

定义 2.2.1. $\kappa \oplus \lambda = |A \cup B|$, 其中 $\kappa = |A|$ 而 $\lambda = |B|$, 并且 $A \cap B = \emptyset$ 。

我们对加法的定义不依赖于 A, B 的选择。因而这个定义是合理的。

练习 2.2.2. 如果 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$, 而且 $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$, 则 $|A \cup B| = |A' \cup B'|$ 。

容易验证, 以上定义的加法满足:

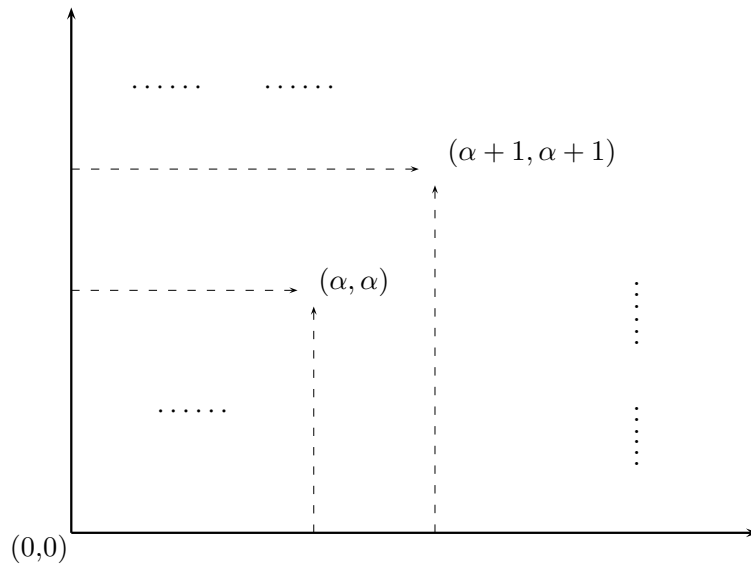
- 交换律: $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$;
- 结合律: $\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$;
- $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda$;
- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$, 则 $\kappa_1 \oplus \lambda_1 \leq \kappa_2 \oplus \lambda_2$ 。

定义 2.2.3. $\kappa \otimes \lambda = |A \times B|$, 其中 $|A| = \kappa$ 而 $|B| = \lambda$ 。

练习 2.2.4. 如果 A, B, A', B' 满足 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$, 则 $|A \times B| = |A' \times B'|$ 。

同样, 以上定义的乘法满足:

- 交换律: $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$;
- 结合律: $\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu$;
- 分配律: $\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) = \kappa \otimes \lambda \oplus \kappa \otimes \mu$;
- $\kappa \leq \kappa \otimes \lambda$, 如果 $\lambda > 0$;
- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$, 则 $\kappa_1 \otimes \lambda_1 \leq \kappa_2 \otimes \lambda_2$ 。
- $\kappa \oplus \kappa = 2 \otimes \kappa$: 如果 $A = \kappa$, 则 $2 \otimes \kappa$ 是集合 $\{0, 1\} \times A = \{0\} \times A \cup \{1\} \times A$ 的基数, 而 $\{0\} \times A = \{1\} \times A = \kappa$, 而它们又是不相交的, 所以 $\kappa \oplus \kappa = 2 \otimes \kappa$ 。所以:

图 2.1: 良序集 $(\kappa \times \kappa, \triangleleft)$

- 如果 $\kappa \geq 2$, $\kappa \oplus \kappa \leq \kappa \otimes \kappa$ 。

定理 2.2.5. 对任意无穷基数 κ , $\kappa \otimes \kappa = \kappa$ 。

证明. 由于 $\kappa = \aleph_0$ 时命题成立（两个可数集合的卡氏积依然可数，见引理 2.1.53），我们不妨设 $\kappa \geq \aleph_1$ 。对 κ 作（无穷基数上的）归纳。假设对任意无穷基数 $\lambda < \kappa$ 命题已成立。我们定义 $\kappa \times \kappa$ 上的一个序 \triangleleft 为：

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \beta_1) \triangleleft (\alpha_2, \beta_2) \quad \text{当且仅当} \quad & \alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2, \text{ 或} \\
 & \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \wedge \alpha_1 < \alpha_2, \text{ 或} \\
 & \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \wedge \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

\triangleleft 实际上是首先按照 $\alpha + \beta$ ，然后按照字典顺序排序。这个序有时也称为 $\kappa \times \kappa$ 上的“标准序”。

练习 2.2.6. 证明以上定义的 \triangleleft 是 $\kappa \times \kappa$ 上的良序。

接下来我们证明 $(\kappa \times \kappa, \triangleleft)$ 的序型是 κ 。对任意 $\alpha < \kappa$ ，令 D_α 表示“正方形” $\alpha \times \alpha$ 中的点，即 $(\gamma, \eta) \in D_\alpha$ 当且仅当 $\gamma + \eta < \alpha$ 。注意到 $\kappa \times \kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} D_\alpha$ 。

由于 $D_\alpha \subseteq \alpha \times \alpha$, 所以根据归纳假设, 对任意 $\alpha < \kappa$, $|D_\alpha| \leq |\alpha| < \kappa$, 每个良序集 $(D_\alpha, \triangleleft)$ 都可以一一映射到某个小于 κ 的序数中, 或者说每个这样的良序集的序型都小于 κ . 所以, $\kappa \times \kappa$ 就可以一一映射到 κ 中. 另一方面, 每个 D_α 也都是 $\kappa \times \kappa$ 的真前段, 所以 κ 也一一映射到 $\kappa \times \kappa$ 中. \square

推论 2.2.7. 对任意无穷基数 κ, λ , $\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

证明. 不妨设 $\lambda \leq \kappa$, 由定理, $\kappa \otimes \lambda \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$, 所以 $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \otimes \lambda \leq \kappa$. \square

以下我们定义基数的幂运算, 而这将引出集合论的一些根本问题。

定义 2.2.8. 对任意集合 A, B , 我们用 A^B 表示全体 B 到 A 的函数的集合, 即

$$A^B = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ 是函数}\}. \quad (2.17)$$

练习 2.2.9. 令 A, B 为集合,

- (1) A^B 为集合。
- (2) 当 $B = \emptyset$ 时, A^B 是什么?
- (3) 如果 $A = \emptyset$ 呢?

定义 2.2.10. $\kappa^\lambda = |A^B|$, 其中 $|A| = \kappa$ 且 $|B| = \lambda$ 。

注意到我们使用了与序数运算相同的记法, 但一般并不会混淆, 读者在阅读时稍加注意即可区分。而且, κ^λ 还表示集合 λ 到集合 κ 全体映射的集合, 这个集合的基数就是 κ^λ 。

引理 2.2.11. 如果 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$, 则 $|A^B| = |A'^{B'}|$ 。

幂运算满足以下一些性质:

- 如果 $\lambda > 0$, 则 $\kappa \leq \kappa^\lambda$;
- 如果 $\kappa > 1$, 则 $\lambda \leq \kappa^\lambda$;

- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$, 则 $\kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$;
- $\kappa \otimes \kappa = \kappa^2$: 如果 $|A| = \kappa$, 则任何 $(a_0, a_1) \in A \times A$ 都是一个 $\{0, 1\}$ 到 A 中的函数, 反之亦然, 所以 $|A \times A| = |A^{\{0,1\}}| = \kappa^2$.

引理 2.2.12. 假设 κ, λ 是无穷基数, 则

- (1) $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$;
- (2) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$;
- (3) $(\kappa \otimes \lambda)^\mu = \kappa^\mu \otimes \lambda^\mu$;
- (4) $2^\kappa > \kappa$.

证明. 见习题2.6.5. □

引理 2.2.13. 如果 $2 \leq \kappa \leq \lambda$ 并且 λ 是无穷基数, 则 $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^\lambda$.

证明. 练习. □

定义 2.2.14. 假设 X 为集合,

- (1) 如果 α 为序数, 我们令 $X^{<\alpha} = \bigcup \{X^\beta \mid \beta < \alpha\}$;
- (2) 如果 λ 是基数, 则定义 $\kappa^{<\lambda} = |X^{<\lambda}|$, 其中 $|X| = \kappa$.
- (3) 我们以 $[\kappa]^\lambda$ 表示集合 $\{X \subseteq \kappa \mid |X| = \lambda\}$ 的基数, 注意, 当 $\kappa < \lambda$ 时, $[\kappa]^\lambda = 0$;
- (4) 类似地, 我们以 $[\kappa]^{<\lambda}$ 表示集合 $\{X \subseteq \kappa \mid |X| < \lambda\}$ 的基数。

命题 2.2.15. 对任意无穷基数 κ, λ ,

- (1) $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\eta \mid \eta \text{ 是基数并且 } \eta < \lambda\}$;
- (2) 如果 $\lambda \leq \kappa$, 则 $[\kappa]^\lambda = \kappa^\lambda$;
- (3) 如果 $\lambda \leq \kappa$, 则 $[\kappa]^{<\lambda} = \kappa^{<\lambda}$.

证明. (1) 假设 $\gamma = \sup\{\kappa^\eta \mid \eta \text{ 是基数并且 } \eta < \lambda\}$, 我们证明 $\kappa^{<\lambda} = \gamma$. 一个方向是平凡的, 因为集合 $\{\kappa^\eta \mid \eta \text{ 是基数并且 } \eta < \lambda\} \subseteq \{\kappa^{|\beta|} \mid \beta < \lambda\}$, 所以

$$\gamma = \sup\{\kappa^\eta \mid \eta \text{ 是基数并且 } \eta < \lambda\} \leq \sup\{\kappa^{|\beta|} \mid \beta < \lambda\} = \kappa^{<\lambda}. \quad (2.18)$$

另一方面, 对任意 $\alpha < \lambda$, 如果 $|\alpha| = \eta$, 则 $|\kappa^\alpha| = \kappa^{|\alpha|} = \kappa^\eta \leq \gamma$, 所以 $\kappa^{<\lambda}$ 是不多于 γ 个基数不大于 γ 的集合的并, 所以 $\kappa^{<\lambda} \leq \gamma$.

(2) 对任意 $X \in \{X \subseteq \kappa \mid |X| = \lambda\}$, 令 $[f]_X = \{f \mid f: \lambda \rightarrow \kappa \text{ 并且 } \text{ran}(f) = X\}$, 则所有这些 $[f]_X$ 构成一个非空集合的族 \mathcal{F} 。如果令 $h(X) = [f]_X$ 为 $[\kappa]^\lambda$ 到 \mathcal{F} 的双射而 g 为 \mathcal{F} 上的选择函数, 则 $g \circ h$ 为 $[\kappa]^\lambda$ 到 κ^λ 中的单射, 所以 $[\kappa]^\lambda \leq \kappa^\lambda$ 。另一个方向, 注意到对任意 $f \in \kappa^\lambda$, f 都是 $\lambda \otimes \kappa$ 的子集并且 $|f| = \lambda$, 所以 $\kappa^\lambda \leq [\lambda \otimes \kappa]^\lambda$, 而由于 $\lambda \otimes \kappa = \kappa$, 所以后者等于 $[\kappa]^\lambda$ 。

(3) 由 (2),

$$\begin{aligned} [\kappa]^{<\lambda} &= \bigcup \{[\kappa]^\eta \mid \eta < \lambda \text{ 且 } \eta \text{ 是基数}\} \\ &= \bigcup \{\kappa^\eta \mid \eta < \lambda \text{ 且 } \eta \text{ 是基数}\} \end{aligned}$$

而根据 (1), 这正是 $\kappa^{<\lambda}$ 。 □

练习 2.2.16. 证明 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ 。

关于基数的幂运算我们已经知道一些事实, 例如, 对任意 \aleph_α , $2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$, 特别地, $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ 。既然所有的无穷基数都是某个 \aleph_α , 那 $2^{\aleph_0} = \aleph_\gamma$ 呢? 由于我们还知道 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, 这个问题就有了更能引起兴趣的形式: 实数到底有多少个呢? 康托的连续统假设 CH (Continuum Hypothesis) 给出了如下回答: 实数恰好是比自然数大的第一个无穷, 即:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \quad (2.19)$$

而自然地, 所谓的广义连续统假设 GCH (General Continuum Hypothesis) 就是:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}. \quad (2.20)$$

今后我们常会将 2^{\aleph_0} 称为连续统的基数, 将函数 2^{\aleph_α} 称为连续统函数。康托花费了很多年试图去证明这一假设。事实上, 他已经证明至少对于实数的闭子集, 连续统假设是成立的: 每个不可数的闭集都具有连续统的基数。这也是他在连续统问题上取得的最好结果, 虽然他始终坚信会找到关于这个问题的证明。

2.3 共尾

共尾概念在基数算术的研究中有着极为重要的作用。我们可以把它看作对如下现象的刻画：比起 \aleph_0 , \aleph_ω 是一个很大的基数，但却存在从 \aleph_0 到 \aleph_ω 的映射 $f(n) = \aleph_n$, f 的值域在 \aleph_ω 中是“无界的”，就是说我们能在 ω 步内从下面达到 \aleph_ω 。而另一方面， \aleph_1 ，比起 \aleph_ω 要小很多，但却不存在满足以上条件的由 \aleph_0 到 \aleph_1 的映射，从这个角度， \aleph_1 比 \aleph_ω “大”。

定义 2.3.1. (1) 设 A 是序数 α 的子集，如果 A 满足

$$\forall \gamma < \alpha \exists \xi \in A (\gamma \leq \xi), \quad (2.21)$$

则称 A 在 α 中是无界的。

(2) 对任意序数 α , $\text{cf}(\alpha)$ 是满足以下性质的最小序数 β :

存在映射 $f: \beta \rightarrow \alpha$, 使得 $f[\beta]$ 在 α 中是无界的。

这样的映射 f 称为共尾映射, $\text{cf}(\alpha)$ 称为 α 的共尾。

(3) 对任何序数 α , 如果 $\text{cf}(\alpha) = \alpha$, 就称 α 是正则的, 不是正则的序数称为奇异的。

命题 2.3.2. (1) $A \subset \alpha$ 是无界的当且仅当 $\alpha = \bigcup \{\xi + 1 \mid \xi \in A\}$ 。因此, 对任意序数, 如果 $f: \text{cf}(\alpha) \rightarrow \alpha$ 是共尾映射, 则 $\bigcup_{\xi < \text{cf}(\alpha)} [f(\xi) + 1] = \alpha$ 。

(2) 对任意 α , $\text{cf}(\alpha) \leq \alpha$;

(3) 任意后继序数 $\alpha = \beta + 1$ 的共尾是 1;

(4) 对任意极限序数 $\alpha > 0$, $\text{cf}(\alpha) \geq \omega$ 。

证明. 练习。 □

以上命题表明, 只有极限序数的共尾是令人感兴趣的。

定理 2.3.3. 对任何极限序数 α 都存在一个严格递增的共尾映射: $f: \text{cf}(\alpha) \rightarrow \alpha$ 。

证明. 如果 α 是极限序数, 并且 $g : \text{cf}(\alpha) \rightarrow \alpha$ 是共尾映射。对任意 $\eta < \text{cf}(\alpha)$, 递归定义

$$f(\eta) = \max\{g(\eta), \bigcup_{\xi < \eta} (f(\xi) + 1)\}. \quad (2.22)$$

显然, 对任意 $\xi < \eta < \text{cf}(\alpha)$, $f(\xi) < f(\xi) + 1 \leq f(\eta)$ 。所以 f 是严格递增函数。以下证明 f 是共尾映射。首先我们归纳证明

$$\text{对任意 } \eta < \text{cf}(\alpha), f(\eta) \in \alpha. \quad (2.23)$$

即 f 是 $\text{cf}(\alpha)$ 到 α 的映射。假设对任意 $\xi < \eta < \text{cf}(\alpha)$, $f(\xi) \in \alpha$, 则

$$f(\eta) = \max\{g(\eta), \bigcup_{\xi < \eta} (f(\xi) + 1)\} \leq \alpha. \quad (2.24)$$

但是 $f(\eta)$ 不能等于 α , 否则 $f \upharpoonright \eta$ 就是到 α 的共尾映射, 即 $\eta \geq \text{cf}(\alpha)$, 矛盾。其次, 对任意 $\xi \in \alpha$, 存在 $\eta < \text{cf}(\alpha)$, $\xi \leq g(\eta) \leq f(\eta)$ 。□

推论 2.3.4. 对任意极限 α , $\text{cf}(\text{cf}(\alpha)) = \text{cf}(\alpha)$ 。

证明. 令 $f : \text{cf}(\text{cf}(\alpha)) \rightarrow \text{cf}(\alpha)$ 和 $g : \text{cf}(\alpha) \rightarrow \alpha$ 为严格递增的共尾映射。考虑 $g \circ f : \text{cf}(\text{cf}(\alpha)) \rightarrow \alpha$ 。对任意 $\xi \in \alpha$, 存在 $\eta < \text{cf}(\alpha)$, $\xi \leq g(\eta)$; 而对于 η , 存在 $\zeta \in \text{cf}(\text{cf}(\alpha))$, $\eta \leq f(\zeta)$, 因此

$$\xi \leq g(\eta) \leq g(f(\zeta)) = (g \circ f)(\zeta). \quad (2.25)$$

所以 $g \circ f$ 是共尾映射, 所以 $\text{cf}(\text{cf}(\alpha)) \geq \text{cf}(\alpha)$, 所以 $\text{cf}(\text{cf}(\alpha)) = \text{cf}(\alpha)$ 。□

也即是说任意序数的共尾都是正则的。又, 所有正则的序数都是基数, 所以任意一个序数的共尾都是基数。

练习 2.3.5. 假设 γ 是极限序数, $(\alpha_\xi, \xi < \gamma)$ 是序数的严格递增序列, 而 α 是它的极限, 则 $\text{cf}(\alpha) = \text{cf}(\gamma)$ 。

定理 2.3.6. 对任意无穷基数 κ , κ^+ 是正则的。

证明. 令 $\alpha < \kappa^+$, $f : \alpha \rightarrow \kappa^+$ 为函数。显然 $|\alpha| \leq \kappa$, 并且对任意 $\xi < \alpha$, $|f(\xi)| \leq \kappa$ 。这样, $|\bigcup_{\xi < \alpha} (f(\xi) + 1)| \leq \kappa$, 所以 $\bigcup_{\xi < \alpha} (f(\xi) + 1) \neq \kappa^+$ 。这就证明了对任意 $\alpha < \kappa^+$, $\text{cf}(\kappa^+) \neq \alpha$ 。因此 $\text{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$ 。□

这个定理表明，任何奇异的基数都是极限基数。考虑任意无穷基数 \aleph_α ，存在由 \aleph_α 开始的序列：

$$\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1}, \aleph_{\alpha+2}, \dots, \aleph_{\alpha+n}, \dots$$

显然 $f(n) = \aleph_{\alpha+n}$ 是 ω 到 $\aleph_{\alpha+\omega}$ 的共尾映射，即 $\text{cf}(\aleph_{\alpha+\omega}) = \omega$ ，因此， $\aleph_{\alpha+\omega}$ 是奇异基数。这就表明，对任意无穷基数，总存在比它大的奇异基数。

后继基数都是正则的， ω 也是正则的，那是否存在大于 ω 的正则极限基数呢？假设存在这样的极限基数 \aleph_α ，由于 α 是极限序数，故 $\aleph_\alpha = \bigcup \{\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ 。因此 $f : \alpha \rightarrow \aleph_\alpha$ 是共尾映射，所以 $\aleph_\alpha = \text{cf}(\aleph_\alpha) \leq \alpha$ ，这蕴涵着 $\aleph_\alpha = \alpha$ 。这就说明，一个极限基数是正则基数的必要条件是： $\alpha = \aleph_\alpha$ 。但这并不是充分条件。任取 \aleph_γ ，构造基数的序列：

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \aleph_\gamma \\ \alpha_{n+1} &= \aleph_{\alpha_n} \end{aligned} \tag{2.26}$$

令 $\alpha = \bigcup \{\alpha_n \mid n < \omega\}$ ，则 $\aleph_\alpha = \alpha$ ，然而，由于 $\text{cf}(\alpha) = \omega$ ，因此 α 是奇异基数，这同时也证明了存在任意大的奇异基数。事实上，正则的极限基数被称为弱不可达基数，我们在 ZFC 中不能证明存在这样的基数。一个正则基数 κ 如果还是强极限的，即对任意 $\lambda < \kappa$ ，都有 $2^\lambda < \kappa$ （定义见 2.5.2），则称 κ 是强不可达基数，或不可达基数。在 ZFC 中自然也不能证明不可达基数的存在。

正如我们已经提到的，共尾在基数算术中有很重要的应用，这一点在以下定理以及随后的章节中都会有所体现。

引理 2.3.7 (寇尼希引理). 对任何无穷基数 κ ,

$$\kappa^{\text{cf}(\kappa)} > \kappa. \tag{2.27}$$

证明. 令 $f : \text{cf}(\kappa) \rightarrow \kappa$ 为共尾映射，令 $G : \kappa \rightarrow \kappa^{\text{cf}(\kappa)}$ 为任意函数，我们证明 G 不可能是满射。为此定义 $h \in \kappa^{\text{cf}(\kappa)}$ 为：对任意 $\alpha \in \text{cf}(\kappa)$,

$$h(\alpha) = \min(\kappa - \{G(\xi)(\alpha) \mid \xi < f(\alpha)\}). \tag{2.28}$$

由于 $|\{G(\xi)(\alpha) \mid \xi < f(\alpha)\}| \leq f(\alpha) < \kappa$, 所以以上定义是合理的。对任意 $\xi < \kappa$, 总存在 $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ 使得 $\xi < f(\alpha)$, 所以 $h(\alpha) \neq G(\xi)(\alpha)$ 。因此, 对任意 $\xi < \kappa$, $h \neq G(\xi)$, 即 $h \notin G[\kappa]$ 。 \square

推论 2.3.8. 对任意序数 α , $\text{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$ 。

证明. 反设 $\text{cf}(2^{\aleph_\alpha}) \leq \aleph_\alpha$, 则 $(2^{\aleph_\alpha})^{\text{cf}(2^{\aleph_\alpha})} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$, 与定理矛盾。 \square

注记 2.3.9. (1) 由此我们可以立即得到 $\text{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$, 而这意味着 2^{\aleph_0} 不能是 \aleph_ω , 也不能是 $\aleph_{\omega+\omega}$ 等等。这一结果的意义在于, 它是目前已知的 ZFC 对连续统基数的唯一限制。

(2) 对于连续统函数 2^{\aleph_α} , 除了以上推论, 已知 ZFC 对它仅有的限制是单调性, 即 $\alpha < \beta$ 蕴涵 $2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta}$ 。

推论 2.3.10. 对任意序数 α, β , $\text{cf}(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) > \aleph_\beta$ 。

证明. 与推论 2.3.8 类似, 留作练习。 \square

2.4 无穷和与积

定义 2.4.1. 假设 $\{\kappa_i \mid i \in I\}$ 为一集基数, 而 $\{X_i \mid i \in I\}$ 为两两不交的集合族, 并且对任意 $i \in I$, $X_i = \kappa_i$, 则

$$\bigoplus_{i \in I} \kappa_i = \bigcup_{i \in I} X_i; \quad \bigotimes_{i \in I} \kappa_i = \prod_{i \in I} X_i. \quad (2.29)$$

首先注意到, 由选择公理可以证明, 以上定义不依赖于 X_i 的选择。同时, \bigotimes 的定义并不要求 X_i 是两两不交的。以下我们证明一些简单事实。

命题 2.4.2. 若 λ 为无穷基数而 $\{\kappa_\xi\}_{\xi < \lambda}$ 是非零基数的序列, 则 $\bigoplus_{\xi < \lambda} \kappa_\xi = \lambda \otimes \sup_{\xi < \lambda} \kappa_\xi$ 。

证明. 令 $\kappa = \sup_{\xi < \lambda} \kappa_\xi$, 对任意 $\xi < \lambda$, 显然有 $\kappa \geq \kappa_\xi$, 所以 $\bigoplus_{\xi < \lambda} \kappa_\xi \leq \bigoplus_{\xi < \lambda} \kappa = \lambda \otimes \kappa$ 。另一方面, λ 和 κ 都不大于 $\bigoplus_{\xi < \lambda} \kappa_\xi$, 因此 $\lambda \otimes \kappa = \max(\lambda, \kappa) \leq \bigoplus_{\xi < \lambda} \kappa_\xi$ 。 \square