(a) 对任意 $x \in X$，$x \leq u$，

(b) 如果有 $b \in B$ 满足对任意 $x \in X$ 都有 $x \leq b$，则 $u \leq b$。

就称 u 是 X 的上确界，一般记作 $\sum X$。

(2) 如果存在 $l \in \mathcal{B}$ 满足：

(a) 对任意 $x \in X$，$l \leq x$，

(b) 如果有 $b \in B$ 满足对任意 $x \in X$ 都有 $b \leq x$，则 $b \leq l$。

就称 l 是 X 的下确界，一般记作 $\prod X$。

如果对布尔代数 $\mathcal{B}$ 的任意非空子集 X，都有 $\sum X \in \mathcal{B}$ 并且 $\prod X \in \mathcal{B}$，就称 $\mathcal{B}$ 是完全的。

引理 1.1.33. *假设 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$X \subseteq B$，则*

(1) 如果 $\sum X$ 存在，则 $\prod(-X)$ 也存在，并且等于 $-\sum X$；

(2) 如果 $\sum X$ 存在，$a \in B$，则 $\sum\{a \cdot b \mid b \in X\}$ 存在并且等于 $a \cdot \sum X$。

证明. (2) 对任意 $b \in X$，$b \leq \sum X$，所以 $a \cdot b \leq a \cdot \sum X$，即 $\sum X$ 是上界。现在假设 u 也是上界，即对任意 $b \in X$，$a \cdot b \leq u$。注意到这蕴含 $b = a \cdot b + (-a) \cdot b \leq u + (-a) \cdot b \leq u + (-a)$，所以 $\sum X \leq u + (-a)$，而这又蕴含 $a \cdot \sum X \leq a \cdot u \leq u$。 □

引理 1.1.34. *对任意一阶逻辑中的理论 T，令 $\mathcal{B}(T)$ 为相应的 Lindenbaum 代数，则*

$$
\begin{aligned}
[\exists x \phi] &= \textstyle\sum\{[\phi^x_y] \mid y \text{是变元}\} \\
[\forall x \phi] &= \textstyle\prod\{[\phi^x_y] \mid y \text{是变元}\}
\end{aligned}
$$

证明. 显然，我们只需证明其中一个等式。因为对任意变元 y，$\models \forall x \phi \to \phi^x_y$，所以 $[\forall x \phi] \leq \prod\{[\phi^x_y] \mid y\text{是变元}\}$，即，它是这个集合的下界。另一个方向，令 $[\psi]$ 是一个下界，则对任意变元 y，$T \vdash \psi \to \phi^x_y$。特别地，这对一个不在 $T \cup \{\psi, \phi\}$ 中出现的变元 y 仍然成立。利用全称量词引入规则，我们有 $T \vdash \psi \to \forall x \phi$。所以，$[\forall x \phi]$ 是下确界。

□

练习 1.1.35. 如果 $B = \mathcal{P}(X)$，则对任意 $Y \subseteq B$，$\sum Y = \bigcup Y$，$\prod Y = \bigcap Y$。$\mathcal{P}(X)$ 是完全的布尔代数。

练习 1.1.36. 如果 $\mathcal{B}$ 是一个集合代数并且是完全的，则存在 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$。

例 1.1.37. 令 $B = \{x \subseteq \mathbb{N} \mid x$是有穷的或余有穷的$\}$，参见练习 1.1.9，$\mathcal{B}$ 在集合运算下是一个布尔代数。对任意 $n \in \mathbb{N}$，令 $x_n = \{p < n \mid p$是素数$\}$，同时令 $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$，则 $\sum X$ 在 $\mathcal{B}$ 中不存在。它是全体素数的集合，是无穷的，但不是余有穷的。

练习 1.1.38. 在定理1.1.26中，如果 $\mathcal{B}$ 还是完全的，则 f 是一个同构。所以，如果 $\mathcal{B}$ 是一个完全的原子化的布尔代数，则存在集合 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$。【证明：如果 A 是全体原子的集合，$Y \subseteq A$，则 $f(\sum Y) = Y$，所以 f 是一个满射。】

引理 1.1.39. *假设 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，以下命题等价：*

(1) *$\mathcal{B}$ 是原子化的；*

(2) *对任意 $b \in B$，*

$$\sum\{a \mid a \leq b \wedge a \text{ 是原子}\}$$

存在并且等于 b。

推论 1.1.40. *如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的并且只有有穷多个原子，则 $\mathcal{B}$ 是有穷的。*

1.2　滤与理想

定义 1.2.1. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$，如果 F 满足以下条件：

1. $0 \notin F$，$F \neq \emptyset$；
2. 如果 $a, b \in F$，则 $a \cdot b \in F$；
3. 如果 $a \in F$ 并且 $a \leq b$，$b \in F$。

就称 F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤。

例 1.2.2. 对任意集合 X，$(\mathcal{P}(X), X, \emptyset, \cap, \cup, -)$ 是布尔代数。

- $\{X\}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 上的滤，称为平凡的。
- 如果 X 是无穷的，令 $F = \{Y \subseteq X \mid Y\text{是余有穷的}\}$，则 F 是一个滤。条件（1）和（3）是显然的；关于（2），如果 Y_1, Y_2 是余有穷的，则 $X - Y_1 \cap Y_2 = (X - Y_1) \cup (X - Y_2)$ 也是有穷的，所以 $Y_1 \cap Y_2 \in F$。

习惯上，如果 $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是滤，我们更经常地称其为"X 上的滤"。

练习 1.2.3. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$，以下命题等价：

(1) F 是滤；

(2) $0 \notin F$，$1 \in F$ 并且对任意 $a, b \in B$，$a \cdot b \in F$ 当且仅当 $a \in F$ 且 $b \in F$。

定义 1.2.4. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，它的子集 $G \subseteq B$ 如果满足：对任意 $n \in \omega$，任意 $g_1, \cdots, g_n \in G$，它们的积不为 0，即，$g_1 \cdot g_2 \cdots g_{n-1} \cdot g_n > 0$，就称 G 有**有穷交**性质。

练习 1.2.5. 如果 $G \subseteq B$ 有有穷交性质，$a \in B$，则 $G \cup \{a\}$ 或 $G \cup \{-a\}$ 有有穷交性质。

引理 1.2.6. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$G \subseteq B$ 有有穷交性质，则

$$F = \{b \in B \mid \exists g_1, \cdots, g_n \in G(g_1 \cdots g_n \leq b)\} \tag{1.3}$$

是 $\mathcal{B}$ 上的滤，称为 G **生成**的滤。

练习 1.2.7. 如果 F 是由 G 生成的滤，则 F 是包含 G 的最小的滤，即，$G \subseteq F$ 并且如果 $F' \supseteq G$ 也是滤，则 $F \subseteq F'$。

注记 1.2.8. 由于 $\{a\}$ 总是有有穷交性质，所以，对任意 $a \in B$，$\{a\}$ 生成 $\mathcal{B}$ 上的一个滤。由单点集生成的滤称为**主滤**。