第一章　逻辑与代数

1.1　布尔代数

给定任意集合 X，X 的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 在 $\cap, \cup, -$ 运算下，形成一个代数结构，这个结构是所谓"布尔代数"的最直观最典型的代表。

定义 1.1.1. 令 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 为一个结构，其中 B 是非空集合，$+, \cdot$ 是二元函数，$-$ 是一元函数，$0, 1$ 为常量。如果 $\mathcal{B}$ 满足以下公理：

(1) 结合律：$a + (b + c) = (a + b) + c$，$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(2) 交换律：$a + b = b + a$，$a \cdot b = b \cdot a$;

(3) 吸收律：$a + (a \cdot b) = a$，$a \cdot (a + b) = a$;

(4) 分配律：$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$，$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$;

(5) $x + (-x) = 1$，$x \cdot (-x) = \emptyset$。

则称 $\mathcal{B}$ 为**布尔代数**。

练习 1.1.2. $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, -, X, \emptyset)$ 是一个布尔代数。

如果 $X = \emptyset$，则 $\mathcal{P}(X)$ 只有一个元素 $\emptyset$，它也是一个布尔代数。只有一个元素的布尔代数是**平凡的**。

一个**非平凡**的布尔代数至少有两个元素 $\{0, 1\}$，例如对任意非空集合 X，$\{X, \emptyset\}$ 是一个布尔代数。

练习 1.1.3. 令 $B=\{T,F\}$ 为命题真值的集合，则 B 在命题逻辑联结词 $\vee$ 、$\wedge$ 和 $\neg$ 下是一个布尔代数。

例 1.1.4. 令 $\mathscr{L}$ 为命题逻辑的语言，T 为 $\mathscr{L}$ 中的理论。

- 对任意公式 α,β，定义一个二元关系：

$$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow T\vdash\alpha\leftrightarrow\beta.$$

- 对任意公式 α，我们令 $[\alpha]_T$ 表示 α 在这一等价关系下的等价类，即集合 $\{\beta\mid\beta\sim\alpha\}$。在不致引起混淆的情形下，我们通常省略掉下标 T。

- 令 $B=\{[\alpha]_T\mid\alpha\text{是一个公式}\}$，定义 B 上的运算：

$$\begin{aligned}
[\alpha]+[\beta] &= [\alpha\vee\beta]\\
[\alpha]\cdot[\beta] &= [\alpha\wedge\beta]\\
-[\alpha] &= [\neg\alpha]\\
0 &= [\alpha\wedge\neg\alpha]\\
1 &= [\alpha\vee\neg\alpha].
\end{aligned}$$

  在这里，我们需要验证以上定义是合理的：即定义中的 $+,\cdot$ 的确是二元函数；$-$ 的确是一元函数；$0,1$ 的确是常量，或者说是零元函数。所以，以 $+$ 为例，我们需要验证对任意 $\alpha,\beta,\delta,\gamma$，如果 $[\alpha]=[\beta]$，$[\delta]=[\gamma]$，则 $[\alpha\vee\delta]=[\beta\vee\gamma]$。具体的验证请读者完成。

- $\mathscr{B}(T)=(B,+,\cdot,-,0,1)$ 是一个布尔代数，称为（命题逻辑的）Lindenbaum 代数。

练习 1.1.5. 令 T 为命题逻辑中的理论，

1. 请验证 $\mathscr{B}(T)=(B,+,\cdot,-,0,1)$ 是一个布尔代数。

2. T 是一致的当且仅当 $\mathscr{B}(T)$ 是非平凡的。

定义 1.1.6. 如果 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是布尔代数，$f:A\to B$ 映射，如果 f 满足：

(1) $f(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$，$f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$；

(2) $f(a_1+a_2) = f(a_1)+f(a_2)$，$f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$，$f(-a) = -f(a)$。

就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**同态**。

如果同态 f 是单射，就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**嵌入**。

如果 f 还是双射，就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**同构**。

如果 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，$A \subseteq B$，并且等同映射 $\mathrm{id} : A \to B$ 是一个嵌入（注意，这要求 $0, 1 \in A$ 并且 A 在 $\mathcal{B}$ 的运算下也是一个布尔代数），就称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的**子代数**。

例 1.1.7. 对任意集合 X，$\{X, \emptyset\}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数。

令 $B = \{T, F\}$，则 $f(T) = X$，$f(F) = 0$ 是到 $\mathcal{P}(X)$ 的嵌入，其中 $X \neq \emptyset$ 为任意非空集合。

今后，我们称 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数为**集合代数**，并且，我们会证明，任何布尔代数都同构于一个集合代数。

练习 1.1.8. 令 X 为任意集合，$Y \subseteq X$ 称为在 X 中是**余有穷的**，如果 $X - Y$ 是有穷集合。对任意集合 X，令 $B = \{Y \subseteq X \mid Y \text{是有穷的或余有穷的}\}$，则 $X, \emptyset \in B$。证明 B 对 $\cap, \cup, -$ 封闭，所以 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，是一个集合代数。

练习 1.1.9. 证明不存在基数为 3 的布尔代数。思考一下，一个有穷的布尔代数，其基数需要满足什么条件?

引理 1.1.10. *如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是布尔代数，$f : A \to B$ 映射，则以下命题等价：*

(1) f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的同态；

(2) 对任意 $a, b \in A$，$f(-a) = -f(a)$，$f(a + b) = f(a) + f(b)$；

(3) 对任意 $a, b \in A$，$f(-a) = -f(a)$，$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$；

(4) $f(0) = 0$，$f(1) = 1$，并且 $f(a + b) = f(a) + f(b)$，并且如果 $a \cdot b = 0$，则 $f(a \cdot b) = 0$。

证明. $\square$

作为简单的推论，请证明以下命题：

练习 1.1.11. 如果 $\mathscr{B}$ 是布尔代数，$A \subseteq B$ 为非空子集，则以下命题等价：

(1) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的子代数；

(2) A 对 $+, -$ 封闭；

(3) A 对 $\cdot, -$ 封闭。

引理 1.1.12. *如果 $\mathscr{B}$ 是布尔代数，Γ 是一族 $\mathscr{B}$ 的子代数，$\bigcap \Gamma$ 是 $\mathscr{B}$ 的子代数。*

定义 1.1.13. 假设 $\mathscr{B}$ 是布尔代数，$X \subseteq B$。

$$A = \bigcap \{C \mid X \subseteq C \wedge \mathscr{C} \text{ 是 } \mathscr{B} \text{ 的子代数}\} \tag{1.1}$$

是一个布尔代数，称为由 X **生成的**代数。

引理 1.1.14. *令 $\mathscr{B}$ 是布尔代数，$X \subseteq B$，以下命题等价*

(1) $\mathscr{A}$ 是 X 生成的布尔代数；

(2) $A = \bigcup_{n \in \omega} X_n$，其中 $X_0 = X$，

$$X_{n+1} = X \cup \{a + b \mid a, b \in X_n\} \cup \{a \cdot b \mid a, b \in X_n\} \cup \{-a \mid a \in X\}.$$

定义 1.1.15. 令 $\mathscr{B}$ 为任意布尔代数，对任意 $a, b \in B$，我们定义二元关系 $a < b$ 为 $\exists c(c \neq 0 \wedge a + c = b)$。$a \leq b$ 当且仅当 $a < b$ 或者 $a = b$。

例 1.1.16. 对任意布尔代数 $\mathscr{B}$，我们显然有以下事实：对任意 $a, b \in B$，

- $a \leq a + b$，$b \leq a + b$；
- $a \cdot b \leq a$，$a \cdot b \leq b$；
- 对任意 $a \in B$，$0 \leq a \leq 1$。