Homework 10

陈淇奥
21210160025

2021 年 12 月 14 日

Exercise 1. 对任意 α 上的滤 F，如果 $X \notin F$，则 $\alpha - X$ 有正测度

证明. 如果存在 $Y \in F$ 使得 $(\alpha - X) \cap Y = \emptyset$，于是 $Y \subseteq X$，因此 $X \in F$，矛盾 $\square$

Exercise 2. 令 κ 为不可数正则基数，U 为 κ 上 κ 完全的正则非主超滤，则 κ 的所有无界闭集都属于 U

证明. 对于任意无界闭集 C，$C \cup \{0\}$ 也是无界闭集，且如果证明所有不包含 $\{0\}$ 的无界闭集属于 U，则所有的无界闭集属于 U。因此假设不包含 0 的无界闭集 $C \notin U$，于是 $\kappa - C \in U$ 具有正测度。

考虑函数 $f : \kappa - C \to \kappa, f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$，于是 f 在 $\kappa - C$ 上是退缩的，于是存在 $\gamma < \kappa$ 使得 $X = \{\alpha \in \kappa - C \mid f(\alpha) = \gamma\}$ 有正测度。因为 C 是无界闭集，所有 C 有极限点 $\gamma' > \gamma$。若 $X \notin U$, 则 $\kappa - X$ 也有正测度但是 $(\kappa - X) \cap (\kappa - C) = \emptyset$，矛盾。因此 $X \in U$，由于 $|X| \leq |\{\alpha \in \kappa \mid \sup(C \cap \alpha) = \gamma\}| \subseteq \gamma' < \kappa$，因此 U 不是主超滤，矛盾。 $\square$

Exercise 3. 对任意不可数正则基数 κ，任意连续共尾函数 $f : \kappa \to \kappa$，它的不动点集 $\{\epsilon \mid f(\epsilon) = \epsilon\}$ 是 κ 的无界闭集

证明. 令 $S = \{\epsilon \mid f(\epsilon) = \epsilon\}$

无界：对任意 $\alpha \in \kappa$，令 $\epsilon_0 = f(\alpha), \epsilon_{n+1} = f(\epsilon_n), \epsilon = \bigcup_{n \in \omega} \epsilon_n$。于是 ϵ 是不动点且 $\epsilon > \alpha$

闭：对任意 η 使得 $\sup(S\cap\eta)=\eta$，于是 $f(\eta)=\bigcup\{f(\beta):\beta\in S\cap\eta\}=\bigcup\{\beta:\beta\in S\cap\eta\}=\eta$，因此 $\eta\in S$ $\square$

Exercise 4. κ 是马洛基数当且仅当集合 $S=\{\lambda<\kappa\mid\lambda\text{是不可达基数}\}$ 是 κ 上的平稳集

证明. $\Rightarrow$。对任意无界闭集 C，都存在一个严格递增且连续的函数 $f:\kappa\to\kappa$ 使得 $C=\mathrm{im}(f)$。于是 f 有一个不动点 ϵ 且 ϵ 是不可达基数，因此 $C\cap S\neq\emptyset$

$\Leftarrow$。对于任意 κ 上的连续共尾函数 $f:\kappa\to\kappa$，它的不动点集 $A=\{\epsilon\mid f(\epsilon)=\epsilon\}$ 是无界闭集，因此存在 $\lambda\in A\cap S$ $\square$

Exercise 5. 令 $T\subseteq\mathbb{N}^{<\omega}$，满足对任意 $s\in T$，任意 $n\in\mathrm{dom}(s)$,$s(n+1)<s(n)$。$(T,\subset)$ 是一棵树，证明 T 没有无穷枝

证明. 若 T 有无穷枝 $(s_i:i\in\omega)$，令 $s=\bigcup_{i\in\omega}s_i$，于是 $\mathrm{dom}(s)=\omega$，而对于任意 $n\in\omega$，$s(n+1)<s(n)$，于是得到一条无穷下降链，矛盾 $\square$

Exercise 6. 3.4.9 中 F 是 $\aleph_1$ 完全的非主超滤

证明. $X_0=\emptyset$，因为 U 是超滤，$\emptyset\in F$。

$X_\gamma=\bigcup_{\beta\in\gamma}X_\gamma\in U$，因此 $\gamma\in F$。

若 $M\subseteq N$ 且 $M\in F$，于是 $X_M\subseteq X_N$，而 $X_M\in U$，于是 $X_N\in U$，$N\in F$。

若 $M,N\in F$，$X_{M\cap N}=X_M\cap X_N\in U$，于是 $M\cap N\in F$。

对任意 $M\subseteq\gamma$,$X_M\in U$ 或 $X_M^c\in U$，而 $X_M^c=X_{\gamma\setminus M}$，因此 $M\in F$ 或 $\gamma\setminus M\in F$。于是 F 是超滤。

由于每个 $X_\beta\notin U$，所以 $\{\beta\}\notin F$，F 是非主超滤。

对于任意 $\{Y_i:i\in\omega\}$，因为 U 是 $\aleph_1$ 完全的滤，$\bigcap_{i\in\omega}X_{Y_i}\in U$，于是 $\bigcap_{i\in\omega}Y_i\in U$。 $\square$