Homework

陈淇奥
21210160025

2021 年 10 月 8 日

Exercise 1 (1.3.22). 假设 X, Y 是传递集

1. $X \cap Y$，$X \cup Y$ 与 $\mathcal{P}(X)$ 是传递集
2. $X \cup \{X\}$ 是传递集
3. 如果 $\mathcal{T}$ 的元素都是传递集，则 $\bigcup \mathcal{T}$ 是传递集

证明.

1. 对于任意 $x \in X \cap Y$, 因为 X, Y 是传递集, 因此 $x \subseteq X$ 且 $x \subseteq Y$，于是 $x \subseteq X \cap Y$

   对于任意 $x \in X \cap Y$，因为 X 是传递集，因此 $x \subseteq X \subseteq X \cup Y$，于是 $x \subseteq X \cup Y$

   对于任意 $x \in \mathcal{P}(X)$，$x \subseteq X$。对于任意 $y \in x$，$y \in X$, 于是 $y \subseteq X$，因此 $x \subseteq \mathcal{P}(X)$
2. 对于任意 $x \in X \cup \{X\}$, 若 $x \neq X$, 则 $x \in X$，于是 $x \subseteq X \subset X \cup \{X\}$。若 $x = X$，则 $x \subset X \cup \{X\}$
3. 对于任意 $x \in \bigcup \mathcal{T}$，则存在 $Y \in \mathcal{T}$ 使得 $x \in Y$。由于 Y 传递, 于是 $x \subseteq Y \subseteq \bigcup \mathcal{T}$

□

Exercise 2 (1.3.27). 令 α, β 是序数

1. $\alpha \cap \beta$ 也是序数；（$\alpha \cup \beta$ 是序数吗）

2. $\alpha \cup \{\alpha\}$ 也是序数

3. 如果 $\beta \subseteq \alpha$ 并且 $\beta \neq \alpha$，则 $\beta \in \alpha$

证明. 1. 因为 $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$, 因此 $\in$ 在 $\alpha \cap \beta$ 上是良序。对于任意 $x \in \alpha \cap \beta$，有 $x \subseteq \alpha$ 且 $x \subseteq \beta$，因此 $x \subseteq \alpha \cap \beta$。

   $\alpha \cup \beta$ 是序数。由引理 1.3.28 我们知道 $\alpha < \beta$ 或 $\alpha = \beta$ 或 $\beta < \alpha$，于是 $\alpha \cup \beta = \beta$ 或 α，因此 $\in$ 在 $\alpha \cup \beta$ 上是良序，而且它也是良序

2. 因为 $\in$ 在 α 上是良序，而对于所有 $x \in \alpha$，自然有 $x \in \alpha$，因此 $\in$ 在 $\alpha \cup \{\alpha\}$ 上也是良序。而由前面的练习得到 $\alpha \cup \{\alpha\}$ 是传递的，因此是序数。

3. 考虑集合 $S = \{\gamma \in \alpha : \forall \eta \in \beta(\eta < \gamma)\}$，令 γ_0 是 S 中最小的元素，那么显然 $\beta \subseteq \gamma_0$。若 $\gamma_0 \neq \beta$，则存在 $x \in \gamma_0 \setminus \beta$，且 $\beta \subseteq x$，于是 γ_0 不是 S 中的最小元素，矛盾，因此 $\beta = \gamma_0 \in \alpha$

□

Exercise 3 (1.3.33). 如果 X 是序数的集合，则 $\bigcap X$ 和 $\bigcup X$ 都是序数

证明. 由于 $\in$ 在 X 的每个元素上都是良序，因此在 $\bigcap X$ 上是良序的。而对于任意 $x \in \bigcap X$，对于任意 $\alpha \in \bigcap X$ 都有 $x \in \alpha$，于是 $x \subseteq \alpha$，因此 $x \subseteq \bigcap X$，因此 $\bigcap X$ 是序数

由引理 1.3.28，$\in$ 在 $\bigcup X$ 良基。对任意 $x, y, z \in \bigcup X$，则存在 $\alpha, \beta, \gamma \in X$ 使得 $x \in \alpha, y \in \beta, z \in \gamma$，由引理 1.3.28，$x, y, z \in \sup\{\alpha, \beta, \gamma\} \in X$，而 $\in$ 在 $\sup\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 上是线序，因此 $\in$ 在 $\bigcup X$ 上是线序。

对任意 $x \in \bigcup X$，存在 $\alpha \in X$ 使得 $x \in \alpha$，于是 $x \subseteq \alpha$，因此 $x \subseteq \bigcup X$。因此 $\bigcup X$ 是序数 □

Exercise 4 (1.3.34). 对任意序数 α，α 是极限序数当且仅当 $\bigcup \alpha \notin \alpha$

证明. $\Rightarrow$。若 α 是极限序数且 $\bigcup \alpha \in \alpha$，则存在 $\beta \in \alpha$ 使得 $\beta = \bigcup \alpha$，即对于任意 $\gamma \in \alpha$ 都有 $\gamma \leq \beta$，因此 $\beta + 1 \notin \alpha$，因此 α 不是极限序数，矛盾。

$\Leftarrow$。若 α 不是极限序数，则存在一个序数 β 使得 $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$，于是 $\bigcup \alpha = \beta \in \alpha$，矛盾。 □

Exercise 5 (1.3.43). 利用超穷归纳法证明一下关于 V_α 的性质

1. 对所有 α，V_α 是传递集
2. 如果 $\alpha < \beta$，则 $V_\alpha \subseteq V_\beta$

证明. 1. $V_0 = V_\emptyset$ 是传递集

若 α 是后继序数且 V_α 是传递集，对于任意 $x \in \mathcal{P}(V_\alpha)$，$x \subseteq V_\alpha$，于是对于任意 $y \in x$，有 $y \in V_\alpha$，因为 V_α 传递，$y \subseteq V_\alpha$，因此 $x \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$

若 α 是极限序数且对所有 $\lambda < \alpha$，V_λ 都是传递集。对于任意 $x \in V_\alpha$，存在 $\beta < \alpha$ 使得 $x \in V_\beta$ 且 V_β 传递，于是 $x \subseteq V_\beta \subset \bigcup_{\lambda<\alpha} V_\lambda$，因此 V_α 传递

2. 对 β 做归纳

若 $\beta = 0$，则命题恒成立

若 $\beta = \gamma + 1$，因为 V_β 是传递集，因此由于 $V_\gamma \in \mathcal{P}(V_\gamma) = V_\beta$，有 $V_\gamma \subseteq V_\beta$。对任意 $\alpha < \gamma$，由归纳假设，$V_\alpha \subseteq V_\gamma \subseteq V_\beta$。因此对于任意 $\alpha < \beta$ 都有 $V_\alpha \subseteq V_\beta$

若 β 是极限序数，则 $V_\beta = \bigcup_{\lambda<\beta} V_\lambda$。因此对于任意 $\alpha < \beta$, 都有 $V_\alpha \subseteq \bigcup_{\lambda<\beta} V_\lambda = V_\beta$

$\square$

Exercise 6 (1.3.45). 证明以下命题

1. $V_\alpha = \{x \in V \mid \text{rank}(x) < \alpha\}$
2. V 是传递的
3. 对任意 $x, y \in V$，如果 $x \in y$，则 $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$
4. 对任意 $x \in V$，$\text{rank}(x) = \bigcup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$

证明. 1. 令 $S = \{x \in V \mid \text{rank}(x) < \alpha\}$。根据定义 $V_\alpha \subseteq S$。对于任意 $x \in S$，因为 $\text{rank}(x) < \alpha$，因此存在 $\beta < \alpha$ 使得 $x \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$。因此 $V_\alpha = S$

2. 对任意 $y \in V$，则存在 $\alpha \in Ord$ 使得 $y \in V_\alpha$，于是 $y \subseteq V_\alpha \subseteq V$

3. 对任意 $x, y \in V$，令 $\text{rank}(y) = \alpha$，于是 $y \in V_{\alpha+1}$，因此 $x \in y \subseteq \bigcup V_{\alpha+1} = V_\alpha$，所以 $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$

4. 由 3 得，$\text{rank}(x) \geq \bigcup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$。令 $\text{rank}(x) = \alpha$，假设对于所有 $y \in x$ 都有 $\text{rank}(x) > \text{rank}(y) + 1$，$\text{rank}(y) < \alpha - 1$，于是 $\text{rank}(x) < \alpha$，矛盾。因此 $\text{rank}(x) = \bigcup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$

$\square$