定理 1.3.58 (超穷递归定理)**.** *假设 $G : V \times V \times V \to V$ 为函数，则存在唯一的函数 $F : \mathbb{O} \to V$，它满足对任意序数 α，$F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha, u)$。*

注记 1.3.59. 我们首先对定理本身的形式做一点解释。

(1) G 相当于一个公式 $\phi(x, y, u, z)$，并且满足：给定集合 u，对任意集合 x, y 有唯一的集合 z 使得 $\phi(x, y, u, z)$ 成立。其中 u 是事先给定的一个参数，在很多情形下，定义不一定需要参数，所以 u 这一维不是必须的。

(2) 递归的含义在于，借助 G 定义的函数 F，它在每个序数 α 上的取值由它“前面”的取值所决定，或者说 $F(\alpha)$ 由 $F(0), F(1), \cdots$ 这些小于 α 的取值决定。这就是 $G(\alpha, F \restriction \alpha, u)$ 中 $F \restriction \alpha$ 所要表达的。这里还要提醒一下，虽然 F 是一个真类，但 $F \restriction \alpha$ 是集合，而这正是超穷递归定理使用替换公理的地方。

(3) 我们在 $F(\alpha)$ 的定义中还包含了 α，即令其等于 $G(\alpha, F \restriction \alpha, u)$，是为了明确表明 $F(\alpha)$ 的值跟 α 有关，但这并不是必须的，因为从集合 $F \restriction \alpha$ 中可以确定 α：α 是最小的不在函数 $F \restriction \alpha$ 的定义域中的序数。所以，G 可以是一个二元函数 $G(y, u) = z$，甚至是一元函数 $G(y) = z$，如果没用到参数的话。相应地，$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha, u)$，或者 $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$。

(4) 给定 u，$G(0, \emptyset, u) = z_0$ 是确定的，所以 $F(0) = G(0, \emptyset, u) = z_0$。这样我们就我们立刻可以计算

$$F(1) = G(1, \{(0, z_0)\}, u) = z_1 \tag{1.18}$$

$$F(2) = G(2, \{(0, z_0), (1, z_1)\}, u) = z_2 \tag{1.19}$$

等等。如果 λ 是极限序数，则

$$F(\lambda) = G(\lambda, \{(\alpha, z_\alpha) \mid \alpha < \lambda\}, u). \tag{1.20}$$

这表明，如果 α 确定了，我们总可以找到 $F(\alpha)$，而这就引出了证明的思路：对每一 α，我们都可以实际地构造一个函数 f_α，它的定义域为 $\alpha + 1$，并且满足对任意 $\beta < \alpha$，$f_\alpha(\beta) = G(\beta, f_\alpha \restriction \beta, u)$。我们可以将 f_α 看做对要定义的 F 的“近似”。显然，对任意 $\beta < \alpha$，$f_\beta \subseteq f_\alpha$，即这些近似是相容的，而 F 就是这些近似的极限。

证明. 对任意序数 α，令一个α-近似为满足以下条件的序列 f_α：

（1）　$\mathrm{dom}(f_\alpha) = \alpha + 1$;

（2）　对所有的 $\beta \leq \alpha$，$f_\alpha(\beta) = G(\beta, f_\alpha \upharpoonright \beta, u)$。

我们首先需要证明，如果这样的近似存在，它们一定是相容的，即：

> 如果 f_α, f_β 是近似, 则对任意 $\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$, 一定有 $f_\alpha(\gamma) = f_\beta(\gamma)$。

不妨假设 $\beta < \alpha$。我们对 $\gamma < \beta$ 做归纳。假设对任意 $\xi < \gamma$，已经有 $f_\alpha(\xi) = f_\beta(\xi)$。此时，我们有 $f_\beta \upharpoonright \gamma = f_\alpha \upharpoonright \gamma$。因此，

$$f_\beta(\gamma) = G(\gamma, f_\beta \upharpoonright \gamma, u) = G(\gamma, f_\alpha \upharpoonright \gamma, u) = f_\alpha(\gamma). \tag{1.21}$$

我们接下来利用超穷归纳证明以下命题：

> 对任意 α，存在唯一的 f_α。

假设对任意 $\beta < \alpha$，已经有了唯一的 f_β。如果

$$G(\alpha, \{f_\beta(\gamma) \mid \beta < \alpha, \gamma \leq \beta\}, u) = z_\alpha, \tag{1.22}$$

我们令 $f_\alpha = \bigcup\{f_\beta \mid \beta < \alpha\} \cup \{(\alpha, z_\alpha)\}$。利用前面的相容性，不难看出 f_α 是函数，而且 $\alpha \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$，并且对任意 $\beta \leq \alpha$，$f_\alpha(\beta) = G(\beta, f_\alpha \upharpoonright \beta, u)$。所以 f_α 是 α-近似。最后，利用归纳不难证明 f_α 是唯一的。

最后，我们令 $F = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{O}} f_\alpha$。请读者证明 F 是我们所需要的函数。 □

例 1.3.60. 令 $\phi(x, y)$ 表示以下公式：

$$y = \bigcup\{\mathcal{P}(z) \mid z \in \mathrm{Img}(x)\}. \tag{1.23}$$

其中 $\mathrm{Img} : V \to V$ 是这样的函数：

$$\mathrm{Img}(x) = \begin{cases} \mathrm{ran}(x) & \text{如果 } x \text{ 是函数;} \\ \emptyset & \text{否则。} \end{cases} \tag{1.24}$$

不难验证对任意 x，有唯一的 y 使得 $\phi(x, y)$ 成立。令 $G(x) = y$ 为相应的函数，定义 $F : \mathbb{O} \to V$ 为：$F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$，则对任意 α，$F(\alpha) = V_\alpha$。

公理 1 到 8 组成的公理系统称为 ZF,即所谓的“策梅罗- 弗兰克尔（Zermelo-Fraenkel）系统”。

1.4　序数算术

序数是自然数概念的推广，序数上也可以自然地定义算术运算。正如自然数上运算是用递归方法定义的，序数上的运算可以应用超穷递归定义。

1.4.1　加法

定义 1.4.1. 对所有序数 β,

（1）$\beta + 0 = \beta$;

（2）对任意序数 α，$\beta + (\alpha + 1) = (\beta + \alpha) + 1$;

（3）对任意不为 0 的极限序数 α，$\beta + \alpha = \bigcup\{\beta + \gamma \mid \gamma < \alpha\}$。

我们来看看在这里，递归定理是如何运用的：考虑函数

$$G(x,u) = \begin{cases} \bigcup\{S(z) \mid z \in \mathrm{Img}(x)\} & \text{如果 } x \neq \emptyset \\ u & \text{否则。} \end{cases}$$

根据递归定理，存在函数 $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$，$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha, u)$。更为具体地，

$$\begin{cases} F(0,\beta) = G(F \restriction \emptyset, \beta) = G(\emptyset, \beta) = \beta; \\ F(\alpha+1,\beta) = G(F \restriction (\alpha+1), \beta) = F(\alpha,\beta) + 1, \quad \text{对任意 } \alpha \\ F(\alpha,\beta) = G(F \restriction \alpha, \beta) = \bigcup\{F(\gamma,\beta) \mid \gamma < \alpha\}, \text{对极限序数 } \alpha \end{cases}$$

例 1.4.2. 根据序数加法的定义，我们有：

(1) $(\beta + 1) + 1 = \beta + 2$,　$(\beta + 2) + 1 = \beta + 3$,

(2) $\omega + \omega = \sup\{\omega + n \mid n < \omega\}$,

(3) 与此相对照, $m + \omega = \sup\{m + n \mid n < \omega\} = \omega$。因此, $\omega + m \neq m + \omega$!

(4) $1 \neq 2$，但是 $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$。

引理 1.4.3. （*1*）如果 α_1, α_2 和 β 是序数，则 $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$ 当且仅当 $\alpha_1 < \alpha_2$；

（*2*）对所有的序数 α_1, α_2 和 β，$\beta + \alpha_1 = \beta + \alpha_2$ 当且仅当 $\alpha_1 = \alpha_2$；

（*3*）对所有的序数 α, β, γ，$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$。

证明.（1）我们首先对 α_2 应用超穷归纳证明：$\alpha_1 < \alpha_2$ 蕴涵 $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$。假设 $\alpha_1 < \alpha_2$，并且对任意 $\delta < \alpha_2$，$\alpha_1 < \delta$ 蕴涵着 $\beta + \alpha_1 < \beta + \delta$。如果 $\alpha_2 = \delta + 1$ 是后继序数，则 $\alpha_1 \leq \delta$，因此由归纳假设，$\beta + \alpha_1 \leq \beta + \delta < (\beta + \delta) + 1 = \beta + (\delta + 1) = \beta + \alpha_2$。如果 α_2 是极限序数，则 $\alpha_1 + 1 < \alpha_2$，所以 $\beta + \alpha_1 < (\beta + \alpha_1) + 1 = \beta + (\alpha_1 + 1) \leq \sup\{\beta + \delta \mid \delta < \alpha_2\} = \beta + \alpha_2$。反之，假设 $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$。由于 $\alpha_2 \leq \alpha_1$ 蕴涵着 $\beta + \alpha_2 \leq \beta + \alpha_1$，所以此时只能有 $\alpha_1 < \alpha_2$。

（2）由（1）可得。

（3）见习题1.5.29。 □

1.4.2　乘法

以下定义序数的乘法。

定义 1.4.4. 所有序数 β，

（1）$\beta \cdot 0 = 0$;

（2）对任意序数 α，$\beta \cdot (\alpha + 1) = \beta \cdot \alpha + \beta$;

（3）对任意不为 0 的极限序数 α，$\beta \cdot \alpha = \sup\{\beta \cdot \gamma \mid \gamma < \alpha\}$。

例 1.4.5. 根据序数乘法的定义，我们有：

(1) $\beta \cdot 1 = \beta \cdot 0 + \beta = \beta$;

(2) $\beta \cdot 2 = \beta \cdot 1 + \beta = \beta + \beta$;

(3) $\beta \cdot \omega = \sup\{\beta \cdot n \mid n \in \omega\} = \sup\{\beta, \beta + \beta, \cdots\}$;

(4) $1 \cdot \alpha = \alpha$，但这并非显然，需要归纳证明。

(5) $2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n \mid n \in \omega\} = \omega$，因此 $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$。

1.4.3 幂

最后，我们定义序数的幂。

定义 1.4.6. 所有序数 β，

（1）$\beta^0 = 1$；

（2）对任意序数 α，$\beta^{\alpha+1} = \beta^\alpha \cdot \beta$；

（3）对任意不为 0 的极限序数 α，$\beta^\alpha = \sup\{\beta^\gamma \mid \gamma < \alpha\}$。

例 1.4.7. 根据序数幂的定义，我们有：

(1) $\beta^1 = \beta$，$\beta^2 = \beta \cdot \beta$；

(2) $\beta^\omega = \sup\{\beta^n \mid n \in \omega\}$，特别地，$1^\omega = 1, 2^\omega = 3^\omega = \omega$，对任意 $n \in \omega$，$n^\omega = \omega$。但是 $\omega^\omega = \sup\{\omega^n \mid n \in \omega\} > \omega$。

1.4.4 序数的正则展开

以下我们讨论序数算术的一些基本性质。

引理 1.4.8. 对任意序数 α, β，

$$\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta < \beta\}.$$

证明. 施归纳于 β。当 $\beta = 0$ 时显然。如果 $\beta = \gamma + 1$ 为后继序数，则

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \alpha + (\gamma + 1) \\
&= (\alpha + \gamma) + 1 \\
&= \alpha + \gamma \cup \{\alpha + \gamma\} \\
&= \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta < \gamma\} \cup \{\alpha + \gamma\} \\
&= \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta < \beta\}
\end{aligned}$$

当 β 为极限序数时，

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma)\\ &= \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha\cup\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\})\\ &= \alpha\cup\bigcup_{\gamma<\beta}\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\}\\ &= \alpha\cup\{\alpha+\delta \mid \delta<\beta\}\end{aligned}$$

□

推论 1.4.9. 对任意序数 α, β，如果 $\alpha<\beta$，则存在唯一的序数 γ 使得 $\alpha+\gamma=\beta$。

证明. 令 $F_\alpha(\gamma)=\alpha+\gamma$，则根据引理 1.4.3（1），$F_\alpha$ 是"增函数"，所以总存在 δ 使得 $F_\alpha(\delta)\notin\beta$，而对于这样的 δ，必有 $\beta\leq\alpha+\delta$。如果 $\beta=\alpha+\delta$，则命题已经得证。否则，根据以上引理以及 $\alpha<\beta$ 的假设，$\beta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\delta\}$，这样 β 就有所希望的形式了。 □

引理 1.4.10. 对任意序数 α, β，

$$\alpha\cdot\beta=\{\alpha\cdot\xi+\eta \mid \xi<\beta \text{并且} \eta<\alpha\}. \tag{1.25}$$

证明. 施归纳于 β。 □

推论 1.4.11. 对任意序数 α, β，$1\leq\alpha<\beta$，存在唯一的序数的有序对 (ξ, η)，$\eta<\alpha$ 并且 $\beta=\alpha\cdot\xi+\eta$。

证明. 存在性是由引理给定的。对于唯一性，不妨假设

$$\alpha\cdot\xi_1+\eta_1=\alpha\cdot\xi_2+\eta_2=\beta. \tag{1.26}$$

首先看到一定有 $\xi_1=\xi_2$，否则以上等式就不能成立（验证之），而如果 $\xi_1=\xi_2$，则根据加法运算的性质，$\eta_1=\eta_2$。 □

康托曾经证明，任意一个非 0 的序数 β，都可以唯一地表示为 ω 的“多项式”展开：

$$\beta = \omega^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1} \tag{1.27}$$

这个展开式称为β 的**康托正则形式**。以下定理是这一结果的更为一般的形式。

定理 1.4.12. 令 α, β 为序数，并且 $1 < \alpha$ 而 $1 \leq \beta$，则 β 可以唯一地表示为以下形式：

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}, \tag{1.28}$$

其中 $k \in \omega$，δ_i 和 γ_i 都是序数，并且 $\gamma_0 > \cdots > \gamma_{k-1}$。

证明. 施归纳于 β。$\beta = 1$ 时显然。假设 $\beta > 1$ 并且对任意 $\eta < \beta$，η 都有以上展开式。定义 $\Gamma = \{\gamma \mid \alpha^\gamma \leq \beta\}$。以下证明 Γ 有最大元。否则的话，令 $\gamma_0 = \bigcup \Gamma$，则 γ_0 为极限序数并且 $\gamma_0 \notin \Gamma$。但是

$$\alpha^{\gamma_0} = \bigcup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \gamma_0\} = \bigcup\{\alpha^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq \beta, \tag{1.29}$$

这样就有 $\alpha^{\gamma_0} \leq \beta$，从而 $\gamma_0 \in \Gamma$，矛盾。现在令 γ_0 为 Γ 的最大元，则根据以上推论，存在 β_1 使得 $\beta = \alpha^{\gamma_0} + \beta_1$，其中 $\delta_0 < \alpha$。如果 $\beta_1 = 0$，则已有结果。若 $\beta_1 > 0$，则由归纳假设，$\beta_1 = \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}$，同样得到 β 的展开式，这就证明了存在性。唯一性见习题 1.5.34。 □

1.4.5　序数与良序集

定义 1.4.13. 令 $(L, <)$ 为线序，S 是 L 的子集，如果对每一 $a \in S$，所有 L 中小于 a 的元素也都属于 S，就称 S 是 L 的**前段**。显然空集和 L 都是 L 的前段，不等于 L 的前段称为**真前段**。

对任意良序集 W，任意 $w \in W$，集合 $\{x \in W \mid x < w\}$ 都是 W 的前段。任何自然数都是 $\mathbb{N}$ 的一个前段；而且，每一自然数的前段是一个小于它的自然数。反过来，任何真前段都可表示为以上形式的集合。

练习 1.4.14. 如果 $(W, <)$ 是良序集并且 S 是 W 的真前段，则存在 $a \in W$，满足 $S = \{x \in W \mid x < a\}$。注意，这对线序集不一定成立。

今后，如果 $(W,<)$ 是良序集，$a \in W$，我们就称

$$W[a] = \{x \in W \mid x < a\} \tag{1.30}$$

为由 a 给定的 W 的真前段。如果 a 是 W 的最小元，则 $W[a] = \emptyset$。

定义 1.4.15. 线序集 $(L,<)$ 到其自身的函数 f，如果满足 $x_1 < x_2$ 蕴涵 $f(x_1) < f(x_2)$，就称 f 是（严格）增函数。注意，增函数是一一的，并且是 $(L,<)$ 到 $(\mathrm{ran}(f),<)$ 的同构。

练习 1.4.16. 如果 $(W,<)$ 是良序集，$f : W \to W$ 是增函数，则对所有的 $x \in W$，都有 $f(x) \geq x$。

练习 1.4.17. （1）没有良序集同构于自己的真前段；
（2）任意良序集都只有一个自同构，即等同函数；
（3）如果 W_1 和 W_2 是同构的良序集，则它们之间的同构是唯一的。

良序集都是"可比较的"。

定理 1.4.18. 如果 $(W_1,<_1)$ 和 $(W_2,<_2)$ 为良序集，则以下条件恰有一个成立：

（*1*）W_1 与 W_2 同构；

（*2*）W_1 与 W_2 的前段同构；

（*3*）W_2 与 W_1 的前段同构。

证明. 定义 $f \subseteq W_1 \times W_2$，

$$f = \{(x,y) \in W_1 \times W_2 \mid W_1[x]\text{同构于}W_2[y]\}. \tag{1.31}$$

首先，f 是一一函数：根据引理1.4.16，如果 $W_1[x_1]$ 和 $W_1[x_2]$ 都同构于 $W_2[y]$，则必有 $x_1 = x_2$。这就说明如果 $(x_1,y) \in f$，$(x_2,y) \in f$，则 $x_1 = x_2$，即 f 是函数；同理可证 f 是单射。

其次，$x <_1 x'$ 蕴涵 $f(x) <_2 f(x')$：如果 h 是 $W_1[x']$ 到 $W_2[f(x')]$ 的同构，则 $h \restriction W_1[x]$ 是到 $W_2[h(x)]$ 的同构，显然 $f(x) = h(x) <_2 f(x')$。这个推理同样证明了 $\mathrm{dom}(f)$ 是 W_1 的前段。因为如果 $x' \in \mathrm{dom}\, f$，而 $x <_1 x'$ 的话，则根据以上分析，x 也属于 $\mathrm{dom}(f)$。同样，由类似的论证，还可说明 $\mathrm{ran}(f)$

也是 W_2 的前段。所以 f 是其定义域，W_1 的一个子集，到它的值域，W_2 的一个子集的同构。并且 $\mathrm{dom}(f)$ 是 W_1 的前段，$\mathrm{ran}\, f$ 是 W_2 的前段。因此我们可以考虑以下三种情况：

- 假设 $\mathrm{dom}(f) \neq W_1$，则 $\mathrm{dom}(f) = W_1[w]$ 是 W_1 的真前段。我们证明此时 $\mathrm{ran}(f) = W_2$，因此情况 (c) 成立。反设 $\mathrm{ran}(f) \neq W_2$，则存在 $w' \in W_2$，$\mathrm{ran}(f) = W_2[w']$。因此 f 是 $W_1[w]$ 与 $W_2[w']$ 同构。这样 $w \in \mathrm{dom}\, f = W_1[w]$，$w < w$，矛盾。
- 类似地，如果 $\mathrm{ran}(f) \neq W_2$，则 $\mathrm{ran}\, f$ 是 W_2 的真前段，且 $\mathrm{dom}(f) = W_1$；此时情况 (b) 成立。
- 如果以上情况都不成立，则 $\mathrm{dom}(f) = W_1$ 而 $\mathrm{ran}(f) = W_2$，f 是 W_1 到 W_2 的同构，情况 (a) 成立。

由推论1.4.17可知，三种情况至多有一种成立。 □

定理 1.4.19. *每个良序集 X 都同构于一个唯一的序数 α。这个唯一的序数称为 X 的序型，记作 $\mathrm{ot}(X)$。*

证明. 令 $(W, <)$ 为良序集。令 $A = \{a \in W \mid 存在序数\alpha, W[a]同构于\alpha.\}$；由于两个不同的序数不可能同构，所以与 $W[a]$ 同构的序数是唯一的，我们表示为 α_a。

定义 $S = \{\alpha_a \mid a \in A\}$。根据替换公理 S 是集合，并且是序数的集合，因此以 $\in$ 为良序。假设 $\gamma \in \alpha_a \in S$，令 h 为 $W[a]$ 与 α_a 之间的同构，而 c 为 $h^{-1}(\gamma)$，则 $h \upharpoonright c$ 是 $W[c]$ 与 γ 之间的同构，所以 $\gamma \in S$。这也就证明了 S 是一个序数。记 $S = \alpha$。

接下来我们证明 A 是 W 的前段。假设 $a \in A$ 且 $b < a$，令 h 为 $W[a]$ 与 α_a 之间的同构，则 $h \upharpoonright W[b]$ 是 $W[b]$ 到 α_a 的前段 β 之间的同构，序数的前段是个序数，所以 $\beta = \alpha_b$。这就证明了 $b \in A$，而且 $\alpha_b < \alpha_a$。因此，或者 $A = W$ 或者存在 $c \in W$，$A = W[c]$。

现在定义函数 $f : A \to \alpha$ 为：$f(a) = \alpha_a$。显然 f 是 $(A, <)$ 到 α 的同构。如果 $A = W[c]$，则 $c \in A$，矛盾。所以 $A = W$，而 f 是 $(W, <)$ 到 α 的同构。 □

1.5 习题

1.5.1. 证明以下关于集合运算的性质。

子集的性质：对任意集合 X，Y，Z：

（1）$\emptyset \subseteq X$；

（2）$X \subseteq X$；

（3）如果 $X \subseteq Y$ 并且 $Y \subseteq X$，则 $X = Y$；

（4）如果 $X \subseteq Y$ 并且 $Y \subseteq Z$，则 $X \subseteq Z$。

交换律：

$$\begin{aligned} X \cup Y &= Y \cup X \\ X \cap Y &= Y \cap X \end{aligned} \tag{1.32}$$

结合律：

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cup Z &= X \cup (Y \cup Z) \\ (X \cap Y) \cap Z &= X \cap (Y \cap Z) \end{aligned} \tag{1.33}$$

分配律：

$$\begin{aligned} X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \end{aligned} \tag{1.34}$$

德摩根律：

$$\begin{aligned} X - (Y \cup Z) &= (X - Y) \cap (X - Z) \\ X - (Y \cap Z) &= (X - Y) \cup (X - Z) \end{aligned} \tag{1.35}$$

1.5.2. 令 X 和 Y 为任意集合，则 X 和 Y 的对称差（symmetric difference）定义为：

$$X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$

证明以下等式：

$$\begin{aligned} & X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - Z \\ & X - Y = \emptyset \quad \text{当且仅当} \quad X \subseteq Y \\ & X \triangle X = \emptyset \\ & X \triangle Y = Y \triangle X \\ & (X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z) \end{aligned}$$

1.5.3. 证明如果 $F \in \mathscr{F}$，则 $\bigcap \mathscr{F} \subseteq F \subseteq \bigcup \mathscr{F}$。

1.5.4. 设 $\mathscr{F}$ 为集合，X, Y, Z 为任意集合，证明：

（1）如果对任意集合 $F \in \mathscr{F}$ 都有 $X \subseteq F$，则 $X \subseteq \bigcap \mathscr{F}$；

（2）如果对任意集合 $F \in \mathscr{F}$ 都有 $F \subseteq X$，则 $\bigcup \mathscr{F} \subseteq X$；

（3）$X \subseteq Y$ 当且仅当 $X \cap Y = X$ 当且仅当 $X \cup Y = Y$ 当且仅当 $X - Y = \emptyset$；

（4）$X \subseteq Y \cap Z$ 当且仅当 $X \subseteq Y$ 且 $X \subseteq Z$；

（5）$Y \cup Z \subseteq X$ 当且仅当 $Y \subseteq X$ 且 $Z \subseteq X$；

（6）$X - Y = (X \cup Y) - Y = X - (X \cap Y)$；

（7）$X \cap Y = X - (X - Y)$；

（8）$X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$；

（9）$X = Y$ 当且仅当 $X \triangle Y = \emptyset$。

1.5.5. 证明如果 $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$，则

$$\bigcap \mathscr{F} \cap \bigcap \mathscr{G} \subseteq \bigcap (\mathscr{F} \cap \mathscr{G}). \tag{1.36}$$

举例说明：（1）条件 $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ 是必不可少的，（2）$\subseteq$ 不能换成 $=$。

1.5.6. 如果 X 是集合。定义 $-X = \{x \mid x \notin X\}$，证明 $-X$ 不是集合。

1.5.7. 证明对任意集合 X，$\mathscr{P}(X) \subseteq X$ 不成立，特别地，对任意 X，$\mathscr{P}(X) \neq X$。这再次证明了"所有集合的集合"不存在。[提示：令 $Y = \{u \in X \mid u \notin u\}$；$Y \in \mathscr{P}(X)$，但是 $Y \notin X$。]

1.5.8. 对集公理、并集公理和幂集公理都可替换为较弱的形式：

对任意 a 和 b，存在一个集合 Y 满足 $a \in Y$ 并且 $b \in Y$。 (弱对集公理)

对任意集合 X，存在集合 Y 满足如果存在 $z \in X$ 使得 $u \in z$，则 $u \in Y$。 (弱并集公理)

对任意集合 X，存在集合 Y 满足如果 $u \subseteq X$，则 $u \in Y$。 (弱幂集公理)

用以上弱形式的公理证明对集、并集和幂集公理。[提示：仍用分离公理模式。]

1.5.9. 如果 $A \in V$，则 $\in$ 是 A 上的良基关系。

不过，我们不能证明以上命题的逆命题成立。

1.5.10. $x = \{y\}$，而 $y = \{x\}$，并且 $x \neq y$。证明：$y \notin V$，但 $\in$ 在 y 上是良基的，因为它是个空关系。

1.5.11. 如果 A 是传递集，并且 $\in$ 是 A 上的良基关系，则 $A \in V$。

1.5.12. 令 α 为序数。

1. 如果 $\alpha > 0$，则

   (a) 外延公理在 V_α 中成立，即：对任意 $X, Y \in V_\alpha$，$X = Y$ 当且仅当对任意 $a \in V_\alpha$，$a \in X$ 当且仅当 $a \in Y$。

   (b) 分离公理在 V_α 中成立，即：

1.5.13. 思考以下问题，尽可能严格地理解问题并找到答案。

1. 如果 $\alpha > 0$，则

   (a) 外延公理在 V_α 中成立，即：对任意 $X, Y \in V_\alpha$，$X = Y$ 当且仅当对任意 $a \in V_\alpha$，$a \in X$ 当且仅当 $a \in Y$。

   (b) 基础公理在 V_α 中成立。即，对任意 $X \in V_\alpha$，如果 X 非空，则存在 $x \in V_\alpha$，$x \in X$ 并且 $x \cap X = \emptyset$。

   (c) 并集公理在 V_α 中成立。即，如果 $X \in V_\alpha$，则 $\bigcup X \in V_\alpha$。

2. 如果 $\alpha > 0$ 并且是极限序数，则

   (a) 分离公理在 V_α 中成立，即：给定公式 $\phi(x)$，对任意 $X \in V_\alpha$，存在 $Y \in V_\alpha$，$Y = \{x \in V_\alpha \mid x \in X \wedge \phi^{V_\alpha}(x)\}$。其中，$\phi^{V_\alpha}(x)$ 可以理解为将 ϕ 中的量词都限制到 V_α 上。例如，如果 $\phi(x)$ 是 $\exists y \psi(x, y)$，则 $\phi^{V_\alpha}(x)$ 就是 $\exists y \in V_\alpha \psi^{V_\alpha}(x, y)$。

   (b) 对集公理在 V_α 中成立。即，对任意 $x, y \in V_\alpha$，$\{x, y\} \in V_\alpha$。

(c) 幂集公理在 V_α 中成立。即，对任意 $X \in V_\alpha$，$\mathcal{P}(X) \in V_\alpha$。

3. 如果 $\alpha < \omega$，则无穷公理在 V_α 中成立。即，V_α 中存在归纳集。

4. 思考一下，以上条件是否能让 V_α 满足替换公理？如果要让 V_α 满足替换公理，α 要满足哪些性质？设想一个 V_κ，使得无穷公理和替换公理都成立。

下面的两个命题给出了两个良序集"相加"和"相乘"的直观。我们在下一节会看到，序数的加法和乘法恰好刻画了这样的直观。

1.5.14. 令 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 为良序集，并且 $W_1 \cap W_2 = \emptyset$，

(1) 证明如下定义的 $W = W_1 \cup W_2$ 上的关系 $<$ 是良序：

$$\begin{aligned} u < v \text{当且仅当} \quad & u, v \in W_1 \wedge u <_1 v \\ & \text{或者 } u, v \in W_2 \wedge u <_2 v \\ & \text{或者 } u \in W_1, v \in W_2 \end{aligned}$$

(2) 如果 W_1, W_2 分别与 α_1, α_2 同构，则 W 与 $\alpha_1 + \alpha_2$ 同构。(3) 类似地，给定 W_1, W_2 分别与 α_1, α_2 同构，定义一个良序集 $(W, <)$ 与 $\alpha_1 \times \alpha_2$ 同构。

1.5.15. $(W_1, <_1), (W_2, <_2)$ 是良序集，$W_1 \cap W_2 = \emptyset$。令 $< = <_1 \cup <_2 \cup W_1 \times W_2$。证明：

(1) $W_1 \times W_1$，$W_2 \times W_2$ 和 $W_1 \times W_2$ 两两不交。

(2) $<$ 是 $W_1 \cup W_2$ 上的良序关系。

(3) 如果 $W_2 \neq \emptyset$，w_2 是 W_2 的最小元，则 W_1 与 $W_1 \cup W_2[w_2]$ 同构。

1.5.16. W 是良序集，$w_1, w_2 \in W$，则

(1) $W[w_1]$ 与 $W[w_2]$ 同构当且仅当 $w_1 = w_2$；

(2) $W[w_1]$ 是 $W[w_2]$ 的前段当且仅当 $w_1 \leq w_2$。

1.5.17. 如果 $(L, <)$ 是线序集，S 是 L 的前段，是否一定存在 a 使得 $S = \{x \mid x < a\}$？

1.5.18. 集合 X 是传递集当且仅当 $X \subseteq \mathcal{P}(X)$，当且仅当 $\bigcup X \subseteq X$。

1.5.19. 以下命题哪些为真？证明之。

(1) 如果 X, Y 是传递集，则 $X \cup Y$ 是传递集；

(2) 如果 X, Y 是传递集，则 $X \cap Y$ 是传递集；

(3) 如果 X 是传递集，而 $Y \in X$，则 Y 是传递集。

(4) 如果 X 是传递集，而 $Y \subseteq X$，则 Y 是传递集。

(5) 如果 X 是传递集且 $S \subseteq \mathcal{P}(X)$，则 $X \cup S$ 是传递集。

1.5.20. 如果所有 $Y \in X$ 是传递集，则 $\bigcup X$ 是传递集。

1.5.21. 序数 α 是自然数当且仅当 α 的所有非空子集都有最大元。

1.5.22. α, β 是序数，$\beta < \alpha$，证明：如果任给 $\gamma < \alpha$，都有 $\gamma \leq \beta$，则 $\alpha = \beta + 1$。

1.5.23. 证明极限序数的以下性质：

(1) 如果 α 同构于良序集 W，则 α 是极限序数当且仅当 W 没有最大元。

(2) 如果 α 是极限序数，$\beta < \alpha$，则 $\beta + 1 < \alpha$。

1.5.24. 对任意序数 α，证明：

(1) V_α 是传递集；

(2) $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$。

1.5.25. 证明对任意序数 β，

$$\{\alpha \in V_\beta \mid \alpha \text{ 是序数}\} = \beta.$$

1.5.26. 证明任何序数都可表示为 $\alpha + n$，其中 α 是 0 或极限序数，而 $n \in \omega$。并且这种表示是唯一的。

1.5.27. 证明：（1）$\omega + \omega^2 = \omega^2$；

（2）如果 $\omega^2 \leq \beta$，则 $\omega + \beta = \beta$。

1.5.28. 假设 $\omega \le \alpha$，而 $\alpha^2 \le \beta$，则 $\alpha + \beta = \beta$。

1.5.29. 用超穷归纳法证明序数加法的结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$，乘法对加法的分配律：$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha + \gamma$。

1.5.30. 如果 $\alpha < \beta$，则

（1）$\alpha + \gamma \le \beta + \gamma$，

（2）$\alpha \cdot \gamma \le \beta \cdot \gamma$，

而 $\le$ 不能替换为 $<$。

1.5.31. 一个序数 α 是极限序数当且仅当存在 β，$\alpha = \omega \cdot \beta$。

1.5.32. 证明 $(\omega \cdot 2)^2 \neq \omega^2 \cdot 2^2$。

1.5.33. 找到函数 $f : \omega \to \omega + \omega$ 和 $g : \omega + \omega \to \omega + \omega + \omega$ 满足：

(1) $\sup(f[\omega]) = \omega + \omega$，

(2) $\sup(g[\omega + \omega]) = \omega + \omega + \omega$，

(3) 但是如果令 $h = g \circ f$，却有 $\sup(h[\omega]) < \omega + \omega + \omega$。

1.5.34. 证明定理1.4.12中展开式的唯一性。

1.5.35. 证明对任意自然数 $n \ge 2$，定义**??**中的 f_n 是严格递增的。

1.5.36. 令 $\alpha < \beta < \gamma$ 为极限序数，$f : \alpha \to \beta$ 和 $g : \beta \to \gamma$ 是函数，并且 $\sup(f[\alpha]) = \beta$，$\sup(g[\beta]) = \gamma$。假设 g 是不严格递增函数，即对任意 $\delta, \eta \in \beta$，$\delta \le \eta$ 蕴涵 $g(\delta) \le g(\eta)$，同时令 $h = g \circ f$，证明：$\sup(h[\alpha]) = \gamma$。

1.5.37. 证明以下命题是选择公理的等价形式。

$$\forall x \exists \alpha \in \exists f (f \text{是函数} \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge x \subset \mathrm{ran}(f)).$$

1.5.38. 对任意集合 X，存在一个序数 $H(X)$，$H(X)$ 不与 X 的任何子集等势，并且是具有如此性质的最小序数。$H(X)$ 称为 X 的哈特格斯数（Hartogs number）。【提示：令 $W = \{w \subseteq X \mid w \text{ 上存在良序}\}$，令

$$H(X) = \{\alpha \mid \text{存在 } w \in W,\ \alpha \text{ 是与 } w \text{ 同构的唯一序数}\}. \tag{1.37}$$

证明 W 是集合，$H(X)$ 是序数。当然，还有其他的证明方法。

1.5.39. 利用习题1.5.38证明 $\mathbb{O}$ 是真类。除此之外，你还有其他方法证明这一点吗?