Week9

陈淇奥
21210160025

2022 年 5 月 1 日

Exercise 0.0.1 (2.1.7). 偏序集 L 是一个格当且仅当对任意 $X \subseteq_f L$, $\sup X$ 和 $\inf X$ 存在

证明. $\Rightarrow$: 对 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的基数 n 做归纳，当 $n = 1$ 时，$\sup X = \inf X = x_1$

当 $n = k+1$ 时，令 $X' = \{x_1, \ldots, x_k\}$，下面证明 $\sup X = \sup\{\sup X', x_{k+1}\}$，首先易知 $\sup X \leq \sup\{\sup X', x_{k+1}\}$，而 $\sup X' \leq \sup X$,$x_{k+1} \leq \sup X$，因此 $\sup\{\sup X', x_{k+1}\} \leq \sup X$，因此 $\sup X = \sup\{\sup X', x_{k+1}\} \in L$，同理 $\inf X \in L$

$\Leftarrow$: 显然 □

Exercise 0.0.2 (2.1.9). 如果 L 是完全的，$\prod \emptyset$ 和 $\sum \emptyset$ 分别是什么

证明. $\prod \emptyset = 1$,$\sum \emptyset = 0$ □

Exercise 0.0.3 (2.1.10). 在偏序集 $(L, \leq)$ 中，如果对任意非空的 $X \subseteq L$，$\prod X$ 都存在，则对任意 $X \subseteq L$，如果 X 有上界，则 $\sum X$ 也存在

证明. 因为 X 有上界，令 $X' = \{a \in L \mid \sum X \leq a\}$，$X'$ 非空，下面证明 $\sum X = \prod X'$

对于任何 $x \in X$, 任意 $a \in X'$, $x \leq a$, 因此 $x \leq \prod X'$, 因此 $\sum X \leq \prod X'$

而 $\sum X \in X'$，因此 $\sum X \geq \prod X'$，所以 $\sum X = \prod X'$ □

Exercise 0.0.4 (2.1.11). 令 L 为一个格，则以下命题等价

1. L 是完全的

2. 对任意 $X \subseteq L$，$\prod X \in L$

3. L 有最大元 1 并且对任意非空 $X \subseteq L$，$\prod X \in L$

证明. $1 \to 2$: 根据定义

$2 \to 3$: 由前两个练习，$\prod \emptyset = 1$

$3 \to 1$: 由练习 □

Exercise 0.0.5 (2.1.13). 对任意格 L，$+$ 关于 $\cdot$ 的分配律成立当且仅当 $\cdot$ 关于 $+$ 的分配律成立

证明. $\Rightarrow$: 若对任意 $a, b, c \in L$，$(a+b)c = ab + bc$，那么 $(a+b)(a+c) = a(a+c) + b(a+c) = a + ac + ab + bc = a + bc$

$\Leftarrow$: 同理 □

Exercise 0.0.6 (2.1.14). 令 $M_3 = \{0, a, b, c, 1\}$，a, b, c 不可比，证明：$+$ 关于 $\cdot$ 的分配律和 $\cdot$ 关于 $+$ 的分配律在 L 中都不成立

证明. $(a+b)c = 1c = 1$,$ac + bc = 0$ □

Exercise 0.0.7 (2.1.15). 任何有端点的线序都是一个分配格，但不是布尔代数

证明. 对任何 $a, b, c \in L$

1. $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\}$, $\inf\{a, b\} = \min\{a, b\}$

2. 若 $a \leq b \leq c$，则 $(a+b)c = bc = b = b + a = ac + bc$

   若 $a \leq c \leq b$，则 $(a+b)c = bc = c = c + a = ac + bc$

   若 $b \leq a \leq c$，则 $(a+b)c = ac = ac + bc$

   对于其它情况，同理

若 L 是布尔代数且是布尔代数，则对任何 $a \in L$，$a \leq -a$ 或者 $-a \leq a$，此时 $a = 1$ 或 0，于是 L 只有两个元素 □

Exercise 0.0.8 (2.1.17). 如果 L 是分配格，则对任意 $a \in L$，如果 a 的补存在，则是唯一的

证明. 若 a 有补 b, c，则 $b = b + ac = (b+a)(b+c) = b+c = (c+a)(c+b) = c + ab = c$ □