Homework

陈淇奥

2021 年 9 月 17 日

Exercise 1 (1.2.3). 找出 3 个性质 $P(x)$ 使得集合 $\{x \in \mathbb{R} : P(x)\}$ 为 $\{1\}$；找出三个性质性质 $Q(x)$ 使得集合 $\{x \in \mathbb{Z} : Q(x) = \emptyset\}$

证明.

$$
\begin{aligned}
&P_1(x) : x = 1 \\
&P_2(x) : x^2 = 1 \land \neg(x = -1) \\
&P_3(x) : \forall v \; vx = v \\
&Q_1(x) : \forall v \; x > v \\
&Q_2(x) : x = 1 \land x = 2 \\
&Q_3(x) : 1 < x \land x < 2
\end{aligned}
$$

□

Exercise 2 (1.2.4). 在有可能的情况下找出

1. 两个无穷集合 A 和 B 使得 $A \cap B = \{1\}$ 且 $A \cup B = \mathbb{Z}$
2. 两个集合 C 和 D 使得 $C \cup D = \{t, h, i, c, k\}$ 且 $C \cap D = \{t, h, i, n\}$

证明.

1. $A = \{2x : x \in \mathbb{Z}\} \cup \{1\}$, $B = \{2x + 1 : x \in \mathbb{Z}\}$
2. 不存在这样的 C 和 D。如果存在这样的 C 和 D, 因为 $n \in C \cap D$，于是 $n \in C \cup D$, 但是 $n \notin C \cup D$，于是矛盾

□

Exercise 3 (1.3.2). 假定 $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$ 且 $n > 0$。证明同余关系的下列性质

1. 自反性
2. 对称性
3. 传递性

证明. **Claim** 如果 $a \equiv b \mod n$，则 $a + c \equiv b + c \mod n$

如果 $a \equiv b \mod n$, 则 $a = k_1 n + p$,$b = k_2 n + p$,$c = k_3 n + c'$, 其中 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$,$p, c' \in \mathbb{N}$ 且 $p, c' < n$。若 $p + c' < n$，则 $a + c \equiv p + c' \equiv b = c \mod n$, 若 $p + c' \geq n$, 则 $a + c \equiv p + c' - n \equiv b + c \mod n$, 因此 $a + c \equiv b + c \mod n$

1. $a - a \equiv 0 \mod n$，于是 $a \equiv a \mod n$
2. 如果 $a \equiv b \mod n$, 于是 $a - b \equiv 0 \mod n$，即存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $a - b = kn$，因此 $b - a = (-k)n$，即 $b - a \equiv 0 \mod n$, 因此 $b \equiv a \mod n$
3. 若 $a \equiv b \mod n$,$b \equiv c \mod n$，则 $a - b \equiv 0 \equiv c - b \mod n$，因此 $a \equiv c \mod n$

□

Exercise 4 (1.3.3). 判断下列命题是否对所有集合 A, B, C 和 D 成立，并给出理由

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
3. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

证明. 1. 成立

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}
$$

2. 成立

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in C \times D \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \wedge (y \in B \cap D) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)
\end{aligned}
$$

3. 不成立，对于 $a \in A, d \in D$,$(a,d) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$ 但是 $(a,d) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$

□

Exercise 5. 证明：如果 $X \subset Y$，那么 $X \cap Y = X$

证明. 对于任意 $x \in X \cap Y$, 则 $x \in X$ 且 $x \in Y$, 因此 $x \in X$, 于是 $X \cap Y \subset X$

对于任意 $x \in X$, 因为 $X \subset Y$，于是 $x \in Y$，因此 $x \in X \cap Y$，于是 $X \subset X \cap Y$

所以 $X \cap Y = X$ □

Exercise 6. 举例：R 是对称的也是反对称的

证明. 如果 R 是对称的也是反对称的, 考虑论域 U 与任意元素 a, b, 则 $aRb \Rightarrow bRa \Rightarrow a = b$.

因此给定论域 $\mathbb{N}$，$R = \{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ 是对称的且是反对称的 □

Exercise 7. 验证：自然数集 $\mathbb{N}$ 上的整除关系是偏序。整数集 $\mathbb{Z}$ 上的整除关系呢？

证明. 对于 $a, b \in \mathbb{N}$，令 aRb 当且仅当 $a \mid b$.

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$

- $a \mid a$，因此 R 是自反的
- 若 $a \mid b$ 且 $b \mid a$，那么 $a = b$, 因此 R 是反对称的
- 若 $a \mid b$ 且 $b \mid c$，那么 $a \mid c$, 因此 R 是传递的

因此 R 是 $\mathbb{N}$ 上的偏序

$\mathbb{Z}$ 上的整除关系不是反对称的，考虑 $-2 \mid 2$ 与 $2 \mid -2$ □

Exercise 8. 考虑 $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$，对 $i \in \mathbb{N}$，定义 $Y_i = \bigcap_{j \leq i} X_j$，证明：$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$

证明. 对于任意 $x \in \bigcap \mathcal{F}$，对于任意 $i \in \mathbb{N}$,$x \in X_i$，于是对于任意 $i \in \mathbb{N}$,$x \in Y_i$, 因此 $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$，因此 $\bigcap \mathcal{F} \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$

对于任意 $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$，对于任意 $i \in \mathbb{N}$,$x \in Y_i$，即 $x \in \bigcap_{j \leq i} X_j$，于是 $x \in X_i$。因此 $x \in \bigcap \mathcal{F}$,$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \subset \bigcap \mathcal{F}$

所以 $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ □