引理 3.4.18. 如果 κ 上有一个 κ 完全的、正则的非主超滤 U，则 κ 是马洛基数。

证明. κ 是可测的，所以它是不可达基数。我们需要证明小于 κ 的不可达基数构成一个平稳集。为此，我们需要两点：（1）小于 κ 的强极限基数是一个无界闭集；（2）小于 κ 的正则基数是平稳集。这两个集合的交是一个平稳集，它的元素是不可达基数。关于（1），$f(\lambda) = 2^\lambda$ 是 κ 上的连续共尾函数，它的不动点是 κ 的无界闭集，而每个不动点都是强不可达的。详细证明留给读者。

对于（2），我们只需证明小于 κ 的所有正则基数属于 U。否则，$\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) < \alpha\} \in U$。由于 U 是正则的，所以存在 $\lambda < \kappa$，$E = \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\} \in U$。对任意 $\alpha \in E$，令 $\{\alpha_\eta \mid \eta < \lambda\}$ 为严格递增的共尾序列，对任意 $\eta < \lambda$，存在 γ_η，$X_\eta = \{\alpha \in E \mid \alpha_\eta = \gamma_\eta\} \in U$。这是因为，对每一 $\eta < \lambda$，我们可以定义函数：$h_\eta : E \to \kappa$ 为 $h_\eta(\alpha) = \alpha_\eta$。这是一个退缩函数函数，再次应用正则性质，就得到 γ_η 和 X_η。

这样的话，$X = \bigcap_{\eta<\lambda} X_\eta \in U$，但是 $X = \sup\{\gamma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ 是单点集，矛盾。 □

3.5　树与弱紧致基数

定义 3.5.1. 令 $(T, <)$ 为一个偏序集，如果对任意 $x \in T$，$\mathrm{Pred}(x) = \{y \mid y < x\}$ 在 $<$ 下是一个良序，就称 T 是一个树。

关于树，我们有以下术语。

定义 3.5.2. 令 $(T, <)$ 是一棵树。

(1) 对任意 $x \in T$，$\hbar_T(x) = \mathrm{ot}(\mathrm{Pred}(x))$ 称为 x 在 T 中的**高度**。

(2) 序数 $\tau = \bigcup\{\hbar_T(x) + 1 \mid x \in T\}$ 称为**树 T 的高度**，记作 $\hbar_T$。它是大于所有 T 中元素高度的最小序数。

(3) 对任意 $\beta < \hbar_T$，集合 $\{x \in T \mid \hbar_T(x) = \beta\}$ 称作 T 的第 β-层。

(3) T 的一个子集 $A \subseteq T$ 中的元素如果是两两不可比的，即对任意 $x, y \in A$，如果 $x \neq y$，则 $x \not< y$ 并且 $y \not< x$，就称 A 是 T 的**反链**。

(4) T 的任意线序子集都称为 T 的**链**。

(5) T 的链 B 如果还是向下封闭的，即对任意 $x \in B$，任意 $y < x$，都有 $y \in B$，就称 B 是 T 的**树枝**。

例 3.5.3. 对任意集合 X，任意基数 κ，$X^{<\kappa}$ 在 $\subset$ 关系下是一棵树，它的高度是 κ。如果 $X = \{0, 1\}$，$\kappa = \omega$，则 $2^{<\omega}$ 是高度为 ω 的二叉树。

练习 3.5.4. 假设 $(T, <)$ 是树，

(1) T 的每一层都是反链；

(2) 如果 B 是 T 的树枝，且 B 与 T 的某一层相交至多有一个交点。

练习 3.5.5. 令 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$，满足对任意 $s \in T$，任意 $n \in \mathrm{dom}(s)$，$s(n+1) < s(n)$。$(T, \subset)$ 是一棵树。证明 T 没有无穷枝，即不存在 $B \subseteq T$，使得 $|B| = \omega$。

定理 3.5.6 (寇尼希无穷引理)**.** *如果 T 是一棵高度为 ω 的树，并且 T 的每一层都是有穷的，则 T 有一个无穷枝，即序型为 ω 的枝。*

证明. 任取 x_0 属于 T 的第 0 层，并且集合 $\{y \in T \mid x_0 < y\}$ 是无穷的。这样的 x_0 一定存在，否则 T 的高度就是有穷的。假设 x_n 已经选出，它位于第 n 层。取 x_{n+1} 属于第 $n+1$ 层，使得 $x_n < x_{n+1}$ 并且 $\{y \in T \mid x_{n+1} < y\}$ 是无穷的。由于 x_{n+1} 的高度为 $n+1 < \omega$，而 $\hbar_T = \omega$，所以这样 $n+1$ 必定存在。$B = \{x_n \mid n < \omega\}$ 是 T 的无穷枝。（我们使用了选择公理。） □

一个很自然的问题是将寇尼希无穷引理推广到大于 ω 的基数。

定义 3.5.7. 令 T 为一棵树，如果 T 的高度为 κ，但 T 的每一层的基数都小于 κ，就称 T 为一棵**κ-树**。

所以，寇尼希无穷引理就是说每棵 ω-树都有序型为 ω 的枝。但这对第一个不可数基数 ω_1 不成立。

定理 3.5.8 (阿龙岑 (Aronszajn))**.** *存在一棵 ω_1-树 T，T 没有序型为 ω_1 的树枝。*

~~这个定理的证明有点复杂，我们略去不讲。~~

证明. 我们考虑 $T=\{f\in\omega^{\omega_1}\mid f$ 是单射$\}$，则 $(T,\subset)$ 是高度为 ω_1 的树。同时，T 没有序型为 ω_1 的枝：这是因为，如果 B 的序型是 ω_1，则 $\bigcup B$ 就是 ω_1 到 ω 内的单射，而这是不可能的。所以，T 离我们的要求只差每层都是至多可数的。为了实现这个条件，我们构造 T 的一棵子树，它的层对应着 T 的层，但每层都是可数的。

（1）对任意 $f,g\in T$，我们定义 $f\sim_F g$ 表示 f,g 只在有穷多个点处不想等。即：$\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$，并且 $|\{\alpha\in\omega_1\mid f(\alpha)\neq g(\alpha)\}|<\omega$。

事实 3.5.9. $\sim_F$ 是一个等价关系，并且，对任意 $f\in T$，f 的等价类 $[f]_{\sim_F}$ 是可数的。请读者证明这一点。

（2）我们接下来递归定义 T 中元素的序列 $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1}$，令其具有如下性质：

(I) 对任意 α，有无穷多自然数不在 f_α 的值域中，即 $|\omega-\mathrm{ran}(f_\alpha)|=\omega$。以保证构造总可以进行。

(II) 对任意 $\beta<\alpha$，$f_\alpha\restriction\beta\sim_F f_\beta$。

假设对任意 $\beta<\alpha$，f_β 已经定义。如果 $\alpha=\beta+1$，我们令 $f_\alpha=f_\beta\cup\{(\alpha,n)\}$，其中 $n\notin\mathrm{ran}(f_\beta)$。由性质 (I)，这样的 n 总是存在的。

如果 α 是极限序数。由于 $\alpha<\omega_1$ 是可数的，我们取 α 中严格递增的共尾序列 $\langle\alpha_n\in\alpha\mid n<\omega\rangle$。为了定义 f_α，我们递归定义序列：$\{(g_n,h_n,x_n)\mid n\in\omega\}$，使其满足：

(i) $g_n,h_n\in T$，$g_n\subseteq h_n\subseteq g_{n+1}$；

(ii) $x_n\subseteq\omega\wedge|x_n|<\omega$；

(iii) $\mathrm{ran}(h_n)\cap x_n=\emptyset$；

(iv) $g_n\sim_F h_n\sim_F f_{\alpha_n}$。

令 $g_0=h_0=f_{\alpha_0}$，$x_0=\emptyset$。首先，定义 g_{n+1} 为：

$$g_{n+1}=h_n\cup f_{\alpha_{n+1}}\restriction\{\beta\in[\alpha_n,\alpha_{n+1})\mid f_{\alpha_{n+1}}(\beta)\notin\mathrm{ran}(h_n)\cup x_n\}. \qquad (3.26)$$

注意到：g_{n+1} 是一个单射，这是因为 h_n 是单射，并且定义中将使得 $f_{\alpha_{n+1}}(\beta)$ 落入 $\mathrm{ran}(h_n)$ 的那些大于 α_n 的 β 去除了。

另外，$f_{\alpha_{n+1}} \upharpoonright \alpha_n \sim_F f_{\alpha_n} \sim_F g_n \sim_F h_n$，所以 $f_{\alpha_{n+1}}$ 限制到 α_n 上至多有有穷个点与 f_{α_n} 不同。对于 $\beta \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$，只有在这些不同的点上才可能使得 $f_{\alpha_{n+1}}(\beta)$ 可能落入 $\mathrm{ran}(h_n)$，否则 $f_{\alpha_{n+1}}$ 就不是单射了。再加上 x_n 是有穷的，所以我们在定义中至多移除有穷多个点，所以 g_{n+1} 的定义域是 α_{n+1} 减去有穷个元素。

其次，令 $h_{n+1} \supseteq g_{n+1}$，$\mathrm{dom}(h_{n+1}) = \alpha_{n+1}$，并且 $\mathrm{ran}(h_{n+1}) \cap x_n = \emptyset$。即，$h_{n+1}$ 补足 g_{n+1} 中缺失的有穷多个 β，同时保持值域与 x_n 不交。

最后，令 $x_{n+1} = x_n \cup \min(\omega - \mathrm{ran}(h_{n+1}))$。

最后的最后，令 $f_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} g_n$。首先，$f_\alpha$ 满足性质（I）：因为 $\bigcup_{n\in\omega} x_n$ 的基数为 ω，它的元素都不在 f_α 的值域中，因为它们都不在任何 g_n 中。其次，f_α 满足（II）：对任意 $\beta < \alpha$，存在 n，$f_\alpha \upharpoonright \beta = g_n \upharpoonright \beta \sim_F f_{\alpha_n} \upharpoonright \beta$。

（3）现在定义 $S = \{g \in T \mid \exists\alpha < \omega_1 (g \sim_F f_\alpha)\}$。我们需要证明 $(S, \subset)$ 是树：对任意 $g \in S$，根据性质（II），$\mathrm{Pred}(g) \subseteq S$，显然是个良序。由于对任意 $\alpha < \omega_1$，$\mathcal{h}_S(f_\alpha) = \alpha$，所以 S 的高度是 ω_1。同时，对任意 $\alpha < \omega_1$，S 的第 α 层 $T_\alpha = [f_\alpha]_{\sim_F}$，是可数的。因为 S 中的元素都是单射，S 没有序型为 ω_1 的树枝。 □

定义 3.5.10. 对任意基数 κ，如果任意 κ-树都有序型为 κ 的树枝，就称 κ 有树性质。

注记 3.5.11. 寇尼希无穷引理是说 ω 有树性质。阿龙岑定理 3.5.8则说 ω_1 没有树性质，定理中构造的反例，即一个没有序型为 ω_1 的树枝的 ω_1-树，被称为**阿龙岑树**。事实证明，具有树性质是一个大基数性质。

定义 3.5.12. 如果一个不可达基数 κ 有树性质，就称 κ 是**弱紧致基数**。

注记 3.5.13. 定义中我们要求 κ 是不可达的。事实上，像树性质这样的“紧致”性不能蕴涵不可达。不过如果 κ 有树性质，那么它在哥德尔的可构成集的宇宙 L 中是不可达的。

事实 3.5.14. 如果 κ 是弱紧致基数，则 κ 是不可达基数，也是马洛基数。

引理 3.5.15. 如果 κ 是可测基数，则 κ 是弱紧致基数。

证明. 我们已经知道 κ 是不可达基数了。现在证明 κ 有树性质。证明的方法与寇尼希无穷引理类似。令 $(T,<)$ 为 κ-树，显然 $|T|=\kappa$，所以不妨设 $T=\kappa$。为了区分 k 作为序数上的序和作为树的序，我们将 κ-树记作 $T=(\kappa,\prec)$，现在证明 T 有序型为 κ 的树枝。对任意 $\alpha\in\kappa$，我们令 $\mathrm{Succ}(\alpha)=\{x\in T\mid\alpha\preceq x\}$，令 $B=\{\alpha\in\kappa\mid\mathrm{Succ}(\alpha)\in U\}$，其中 U 是 κ-完全的非主超滤。

首先，B 是 T 中的一个链。假设 $\alpha,\beta\in B$，如果 $\alpha\not\prec\beta$ 并且 $\beta\not\prec\alpha$，则 $\mathrm{Succ}(\alpha)\cap\mathrm{Succ}(\beta)=\emptyset$，这与它们都属于 U 矛盾。

其次，对于任意 $\beta<\kappa$，B 与 T 的第 β 层相交不空。注意到树 T 可以分为两部分。β 以下的部分，可以表示为 $T_{<\beta}=\{x\in T\mid\hbar_T(x)<\beta\}$。由于 T 是 κ-树，这是小于 κ 个基数小于 κ 的集合的并，所以 $T_{<\beta}\notin U$。另一部分是 β 层及其以上的部分，可以表示为：$T_{\geq\beta}=\bigcup_{\hbar_T(x)=\beta}\mathrm{Succ}(x)$。$T_{\geq\beta}$ 作为 $T_{<\beta}$ 的补集，一定属于超滤 U。同时，它是小于 κ 个集合的并，所以必有一个 x 属于 β 层，$\mathrm{Succ}(x)\in U$，即 $x\in B$。 □

但从树性质看不出为什么弱紧致基数是紧致的。我们讨论弱紧致基数的一些等价的定义。

定理 3.5.16 (兰姆塞)**.** 令 n,k 都是自然数，对任意函数 $f:[\omega]^n\to k$，称作对自然数 n 元组的 k 染色，都存在一个无穷的集合 $H\subseteq\omega$，使得 $[H]^n$ 的元素在 f 下被染成同一种颜色，即 $f\restriction[H]^n$ 上是常值函数。这样的 H 常被称为是齐次的（*homogeneous*）。

证明. 我们对 n 做归纳。当 $n=1$ 时，这就是鸽笼原理。

现在令 $f:[\omega]^{n+1}\to k$ 为一个 k 染色。对任意自然数 $x\in\omega$，我们定义 $f_x:[\omega-\{x\}]^n\to k$ 为：对任意 $Y\subseteq\omega-\{x\}$ 并且 $|Y|=n$，$f_x(Y)=f(Y\cup\{x\})$。对任意 $x\in\omega$，f_x 是一个 n 元组的 k 染色。由于显然存在 ω 与 $\omega-\{x\}$ 的双射，所以我们可以将 f_x 看做 $[\omega]^n$ 上的染色。根据归纳假设，存在一个无穷的 $H_x\subseteq\omega-\{x\}$，H_x 在 f_x 下是齐次的。

接下来我们递归定义一个序列 (A_i,x_i)，使得对任意 $i\in\omega$，$A_{i+1}\subseteq A_i$，$x_i<x_{i+1}$。

首先，令 $x_0=0$，$A_0=\omega$。假设 x_i, A_i 已经定义。将 $f_{x_i}:[A_i-\{x_i\}]^n\to k$ 视为 $[\omega]^n$ 上的 k 染色，令 H_{x_i} 为它的无穷齐次集，则定义 $A_{i+1}=H_{x_i}$，$x_{i+1}=\min\{x\in H_{x_i}\mid x>x_i\}$。

注意到对任意 $i<\omega$，任意 $j<i$，$x_i\in A_{j+1}$，而后者是 f_{x_j} 的无穷齐次集，所以 $f_{x_i}:[\{x_j\mid j>i\}]^n\to k$ 是常值函数，令其函数值为 $c_i\in k$。

定义 $h:\{x_i\mid i\in\omega\}\to k$ 为 $h(x_i)=c_i$，这是一个 k 染色，因此有一个无穷的齐次集 H，即对任意 $x_i\in H$，$h(x_i)=c\in k$。接下来证明 $f\restriction[H]^{n+1}$ 是一个常值函数。

对任意 $(x_i,\cdots,x_{i+n})\in[H]^n$，$f(x_i,\cdots,x_{i+n})=f_{x_i}(x_{i+1},\cdots,x_{i+n})=h(x_i)=c$。 □

注记 3.5.17. 事实上，我们证明的结论略强于定理的表述：对任意无穷集 $X\subseteq\omega$，任意 $[X]^n$ 上的 k 染色，都存在一个齐次集。所以在一定意义上我们的证明不完全严格，因为在归纳假设中我们使用了这种更强的形式。这带来的好处是我们大幅减少了符号的复杂度，使证明的思想更为清楚。

兰姆塞定理是否可以推广到更大的基数也是一个自然的问题。事实再次证明这也是一个大基数性质。我们先证明一个引理。这个结果是定理 2.1.16的推广。那个定理是说，如果按照实数 $\mathbb{R}$ 上的大小关系 $<$ 排序，则 $\mathbb{R}$ 中不可能有序型为 ω_1 的序列。由于 $(\mathbb{R},<)$ 作为拓扑空间与 $(2^\omega,<_c)$ 是同胚的（其中 $<_c$ 是 2^ω 上的字典序），所以这实际上是说 2^ω 在字典顺序下不能有不可数的序列。

引理 3.5.18. *对任意基数 λ，如果 $<_c$ 是 2^λ 上的字典序，则 2^λ 在这个序下没有序型为 λ^+ 的严格递增或严格递减序列。*

证明. 反设 $A=\{x_\alpha\in 2^\lambda\mid\alpha<\lambda^+\}$ 为严格递增的序列，即 $x_\alpha<_c x_\beta$ 当且仅当 $\alpha<\beta$。（递减的情形类似。）

对任意 $\alpha<\lambda^+$，由于 $x_\alpha<x_{\alpha+1}$，所以存在 $\bar\alpha<\lambda$ 满足：

(1) $x_\alpha\restriction\bar\alpha=x_{\alpha+1}\restriction\bar\alpha$，

(2) $x_\alpha(\bar\alpha)=0$ 并且 $x_{\alpha+1}(\bar\alpha)=1$。

即 $\bar{\alpha}$ 是 x_α 与 $x_{\alpha+1}$ 的分叉点。对任意 $\gamma < \lambda$，我们令 $A_\gamma = \{x_\alpha \in A \mid \bar{\alpha} = \gamma\}$。$A_\gamma$ 是两两不交的，而且它们的并是 A。所以，必定有一个 $\gamma < \lambda$，$|A_\gamma| = \lambda^+$。令 $B = \{y_\beta \mid \beta < \lambda^+\}$ 为 A_γ 的一个枚举，并且 $y_\beta <_c y_\delta$ 当且仅当 $\beta < \delta$。B 中的元素为长度为 γ 的 0-1 序列。以上论证可以重复应用于 B，得到 $\eta < \gamma < \lambda$ 使得 $B_\eta = \{y_\beta \mid \bar{\beta} = \eta\}$ 的基数为 λ^+。这样就定义了序数上的无穷下降链，矛盾。 □

引理 3.5.19. *对任意基数 $\kappa > \omega_1$，如果任意 $[\kappa]^2$ 上的 2 染色 $f : [\kappa]^2 \to 2$，都存在基数为 κ 的齐次集，则 κ 是不可达基数。*

记法 3.5.20. 以上性质通常会记作 $\kappa \to (\kappa)^2$。更一般地，如果 κ 的 n 元组的 k 染色存在一个基数 λ 的齐次集，就记作

$$\kappa \to (\lambda)^n_k. \tag{3.27}$$

如果 $k = 2$，则下标可以省略。

证明.（1）κ 是正则几乎是显然的。如果 κ 可以划分为 λ 个互不相交的集合 $\{X_\beta \mid \beta < \lambda\}$，$\lambda < \kappa$ 并且所有 X_β 的基数都小于 κ。我们可以定义 $[\kappa]^2$ 上的染色 f 为：$f(\{\gamma, \delta\}) = 0$ 当且仅当它们属于同一个 X_β。这个染色的齐次集或者是某个 X_β，或者不包含于任何 X_β 并且与每个 X_β 至多有一个交点，基数都小于 κ。

（2）现在证明 κ 是强极限的。反设不是，令 $\lambda < \kappa$ 并且 $2^\lambda \geq \kappa$。所以存在 κ 到 2^λ 内的一一映射。令 $A = \{x_\alpha \in 2^\lambda \mid \alpha < \kappa\}$ 为这个映射的值域。我们如下定义 $[A]^2$ 上的一个 2-染色。对任意 $\alpha, \beta \in \kappa$，如果 $\alpha < \beta$ 蕴涵 $x_\alpha <_c x_\beta$，即对于最小的见证 $x_\alpha \neq x_\beta$ 的 $\delta < \lambda$，$x_\alpha(\delta) = 0$ 且 $x_\beta(\delta) = 1$，就令 $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$。反之，如果 x_α 与 x_β 的字典序与 α, β 作为序数的序相反，即 $x_\alpha(\delta) = 1$ 且 $x_\beta(\delta) = 0$，则令 $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$。

由题设 $\kappa \to (\kappa)^2$，令 H 为齐次集，$|H| = \kappa$，H 在 $<_c$ 下是 2^λ 的一个严格递增或严格递减的序列，其长度为 $\kappa > \lambda$，与引理3.5.18矛盾。 □

引理 3.5.21. *令 κ 是不可数基数，则以下命题等价：*

(1) κ 是弱紧致基数；

(2) $\kappa \to (\kappa)^2$。

证明.（略） □

3.6　习题

3.6.1. 如果 $\mathcal{F}$ 是 S 上的滤构成的一个 $\subseteq$-链，则 $\bigcup \mathcal{F}$ 是 S 上的滤。

3.6.2. 如果 F 是非主超滤，则任意 $X \in F$ 都是无穷的。因此任何非主超滤必是弗雷歇滤的扩张。

3.6.3. 如果 F 是 S 上的滤，而 $F' = \{X \subseteq S \mid S - X \notin F\}$，则 $F \subseteq F'$，并且 $F = F'$ 当且仅当 F 是超滤。

3.6.4. 假设 $X \subseteq S$，证明：

（1）　如果 F 是 S 上的滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的滤；

（2）　如果 F 是 S 上的超滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的超滤；

（3）　如果 F 是 X 上的滤，则 F 能扩张为 S 上的超滤。

3.6.5. 假设 S 是无穷的，则

（1）　存在 S 上的超滤 F，对任意 $X \in F$，$|X| = |S|$。这样的滤称为 S 上的**均匀超滤**（uniform ultrafilter）；

（2）　$\{F \mid F$ 是 S 上的均匀超滤$\} = \{F \mid F$ 是 S 上的非主超滤$\}$ 当且仅当 S 是可数的。

3.6.6. 令 κ 为不可数正则基数，举出一个例子，使得 $X = \{C_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是 κ 上的无界闭集的族，而 $\bigcap X = \emptyset$，但是 $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \kappa$。

3.6.7. 如果令 $Y_\alpha = \{\xi \in X_\alpha \mid \xi > \alpha\}$，则 $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$。

3.6.8. $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \cup \{\xi \mid \xi \leq \alpha\})$。

3.6.9. 证明不存在 ω 上非主超滤 F 使得 F 对对角线交封闭。

3.6.10. 如果 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤，则以下命题等价：

（1）　F 是非主滤；

（2）　$\{X \subseteq S \mid S - X$ 是有穷的$\} \subseteq F$；

（3）　F 的元素都是无穷的。

3.6.11. 如果 S 是无穷的，则 S 上的任何非主超滤都不是 $|S|^+$- 完全的。所以 ω 上的任何非主超滤都不是 σ-完全的。

3.6.12. 如果 F 是 S 上的非主超滤，并且是 $|S|$-完全的，则 F 是均匀超滤。

3.6.13. 一个不可数基数 κ 是可测的当且仅当 κ 上存在 κ 完全的非主超滤。证明任何可测基数都是不可达基数，即，都是正则和强极限的。

3.6.14. 如果 F 是 S 上的滤，并且令 $\mu = \sup\{\kappa \mid F$ 是 κ 完全的$\}$，则 μ 是正则基数，并且 F 是 μ-完全的。

3.6.15. 假设 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤。证明 F 是 κ-完全的当且仅当对任意 $\tau < \kappa$ 和任意划分 $\langle X_\xi \mid \xi < \tau \rangle$，总存在 $X_\xi \in F$。

3.6.16. 如果 $\alpha > \aleph_0$ 是正则基数，并且 $f : \alpha \to \alpha$ 是函数，则集合 $C = \{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

3.6.17. 假设 α 为极限序数，则：

（1）　α 上存在一个序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

（2）　如果 A 是一集极限序数，则用选择公理可以证明：存在序列 $\langle C_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ 满足：C_α 是 α 上的序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

3.6.18. $\{\alpha < \omega_1 \mid \omega^\alpha = \alpha\}$ 是 ω_1 上的无界闭集。

3.6.19. κ 上的无界闭集都是平稳集。

3.6.20. 令 κ 为不可数正则基数，$S \subseteq \kappa$，证明以下命题等价：

（1）　S 是平稳集；

（2）　对任意递减函数 $f : S \to \kappa$，存在序数 $\alpha < \kappa$，使得 $f^{-1}[\alpha]$ 在 κ 中无界。

3.6.21. 如果 κ 是不可达基数（它当然是不可数正则的），则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是强极限基数}\}$ 是 κ 上的无界闭集。

3.6.22. 如果 κ 是最小的不可达基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是强极限的奇异基数}\}$ 是 κ 上的无界闭集。

3.6.23. 假设 κ 是第 α 个不可达基数，而 $\alpha < \kappa$，证明 $X = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是正则的}\}$ 不是 κ 上的平稳集。

3.6.24. 一个无穷基数 κ 是**马洛基数**（Mahlo cardinal）当且仅当 κ 是不可达的并且 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是正则基数}\}$ 是 κ 上的平稳集。如果 κ 是马洛基数，则 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是不可达基数}\}$ 是 κ 上的平稳集，因此 κ 是第 κ 个不可达基数。

3.6.25. 如果 $\kappa = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ 是第 } \lambda \text{ 个不可达基数}\}$，证明 κ 不是马洛基数。

3.6.26. 如果 κ 是马洛基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是第 } \lambda \text{ 个不可达基数}\}$ 在 κ 中无界。