.16}$$

德摩根律：

$$\begin{aligned} X - (Y \cup Z) &= (X - Y) \cap (X - Z) \\ X - (Y \cap Z) &= (X - Y) \cup (X - Z) \end{aligned} \tag{1.17}$$

[7]有关选择公理的讨论，请参见文献 **?**。

1.4.2. 令 X 和 Y 为任意集合，则 X 和 Y 的**对称差**（symmetric difference）定义为：

$$X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$

证明以下等式：

$$\begin{aligned}
&X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - Z \\
&X - Y = \emptyset \quad \text{当且仅当} \quad X \subseteq Y \\
&X \triangle X = \emptyset \\
&X \triangle Y = Y \triangle X \\
&(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z)
\end{aligned}$$

1.4.3. 证明如果 $F \in \mathcal{F}$，则 $\bigcap \mathcal{F} \subseteq F \subseteq \bigcup \mathcal{F}$。

1.4.4. 设 $\mathcal{F}$ 为集合，X, Y, Z 为任意集合，证明：

（1）如果对任意集合 $F \in \mathcal{F}$ 都有 $X \subseteq F$，则 $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$；

（2）如果对任意集合 $F \in \mathcal{F}$ 都有 $F \subseteq X$，则 $\bigcup \mathcal{F} \subseteq X$；

（3）$X \subseteq Y$ 当且仅当 $X \cap Y = X$ 当且仅当 $X \cup Y = Y$ 当且仅当 $X - Y = \emptyset$；

（4）$X \subseteq Y \cap Z$ 当且仅当 $X \subseteq Y$ 且 $X \subseteq Z$；

（5）$Y \cup Z \subseteq X$ 当且仅当 $Y \subseteq X$ 且 $Z \subseteq X$；

（6）$X - Y = (X \cup Y) - Y = X - (X \cap Y)$；

（7）$X \cap Y = X - (X - Y)$；

（8）$X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$；

（9）$X = Y$ 当且仅当 $X \triangle Y = \emptyset$。

1.4.5. 证明如果 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$，则

$$\bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}). \tag{1.18}$$

举例说明：（1）条件 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ 是必不可少的，（2）$\subseteq$ 不能换成 $=$。

1.4.6. 如果 X 是集合。定义 $-X = \{x \mid x \notin X\}$，证明 $-X$ 不是集合。

1.4.7. 证明对任意集合 X, $\mathcal{P}(X) \subseteq X$ 不成立, 特别地, 对任意 X, $\mathcal{P}(X) \neq X$。这再次证明了“所有集合的集合”不存在。[提示：令 $Y = \{u \in X \mid u \notin u\}$；$Y \in \mathcal{P}(X)$，但是 $Y \notin X$。]

1.4.8. 对集公理、并集公理和幂集公理都可替换为较弱的形式：

对任意 a 和 b，存在一个集合 Y 满足 $a \in Y$ 并且 $b \in Y$。 **(弱对集公理)**

对任意集合 X，存在集合 Y 满足如果存在 $z \in X$ 使得 $u \in z$，则 $u \in Y$。 **(弱并集公理)**

对任意集合 X，存在集合 Y 满足如果 $u \subseteq X$，则 $u \in Y$。 **(弱幂集公理)**

用以上弱形式的公理证明对集、并集和幂集公理。[提示：仍用分离公理模式。]