3.4 超滤与大基数

3.4.1 正则超滤

定义 3.4.1. 令 α 为极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，$F$ 为 α 上的滤。如果 F 对对角线交封闭，即，对任意 F 中的序列 $\langle X_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$，$\triangle X_\beta \in F$，就称 F 是**正则的**。

例 3.4.2. 对任意共尾数不可数的极限序数 α, α 上的无界闭滤 $F_{CB}(\alpha)$ 是正则。

我们接下来讨论刻画正则滤的等价条件。前面提到，平稳集是“不小的”集合。如果说滤中的元素测度为 1，它的对偶理想中的元素测度为 0，那么“不小的”集合可以称为“具有正测度”。

定义 3.4.3. 令 α 为极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，$F$ 为 α 上的滤。令 $Y \subseteq \alpha$，如果对任意 $X \in F$，都有 $Y \cap X \neq \emptyset$，就称集合 $Y \subseteq \alpha$ 为有**正测度**。

练习 3.4.4. 对任意 α 上的滤 F，如果 $X \notin F$，则 $\alpha - X$ 有正测度。

引理 3.4.5. *令 κ 是不可数正则基数，F 是 κ 上的滤。F 是正则的当且仅当对任意函数 $f : \kappa \to \kappa$，如果存在有正测度的 X 使得 f 在 X 上是退缩函数，则存在 $\gamma < \kappa$，使得 $X_\gamma = \{\alpha \in X \mid f(\alpha) = \gamma\}$ 有正测度。*

证明. ($\Rightarrow$) 任取函数 $f : \kappa \to \kappa$，令 Y 具有正测度使得 f 在 Y 上是退缩函数。反设对任意 $\gamma < \kappa$，$Y_\gamma = \{\alpha \in Y \mid f(\alpha) = \gamma\}$ 都不具有正测度，则对任意 $\gamma < \kappa$，存在 $X_\gamma \in F$，$X_\gamma \cap Y_\gamma = \emptyset$。令 $X = \triangle X_\gamma$，则因为 F 是正则的，所以 $X \in F$。因为 Y 具有正测度，所以 $X \cap Y \neq \emptyset$。对任意 $\gamma \in X \cap Y$，由于 $\gamma \in X$，所以对任意 $\beta < \gamma$，$f(\gamma) \neq \beta$，所以 $f(\gamma) \geq \gamma$，但 f 又在 Y 上是退缩函数，所以 $f(\gamma) < \gamma$，矛盾。

($\Leftarrow$) 假设对任意 $\beta < \kappa$，$X_\beta \in F$。反设 $\triangle X_\beta \notin F$，则

$$Y = \kappa - \triangle X_\beta = \{\alpha < \kappa \mid \exists\beta < \alpha(\alpha \notin X_\beta)\} \tag{3.22}$$

有正测度。定义函数 $f : \kappa \to \kappa$ 为:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \min\{\beta \mid \beta < \alpha \wedge \alpha \notin X_\beta\} & \text{如果} x \in Y; \\ 0 & \text{否则。} \end{cases}$$

也就是说，如果 $\alpha \notin \triangle X_\beta$，则一定存在 $\beta < \alpha$ 使得 $\alpha \notin X_\beta$，我们就令 $f(\alpha)$ 为最小的这样的 β。如果 $\alpha \in \triangle X_\beta$，则令 $f(\alpha) = 0$。

这样 f 是 Y 上的退缩函数，所以存在 $0 < \gamma < \kappa$，$Y_\gamma = \{\alpha \in Y \mid f(\alpha) = \gamma\}$ 有正测度。但是，由 f 的定义，$\alpha \in Y_\gamma$ 蕴涵 $\alpha \notin X_\gamma$，所以 $Y_\gamma \cap X_\gamma = \emptyset$，矛盾。 □

注记 3.4.6. Fodor 引理是以上引理与 $F_{CB}(\alpha)$ 对对角线交封闭的推论。

练习 3.4.7. 令 κ 为不可数正则基数，U 为 κ 上的 κ 完全的正则非主超滤，则 κ 的所有无界闭集都属于 U。因此，U 中的元素都是平稳集。

3.4.2 可测基数

接下来我们将讨论一个给定基数上的超滤存在问题。还记得由单点集生成的超滤称为主超滤，这样的滤从一定意义上是平凡的。所以以下我们讨论的都是非主超滤。

一个很自然的问题是一个基数上存在非主超滤对这个基数有什么要求？这实际上导致了更大的大基数概念。

引理 3.4.8. $2^\omega = \{f \mid f : \omega \to \{0,1\}\}$ 上不存在 $\aleph_1$-完全的非主超滤。

证明. 反设 U 是 2^ω 上的 $\aleph_1$-完全的非主超滤。令 $L = \{f \in 2^\omega \mid f(0) = 0\}$，$R = \{f \in 2^\omega \mid f(0) = 1\}$，则 $2^\omega = L \cup R$，且它们之中有且只有一个属于 U。我们递归定义一个函数 h 以及 2^ω 子集的序列 $\langle X_n \rangle_{n\in\omega}$ 如下：

(1) 如果 $L \in U$，则令 $h(0) = 0$，$X_0 = R$。如果 $R \in U$，则令 $h(0) = 1$，$X_0 = L$。

(2) 如果 $h(n)$ 和 X_n 已经定义。那么

$$Y = \{f \in 2^\omega \mid \forall i \leq n(f(i) = h(i))\} \in U. \tag{3.23}$$

令 $Y^L = \{f \in Y \mid f(n+1) = 0\}$，$Y^R = \{f \in Y \mid f(n+1) = 1\}$，则同样 Y^L, Y^R 中有且只有一个属于 U。类似地，如果 $Y^L \in U$，令 $h(n+1) = 0$，$X_{n+1} = Y^R$，反之，$h(n+1) = 1$，$X_{n+1} = Y^L$。

对任意 $f \in 2^\omega$，如果 $f \neq h$，则存在最小的 $i \in \omega$，$f(i) \neq h(i)$，而这蕴涵着 $f \in X_i$。所以我们有

$$\{h\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n = 2^\omega \in U. \tag{3.24}$$

但每个 X_n 都不属于 U，U 是 $\aleph_1$ 完全的蕴涵 $\bigcup_{n\in\omega} X_n \notin U$。同时，$U$ 是非主的，$\{h\} \notin U$，矛盾。 □

引理 3.4.9. *令 κ 为最小的有一个 $\aleph_1$-完全的非主超滤的基数，则*

(1) κ 上的任何 $\aleph_1$-完全非主超滤也都是 κ-完全的；

(2) κ 是不可数的正则基数。

证明. (1) 给定 U 是 κ 上的 $\aleph_1$-完全的非主超滤。反设 U 不是 κ 完全的。存在 $\gamma < \kappa$，$\langle X_\beta \rangle_{\beta<\gamma}$ 是 κ 的互不相交的子集的序列，$\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta \in U$，并且对任意 $\beta < \gamma$，$X_\beta \notin U$。

下面我们定义 γ 上的一个滤。首先，对任意 $Y \subseteq \gamma$，令 $X_Y \subseteq \kappa$ 为如下定义的集合:

$$X_Y = \{\delta < \kappa \mid \exists\beta \in Y(\delta \in X_\beta)\}. \tag{3.25}$$

也就是说 $X_Y = \bigcup_{\beta\in Y} X_\beta$。令 $F = \{Y \subseteq \gamma \mid X_Y \in U\}$，我们证明 F 是 γ 上 $\aleph_1$-完全的非主超滤，与假设 κ 是最小的这样的基数矛盾。

首先，我们留给读者验证 F 是一个 $\aleph_1$-完全的超滤，因为这很容易从 U 是这样的超滤以及 $\kappa = \bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta$ 推出。由于每个 $X_\beta \notin U$，所以 $Y = \{\beta\} \notin F$，即 F 是非主滤。

(2) 令 $\langle X_\beta \rangle_{\beta<\gamma}$ 是 κ 的子集的序列，$\gamma < \kappa$ 并且对任意 $\beta < \gamma$，$|X_\beta| < \kappa$，我们证明 $\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta \neq \kappa$。

由（1），令 U 是 κ 上的 κ-完全的非主超滤。显然，对任意 $\beta < \kappa$，由于 $|X_\beta| < \kappa$，所以 $X_\beta \notin U$。因为 U 是 κ 完全的，所以 $\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta \notin U$，所以不能是 κ。 □

以上引理就令我们可以做如下定义:

定义 3.4.10. 令 κ 是不可数的正则基数，如果 κ 上存在 κ-完全的非主超滤，就称 κ 是可测基数。

引理 3.4.11. *如果 κ 是可测基数，则 κ 是不可达基数。*

证明. 我们只需证明 κ 是强极限的。方法类似于引理 3.4.8。

反设存在 $\lambda < \kappa$，$2^\lambda \geq \kappa$。令 $g : \kappa \to 2^\lambda$ 为一一映射。如果 U 是 κ 上的 κ-完全的非主超滤，则 $F = \{X \subseteq 2^\lambda \mid g^{-1}[X] \in U\}$ 是 2^λ 上的 κ-完全的非主超滤。（请读者验证。）

我们接下来证明 2^λ 上没有 κ-完全的非主超滤。仿照引理3.4.8，反设存在这样的超滤 F。我们递归定义一个函数 $h : \lambda \to \{0,1\}$ 使得对任意 $\beta < \kappa$，$Y_\beta = \{f \in 2^\lambda \mid \forall\delta < \beta(f(\delta) = h(\delta))\} \in F$。

假设对任意 $\delta < \beta$，$f(\delta)$ 已经定义。令

$$\begin{aligned} Y^L &= \{f \in 2^\lambda \mid \forall\delta < \beta(f(\delta) = h(\delta)) \wedge f(\beta) = 0\} = \{f \in Y_\beta \mid f(\beta) = 0\} \\ Y^R &= \{f \in 2^\lambda \mid \forall\delta < \beta(f(\delta) = h(\delta)) \wedge f(\beta) = 1\} = \{f \in Y_\beta \mid f(\beta) = 1\}. \end{aligned}$$

由递归假设，这两个集合中有且只有一个属于 F，如果 $Y^L \in F$，我们令 $h(\beta) = 0$，否则 $h(\beta) = 1$。同时令 $Y_{\beta+1} = \{f \in 2^\lambda \mid \forall\delta \leq \beta(f(\delta) = h(\delta))\}$，显然 $Y_{\beta+1} \in F$。

对于极限序数 $\eta < \lambda$，我们令 $h(\eta) = \sup_{\delta<\epsilon} f(\delta)$，同时令 $Y_\eta = \bigcap_{\delta<\eta} Y_\delta$，由于假设 F 是 κ-完全的，所以 $Y_\eta \in F$。

这样，我们就完成了 h 的定义。还是根据 κ-完全性，$Y = \bigcap_{\beta<\lambda} Y_\beta \in F$，但是 $Y = \{h\}$，与 F 是非主滤矛盾。 □

3.4.3　马洛基数

前面我们证明过，任何连续的类函数 $F : \omega \to \omega$ 都存在不动点 ϵ，即 $F(\epsilon) = \epsilon$。（定义3.3.5，定理2.1.37）现在我们考虑极限序数上的连续函数。

定义 3.4.12. 对任意极限序数 α，任意序数 δ，$f : \delta \to \alpha$ 为函数，如果

(1) $\eta < \beta < \delta$ 蕴涵 $f(\eta) < f(\beta)$；

(2) 对任意极限序数 $\xi < \delta$，$f(\xi) = \bigcup\{f(\beta) \mid \beta < \xi\}$，

就称 f 是**连续的**。

引理 3.4.13. *对任意极限序数 α，以下命题等价：*

(1) α 是正则基数并且 $\alpha > \omega$；

(2) 对任意连续的共尾映射 $f : \delta \to \alpha$，f 都有不动点。

证明. ($\Rightarrow$) 如果 $f : \delta \to \alpha$ 是连续共尾函数，则 $\delta = \alpha$。对任意 $\beta < \alpha$，令 $\epsilon_0 = f(\beta)$，$\epsilon_{n+1} = f(\epsilon_n)$，$\epsilon = \bigcup_{n\in\omega} \epsilon_n$。因为 $\alpha > \omega$ 是正则的，所以 $\epsilon \in \alpha$。由于 f 是连续的，所以 $f(\epsilon) = \bigcup_{n\in\omega} f(\epsilon_{n+1}) = \epsilon$。

($\Leftarrow$) 如果 $\mathrm{cf}(\alpha) = \delta < \alpha$，令 $f : \delta \to \alpha$ 为连续的共尾函数。定义 $g : \delta \to \alpha$ 为：$g(\beta) = \delta + f(\beta)$。$g$ 也是连续的共尾函数，对任意 $\beta < \delta$，$\beta < g(\beta)$，所以它不可能有不动点。 □

练习 3.4.14. 对任意不可数正则基数 κ，任意连续共尾函数 $f : \kappa \to \kappa$，它的不动点集是 $\{\epsilon \mid f(\epsilon) = \epsilon\}$ 是 κ 的无界闭集。

定义 3.4.15. 令 κ 是极限序数。

(1) 如果 κ 上的任意连续共尾函数 $f : \kappa \to \kappa$ 都存在一个不动点 ϵ 并且 ϵ 是正则的，就称 κ 是**弱马洛基数**。

(2) 如果 κ 上的任意连续共尾函数 $f : \kappa \to \kappa$ 都存在一个不动点 ϵ 并且 ϵ 是不可达基数，就称 κ 是**马洛基数**。

引理 3.4.16. *对任意基数 κ，如果 κ 是弱马洛基数，则 κ 是弱不可达的；如果 κ 是马洛基数，则 κ 是不可达的。*

证明. 根据引理3.4.13，κ 是正则基数。我们只需验证 κ 是极限的和强极限的。

（1）如果 $\kappa = \lambda^+$，令 $f : \kappa \to \kappa$ 为 $f(\alpha) = \lambda + \alpha$。这是一个连续函数。如果 $f(\epsilon) = \epsilon$，那么 $\epsilon = \lambda + \epsilon$，所以 ϵ 不是正则的。

（2）类似，如果 $\lambda < \kappa$ 并且 $2^\lambda > \kappa$，定义 $f : \kappa \to \kappa$ 为 $f(\alpha) = \lambda + \alpha$。如果 $f(\epsilon) = \epsilon$，则 $\lambda < \epsilon < 2^\lambda$，所以不可能是强极限的。 □

练习 3.4.17. κ 是马洛基数当且仅当集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{是不可达基数}\}$ 是 κ 上的平稳集。【提示：利用引理3.3.6。】

引理 3.4.18. 如果 κ 上有一个 κ 完全的、正则的非主超滤 U，则 κ 是马洛基数。

证明. κ 是可测的，所以它是不可达基数。我们需要证明小于 κ 的不可达基数构成一个平稳集。为此，我们需要两点:（1）小于 κ 的强极限基数是一个无界闭集；（2）小于 κ 的正则基数是平稳集。这两个集合的交是一个平稳集，它的元素是不可达基数。关于（1），$f(\lambda) = 2^\lambda$ 是 κ 上的连续共尾函数，它的不动点是 κ 的无界闭集，而每个不动点都是强不可达的。详细证明留给读者。

对于（2），我们只需证明小于 κ 的所有正则基数属于 U。否则，$\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) < \alpha\} \in U$。由于 U 是正则的，所以存在 $\lambda < \kappa$，$E = \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\} \in U$。对任意 $\alpha \in E$，令 $\{\alpha_\eta \mid \eta < \lambda\}$ 为严格递增的共尾序列，对任意 $\eta < \lambda$，存在 γ_η，$X_\eta = \{\alpha \in E \mid \alpha_\eta = \gamma_\eta\} \in U$。这是因为，对每一 $\eta < \lambda$，我们可以定义函数：$h_\eta : E \to \kappa$ 为 $h_\eta(\alpha) = \alpha_\eta$。这是一个退缩函数函数，再次应用正则性质，就得到 γ_η 和 X_η。

这样的话，$X = \bigcap_{\eta<\lambda} X_\eta \in U$，但是 $X = \sup\{\gamma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ 是单点集，矛盾。 □

3.5　树与弱紧致基数

定义 3.5.1. 令 $(T, <)$ 为一个偏序集，如果对任意 $x \in T$，$\mathrm{Pred}(x) = \{y \mid y < x\}$ 在 $<$ 下是一个良序，就称 T 是一个树。

关于树，我们有以下术语。

定义 3.5.2. 令 $(T, <)$ 是一棵树。

(1) 对任意 $x \in T$，$\hbar_T(x) = \mathrm{ot}(\mathrm{Pred}(x))$ 称为 x 在 T 中的**高度**。

(2) 序数 $\tau = \bigcup\{\hbar_T(x) + 1 \mid x \in T\}$ 称为**树 T 的高度**，记作 $\hbar_T$。它是大于所有 T 中元素高度的最小序数。

(3) 对任意 $\beta < \hbar_T$，集合 $\{x \in T \mid \hbar_T(x) = \beta\}$ 称作 T 的第 β-层。

(3) T 的一个子集 $A \subseteq T$ 中的元素如果是两两不可比的，即对任意 $x, y \in A$，如果 $x \neq y$，则 $x \not< y$ 并且 $y \not< x$，就称 A 是 T 的**反链**。

(4) T 的任意线序子集都称为 T 的链。

(5) T 的链 B 如果还是向下封闭的，即对任意 $x \in B$，任意 $y < x$，都有 $y \in B$，就称 B 是 T 的树枝。

例 3.5.3. 对任意集合 X，任意基数 κ，$X^{<\kappa}$ 在 $\subset$ 关系下是一棵树，它的高度是 κ。如果 $X = \{0, 1\}$，$\kappa = \omega$，则 $2^{<\omega}$ 是高度为 ω 的二叉树。

练习 3.5.4. 假设 $(T, <)$ 是树，

(1) T 的每一层都是反链；

(2) 如果 B 是 T 的树枝，且 B 与 T 的某一层相交至多有一个交点。

练习 3.5.5. 令 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, 满足对任意 $s \in T$, 任意 $n \in \mathrm{dom}(s)$, $s(n+1) < s(n)$。$(T, \subset)$ 是一棵树。证明 T 没有无穷枝，即不存在 $B \subseteq T$，使得 $|B| = \omega$。

定理 3.5.6 (寇尼希无穷引理)**.** *如果 T 是一棵高度为 ω 的树，并且 T 的每一层都是有穷的，则 T 有一个无穷枝，即序型为 ω 的枝。*

证明. 任取 x_0 属于 T 的第 0 层，并且集合 $\{y \in T \mid x_0 < y\}$ 是无穷的。这样的 x_0 一定存在，否则 T 的高度就是有穷的。假设 x_n 已经选出，它位于第 n 层。取 x_{n+1} 属于第 $n+1$ 层，使得 $x_n < x_{n+1}$ 并且 $\{y \in T \mid x_{n+1} < y\}$ 是无穷的。由于 x_{n+1} 的高度为 $n+1 < \omega$，而 $\hbar_T = \omega$，所以这样 $n+1$ 必定存在。$B = \{x_n \mid n < \omega\}$ 是 T 的无穷枝。（我们使用了选择公理。） □

一个很自然的问题是将寇尼希无穷引理推广到大于 ω 的基数。

定义 3.5.7. 令 T 为一棵树，如果 T 的高度为 κ，但 T 的每一层的基数都小于 κ，就称 T 为一棵κ-树。

所以，寇尼希无穷引理就是说每棵 ω-树都有序型为 ω 的枝。但这对第一个不可数基数 ω_1 不成立。

定理 3.5.8 (阿龙岑 (Aronszajn))**.** *存在一棵 ω_1-树 T，T 没有序型为 ω_1 的树枝。*

~~这个定理的证明有点复杂，我们略去不讲。~~

证明. 我们考虑 $T = \{f \in \omega^{\omega_1} \mid f$ 是单射$\}$，则 $(T, \subset)$ 是高度为 ω_1 的树。同时，T 没有序型为 ω_1 的枝：这是因为，如果 B 的序型是 ω_1，则 $\bigcup B$ 就是 ω_1 到 ω 内的单射，而这是不可能的。所以，T 离我们的要求只差每层都是至多可数的。为了实现这个条件，我们构造 T 的一棵子树，它的层对应着 T 的层，但每层都是可数的。

（1）对任意 $f, g \in T$，我们定义 $f \sim_F g$ 表示 f, g 只在有穷多个点处不想等。即：$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$，并且 $|\{\alpha \in \omega_1 \mid f(\alpha) \neq g(\alpha)\}| < \omega$。

事实 3.5.9. $\sim_F$ 是一个等价关系，并且，对任意 $f \in T$，f 的等价类 $[f]_{\sim_F}$ 是可数的。请读者证明这一点。

（2）我们接下来递归定义 T 中元素的序列 $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$，令其具有如下性质：

(I) 对任意 α，有无穷多自然数不在 f_α 的值域中，即 $|\omega - \mathrm{ran}(f_\alpha)| = \omega$。以保证构造总可以进行。

(II) 对任意 $\beta < \alpha$，$f_\alpha \restriction \beta \sim_F f_\beta$。

假设对任意 $\beta < \alpha$，f_β 已经定义。如果 $\alpha = \beta + 1$，我们令 $f_\alpha = f_\beta \cup \{(\alpha, n)\}$，其中 $n \notin \mathrm{ran}(f_\beta)$。由性质 (I)，这样的 n 总是存在的。

如果 α 是极限序数。由于 $\alpha < \omega_1$ 是可数的，我们取 α 中严格递增的共尾序列 $\langle \alpha_n \in \alpha \mid n < \omega \rangle$。为了定义 f_α，我们递归定义序列：$\{(g_n, h_n, x_n) \mid n \in \omega\}$，使其满足：

(i) $g_n, h_n \in T$，$g_n \subseteq h_n \subseteq g_{n+1}$；

(ii) $x_n \subseteq \omega \wedge |x_n| < \omega$；

(iii) $\mathrm{ran}(h_n) \cap x_n = \emptyset$；

(iv) $g_n \sim_F h_n \sim_F f_{\alpha_n}$。

令 $g_0 = h_0 = f_{\alpha_0}$，$x_0 = \emptyset$。首先，定义 g_{n+1} 为：

$$g_{n+1} = h_n \cup f_{\alpha_{n+1}} \restriction \{\beta \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}) \mid f_{\alpha_{n+1}}(\beta) \notin \mathrm{ran}(h_n) \cup x_n\}. \tag{3.26}$$

注意到：h_{n+1} 是一个单射，这是因为 h_n 是单射，并且定义中将使得 $f_{\alpha_{n+1}}(\beta)$ 落入 $\mathrm{ran}(h_n)$ 的那些大于 α_n 的 β 去除了。

另外，$f_{\alpha_{n+1}} \upharpoonright \alpha_n \sim_F f_{\alpha_n} \sim_F g_n \sim_F h_n$，所以 $f_{\alpha_{n+1}}$ 限制到 α_n 上至多有有穷个点与 f_{α_n} 不同。对于 $\beta \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$，只有在这些不同的点上才可能使得 $f_{\alpha_{n+1}}(\beta)$ 可能落入 $\mathrm{ran}(h_n)$，否则 $f_{\alpha_{n+1}}$ 就不是单射了。再加上 x_n 是有穷的，所以我们在定义中至多移除有穷多个点，所以 g_{n+1} 的定义域是 α_{n+1} 减去有穷个元素。

其次，令 $h_{n+1} \supseteq g_{n+1}$，$\mathrm{dom}(h_{n+1}) = \alpha_{n+1}$，并且 $\mathrm{ran}(h_{n+1}) \cap x_n = \emptyset$。即，$h_{n+1}$ 补足 g_{n+1} 中缺失的有穷多个 β，同时保持值域与 x_n 不交。

最后，令 $x_{n+1} = x_n \cup \min(\omega - \mathrm{ran}(h_{n+1}))$。

最后的最后，令 $f_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} g_n$。首先，$f_\alpha$ 满足性质（I）：因为 $\bigcup_{n\in\omega} x_n$ 的基数为 ω，它的元素都不在 f_α 的值域中，因为它们都不在任何 g_n 中。其次，f_α 满足（II）：对任意 $\beta < \alpha$，存在 n，$f_\alpha \upharpoonright \beta = g_n \upharpoonright \beta \sim_F f_{\alpha_n} \upharpoonright \beta$。

（3）现在定义 $S = \{g \in T \mid \exists\alpha < \omega_1 (g \sim_F f_\alpha)\}$。我们需要证明 $(S, \subset)$ 是树：对任意 $g \in S$，根据性质（II），$\mathrm{Pred}(g) \subseteq S$，显然是个良序。由于对任意 $\alpha < \omega_1$，$\hbar_S(f_\alpha) = \alpha$，所以 S 的高度是 ω_1。同时，对任意 $\alpha < \omega_1$，S 的第 α 层 $T_\alpha = [f_\alpha]_{\sim_F}$，是可数的。因为 S 中的元素都是单射，S 没有序型为 ω_1 的树枝。 □

定义 3.5.10. 对任意基数 κ，如果任意 κ-树都有序型为 κ 的树枝，就称 κ **有树性质**。

注记 3.5.11. 寇尼希无穷引理是说 ω 有树性质。阿龙岑定理 3.5.8则说 ω_1 没有树性质，定理中构造的反例，即一个没有序型为 ω_1 的 ω_1-树，被称为**阿龙岑树**。事实证明，具有树性质是一个大基数性质。

定义 3.5.12. 如果一个不可达基数 κ 有树性质，就称 κ 是**弱紧致基数**。

注记 3.5.13. 定义中我们要求 κ 是不可达的。事实上，像树性质这样的"紧致"性不能蕴涵不可达。不过如果 κ 有树性质，那么它在哥德尔的可构成集的宇宙 L 中是不可达的。

事实 3.5.14. 如果 κ 是弱紧致基数，则 κ 是不可达基数，也是马洛基数。

引理 3.5.15. 如果 κ 是可测基数，则 κ 是弱紧致基数。

证明. 我们已经知道 κ 是不可达基数了。现在证明 κ 有树性质。证明的方法与寇尼希无穷引理类似。令 $(T,<)$ 为 κ-树，显然 $|T|=\kappa$，所以不妨设 $T=\kappa$。为了区分 k 作为序数上的序和作为树的序，我们将 κ-树记作 $T=(\kappa,\prec)$，现在证明 T 有序型为 κ 的树枝。对任意 $\alpha\in\kappa$，我们令 $\mathrm{Succ}(\alpha)=\{x\in T\mid \alpha\preceq x\}$，令 $B=\{\alpha\in\kappa\mid \mathrm{Succ}(\alpha)\in U\}$，其中 U 是 κ-完全的非主超滤。

首先，B 是 T 中的一个链。假设 $\alpha,\beta\in B$，如果 $\alpha\not\prec\beta$ 并且 $\beta\not\prec\alpha$，则 $\mathrm{Succ}(\alpha)\cap\mathrm{Succ}(\beta)=\emptyset$，这与它们都属于 U 矛盾。

其次，对于任意 $\beta<\kappa$，B 与 T 的第 β 层相交不空。注意到树 T 可以分为两部分。β 以下的部分，可以表示为 $T_{<\beta}=\{x\in T\mid \hbar_T(x)<\beta\}$。由于 T 是 κ-树，这是小于 κ 个基数小于 κ 的集合的并，所以 $T_{<\beta}\notin U$。另一部分是 β 层及其以上的部分，可以表示为：$T_{\geq\beta}=\bigcup_{\hbar_T(x)=\beta}\mathrm{Succ}(x)$。$T_{\geq\beta}$ 作为 $T_{<\beta}$ 的补集，一定属于超滤 U。同时，它是小于 κ 个集合的并，所以必有一个 x 属于 β 层，$\mathrm{Succ}(x)\in U$，即 $x\in B$。 □

但从树性质看不出为什么弱紧致基数是紧致的。我们讨论弱紧致基数的一些等价的定义。

定理 3.5.16 (兰姆塞)**.** 令 n,k 都是自然数，对任意函数 $f:[\omega]^n\to k$，称作对自然数 n 元组的 k 染色，都存在一个无穷的集合 $H\subseteq\omega$，使得 $[H]^n$ 的元素在 f 下被染成同一种颜色，即 $f\restriction[H]^n$ 上是常值函数。这样的 H 常被称为是齐次的（*homogeneous*）。

证明. 我们对 n 做归纳。当 $n=1$ 时，这就是鸽笼原理。

现在令 $f:[\omega]^{n+1}\to k$ 为一个 k 染色。对任意自然数 $x\in\omega$，我们定义 $f_x:[\omega-\{x\}]^n\to k$ 为：对任意 $Y\subseteq\omega-\{x\}$ 并且 $|Y|=n$，$f_x(Y)=f(Y\cup\{x\})$。对任意 $x\in\omega$，f_x 是一个 n 元组的 k 染色。由于显然存在 ω 与 $\omega-\{x\}$ 的双射，所以我们可以将 f_x 看做 $[\omega]^n$ 上的染色。根据归纳假设，存在一个无穷的 $H_x\subseteq\omega-\{x\}$，H_x 在 f_x 下是齐次的。

接下来我们递归定义一个序列 (A_i,x_i)，使得对任意 $i\in\omega$，$A_{i+1}\subseteq A_i$，$x_i<x_{i+1}$。

首先，令 $x_0 = 0$，$A_0 = \omega$。假设 x_i, A_i 已经定义。将 $f_{x_i} : [A_i - \{x_i\}]^n \to k$ 视为 $[\omega]^n$ 上的 k 染色，令 H_{x_i} 为它的无穷齐次集，则定义 $Y_{i+1} = H_{x_i}$，$x_{i+1} = \min\{x \in H_{x_i} \mid x > x_i\}$。

注意到对任意 $i < \omega$，任意 $j < i$，$x_i \in A_{j+1}$，而后者是 f_{x_j} 的无穷齐次集，所以 $f_{x_i} : [\{x_j \mid j > i\}]^n \to k$ 是常值函数，令其函数值为 $c_i \in k$。

定义 $h : \{x_i \mid i \in \omega\} \to k$ 为 $h(x_i) = c_i$，这是一个 k 染色，因此有一个无穷的齐次集 H，即对任意 $x_i \in H$，$h(x_i) = c \in k$。接下来证明 $f \upharpoonright [H]^{n+1}$ 是一个常值函数。

对任意 $(x_i, \cdots, x_{i+n}) \in [H]^n$，$f(x_i, \cdots, x_{i+n}) = f_{x_i}(x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}) = h(x_i) = c$。 □

注记 3.5.17. 事实上，我们证明的结论略强于定理的表述：对任意无穷集 $X \subseteq \omega$，任意 $[X]^n$ 上的 k 染色，都存在一个齐次集。所以在一定意义上我们的证明不完全严格，因为在归纳假设中我们使用了这种更强的形式。这带来的好处是我们大幅减少了符号的复杂度，使证明的思想更为清楚。

兰姆塞定理是否可以推广到更大的基数也是一个自然的问题。事实再次证明这也是一个大基数性质。我们先证明一个引理。这个结果是定理 2.1.16的推广。那个定理是说，如果按照实数 $\mathbb{R}$ 上的大小关系 $<$ 排序，则 $\mathbb{R}$ 中不可能有序型为 ω_1 的序列。由于 $(\mathbb{R}, <)$ 作为拓扑空间与 $(2^\omega, <_c)$ 是同胚的（其中 $<_c$ 是 2^ω 上的字典序），所以这实际上是说 2^ω，在字典顺序下不能有不可数的序列。

引理 3.5.18. 对任意基数 λ，如果 $<_c$ 是 2^λ 上的字典序，则 2^λ 在这个序下没有序型为 λ^+ 的严格递增或严格递减序列。

证明. 反设 $A = \{x_\alpha \in 2^\lambda \mid \alpha < \lambda^+\}$ 为严格递增的序列，即 $x_\alpha <_c x_\beta$ 当且仅当 $\alpha < \beta$。（递减的情形类似。）

对任意 $\alpha < \lambda^+$，由于 $x_\alpha < x_{\alpha+1}$，所以存在 $\bar{\alpha} < \lambda$ 满足：

(1) $x_\alpha \upharpoonright \bar{\alpha} = x_{\alpha+1} \upharpoonright \bar{\alpha}$，

(2) $x_\alpha(\bar{\alpha}) = 0$ 并且 $x_{\alpha+1}(\bar{\alpha}) = 1$。

即 $\bar{\alpha}$ 是 x_α 与 $x_{\alpha+1}$ 的分叉点。对任意 $\gamma < \lambda$，我们令 $A_\gamma = \{\alpha < \lambda^+ \mid \bar{\alpha} = \gamma\}$。$A_\gamma$ 是两两不交的，而且它们的并是 A。所以，必定有一个 $\gamma < \lambda$，$|A_\gamma| = \lambda^+$。令 $B = \{y_\beta \mid \beta < \lambda^+\}$ 为 A_γ 的一个枚举，并且 $y_\beta <_c y_\delta$ 当且仅当 $\beta < \delta$。B 中的元素为长度为 γ 的 0-1 序列。以上论证可以重复应用于 B，得到 $\eta < \gamma < \lambda$ 使得 $B_\eta = \{y_\beta \mid \bar{\beta} = \eta\}$ 的基数为 λ^+。这样就定义了序数上的无穷下降链，矛盾。 □

引理 3.5.19. *对任意基数 $\kappa > \omega_1$，如果任意 $[\kappa]^2$ 上的 2 染色 $f : [\kappa]^2 \to 2$，都存在基数为 κ 的齐次集，则 κ 是不可达基数。*

记法 3.5.20. 以上性质通常会记作 $\kappa \to (\kappa)^2$。更一般地，如果 κ 的 n 元组的 k 染色存在一个基数 λ 的齐次集，就记作

$$\kappa \to (\lambda)^n_k. \tag{3.27}$$

如果 $k = 2$，则下标可以省略。

证明.（1）κ 是正则几乎是显然的。如果 κ 可以划分为 λ 个互不相交的集合 $\{X_\beta \mid \beta < \lambda\}$，$\lambda < \kappa$ 并且所有 X_β 的基数都小于 κ。我们可以定义 $[\kappa]^2$ 上的染色 f 为：$f(\{\gamma, \delta\}) = 0$ 当且仅当它们属于同一个 X_β。这个染色的齐次集或者是某个 X_β，或者不包含于任何 X_β 并且与每个 X_β 至多有一个交点，基数都小于 κ。

（2）现在证明 κ 是强极限的。反设不是，令 $\lambda < \kappa$ 并且 $2^\lambda \geq \kappa$。所以存在 κ 到 2^λ 内的一一映射。令 $A = \{x_\alpha \in 2^\lambda \mid \alpha < \kappa$ 为这个映射的值域。我们如下定义 $[A]^2$ 上的一个 2-染色。对任意 $\alpha, \beta \in \kappa$，如果 $\alpha < \beta$ 蕴涵 $x_\alpha <_c x_\beta$，即对于最小的使得 $x_\alpha \neq x_\beta$ 的 $\delta < \lambda$，$x_\alpha(\delta) = 0$ 且 $x_\beta(\delta) = 1$，就令 $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$。反之，如果 x_α 与 x_β 的字典序与 α, β 作为序数的序相反，即 $x_\alpha(\delta) = 1$ 且 $x_\beta(\delta) = 0$，则令 $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$。

由题设 $\kappa \to (\kappa)^2$，令 H 为齐次集，$|H| = \kappa$，H 在 $<_c$ 下是 2^λ 的一个严格递增或严格递减的序列，其长度为 $\kappa > \lambda$，与引理3.5.18矛盾。 □

引理 3.5.21. *令 κ 是不可数基数，则以下命题等价：*

(1) κ 是弱紧致基数；

(2) $\kappa \to (\kappa)^2$。

证明. □

3.6　习题

3.6.1. 如果 $\mathcal{F}$ 是 S 上的滤构成的一个 $\subseteq$-链，则 $\bigcup \mathcal{F}$ 是 S 上的滤。

3.6.2. 如果 F 是非主超滤，则任意 $X \in F$ 都是无穷的。因此任何非主超滤必是弗雷歇滤的扩张。

3.6.3. 如果 F 是 S 上的滤，而 $F' = \{X \subseteq S \mid S - X \notin F\}$，则 $F \subseteq F'$，并且 $F = F'$ 当且仅当 F 是超滤。

3.6.4. 假设 $X \subseteq S$，证明：

（1） 如果 F 是 S 上的滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的滤；

（2） 如果 F 是 S 上的超滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的超滤；

（3） 如果 F 是 X 上的滤，则 F 能扩张为 S 上的超滤。

3.6.5. 假设 S 是无穷的，则

（1） 存在 S 上的超滤 F，对任意 $X \in F$，$|X| = |S|$。这样的滤称为 S 上的**均匀超滤**（uniform ultrafilter）；

（2） $\{F \mid F$ 是 S 上的均匀超滤$\} = \{F \mid F$ 是 S 上的非主超滤$\}$ 当且仅当 S 是可数的。

3.6.6. 令 κ 为不可数正则基数，举出一个例子，使得 $X = \{C_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是 κ 上的无界闭集的族，而 $\bigcap X = \emptyset$，但是 $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \kappa$。

3.6.7. 如果令 $Y_\alpha = \{\xi \in X_\alpha \mid \xi > \alpha\}$，则 $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$。

3.6.8. $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \cup \{\xi \mid \xi \leq \alpha\})$。

3.6.9. 证明不存在 ω 上非主超滤 F 使得 F 对对角线交封闭。

3.6.10. 如果 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤，则以下命题等价：

（1） F 是非主滤；

（2） $\{X \subseteq S \mid S - X \text{ 是有穷的}\} \subseteq F$；

（3） F 的元素都是无穷的。

3.6.11. 如果 S 是无穷的，则 S 上的任何非主超滤都不是 $|S|^+$- 完全的。所以 ω 上的任何非主超滤都不是 σ-完全的。

3.6.12. 如果 F 是 S 上的非主超滤，并且是 $|S|$-完全的，则 F 是均匀超滤。

3.6.13. 一个不可数基数 κ 是**可测的**当且仅当 κ 上存在 κ 完全的非主超滤。证明任何可测基数都是不可达基数，即，都是正则和强极限的。

3.6.14. 如果 F 是 S 上的滤，并且令 $\mu = \sup\{\kappa \mid F \text{ 是 } \kappa \text{ 完全的}\}$，则 μ 是正则基数，并且 F 是 μ-完全的。

3.6.15. 假设 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤。证明 F 是 κ-完全的当且仅当对任意 $\tau < \kappa$ 和任意划分 $\langle X_\xi \mid \xi < \tau\rangle$，总存在 $X_\xi \in F$。

3.6.16. 如果 $\alpha > \aleph_0$ 是正则基数，并且 $f : \alpha \to \alpha$ 是函数，则集合 $C = \{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

3.6.17. 假设 α 为极限序数，则：

（1） α 上存在一个序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

（2） 如果 A 是一集极限序数,则用选择公理可以证明:存在序列 $\langle C_\alpha\rangle_{\alpha\in A}$ 满足：C_α 是 α 上的序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

3.6.18. $\{\alpha < \omega_1 \mid \omega^\alpha = \alpha\}$ 是 ω_1 上的无界闭集。

3.6.19. κ 上的无界闭集都是平稳集。

3.6.20. 令 κ 为不可数正则基数，$S \subseteq \kappa$，证明以下命题等价：

（1） S 是平稳集；

（2） 对任意递减函数 $f : S \to \kappa$，存在序数 $\alpha < \kappa$，使得 $f^{-1}[\alpha]$ 在 κ 中无界。

3.6.21. 如果 κ 是不可达基数（它当然是不可数正则的），则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是强极限基数$\}$ 是 κ 上的无界闭集。

3.6.22. 如果 κ 是最小的不可达基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是强极限的奇异基数$\}$ 是 κ 上的无界闭集。

3.6.23. 假设 κ 是第 α 个不可达基数，而 $\alpha < \kappa$，证明 $X = \{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是正则的$\}$ 不是 κ 上的平稳集。

3.6.24. 一个无穷基数 κ 是**马洛基数**（Mahlo cardinal）当且仅当 κ 是不可达的并且 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是正则基数$\}$ 是 κ 上的平稳集。如果 κ 是马洛基数，则 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是不可达基数$\}$ 是 κ 上的平稳集，因此 κ 是第 κ 个不可达基数。

3.6.25. 如果 $\kappa = \min\{\lambda \mid \lambda$ 是第 λ 个不可达基数$\}$，证明 κ 不是马洛基数。

3.6.26. 如果 κ 是马洛基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是第 λ 个不可达基数$\}$ 在 κ 中无界。