Set Theory2

Yao

2022 年 5 月 1 日

目录

1 集合的宇宙 **1**
1.1 数理逻辑 1
1.2 层垒的谱系 4
1.3 相对化 relativization 9
1.4 绝对性 13
1.5 基础公理的相对一致性 18
1.6 基于良基关系的归纳与递归 21
1.7 基础公理的绝对性 25
1.8 不可达基数与 ZFC 的模型 36
1.9 反映定理 45
1.10 Exercise 49

1 集合的宇宙

1.1 数理逻辑

在 ZFC 下证明 ZFC $\vdash$ CH，希望将 “ZFC $\vdash$ CH” 表述为一阶句子

一般而言，给定一个 $\mathcal{L}$-理论 T 和一个 $\mathcal{L}$-句子 δ，“$T \vdash \sigma$” 不能用一个 $\mathcal{L}$-句子表示，只能用元语言表述

我们需要在 ZFC 中编码“元语言”

在 ZFC 中可以定义 $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$

即存在集合论语言 $\mathcal{L} = \{\in\}$ 中的 **公式**，在 ZFC 的任意模型中可以定义 $\mathbb{N}, +, \times, 0, 1$，以上公式与模型无关

用 $\ulcorner 0 \urcorner$，$\ulcorner 1 \urcorner$，$\ulcorner 2 \urcorner$... 表示 ZFC 中的“自然数”，以区别元语言中的自然数

Theorem 1.1. *如果 $R \subseteq \mathbb{N}^n$ 是一个递归关系。$T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ 是包含数论的适当丰富的理论，则存在公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 使得对任意自然数 $m_1, \dots, m_n$ 有*

$$\text{如果}(m_1, \dots, m_n) \in R\text{则}T \vdash \varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$$
$$\text{如果}(m_1, \dots, m_n) \notin R\text{则}T \vdash \neg\varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$$

Remark. 1. $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \mathrm{ZFC}$

2. φ 是语言 $\{+, \times, 0, 1\}$ 上的公式

3. φ 可以还原为一个 $\{\in\}$ 上的公式

4. $\varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$ 是一个闭语句

编码

编码函数 $f : X \to \mathbb{N}$

存在解码函数 g, h，对 $a = a_0, \dots, a_n \in X$, $h(f(a)) = n + 1$, $g(f(a), k) = a_k$ (分量)

性质：以上三种函数 f, g, h 均是递归函数 $\Rightarrow$ 都是可表示的

性质:“公式集”的编码集是递归的

性质：如果 $T \subseteq \mathrm{ZFC}$ 是可公理化的，则 T 的证明集的编码集是递归的

Corollary 1.2. *存在一个公式 ψ 和 θ 使得*

$$\mathrm{ZFC} \vdash \psi(n) \Leftrightarrow n \textit{ is a formula}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \neg\psi(n) \Leftrightarrow n \textit{ is not a formula}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \theta(n) \Leftrightarrow n \textit{ is a proof in } \mathrm{ZFC}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \neg\theta(n) \Leftrightarrow n \textit{ is not a proof in } \mathrm{ZFC}$$

称 ψ 定义了公式集，θ 定义了证明集

$\text{FORM} = \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \text{ formula}\} \subseteq \mathbb{N}$

如果 $T \subseteq \text{ZFC}$ 是可公理化的，则“T 是一致的”是一个一阶表述式“不存在一个有穷的证明序列 $D = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 使得 φ_n 形如 $\varphi \wedge \neg\varphi$，记作 $\text{Con}(T)$

Theorem 1.3 (第二不完全)**.** *如果 T 是包含 ZFC 的一个递归公理集，且 T 一致，则*

$$T \nvdash \mathit{Con}(T)$$

特别地，$\text{ZFC} \nvdash \mathit{Con}(\text{ZFC})$

Theorem 1.4. *对任意可公理化的理论 T，$\text{ZFC} \vdash \mathit{Con}(T)$ 当且仅当存在 $M \vDash T$*

即不能在 ZFC 里证明 ZFC 有一个模型

需要可公理化来写出 $\text{Con}(T)$，因此因为 $\text{ZFC} \nvDash \text{Con}(T)$，我们只能假设这么一个模型

集合论的模型跟集合论没什么关系，就是一个集合带一个二元关系，是关于集合论语言的结构

Definition 1.5. 设 (M, E) 是集合论模型

1. 对任意公式 $\varphi(\bar{x}, y)$，定义 M^n 上的函数

$$h_\varphi : M^n \to M$$

   满足条件

$$M \vDash \exists y \varphi(\bar{a}, y) \Rightarrow M \vDash \varphi(\bar{a}, h_\varphi(\bar{a}))$$

   称 h_φ 为 φ 的 Skolem 函数（依赖于选择公理，不同的变量选择有不同的函数）

2. 令 $\mathcal{H} = \{h_\varphi \mid \varphi \text{ formula}\}$ 为 Skolem 函数集合，设 S 是 M 的任意子集，则 $\mathcal{H}(S)$ 表示包含 S 且对 $\mathcal{H}$ 封闭的最小集合，称之为 S 的 Skolem 壳

Lemma 1.6. *令 N 是集合论模型，$S \subseteq N$，如果 $M = \mathcal{H}(S)$，则 $M \prec N$*

证明. Induction

对任意 $\bar{a} \in M^n$，有 $M \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \varphi(\bar{a})$

1. 不含量词，显然成立
2. φ 形如 $\exists y \psi(\bar{x}, y)$, $N \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y) \Rightarrow N \vDash \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a}))$，by IH, $M \vDash \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a})) \Rightarrow M \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y)$

□

Theorem 1.7 (Löwenheim–Skolem Theorem)**.**

1.2 层垒的谱系

工作于 ZF$^-$：ZF − 基础公理

$\alpha \mapsto V_\alpha$ 是 On 到 WF 的 1-1 映射，而 On 是真类

Lemma 1.8. *For any ordinal* α

1. V_α *is transitive*
2. $\xi \leq \alpha \Rightarrow V_\xi \subseteq V_\alpha$
3. *if* κ *is inaccessible, then* $|V_\kappa| = \kappa$

Definition 1.9. For any $x \in \mathrm{WF}$, **rank** of x is

$$\mathrm{rank}(x) = \min\{\beta \mid x \in V_{\beta+1}\}$$

$\mathrm{rank}(x) = \alpha \Rightarrow x \in V_{\alpha+1} \wedge x \notin V_\alpha$

- $x \in V_{\alpha+1} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(x) \leq \alpha$
- $x \subseteq V_\alpha \Leftrightarrow \mathrm{rank}(x) \leq \alpha$

Lemma 1.10. 1. $V_\alpha = \{x \in \mathrm{WF} \mid \mathit{rank}(x) < \alpha\}$

2. WF *is transitive*

3. $\forall x, y \in \mathrm{WF}$, $x \in y \Rightarrow \mathit{rank}(x) < \mathit{rank}(y)$

4. $\forall y \in \mathrm{WF}$, $\mathit{rank}(y) = \sup\{\mathit{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

证明. 1. by definition, $x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \setminus V_{\mathrm{rank}(x)}$, $\mathrm{rank}(x) < \alpha \Rightarrow x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \subseteq V_\alpha$

$\mathrm{rank}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \notin V_\alpha$

2. WF is the "union" of transitive sets

3. $y \in V_{\mathrm{rank}(y)+1} \setminus V_{\mathrm{rank}(y)}$, $y \subseteq V_{\mathrm{rank}(y)}$, $x \in y \Rightarrow x \in V_{\mathrm{rank}(y)} \Rightarrow \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$

4. by 3, $\sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \leq \mathrm{rank}(y)$.

induction on $\mathrm{rank}(y) \leq \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

- $\mathrm{rank}(y) = 0$
- $\mathrm{rank}(y) = \beta + 1$, $y \in V_{\beta+2} \setminus V_{\beta+1}$

  $y \in V_{\beta+2} \Rightarrow y \subseteq V_{\beta+1}$. $y \notin V_{\beta+1} \Rightarrow y \nsubseteq V_\beta \Rightarrow y \setminus V_\beta$ nonempty. Let $x \in y \setminus V_\beta$, $\mathrm{rank}(x) \geq \beta$, $\sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \beta + 1 = \mathrm{rank}(y)$
- $\mathrm{rank}(y) = \gamma$ for some limit, then $y \subseteq V_\gamma$ and for any $\xi < \gamma$, $y \nsubseteq V_\xi$, let $X_\xi \in y \setminus V_\xi$, then $\mathrm{rank}(X_\xi) \geq \xi$, $\sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \sup\{\xi + 1 \mid \xi < \mathrm{rank}(y)\} \geq \mathrm{rank}(y)$

$\square$

- WF 中的集合按照秩分层
- 在 WF 中基础公理是成立的：$\forall y (y \neq \emptyset \to \exists x \in y (x \cap y = \emptyset))$，因为任何序数集都有最小元，挑一个有最小 rank 的就好了
- WF 类的构造没有用到选择公理
- $\mathrm{On} \subseteq \mathrm{WF}$

Lemma 1.11. *for any ordinal α*

1. $\alpha \in \mathrm{WF}$ *and rank*$(\alpha) = \alpha$

2. $V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$

证明. 1. $0 \in V_1 \setminus V_0 \subset \mathrm{WF}$, $\mathrm{rank}(0) = 0$

If $\alpha \in \mathrm{WF}$ and $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$. $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$, $\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$, $\alpha + 1 \in V_{\alpha+2} \subset \mathrm{WF}$. If $\alpha + 1 \in V_{\alpha+1}$, then $\mathrm{rank}(\alpha + 1) \leq \alpha$, but $\alpha \in \alpha + 1 \Rightarrow \mathrm{rank}(\alpha) = \alpha < \mathrm{rank}(\alpha + 1)$. A contradiction

suppose γ is a limit ordinal and for any $\alpha < \gamma$, $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$. $\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha = V_\gamma$. Thus $\gamma \in V_{\gamma+1}$, $\mathrm{rank}(\gamma) \leq \gamma$ and $\mathrm{rank}(\gamma) \nless \gamma$.

2. suppose $\beta \in V_\alpha \cap \mathrm{On}$, then $\beta = \mathrm{rank}(\beta) < \alpha$. If $\beta \in \alpha$ and $\mathrm{rank}(\beta) < \alpha$, $\beta \in V_\alpha \cap \mathrm{On}$

□

Lemma 1.12. 1. *If $x \in \mathrm{WF}$, then $\bigcup x, \mathcal{P}(x), \{x\} \in \mathrm{WF}$, and their rank $<$ rank$(x) + \omega$*

2. *If $x, y \in \mathrm{WF}$, then $x \times y, x \cup y, x \cap y, \{x, y\}, (x, y), x^y \in \mathrm{WF}$, and their rank $<$ rank(x) + rank$(y) + \omega$*

3. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$

4. *for any set x, $x \in \mathrm{WF} \Leftrightarrow x \subset \mathrm{WF}$*

证明. 1. suppose $\mathrm{rank}(x) = \alpha$. $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$ and $x \subseteq V_\alpha$.

by transitivity, $\bigcup x \subseteq V_\alpha \Rightarrow \bigcup x \in V_{\alpha+1} \subset \mathrm{WF}$. $\mathrm{rank}(\bigcup x) \leq \alpha$

suppose $y \in \mathcal{P}(x)$, $y \subseteq x \Rightarrow y \subseteq V_\alpha \Rightarrow y \in V_{\alpha+1}$. $\mathcal{P}(x) \subseteq V_{\alpha+1}$, $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$, $\mathrm{rank}(\mathcal{P}(x)) \leq \alpha + 1$.

$\{x\} \in \mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$.

2. Suppose $\text{rank}(x) = \alpha, \text{rank}(y) = \beta$, $x \subset V_\alpha$, $y \subset V_\beta$

   $x \cup y \subset V_\alpha \cup V_\beta = V_{\max(\alpha,\beta)}$, $\text{rank}(x \cup y) \leq \max(\alpha, \beta)$

   $x \cap y \subset V_{\min(\alpha,\beta)}$

   $\{x, y\} \subseteq V_{\alpha+1} \cup V_{\beta+1} = V_{\max(\alpha,\beta)+1}$, $\text{rank}(\{x, y\}) = \max(\alpha, \beta) + 1$

   $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subset V_{\max(\alpha,\beta)+2}$. $\text{rank}((x, y)) = \max(\alpha, \beta) + 2$

   $x \times y = \{(a, b) \mid a \in x, b \in y\}$. $a \in x \Rightarrow \text{rank}(a) < \alpha$, $b \in y \Rightarrow \text{rank}(b) < \beta$, $\text{rank}(a, b) < \max(\alpha, \beta) + 2$, $(a, b) \in V_{\max(\alpha,\beta)+2}$. $x \times y \subseteq V_{\max(\alpha,\beta)+2}$, $\text{rank}(x \times y) \leq \max(\alpha, \beta) + 2$.

   $x^y \subseteq \mathcal{P}(x \times y) \subseteq V_{\max(\alpha,\beta)+3}$.

3. $\mathbb{N} = \omega \in V_{\omega+1}$

   $\mathbb{Z}$: let $\sim$ be an equivalence relation on $\omega \times \omega$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, then $\mathbb{Z} = (\omega \times \omega)/\sim$. Hence $\mathbb{Z}$ is a partition of $\omega \times \omega$ and hence $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{P}(\omega \times \omega)$. $\mathbb{Z} \in V_{\omega+3}$

   $\mathbb{Q}$: let $\sim$ be an equivalence on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+)$, $\mathbb{Q} \in V_{\omega+6}$

   $\mathbb{R}$: set of dedekind cut on $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R} \in V_{\omega+8}$

4. $\Rightarrow$: WF is transitive

   $\Leftarrow$: x is a set and $x \subset \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha$.

   Claim: there is an ordinal α s.t. $x \subset V_\alpha$

   Otherwise, let $f : \text{On} \to \mathcal{P}(x)$ s.t. $f(\alpha) = x \setminus V_\alpha$. Then for any $y \in \mathcal{P}(x)$, $f^{-1}(y)$ is a set. $\text{On} = \bigcup_{y \in x} f^{-1}(y)$ and is thus a set, a contradiction

$\square$

AC => Any set has cardinality

Lemma 1.13. *Assume AC* ($V \vDash \text{ZFC}$)

1. *for any group G, there is a group G' in* WF *s.t.* $G \cong G'$

2. *for any topological space T, there is a topological space T' in* WF *s.t. $T \cong T'$ (homeomorphic)*

证明. 1. suppose $(G, *_G)$ is a group, $G, *_G \in V$. By AC, there is a cardinal α s.t. $|G| = \alpha$, that is, there is a bijection $f : \alpha \to G$. Define $*$: for any $x, y, z \in \alpha$, $x * y = z \Leftrightarrow f(x) *_G f(y) = f(z)$. Then $(\alpha, *) \cong (G, *_G)$, $* \subseteq \alpha \times \alpha$

□

V 中的任何结构都可以在 WF 中找到同构象（同构是在 V 里看到的）

Definition 1.14. 任意集合 A 上的二元关系 $<$ 是 **良基**的，当且仅当对 A 的任意非空子集 X，X 有 $<$ 下的极小元

Theorem 1.15. *If $A \in$ WF, then $\in$ is a well-founded relation on A*

证明. suppose $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$, $X \subseteq$ WF, then elements of X has ranks and $x \in y \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$. Let x having least rank in X, then x is the $\in$-minimal element in X □

Lemma 1.16. *If A is a transitive set and $\in$ is a well-founded relation on A, then $A \in$ WF*

证明. Just need to prove $A \subset$ WF. If $A \not\subset$ WF, $X = A \setminus \text{WF} \neq \emptyset$. Then X has a $\in$-minimal element x. Then $x \neq \emptyset \in$ WF. For any $y \in x$, $y \in A$. By the minimality of x, $y \in$ WF. Then $x \subset$ WF, $x \in$ WF, a contradiction □

Lemma 1.17. *For any set x, there is a minimal transitive set trcl(x) s.t. $x \subseteq$ trcl(x)*

证明. For any $n \in \omega$ define x_n

$$x_0 = x$$
$$x_{n+1} = \bigcup x_n$$

let $\text{trcl}(x) = \bigcup_{n\in\omega} x_n$.

1. trcl$(x)$is transitive

   $a \in \text{trcl}(x) \Rightarrow a \in x_n \Rightarrow a \subseteq x_{n+1} \subseteq \text{trcl}(x)$

2. trcl(x) is minimal

   If $y \supseteq x$ is transitive, recursively prove for any $n < \omega$, $x_n \subseteq y$.

□

trcl(x) is the **transitive closure** of x.

Lemma 1.18. *We can prove the following without axiom of power set*

1. *if x is transitive, trcl$(x) = x$*
2. *$y \in x \Rightarrow$ trcl$(y) \subseteq$ trcl(x)*
3. *trcl$(x) = x \cup \bigcup\{$trcl$(y) \mid y \in x\}$*

证明. 2. $y \in x \subset \text{trcl}(x)$. $y \in \text{trcl}(x)$. $\text{trcl}(y) \subseteq \text{trcl}(x)$.

3. $x \cup \bigcup\{\text{trcl}(y) \mid y \in x\} \subseteq \text{trcl}(x)$ by (2)

   $\bigcup\{\text{trcl}(y) \mid y \in x\}$ is transitive. For $y \in x$, $y \subseteq \text{trcl}(y)$. Thus rhs is transitive

□

Theorem 1.19 (In ZF$^-$)**.** *For any set X, TFAE*

1. *$X \in$ WF*
2. *trcl$(X) \in$ WF*
3. *$\in$ is a well-founded relation on trcl(X)*

证明. $1 \to 2$: WF is closed under union □

Theorem 1.20. *If $V \vDash ZF^-$, TFAE*

1. *axiom of foundation* $(V \vDash)$ *axiom of foundation*

2. *for any set X, $\in$ is a well-founded relation on X*

3. $V = \mathrm{WF}$

$V \vDash \mathrm{ZF} \Rightarrow V = \mathrm{WF}(\mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF})$
Goal: $V \vDash \mathrm{ZF}^- \Rightarrow \mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF}^-$ 但是 WF 是一个类，我们并没有定义
我们可以用相对化编码 $\mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF}^-$

1.3 相对化 relativization

工作在 ZF^-

Definition 1.21. M class, φ formula, φ 对 M 的 **相对化** φ^M

1. $(x = y)^M := x = y$

2. $(x \in y)^M := x \in y$

3. $(\varphi \to \psi)^M := \varphi^M \to \psi^M$

4. $(\neg\varphi)^M := \neg\varphi^M$

5. $(\forall x\varphi)^M := (\forall x \in M)\varphi^M$

φ^M 读作"φ 在 M 中为真"，表示为 $(M, \in) \subseteq (V, \in)$ 有 $M \vDash \varphi$，即如果 $V \vDash \varphi^M$，那么 $M \vDash \varphi$，而 V 知道得更多一点

重新定义了满足

若 M 被公式 $M(u)$ 定义，$(\forall x\varphi)^M$ 是公式 $\forall x(M(x) \to \varphi^M(x))$

Example 1.1. $M = \mathrm{On}$，$\mathrm{On} \vDash \forall x\forall y(x \in y \vee y \in x \vee x = y)$

"$M \vDash \varphi$" 可以形式化为 $V \vDash \varphi^M$，而 M 对应于 $M(u)$，即等价于 $T \vdash \varphi^M$，如果我们工作在某个 T 上

若函数 f 被公式 $\varphi(\bar{x}, y)$ 定义，则 $V \vDash \forall\bar{x}\exists! y\varphi(\bar{x}, y)$，但相对化后不一定对，因此 $f^M = \{(\bar{x}, y) \in M : \varphi^M(\bar{x}, y)\}$ 不一定是 M 上的函数

Definition 1.22. for any theory T, any class M, M is a **model** of T, $M \vDash T$, iff for any axiom φ of T, φ^M holds, i.e., $V \vDash \varphi^M$

V 中定义出语义

Theorem 1.23. $V \vDash ZF^- \Rightarrow \mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF}-\mathrm{Inf}$,
$V \vDash (\mathrm{ZF}-\mathrm{Inf})^{\mathrm{WF}}$ 等价的 $ZF^- \vdash (\mathrm{ZF}-\mathrm{Inf})^{\mathrm{WF}}$

- **存在公理**：$\exists x \in M(x = x)$
- **外延公理**：Ext^M

$$\forall x \in M \forall y \in M \forall u \in M((u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y)$$

Lemma 1.24. *If M is transitive, then* Ext^M *holds*

证明. suppose $X, Y \in M$, if $X \neq Y$, then there is $u \in X \triangle Y$ (by Ext in V), by transitivity, $u \in M$ □

- 分离公理模式：for any M, any formula φ, $S(\varphi)^M$

$$\forall x \in M \exists Y \in M \forall u \in M(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$$

Therefore, if for any $X \in M$, $\{u \in X \mid \varphi^M(x)\} \in M$, then 分离公理模式在 M 中为真

Lemma 1.25. *If M satisfies $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then $S(\varphi)^M$ holds for any M*

证明. Suppose $X \in M$, suffices to find corresponding $Y \in M$ s.t. $\forall u \in M(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$

根据 V 中的分离公理, $Y = \{x \in X \mid \varphi^M(u)\} \in V$ and $Y \subseteq X \subset M$, thus $Y \in M$ and $\forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$. But $x \in Y \Rightarrow x \in M$, thus this is equivalent to $\forall u \in M(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^M(u))$ □

- **axiom of pairing** Pair

$$\forall x \in M \forall y \in M \exists z \in M \forall u \in M(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

只要 M 对对集函数 $x, y \mapsto \{x, y\}$ 封闭，则 $Pair^M$ 成立

- 幂集公理 Pow

$$\forall X \in M \exists Y \in M \forall u \in M(u \in Y \leftrightarrow \forall a \in M(a \in u \to a \in X))$$

Lemma 1.26. *If M satisfies $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then Pow^M holds*

证明. for any $X \in M$, $\mathcal{P}(X) \in M$. and we prove $\mathcal{P}(X)$ is the Y, for any $u \in M$ □

- **axiom of infinity** Inf

$$\exists X \in M(\emptyset \in X \wedge \forall y \in M(y \in X \to y^+ \in X))$$

$\emptyset : \psi(x) := \forall u(u \in x \to u \neq u)$, $x = \emptyset \Leftrightarrow \psi(x)$

$y^+ : \varphi(y, z) : \forall u \in z(u = y \vee u \in y) \wedge y \subseteq z \wedge y \in z$ 函数相对化后不一定是函数，所以放到下一节

- **axiom of foundation** Fod

$\forall x \in M(\exists u \in M(u \in x) \to \exists y \in M(y \in x \wedge \neg \exists u \in M(u \in x \wedge u \in y)))$

Lemma 1.27. *If M is transitive and elements of M is well-founded under $\in$, then Fod^M holds*

证明. suppose $x_0 \in M$ and there is

$\psi := \exists u(u \in x)$ and φ is the latter part

$\psi^M(x_0) \leftrightarrow \exists u(u \in x_0)$ since M is transitive, $\varphi^M(x_0) \leftrightarrow \exists y(y \in x_0 \wedge \neg \exists u \in M(u \in x \wedge u \in y))$

在 V 中,$x_0 \neq \emptyset$，由条件可知 $(x_0, \in)$ 是良基的，于是 φ 在 V 中对，那么当然在 M 中对 □

- **替换公理模式** $Rep(\varphi)$

$\forall A \in M \forall x \in A \cap M \exists! y \in M \varphi^M(x, y) \to \exists B \in M \forall x \in A \exists y \in B \varphi^M(x, y)$

$\exists! y \theta(y) : \exists y(\theta(y) \wedge \forall y'(\theta(y') \to y = y'))$

Lemma 1.28. *if M satisfied $x \in M \Leftrightarrow x \subset M$, then $Rep(\varphi)^M$ holds for any φ*

证明. for any $A_0 \in M$, then $A_0 \cap M = A_0$, thus we have $\forall x \in A_0 \exists! y(\varphi^M(x,y) \wedge M(y))$.

by $Rep(\varphi^M(x,y) \wedge M(y))$, $\exists B' \forall x \in A_0 \exists y \in B' \varphi^M(x,y) \wedge M(y)$

Let $B = B' \cap M$, which is what we want □

Thus in ZF^-, we can prove $\mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{inf}$

1.4 绝对性

$(V, \in) \supseteq (M, \in)$
对于哪些 φ，有 $V \vDash \varphi \Leftrightarrow M \vDash \varphi$

Definition 1.29. 公式 $\psi(\bar{x})$，对任意类 $M \subseteq N$，如果

$$\forall \bar{x} \in M(\psi^M(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^N(\bar{x}))$$

就称 $\psi(\bar{x})$ 对于 M, N 是 **绝对的**，如果 $N = V$，则称 $\psi(\bar{x})$ 对于 M 是 **绝对的**

$\bar{a} \in M$, $(M, \in) \vDash \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow V \vDash \psi^M(\bar{a})$
ψ 相对于 M, N 绝对：$\forall \bar{a} \in M$, 有 $M \vDash \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \psi(\bar{a})$
if $\forall \varphi(\bar{x}) \in L$，均有 φ 相对于 M, N 绝对的，则 $M \preceq N$

Lemma 1.30. *suppose $M \subseteq N$, φ, ψ formula*

1. 如果 φ, ψ 相对于 M, N 绝对，*so are* $\neg\varphi, \varphi \to \psi$
2. *if φ is q.f., then* φ 对任意 M 绝对
3. *if M are transitive, and* φ 相对于它们绝对，*so is* $\forall x \in y\varphi$

证明. 3. $\forall x \in y\varphi := \forall x(x \in y \to \varphi(x, y, \bar{z}))$，故 $(\forall x \in y\varphi)^M = \forall x \in M(x \in y \to \varphi^M(x, y, \bar{z}))$，任取 $y_0, \bar{z}_0 \in M$, 则由 M 的传递性，都有 $x \in y_0 \Rightarrow x \in M$

目标：$\forall x \in M(x \in y_0 \to \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$ 当且仅当 $\forall x \in N(x \in y_0 \to \varphi^N(x, y_0, \bar{z}_0))$

由 φ 的绝对性，对每个 $x_0 \in M$，有

$$\varphi^M(x_0, y_0, \bar{z}_0) \leftrightarrow \varphi^N(x_0, y_0, \bar{z}_0)$$

故 $V \vDash \forall x \in M(x \in y_0 \to \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$，当且仅当 $V \vDash \forall x(x \in y_0 \to \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$ 当且仅当 $V \vDash \forall x \in N(x \in y_0 \to \varphi^M(x, y_0, \bar{z}_0))$

□

Lemma 1.31. 令 $M \subseteq N$ 且 M 传递，$\psi(\bar{x})$ 是一个公式，则

1. 如果 ψ 是 Δ_0 公式，则他它对 M, N 是绝对的
2. 如果 ψ 是 Σ_1 公式，则

$$\forall \bar{x} \in M(\psi^M(\bar{x}) \to \psi^N(\bar{x}))$$

3. 如果 ψ 是 Π_1 公式，则

$$\forall \bar{x} \in M^n(\psi^N(\bar{x}) \to \psi^M(\bar{x}))$$

证明. 1. 对公式的长度进行归纳证明

2. 例子：令 $M = \mathrm{On}, N = \mathrm{WF}$，令 $\psi(y) := \forall x \in y \forall u, v \in x(u \in v \vee v \in u \vee u = v)$，则 ψ 是 Δ_0 的，则

$$\psi^M(y) = \forall x \in M(x \in y \to \forall u, v \in M(u, v \in x \to (u \in v \vee v \in u \vee u = v)))$$
$$\psi^N(y) = \forall x \in N(x \in y \to \forall u, v \in N(u, v \in x \to (u \in v \vee v \in u \vee u = v)))$$

任取 $x_0 \in \mathrm{WF} \setminus \mathrm{On}$ 使得 $(x_0, \in)$ 不是线序，令 $y_0 = \{x_0\}$，则 $\psi^M(y_0)$ 的前件假，$\psi^M(y_0)$ 是真的，$\psi^N(y_0)$ 为假，因此

$$\forall \bar{x}(\psi^M(\bar{x}) \to \psi^N(\bar{x}))$$

错误

令 $x=\bar{x}, y=\bar{y}$

设 $\psi := \exists\varphi(x,y)$，$\varphi(x,y)\in\Delta_0$, $\psi^M := \exists y\in M(\varphi^M(x,y))$, $\psi^N := \exists y\in N(\varphi^N(x,y))$，任取 $a\in M^m$，目标 $\psi^M(a)\to\psi^N(a)$

若 $\psi^M(a)$ 成立, 则有 $b\in M^n$ 使得 $\psi^M(a,b)$, 由 Δ_0 的绝对性, $\psi^N(a,b)$, 因此 $\exists y\psi^N(a,y)$

3. 设 $\psi := \forall y\varphi(x,y)$ 其中 $\varphi\in\Delta_0$，则 $\psi^M := \forall y\in M\varphi^M(x,y)$，$\psi^N := \forall y\in N\varphi^N(x,y)$，设 $a\in M$ 使得 $\psi^N(a)$ 成立，目标 $\psi^M(a)$ 成立。

   $\psi^N(a)\Rightarrow$ 对所有的 $b\in N$ 均有 $\varphi^N(a,b)$ 成立，故对一切 $b\in M$ 有 $\varphi^N(a,b)$ 成立，由 φ 的绝对性，$\forall y\in M\varphi^M(a,y)$

□

Lemma 1.32. 设 $M\subseteq N$，均是句子集 Σ 的模型，而 $\Sigma\vdash\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x})\leftrightarrow\psi(\bar{x}))$，则 φ 对 M 与 N 绝对当且仅当 ψ 也是

证明. $M,N\vDash\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x})\leftrightarrow\psi(\bar{x}))$

$\forall\bar{x}\in M^n(\varphi^M(\bar{x})\leftrightarrow\psi^M(\bar{x}))$，$\forall\bar{x}\in N^n(\varphi^N(\bar{x})\leftrightarrow\psi^N(\bar{x}))$

若 φ 是绝对的,$\forall\bar{x}\in M^n(\varphi^M(\bar{x})\leftrightarrow\varphi^N(\bar{x}))$

因此 $\forall\bar{x}\in M^n(\psi^M(\bar{x})\leftrightarrow\psi^N(\bar{x}))$ □

Definition 1.33. 假设 $M\subseteq N$，$f(x_1,\dots,x_n)$ 是函数（类），设 $f(x_1,\dots,x_n)$ 被公式 $\varphi(x_1,\dots,x_n,y)$ 定义，称 f 相对于 M,N 是绝对的，是指

1. $\varphi(x_1,\dots,x_n,y)$ 相对于 M,N 绝对

2. $\forall\bar{x}\in M^n\exists!y\in M(\varphi^N(\bar{x},y))$

由上一引理，f 的绝对性与定义 f 的公式无关

$f^M=\{(x_1,\dots,x_n,y)\in M^{n+1}\mid\varphi^M(\bar{x},y)\}$,$f\restriction M=\{(x_1,\dots,x_n,y)\in M^{n+1}\mid\varphi(\bar{x},y)\}$

f 是绝对的当且仅当 $\forall\bar{x}M\forall y\in M(\varphi(\bar{x},y)\leftrightarrow\varphi^M(\bar{x},y))$ 当且仅当 $\varphi(M^n,M)=\varphi^M(M^n,M)$，即 $f\restriction M=f^M$

即对任意 $\bar{a}\in M^n$，有 $f\restriction M(\bar{a})=f^M(\bar{a})$

Theorem 1.34. *以下关系和函数可以在 $ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 中用公式定义，且在 $ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 下等价于一个 Δ_0-formula*

1. $x \in y$
2. $x = y$
3. $x \subset y$
4. $\{x, y\}$
5. $\{x\}$
6. (x, y)
7. $\emptyset$
8. $x \cup y$
9. $x \cap y$
10. $x - y$
11. $x^+ = x \cup \{x\}$
12. x 传递
13. $\bigcup x$
14. $\bigcap x$，且 $\bigcap \emptyset = \emptyset$

证明.

4. 函数 $z = \{x, y\}$ 被公式 $\forall u \in z(u = x \vee u = y) \wedge (x \in z \wedge y \in z)$
5. $y = \{x\}$ 被公式 $\forall u \in y(u = x) \wedge (x \in y)$
6. 函数 $z = (x, y)$ 被公式 $\forall u \in z(u = x \vee x = \{x, y\}) \wedge x \in z \wedge \exists u \in z(u = \{x, y\})$
7. $\forall y \in x(y \neq y)$

8. 函数 $z = x \cup y$ 被公式 $\forall x \subset z \wedge y \subset z \wedge \forall u \in z(u \in x \vee u \in y)$
9. 函数 $z = x \cap y$ 被公式 $z \subset x \wedge z \subset y \wedge \forall u \in x(u \in y \to u \in z)$
10. 函数 $z = x - y$ $\forall u \in z(u \in x \wedge u \notin y) \wedge \forall u \in x(u \notin y \to u \in z)$
11. 函数 $z = x^+$ $\forall u \in z(u \in x \vee u = x) \wedge x \in z \wedge x \subset z$
12. $\forall y \in x(y \subset x)$
13. 函数 $z = \bigcup x$, $\forall u \in z \exists y \in x(u \in y) \wedge \forall u \in x(u \subset z)$
14. 函数 $z = \bigcap x$, $x = \emptyset \to z = \emptyset \wedge \forall u \in z \forall y \in x(u \in y) \wedge \exists y \in x \forall u \in z(\forall w \in x(u \in w) \to u \in z)$

□

Lemma 1.35. 如果 M 是一个传递类，f 是一个被 Δ_0 公式定义的函数，如果 f 在 M 上封闭，即 $f(M^n) \subseteq M$, 则 f 相对于 M 绝对

证明. 设 f 被 $\varphi(\bar{x}, y)$ 定义，$\forall \bar{x}, y \in M(\varphi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \varphi^M(\bar{x}, y))$,$\forall \bar{x} \in M \exists! y \in M(\varphi(\bar{x}, y))$ □

Corollary 1.36. 之前的函数均在 $ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的传递模型 M 中绝对的

$ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 能够保证函数封闭，传递性保证定义它们的公式的绝对性

Lemma 1.37. 绝对性对复合运算封闭，即假设 $M \subseteq N$, 公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_i(y_1, \ldots, y_m)$,$1 \le i \le n$ 都相对于 M, N 绝对，则 $\varphi(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m))$ 与 $f(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m))$ 也相对于 M, N 绝对

证明. 不妨设 $m = n = 1$

设 $g(y) = z$ 被 $\theta(y, z)$ 定义，$\varphi(g(y)) := \exists z(\theta(y, z) \wedge \varphi(z))$

$\varphi^M(g(y)) := \exists z \in M(\theta^M(y, z) \wedge \varphi^M(z))$,$\varphi^N(g(y)) := \exists z \in N(\theta^M(y, z) \wedge \varphi^M(z))$

由绝对性 $\forall z \in M \forall y \in M(\theta^M(y, z) \wedge \varphi^M(z) \leftrightarrow \theta^N(y, z) \wedge \varphi^N(z))$

任取 $y_0 \in M$, 设 $\exists z \in N(\theta^N(y_0, z) \wedge \varphi^N(z))$, 由函数 $g(y) = z$ 的绝对性，$\forall y \in M \exists! z \in M(\theta^N(y, z))$, 存在唯一的 $z_0 \in M$ 使得 $\theta^N(y_0, z_0) \wedge \varphi^N(z_0)$ □

Theorem 1.38. *以下关系和函数对任意 $ZF^{-}-\mathrm{Pow\,Inf}$ 的传递模型 M 都是绝对的*

1. *z 是有序对*
2. *$A\times B$*
3. *R 是关系*
4. *$\mathrm{dom}(R)$*
5. *$\mathrm{ran}(R)$*
6. *f 是函数*
7. *$f(x)$*
8. *f 是一一函数*

证明.

1. “z 是有序对”: $\exists u,v(z=(u,v))$，但是这不是 Δ_0，因此考虑 $\exists u\in\bigcup z\exists v\in\bigcup z(z=(u,v))$，注意这里不是平常的受囿量词，但是令 $g_1(z)=\bigcup z$, $g_2(z)=\bigcup z$, $g_3(z)=z$, $\varphi(x_1,x_2,x_3):=\exists u\in x_1\exists v\in x_2(x_3=(u,v))$，则 g_1,g_2,g_3,φ 绝对，故 $\varphi(g_1(z),g_2(z),g_3(z))$ 绝对
2. 函数 $z=x\times y$: $\forall u\in z\exists s\in x\exists t\in y(u=(s,t))\wedge\forall s\in x\forall t\in y\exists u\in z(u=(s,t))$
3. R 是关系 $\Leftrightarrow\forall u\in R(u\text{是有序对})$
4. 函数，$D=\mathrm{dom}(R)$: $\forall x\in D\exists z\in R\exists u\in z\exists y\in u(z=(x,y))$ 且 $\forall z\in R\forall u\in z\forall x\in u\forall y\in u(z=(x,y)\to x\in D)$
5. 同理
6. f是关系 $\wedge\ \forall x\in\mathrm{dom}(f)\exists!y\in\mathrm{ran}(f)\exists u\in f(u=(x,y))$
7. $\varphi(f(x))$ 表示 f 是函数且 $x\in\mathrm{dom}(f)$, 则 “$y=f(x)$” 定义为 $\varphi(f,x)\to\exists u\in f(u=x,y)\vee(\neg\varphi(f,x)\to y\neq\emptyset)$
8. “f 是函数” 且 $\forall s\in\mathrm{dom}(f)\forall t\in\mathrm{dom}(f)(f(s)=f(t)\to s=t)$

□

1.5 基础公理的相对一致性

如果 ZF^- 一致，则 ZF 一致

目标：$V \vDash \mathrm{ZF}^-$，证明 $\mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF}$，等价于 $\mathrm{ZF}^- \vdash (\mathrm{ZF})^{\mathrm{WF}}$

Lemma 1.39. *若传递类 M 是 $ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的模型，且 $\omega \in M$，则无穷公理在 M 中为真，因此无穷公理在 WF 中为真（$ZF^- \vdash (\mathrm{Inf})^{\mathrm{WF}}$）*

证明.

- 由于 $\emptyset$ 与 x^+ 都被 Δ_0 公式定义
- 若 $M \vDash \mathrm{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$，则 x^+ 在 M 中封闭，且 $\emptyset \in M$
- $\emptyset^M = \emptyset$, $(x^+)^M = x^+$
- 无穷公理的相对化为 $\exists x \in M(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y^+ \in x))$
- 即 $\exists x \in M(\emptyset \in M \wedge \forall y \in x(y^+ \in x))$
- 由于 $\omega \in M$，令 $x = \omega$

$\square$

结论：$\mathrm{WF} \vDash \mathrm{ZF}$

目标：$Con(\mathrm{ZF}^-) \vdash Con(ZF)$

Theorem 1.40. *设 T (ZF^-) 是集合论的的理论，Σ (ZF) 是一个句子集，设 M 是一个类且非空，如果 $T \vdash (M \vDash \Sigma)$，即 $T \vdash \Sigma^M$ 或者“若 $V \vDash T$，则 $V \vDash \Sigma^M$”，则*

1. *对集合论语言的任何语句 φ，如果 $\Sigma \vdash \varphi$，则 $T \vdash \varphi^M$*
2. *如果 T 一致，则以 Σ 为公理的理论也一致*

证明.

1. 设 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ 是 Σ 的一个证明，对 $k \leq n$，归纳证明 $T \vdash \varphi_k^M$
   - 若 $\varphi_i \in \Sigma \cup Ax$,$Ax$ 一阶逻辑的公理，$T \vdash \varphi_i^M$
   - 若 $i, j < k$ 使得 $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_k$，由归纳假设 $T \vdash \varphi_i^M$, $T \vdash \varphi_i^M \to \varphi_k^M$, 因此 $T \vdash \varphi_k^M$

2. 若 Σ 不一致，则存在 φ 使得 $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$，从而 $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)^M$，故 T 不一致

□

Theorem 1.41. 基础公理相对于 ZF^- 一致，即如果 ZF^- 一致，则 ZF 一致

证明.
- $\mathrm{ZF}^- \vdash (\mathrm{ZF})^{\mathrm{WF}}$
- 故 ZF^- 一致能推出 ZF 一致

□

选择公理：任何非空集合都可被良序化 $\forall X \exists R(R是\ X$ 上的良序)

1. $R \subseteq X \times X$
2. R 是线序
3. $\forall Y \subseteq X, Y \neq \emptyset \Rightarrow$Y 存在 R-极小元

Lemma 1.42 (ZF^-). 设 M 是 $ZF^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的传递模型，如果 $X, R \in M$ 并且 R 是 X 上的一个良序，则 $(R是\ X$ 的良序$)^M$

证明. “R 是 X 上的线序”被公式 $\varphi(X, R)$ 表达

- R 是关系
- $\forall x \in X(\neg R(x, x))$
- $\forall x, y, z \in X(R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)$
- $\forall x, y \in X(R(x, y) \vee R(y, x) \vee x = y)$

  $R(x, y)$ 表示 $(x, y) \in R$,$\exists z \in R(z = (x, y))$

因此 $\varphi(X, R)$ 是 Δ_0-公式

令公式 $\psi(X, Y, R)$ 为 $Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \to \exists y \in Y \forall x \in Y(\neg R(x, y))$，则 $\psi(X, Y, R)$ 是 Δ_0-公式,“R 是 X 上的良序”可以表达为 $\theta(X, Y) = \varphi(X, R) \wedge \forall Y \psi(X, Y, R)$

则 θ 是一个 Π_1-公式

$\forall X \in M \forall R \in M(\theta(X,R) \to \theta^M(X,R))$，任取 $X_0, R_0 \in M$ 使得 R_0 是 X_0 上的良序，则 $\theta(X_0, R_0)$，故 $\theta^M(X_0, R_0)$ 也成立，即 □

Theorem 1.43 (ZF$^-$). V_ω 是 ZFC − Inf +¬ Inf 的模型

证明. 与 WF 类似，V_ω 是传递的，且关于 $\{x,y\}$,$\bigcup x$,$\mathcal{P}(x)$ 封闭，故而是 ZF − Inf 的模型（练习）

¬ Inf: $\forall x \neg(\emptyset \in X) \wedge \forall y \in x(y^+ \in x)$

¬ Inf^M: $\forall x \in M(\emptyset^M \in X \wedge \forall y \in x((y^+)^M \in x))$

由于 $M = V_\omega$ 传递，故 $(\neg \mathrm{Inf})^M$: $\forall x \in M(\emptyset \in X \wedge \forall y \in x(y^+ \in x))$

由于 V_ω 中没有无穷集，故 $(\neg \mathrm{Inf})^M$ 在 V 中成立

AC^M: 任取 $X \in V_\omega$, 若 $X \neq \emptyset$，存在 $R \in V_\omega$ 使得 R 是 X 上的良序

rank($\mathcal{P}(x \times y)$) < max(rank(x), rank(y))，故 $\mathcal{P}(x \times x) \in V_\omega$ □

Corollary 1.44. $Con(ZF^-) \vdash Con(\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg \mathrm{Inf})$

1.6 基于良基关系的归纳与递归

Definition 1.45. 类 R（$\varphi(x,y)$）是类 X（$\psi(x)$）上的良基关系当且仅当

$$\forall U \subset X(U \neq \emptyset \to \exists y \in U(\neg \exists z \in U(zRy)))$$

U 是集合

Example 1.2. $\in$ 是 On 上的良基关系

如果 Fud 成立，则 $\in$ 是 V 上的良基关系

Theorem 1.46 (超穷归纳原理). 设 $\varphi(x)$ 是一个公式，若 $\forall \alpha \in On$ 有 $\forall \beta(\beta < \alpha \to \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)$，则 $\forall \alpha \in \mathrm{On}(\varphi(\alpha))$

Theorem 1.47 (超穷递归定理). 设 $G: V \to V$ 的函数，则存在唯一的函数 $F: \mathrm{On} \to V$ 使得

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

Definition 1.48. 类 X 上的关系，类 R 是 **似集合**的当且仅当对任意 $x \in X$，有 $\{y \in X \mid yRx\}$ 是一个集合

类的元素一定是集合，因为类是集合宇宙的一个子区域

一般称 $\{y \in X \mid yRx\}$ 中的元素为 x 的前驱，$\in$ 是任何类 X 上的似集合关系

Definition 1.49. 如果 R 是 X 上的似集合关系，且 $x \in X$，则递归定义

- $\text{pred}^0(X, x, R) = \{y \in X \mid yRx\}$
- $\text{pred}^{n+1}(X, x, R) = \bigcup\{\text{pred}(X, y, R) \mid y \in \text{pred}^n(X, x, R)\}$
- $\text{cl}(X, x, R) = \bigcup_{n\in\omega} \text{pred}^n(X, x, R)$

对每个 n,$\text{pred}^n(X, x, R)$ 是集合

故 $\text{cl}(X, x, R)$ 是集合

若 R 是 $\in$，且 X 是传递的，则 $\text{cl}(X, x, R) = x$

Lemma 1.50. *如果 R 是 X 上的似集合关系，则对任意 $y \in cl(X, x, R)$，都有 $pred(X, y, R) \subseteq cl(X, x, R)$*

证明. 设 $y \in \text{cl}(X, x, R)$，则存在 $n \in \omega$ 使得 $y \in \text{pred}^n(X, x, R)$，故 $\text{pred}(X, y, R) \subseteq \text{pred}^{n+1}(X, x, R)$ □

Theorem 1.51. *如果 R 是 X 上的良基关系，且是似集合的，则 X 的每个非空子类 Y 都有 R-极小元*

证明. 任取 $x \in Y$，若 x 不是 Y 的 R-极小元，则 $\text{pred}(X, x, R) \cap Y$ 非空，于是 $Y \cap \text{cl}(X, x, R)$ 非空，令 $x_0 \in Y \cap \text{cl}(X, x, R)$ 为极小元，则 x_0 是 Y 的极小元，否则 $\text{pred}(X, x_0, R) \cap Y = \emptyset$，任取 $z_0 \in \text{pred}(X, x_0, R) \cap Y$，则 $z_0 \in Y$, $z_0 \in \text{cl}(X, x, R)$，于是 $z_0 \in Y \cap \text{cl}(X, x, R)$ 且 z_0Rx_0，与 x_0 的极小性矛盾 □

Remark. 假设基础公理，则 $\in$ 是 V 上的良基关系，若 $V \neq \text{WF}$，则 $V \setminus \text{WF}$ 有极小元 x_0 非空，但是 $\forall y \in x_0 (y \in \text{WF})$，于是 $x_0 \subset \text{WF}$，矛盾，因此 $V = \text{WF}$

Theorem 1.52. 设 R 是 X 上的似集合的良基关系，如果 $F : X \times V \to V$ 是"函数"，则存在唯一的"函数"$G : X \to V$ 使得 $\forall x \in X(G(x) = F(x, G \restriction \mathit{pred}(X, x, R)))$

练习

证明. 1. 存在性

令公式 $\theta(x,t)$ 表示

- t 是一个函数（集合）
- $\mathrm{dom}(t) = \{x\} \cup \mathrm{pred}(X, x, R)$
- $\forall y \in \mathrm{dom}(t)(t(y) = F(y, t \restriction \mathrm{pred}(X, y, R)))$
- $\forall y \notin \mathrm{dom}(t)(t = \emptyset$

令 $G = \{(x,y) \mid \theta(x,y)\}$，证明 G 是函数:

1. 唯一性

   若不唯一，则存在最小的 $x \in X$ 使得 $G(x) \neq G(x')$. 但是 $G(x) = F(x, G \restriction (X, x, R)) = F(x, G' \restriction (X, x, R)) = G'(x)$

□

Definition 1.53. 如果 R 是 X 上的似集合关系，设 $x \in X$，则定义

$$\mathrm{rank}(x, X, R) = \sup\{\mathrm{rank}(y, X, R) + 1 \mid yRx \wedge y \in X\}$$

(来自超穷递归)

Definition 1.54 (ZF^-)**.** 如果类 X 传递，且 $\in$ 是 X 上的良基关系，则 $X \subseteq \mathrm{WF}$ 且对任意 $x \in X$ 有 $\mathrm{rank}(x, X, \in) = \mathrm{rank}(x)$

证明. 若 $X \nsubseteq \mathrm{WF}$, 取极小元 $x_0 \in X \setminus \mathrm{WF}$，显然 $x_0 \neq \emptyset$。任取 $z \in x_0$，由传递性，有 $z \in X \cap \mathrm{WF}$，于是 $x_0 \subseteq \mathrm{WF}$，于是 $X \subseteq \mathrm{WF}$

令 $Y = \{x \in X \mid \mathrm{rank}(x, X, \in) \neq \mathrm{rank}(x)\}$，如果 Y 非空，令 x_0 为 Y 的极小元，根据传递性,$x_0 \subseteq X$，且 $\forall z \in x_0$,$\mathrm{rank}(z, X, \in) = \mathrm{rank}(z)$

$\mathrm{rank}(x_0, X, \in) = \sup\{\mathrm{rank}(z, X, \in) + 1 \mid z \in x_0\}$

$\mathrm{rank}(x_0) = \sup\{\mathrm{rank}(z) + 1 \mid z \in x_0\}$ □

Definition 1.55. 令类 R 是 X 上似集合的良基关系,则 (X,R) 上的 **mostowski 函数** G 定义为

$$G(x) = \{G(y) \mid y \in X \wedge yRx\}$$

G 的值域记作 M，称之为 (X,R) 的 **Mostowski 坍塌**

Lemma 1.56. *设 R 是 X 上的一个似集合的良基关系，G 是其上的 Mostowski 函数，M 为其 Mostowski 坍塌，则*

1. $\forall x,y \in X(xRy \to G(x) \in G(y)), G:(X,R)\to(V,\in)$ 同态
2. M 是传递集
3. 如果幂集公理成立，则 $M \subseteq \mathrm{WF}$ ($ZF^{-} - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$)
4. 如果幂集公理成立，且 $x \in X$，则 $rank(x,X,R) = rank(G(x))$

证明. 3. 断言：$(M,\in)$ 是良基的

任取 $Y \subseteq M$ 非空，则 $G^{-1}(Y) \subseteq X$ 非空，有极小元 x_0，若 $G(x_0)$ 不是 Y 的极小元，则 $G(x_0)\cap Y \neq \emptyset$。令 $z \in G(x_0)\cap Y$，则存在 $y \in G^{-1}(Y)$ 使得 $G(y) = z$ 且 yRx_0，与 x_0 极小矛盾

4. 设 $x \in X$, $\mathrm{rank}(G(x)) = \sup\{\mathrm{rank}(v)+1 \mid v \in G(x)\} = \sup\{\mathrm{rank}(G(y))+1 \mid y \in X \wedge yRx\}$

设 x_0 是使得等式不成立的极小元,则对任意 $y \in X, yRx_0 \to \mathrm{rank}(y,X,R) = \mathrm{rank}(G(y))$

$\mathrm{rank}(x,X,R) = \sup\{\mathrm{rank}(y,X,R)+1 \mid yRx\wedge y \in X\} = \sup\{\mathrm{rank}(G(y))+1 \mid yRx \wedge y \in X\} = \mathrm{rank}(G(x))$

□

那么 G 在什么条件下是个同构

Definition 1.57. R 是 X 上的 **外延**的关系当且仅当

$$\forall x,y \in X(\forall z \in X(zRx \leftrightarrow zRy) \to x = y)$$

Lemma 1.58. 如果 X 是传递的，则 $\in$ 在 X 上是外延的

证明. $\mathrm{pred}(X, x, \in) = x$ □

Lemma 1.59. 令 R 是 X 上的似集合良基关系，如果 R 在 X 上是外延的，则 G 是同构

证明. 若 G 不是单射，即 $Y = \{x \in X \mid \exists y \in X(x \neq y \wedge G(x) = G(y))\}$ 非空，则有极小元 x_0，取极小的 $y_0 \in Y$ 使得 $x_0 \neq y_0$ 且 $G(x_0) = G(y_0)$，存在 $z_0 \in X$ 使得 $\neg(z_0 R x_0 \leftrightarrow z_0 R y_0)$

若 $z_0 R x_0$，$\neg z_0 R y_0$，则 $G(z_0) \in G(x_0), G(z_0) \notin G(y_0)$ □

Theorem 1.60 (莫斯托夫斯基坍塌定理)**.** 令 R 是 X 上的似集合良基关系，并且在 X 上是外延的，则存在传递类 M 和双射 G 满足 $G : X \to M$ 满足：G 是 (X, R) 与 $(M, \in)$ 之间的同构。另外 M 和 G 唯一

1.7 基础公理的绝对性

已知 ZF^- 一致 $\Rightarrow$ ZF 一致

本节工作于 ZF 中

Theorem 1.61. 以下关系和函数可以在 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$ 中用公式定义，且 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$ 可以证明这些公式等价于 Δ_0 公式，所以它们对任意 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$ 的传递模型绝对

1. x 是序数
2. x 是极限序数
3. x 是后继序数
4. ω
5. x 是有穷序数
6. $0, 1, 2, \dots, 20, \dots$

证明. 1. $\in$ 良基

x 是序数 $\Leftrightarrow x$ 是传递集且 $\in$ 是 x 上的线序

即 $\forall y \in x(y \subset x) \wedge \forall y, z \in x(y \in z \vee y = z \vee z \in y)$

2. 令 $\psi(x)$ 为"x 是序数"且 $\forall y \in x \exists z \in x(y \in z)$

4. 令 $\psi(x)$ 为"x 是极限序数"且 $\emptyset \in x$ 且 $\forall y \in x(y$ is limit $\to y = \emptyset)$

5. 令 $\psi(x)$ 为"x 是序数"且 $x \neq \omega$ 且 $\forall y \in x(y \neq \omega)$

6. 归纳证明：$\emptyset$: $\forall y \in x(y \neq y)$ $\psi_0(x)$

假设 n 被 $\psi_n(x)$ 定义，则 $\psi_{n+1}(x) : \exists y \in x(\psi_n(y) \wedge x = y^+)$

□

Remark. 令 $\psi_{limit}(x)$ 定义极限序数,即使 $V \vDash \neg \mathrm{Inf}$,$\psi_{limit}(x)$ 相对于 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}+\neg\mathrm{Inf}$ 的传递模型 M 仍然是绝对的，此时，$V \vDash \forall x(\psi_{limit}(x) \to x = \emptyset)$

同理定义 ω 的 $\psi_\omega(x)$ 也是绝对的，此时 $V \vDash \neg\exists(\psi_\omega(x))$

若 V 和 M 均满足 Inf，则 $\omega \in M$ 且 $\psi_\omega(\omega) \leftrightarrow \psi_\omega^M(\omega)$

Lemma 1.62. 如果 M 是 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的传递模型，则 M 的所有有穷子集都是 M 的元素

证明. 令 σ_n 为

$$\forall x \subset M(|x| = n \to x \in M)$$

V 看到的

1. σ_0,$V \vDash (\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow})^M$，由于 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow} \vdash \exists x(x = \emptyset)$，故 $V \vDash \exists x \in M(x = \emptyset^M)$，而空集是一个绝对概念，因此 $V \vDash \exists x \in M(x = \emptyset)$

2. 假设 σ_n 成立，任取 $x \subset M$ s.t. $|x| = n+1$, 任取 $y \in x$，则 $y \in M$，

□

Theorem 1.63. 以下概念对 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的

1. x 是有穷的

2. X^n

3. $X^{<\omega}$ 即 X 上所有有穷序列的集合

证明. 1. 令 $\psi(x, f)$ 表示"f 是函数"且 $\text{dom}(f) = x$ 且 $\text{ran}(f) \in \omega$ 且 "f 是一一的"

显然 $\psi(x, f)$ 是绝对的，x 有穷 $\Leftrightarrow \exists f \psi(x, f)$

目标：$\forall x \in M(x \text{ finite} \leftrightarrow (x \text{ finite})^M)$，即 $\forall x \in M(\exists f \psi(x, f) \leftrightarrow \exists f \in M \psi(x, f))$

任取 $x_0 \in M$，若存在 $f_0 \in M$ 使得 $\psi^M(x_0, f_0)$ 成立，则 $\psi(x_0, f_0)$ 成立，

若存在 f 使得 $\psi(x_0, f)$ 成立，下面证明 $f_0 \in M$。存在 $n \in \omega$ 使得 $f_0 : x \to n$ 是一一的函数，$f_0 \subseteq x_0 \times n$ 是有穷集

n 与 x_0 均属于 M, 故 $x_0 \times n \in M$，故 $x_0 \times n \subset M$, 故 $f_0 \subseteq M$ 是有穷子集，

2. X^n 是 n 到 X 的所有函数的集合

令 $f : n \to X$ 表示"f 是函数"且 $\text{dom}(f) = n$ 且 $\text{ran}(f) \subseteq X$

f 是绝对的，于是 $\forall f, n, X \in M((f : n \to X) \leftrightarrow (f : n \to X)^M)$

定义函数

$$F(X, n) = \begin{cases} 0 & n \notin \omega \\ \{f \mid f : n \to X\} & n \in \omega \end{cases}$$

$Z = F(X, n)$ 被公式 $\psi(X, n, Z)$ 表示：$(n \notin \omega \to Z = 0) \wedge (n \in \omega \to Z = \{f \mid f : n \to X\})$

下面证明 ψ 的绝对性，只需证明 $\forall n \in \omega$ 以及 $X_0, Z_0 \in M$，

$$\forall y \in Z_0(y : n \to X_0) \wedge \forall f((f : n \to X_0) \to f \in Z_0)$$

有绝对性，唯一的障碍是 $\forall f$，但是因为当 $n, X_0 \in M$ 且 $f : n \to X_0$，则 f 是 M 的有穷子集

故 $\psi(X,n,Z)$ 是绝对的

下面验证, $X^n \subseteq \mathcal{P}(n\times X)\in M$，于是 F 有绝对性

$$V\vDash \forall X\in M\forall n\in M\exists! Z\in M\psi(X,n,Z)$$

任取 $X\in M$，若 $n\notin\omega$，则 $F(X,n)=\emptyset\in M$，若 $n\in\omega$，定义 $\theta_n(x,y)$ 为

$$\exists a_0\dots a_{n-1}(x=(a_0,\dots,a_{n-1})\wedge y=\{(0,a_0),\dots,(n-1,a_{n-1})\})$$

令 $[X^n]$ 表示 n 次笛卡儿积，显然 $[X^n]\in M$

$\forall x\in[X^n]\exists! y\in M\theta_n^M(x,y)$

由于 M 满足替换公理，故存在 $z\in M, X^n\subseteq z$

根据分离公理

$$V\vDash \exists u\in M\forall f\in M(f\in u\leftrightarrow f\in z\wedge(f:n\to x))$$

故 $u=X^n\in M$

3. 先证明封闭，再证明绝对

首先证明函数 $Z=X^{<\omega}$ 是绝对的

令 $F(X,n)=X^n$,则 $Z=\bigcup\{F(X,0),F(X,1),\dots\}=\bigcup\text{ran}(F(X,-))\restriction\omega$

由于 $\omega\in M$,于是 $\text{ran}(F(X,-)\restriction\omega)\in M$,由并集公理,$\bigcup\text{ran}(F(X,-)\restriction\omega)\in M$

即 $X\in M\Rightarrow X^{<\omega}\in M$

$Z=X^{<\omega}$ 被公式 $\varphi(x,z)$ 定义：$\forall f(f\in z\leftrightarrow\exists n(n$ fintie ordinal $\wedge f\in X^n))$

验证：$\forall x\in M\forall z\in M(\varphi(x,z)\leftrightarrow\varphi^M(x,z))$

V 看到所有有穷序数都在 M 中

于是 φ 绝对，$\forall x\in M\exists! z\in M\varphi(x,z)$

$\square$

Theorem 1.64. 以下概念对 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的

1. R 是 X 上的良序（集合）
2. $\mathrm{type}(x,R)$

证明. 1. 已证明: $\forall R\in M\forall x\in M(R$是 X 的良序 $\to(R$ 是 X 的良序$)^M)$ (1.42)

另一方面，$\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}\vdash\forall R\forall X[R$是 X 的良序 $\to\exists\alpha\exists f(\alpha\text{ ordinal}\wedge f:(\alpha,\in)\cong(X,R)]$

后面的部分是绝对的

同时这个也有 M 的相对化 $(\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow})^M\vdash\forall R\in M\forall X\in M[(R$是 X 的良序$)^M\to\exists\alpha\in M\exists f\in M(\alpha\text{ ordinal}\wedge f:(\alpha,\in)\cong(X,R)]$

若 $R_0,X_0\in M$ 且 $(R_0$是 X_0 的良序$)^M$，则存在 $\alpha\in M$, $f\in M$,$f:(\alpha,\in)\cong(X_0,R_0)$，因此 $V\vDash R_0$是 X_0 的良序

2. 令 $W(X,R)$ 表示 R 是 X 的良序，令 $\chi(X,R,Z)$ 表示 Z 是序数且 $W(X,R)$ 且 $\exists f:(Z,\in)\cong(X,R)$

则 $Z=\mathrm{type}(X,R)\Leftrightarrow\chi(X,R,Z)$，而 χ 是绝对（这里的问题是 $\exists f$，要证明 f 一定在 M 中，参考良序绝对性的证明，$f\subset Z\times X\in M$）的且 $\forall X,R\in M\exists!Z\in M\chi(X,R,Z)$ (练习)

□

Theorem 1.65. 以下概念对 $\mathrm{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的

1. $\alpha+1$
2. $\alpha-1$
3. $\alpha+\beta$
4. $\alpha\cdot\beta$

证明. 2. $x=\alpha-1$ 被

$$\alpha\neq0\wedge((\alpha\text{后继}\wedge\alpha=x+1)\vee(\alpha\text{极限}\wedge\alpha=x))$$

3. 没有递归定义的绝对性

   $\alpha+\beta$ 的定义为 type$(\alpha\oplus\beta)$

   由于 type$(-,-)$ 是绝对的，只需证明 $\alpha\oplus\beta$ 是绝对的

   令 $F(\alpha,\beta)=W$，其中 $W=\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}$，再令 $G(\alpha,\beta)=R$，其中 $R\subseteq W^2$ 且满足 $\forall x\in\alpha\times\{0\}\forall y\in\beta\times\{1\}(xRy)$ 且 $\forall x,y\in\alpha((x,0)R(y,0)\leftrightarrow x\in y)$ 且 $\forall x,y\in\beta((x,1)R(y,1)\leftrightarrow x\in y)$

   显然 R 是 W 的良序集

   F 是绝对的

   令 $\psi(\alpha,\beta,R)$ 为

$$\begin{aligned}&\forall x\in R[\exists a\in\alpha\exists b\in\alpha(a\in b\wedge x=((a,0),(b,0)))\\&\qquad\vee\exists a\in\beta\exists b\in\beta(a\in b\wedge x=((a,1),(b,1)))\\&\qquad\vee\exists a\in\alpha\exists b\in\beta(x=((a,0),(b,1)))]\\&\wedge\forall a,b\in\alpha\exists x\in R(x=((a,0),(b,0)))\\&\wedge\forall a,b\in\beta\exists x\in R(x=((a,1),(b,1)))\\&\wedge\forall a\in\alpha\forall b\in\beta\exists x\in R(x=((a,0),(b,1)))\end{aligned}$$

   用 $\theta(\alpha,\beta,x)$ 表示方括号，则 $V\vDash\forall z(z\in R\leftrightarrow\theta(\alpha,\beta,z))$

   于是 $G(\alpha,\beta)=R\Leftrightarrow\psi(\alpha,\beta,R)$

   ψ,θ 是绝对的

   若 $\alpha,\beta\in M$，则 $\{x\mid\theta(\alpha,\beta,x)\}=\{x\in M\mid\theta(\alpha,\beta,x)\}=\{x\in M\mid\theta^M(\alpha,\beta,x)\}\subseteq M$, $R=\{x\in W^2\mid\theta^M(\alpha,\beta,x)\}$，由分离公理，$R\in M$

   故 $G(\alpha,\beta)=R$ 是绝对的,

   $\alpha+\beta=$ type$(F(\alpha,\beta),G(\alpha,\beta))$ 是绝对的

4. 同理：$\alpha\cdot\beta=$ type$(\alpha\otimes\beta)$ 是绝对的

   令 $F(\alpha,\beta)=W$，其中 $W=\alpha\times\beta$，再令 $G(\alpha,\beta)=R$，其中 $R\subseteq W^2$ 满足 $\forall x,y\in\alpha\forall u,v\in\beta((x,u)R(y,v)\leftrightarrow(x<y\vee(x=y\wedge u<v)))$，于

是 R 是 W 的良序集, F 是绝对的, 同理令 $V \vDash \forall z(z \in R) \leftrightarrow \theta(\alpha, \beta, z)$, $G(\alpha, \beta) = R \Leftrightarrow \psi(\alpha, \beta, R)$，$\psi, \theta$ 绝对。

若 $\alpha, \beta \in M$，由分离公理，$R \in M$，因此 $G(\alpha, \beta) = R$ 是绝对的，故 $\alpha \cdot \beta = \text{type}(F(\alpha, \beta), G(\alpha, \beta))$ 是绝对的

□

设 X 是一个类，被公式 $X(x)$ 定义，称 X 绝对是指 $\forall x \in M(X(x) \leftrightarrow X^M(x))$

令 X^M 表示 $\{x \in M \mid x^M(x)\}$，X 对于 M 绝对 $\Leftrightarrow X^M = X \cap M$

若 M 是 $ZF - \text{Pow}$ 的传递模型，则 $\text{On}^M = M \cap \text{On}$

作为函数的类，$G : X \to Y$ 其中 X, Y 是类，是一个公式 $G(x, y)$ 满足函数的条件

称 G 相对于类 M 是绝对的是指

1. $\forall x \in X^M \exists! y \in Y^M G^M(x, y)$，即 $G^M : X^M \to Y^M$
2. $\forall x \in M \forall y \in M(G^M(x, y) \leftrightarrow G(x, y))$

Theorem 1.66. *设 R 是 X 的似集合的良基关系，$F : X \times V \to V$，令 $G : X \to V$ 如递归定理所定义的:*

$$\forall x \in X(G(x) = F(x, G \restriction \textit{pred}(X, x, R)))$$

令 M 是 $ZF - \text{Pow}$ 的传递模型，且假设

1. *F 相对于 M 绝对的*
2. *X, R 相对于 M 是绝对的*
3. *$(R$在 X 上是似集合的$)^M$*
4. *$\forall x \in M(\textit{pred}(X, x, R) \subseteq M)$*

则 G 对 M 是绝对的

证明. 阅读书中证明

$V \vDash (X^M = X \cap M)$

$V \vDash (R^M = R \cap (M \times M))$

$V \vDash R^M = (X^M)^2 \cap R$

$V \vDash (X^M, R^M)$ 是良基的

R 在 X 上是似集合的，$\forall x \in X \exists z \forall y \in X(y \in z \leftrightarrow yRx)$，它的相对化就是 $\forall x \in X^M \exists z \in M \forall y \in X^M(y \in z \leftrightarrow yR^M x)$

故 (X^M, R^M) 是似集合的且 $\forall x \in M(\mathrm{pred}(X^M, x, R^M) \in M)$

由 X 与 R 的绝对性，$\mathrm{pred}(X^M, x, R^M) = \mathrm{pred}(X, x, R) \cap M$

由于 $\forall x \in M(\mathrm{pred}(X, x, R)) \subseteq M$，故 $\forall x \in M(\mathrm{pred}(X^M, x, R^M) = \mathrm{pred}(X, x, R))$

断言 1： 函数 $y = \mathrm{pred}(X, x, R)$ 是绝对的

$y = \mathrm{pred}(X, x, R)$ 被公式 $\psi(x, y)$ 表示:

$$\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in X \wedge zRx)$$

则 $\psi^M(x, y)$ 为

$$\forall z \in M(z \in y \leftrightarrow z \in X^M \wedge zR^M x)$$

若 $x_0, y_n \in M$，有 $z \in y_0 \to z \in M, zRx_0 \to z \in M$

故 ψ 绝对，由以上分析，若 $x \in M$，则 $\mathrm{pred}(X, x, R) \in M$。故 $y = \mathrm{pred}(X, x, R)$ 是作为函数是绝对的

对任意的 $x \in M$,有 $(\mathrm{pred}(X, x, R))^M = \mathrm{pred}(X, x, R) = \mathrm{pred}(X^m, x, R^M)$

先在 (X^M, R^M) 是似集合的的良基关系，由绝对性，$F^M : X^M \times M \to M$，这些都是 V 看到的，那么由递归定理，存在函数 $g : X^M \to V$ 满足

$$\forall x \in X^M(g(x) = F^M(x, g \restriction \mathrm{pred}(X^M, x, R^M)))$$

目标：证明 $g = G^M$（书本）

问题：递归定理中的 “G” 只刻画了 G 的性质并非定义（元语言）

回忆：$G(x)$ 的定义令公式 $\theta(x, t)$ 表示

- t 是一个函数（集合）

- $x \in X$
- $\mathrm{dom}(t) = \{x\} \cup \mathrm{pred}(X, x, R)$
- $\forall y \in \mathrm{dom}(t)(t(y) = F(y, t \upharpoonright \mathrm{pred}(X, y, R)))$
- $\forall y \notin \mathrm{dom}(t)(t = \emptyset)$

则 $G(x) = y \Leftrightarrow \exists t(\theta(x,t) \wedge y = t(x))$

下面证明 $\exists t(\theta(x,t) \wedge y = t(x))$ 的绝对性

断言 2： $\theta(x,t)$ 是绝对的

只需证明 $t \upharpoonright \mathrm{pred}(X, y, R)$ 是绝对的，即若 $x_0 \in X^M, y_0 \in \mathrm{pred}(X, x_0, R)$，$t_0 \in M$，则 $t_0 \upharpoonright \mathrm{pred}(X, y_0, R) = (t_0 \upharpoonright \mathrm{pred}(X, y_0, R))^M$

函数 $s = t \upharpoonright \mathrm{pred}(X, y, R)$ 被公式

$$\eta(y,t,s) := \forall x \in s \exists u \exists v(uRy \wedge v = t(u) \wedge x = (u,v)) \wedge \forall u \forall v(uRy \wedge v = t(u) \to (u,v) \in s)$$

验证：η 是绝对的（练习），但是 uRy，因此 $u \in M$，

故 $\theta(x,t)$ 是绝对的

断言 3： $\theta(x,t)$ 定义了一个类函数，即 $V \vDash \forall x \in X \exists! t\theta(x,t)$ 练习（对 $x \in X$ 归纳证明）

下面证明 θ 作为函数是绝对的 **断言 4**：若 $x \in M$，则 $\forall t(\theta(x,t) \to t \in M)$

否则，存在一个极小的 $x_0 \in M$,t_0 使得 $\theta(x_0, t_0)$ 且 $t_0 \notin M$

若 $\mathrm{pred}(X, x_0, R) = \emptyset$，则由 θ 的定义，$t_0 = \{(x_0, F(x_0, \emptyset))\} \in M$，矛盾

若 $\mathrm{pred}(X, x_0, R) \neq \emptyset$，令 $t^* = \{y \mid \exists x \in \mathrm{pred}(X, x_0, R) \wedge \theta(x,y)\}$，由极小性，$t^* \subseteq M$

$t^* = \mathrm{ran}(\theta \upharpoonright \mathrm{pred}(X, x_0, R))$

由归纳假设，$\forall x \in \mathrm{pred}(X, x_0, R) \exists! y \in M(\theta(x,y))$

于是 $\forall x \in \mathrm{pred}(X, x_0, R) \exists! y \in M(\theta^M(x,y))$

因此 $t^* = \mathrm{ran}(\theta^M \upharpoonright \mathrm{pred}(X, x_0, R))$

由替换公理，$t^* \in M$，由绝对性

$$t_0 = (\bigcup t^*) \cup \{(x_0, F^M(x_0, \bigcup t^*))\} \in M$$

矛盾

故 $\forall x \in M \exists! t \in M \theta(x,t)$，即 $\theta(x,t)$ 作为函数绝对

记 $\phi(x,y) := \exists t(\theta(x,t) \wedge y = t(x))$，则

$$\phi^M(x,y) = \exists t \in M(\theta(x,t) \wedge y = t(x))$$

但是 $\forall x \in M \forall y \in M$

$$(\exists t(\theta(x,t) \wedge y = t(x))) \leftrightarrow \exists t \in M(\theta(x,t) \wedge y = t(x))$$

下面证明 $G(x)$ 作为函数绝对，即 $G(x)$ 封闭

回忆：$g : X^M \to M$ 满足

$$\forall x \in X^M (g(x) = F^M(x, g \restriction \mathrm{pred}(X^M, x, R^M)))$$

断言 5：$\forall x \in X^M (G(x) = g(x))$

否则，存在"极小"的 $x_0 \in X^M = X \cap M$ 使得 $G(x_0) \neq g(x_0)$

显然 $\mathrm{pred}(X, x_0, R) = \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M) \neq \emptyset$，否则 $g(x_0) = F^M(\emptyset, g \restriction \emptyset) = F^M(\emptyset, \emptyset) = F(\emptyset, g \restriction \emptyset) = G(x_0)$

假设 $\mathrm{pred}(X, x_0, R) = \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M) \neq \emptyset$，由 x_0 的极小性，有 $\forall x \in \mathrm{pred}(X, x_0, R) \cap \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M)$ 时，有 $G(x) = g(x)$

因此 $G \restriction \mathrm{pred}(X, x_0, R) = g \restriction \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M)$

$g(x_0) = F^M(x_0, g \restriction \mathrm{pred}(X^M, x_0, R^M)) = G(x_0)$，矛盾 $\square$

Theorem 1.67. 一下概念对 $\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$ 的传递模型都是绝对的

1. α^β (序数)
2. $rank(x)$
3. $trcl(x)$

证明. 1. 若 $\alpha = 0$，则 $\alpha^\beta = 0$

它是递归定义的，因此是绝对的

规定 $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ 上的关系 R 为

$$R = \{((\alpha, \beta_1), (\alpha, \beta_2)) \mid \beta_1 \in \beta_2\} \subseteq \mathrm{On}^2$$

显然 R 是良基关系，R 是似集合的，$\mathrm{pred}(\mathrm{On}^2, (\alpha,\beta), R) = \{\alpha\} \times \beta$

定义 $F : \mathrm{On}^2 \times V \to V$ 为

$$F(\alpha,\beta,x) = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \lor x \notin \mathrm{On}^3 \\ 1 & \beta = 0 \land \alpha \neq 0 \\ \left(\bigcup_{y \in x} \pi_3(y)\right) \cdot \alpha & \text{otherwise}, x \in \mathrm{On}^3 \end{cases}$$

有 M 的传递性，$x = (x_1, x_2, x_3) \in M \Rightarrow x_1, x_2, x_3 \in M$

由 (x_1, x_2, x_3) 的绝对性，$y = \pi_3(x)$ 是绝对的，因为 $y = \pi_3(x)$ 为

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x = (x_1, x_2, x_3) \land y = x_3)$$

验证 $G(\alpha,\beta) = \alpha^\beta$ 是基于 F 递归定义的，因此 G 是绝对的

2. $\mathrm{rank}(x)$，即 $\mathrm{rank}(V, x, \in)$

   $\mathrm{rank}(x) = \sup\{\mathrm{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$，找 F，并证明绝对性，练习

3. $\mathrm{trcl}(x) = x \cup \bigcup\{\mathrm{trcl}(y) \mid y \in x\}$ 练习

□

Remark. $\alpha + \beta$ 也是递归定义的

Remark.
- $\mathrm{rank}(x)$ 的定义用到 V_α
- 当 $M \nvDash \mathrm{Pow}$，V_α^M 没有意义
- $\mathrm{rank}(x)$ 仍可递归定义为 $\sup\{\mathrm{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$
- 当 $M \vDash \mathrm{Pow}$，则两种定义等价

定义公式 $\varphi(x,y)$ 为

$$\forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

当 $V \vDash \mathrm{Pow}$,则 $V \vDash \forall x \exists! y \varphi(x,y)$,即 $\varphi(x,y)$ 定义了一个函数,记作 $\mathcal{P}(x) = y$

若 $M \vDash \mathrm{Pow}$，则

$$V \vDash \forall x \in M \exists! y \in M \varphi^M(x,y)$$

当 M 传递时，$\subseteq^M \Leftrightarrow \subseteq$，若 $M \vDash \mathrm{Pow}$，则

$$V \vDash (\varphi^M \text{定义了 } M \text{ 到 } M \text{ 的函数})$$

记该函数为 $\mathcal{P}^M(x)$，即 $\mathcal{P}^M(x) = \{z \in M \mid z \subseteq^M x\}$ 当 M 传递时，$\mathcal{P}^M(x) = \{z \in M \mid z \subseteq x\} = \mathcal{P}(x) \cap M$

同理 $V_\alpha^M = \{x \in M \mid (\mathrm{rank}(x) < \alpha)^M\}$

Lemma 1.68. *若 M 是 ZF 的传递模型，则*

1. *若 $x \in M$，则 $\mathcal{P}^M(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$*

   只需 Pow 加传递

2. *如果 $\alpha \in M$，则 $V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$*

   只需 ZF − Pow，若有 Pow，则 V_α^M 是由 $\mathcal{P}^M$ 得到的

Remark. $\mathcal{P}$ 与 V_α 作为函数不是绝对的

固定 $x \in M$，则 $\mathcal{P}(x)$ 可以是带参数 x 的公式

$$\mathcal{P}(x)(y) : \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x)$$

此时谓词 $\mathcal{P}(x)$ 是绝对的，$(\mathcal{P}(x))^M = \mathcal{P}(x) \cap M$

固定 $\alpha \in M \cap \mathrm{On}$，则 V_α 可以看成带参数 α 的谓词，此时 $(V_\alpha)^M = V_\alpha \cap M$ 是绝对的

1.8 不可达基数与 ZFC 的模型

一般来讲，V_α 不是 ZF 的模型，比如 $\mathrm{ZF}^- \vdash (V_\omega \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf})$

令 Z 表示 ZF − 替换公理模式（Rep）

ZC 表示 ZFC −Rep

Theorem 1.69. *如果 $\gamma > \omega$ 是无穷极限序数，则 $\mathrm{ZF} \vdash (V_\gamma \vDash Z)$，$\mathrm{ZFC} \vdash (V_\gamma \vDash \mathrm{ZC})$*

证明. 假设 $V \vDash \mathrm{ZF}$

- 存在公理：
- 外延公理：$\forall x\in V_\gamma\forall y\in V_\gamma\forall u\in V_\gamma((u\in x\leftrightarrow u\in y)\to x=y)$，$V_\gamma$ 传递
- 分离公理模式：假设 $x\in V_\gamma$，则存在 $\beta<\gamma$ 使得 $x\in V_\beta$，故 $x\subseteq V_\beta$，$\mathcal{P}(x)\subseteq\mathcal{P}(V_\beta)=V_{\beta+1}\subseteq V_\gamma$，则若 $x\in V_\gamma$，则 X 的子集均属于 V_γ

  分离公理

  $$\forall x\in V_\gamma\exists Y\in V_\gamma\forall u\in V_\gamma(u\in Y\leftrightarrow u\in X\wedge\varphi^M(u))$$

  在 V 里面可以看到这些是 X 的子集，且能看到 X 的所有子集在 V_γ 里
- 对集公理，$\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\leftrightarrow u=x\vee u=y)$

  设 $x,y\in V_\gamma\subseteq \mathrm{WF}=V$，有 $\mathrm{rank}(\{x,y\})<\max\{\mathrm{rank}(x),\mathrm{rank}(y)\}+\omega$，故 $\{x,y\}\in V_\gamma$
- 并集公理，类似
- 幂集公理，类似
- 无穷公理

  对于 $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Rep}$ 的传递模型，$\emptyset$ 与后继运算是绝对的

  $\omega\in V_\gamma$，故无穷公理的相对化成立
- 基础公理

  $\forall x\in V_\gamma((x\neq\emptyset)^{V_\gamma}\to\exists y\in V_\gamma(y\in x\wedge(y\cap x=\emptyset)^{V_\gamma}))$

  对于 $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Rep}$ 的传递模型，$\emptyset$ 与 $\cap$ 是绝对的

  而 $V_\gamma\subseteq\mathrm{WF}=V$，故 Fon 成立

若 $V\vDash\mathrm{ZFC}$，设 $x\in V_\gamma$，则 $V\vDash\exists R(R$是 X 的良序)。$R\subseteq X\times X\Rightarrow R\in V_\gamma$，对于 $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf} - \mathrm{Rep}$ 的传递模型 V_γ 有

$$V\vDash(R\text{是 }X\text{ 的良序})^{V_\gamma}$$

□

Exercise 1.8.1. 证明 $V_{\omega+\omega}$ 不满足 Rep

证明. $f : n \to \omega + n$ □

Proposition 1.70. 工作在 ZFC

- ZF 不能证明“V_ω 存在”
- ZF 不能证明“对任意 x，*trcl*(x) 存在”

证明. 构造模型否定这两个命题

令 $V \vDash$ ZFC，令 $X_0 = \omega$, $X_{\alpha+1} = \mathcal{P}(X_\alpha)$, $X_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta$（$\gamma$ 极限序数）

显然 $\overline{X} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} X_\alpha = \mathrm{WF} = V$ （练习）

$X_0 \subseteq V_\omega$, $X_0 \in V_{\omega+1}$, $X_\alpha \subseteq V_{\omega+\alpha}$, $\overline{X} \subseteq \mathrm{WF}$

$V_0 \subseteq X_0$, $V_\alpha \subseteq X_\alpha$, $\mathrm{WF} \subseteq \overline{X}$

容易验证以下事实：X_α 传递（归纳），设 $f(x, y)$ 表示 $\{x, y\}$,$(x - y)$,$x \times y$,$\bigcup x$,$\cap x$,$\mathcal{P}(x)$,...

若 $x \in X_\alpha$,$y \in X_\beta$，则 $f(x, y) \in X_{\max\{\alpha,\beta\}+\omega}$

类似可证 X_ω 是 $\mathrm{ZC} - \mathrm{Inf}$ 的传递模型

由于 $\omega \in X_\omega$，故 $X_\omega \vDash \mathrm{Inf}$，即 $X_\omega \vDash \mathrm{ZC}$

显然 $V_\omega \nsubseteq \omega = X_0$，于是存在 $V_n \nsubseteq X_0$，故 $\mathcal{P}(V_n) \nsubseteq \mathcal{P}(X_0)$，即 $\forall k < \omega$，$V_{n+k} \nsubseteq X_k$，故 $\forall n < \omega$，都有 $V_\omega \nsubseteq X_n$，故 $V_\omega \notin X_\omega$

但要严格地说的话得找到一个东西定义 V_ω 然后证明它的相对化在 X_ω 不满足

另一方面，$V_0 \subseteq X_0 \Rightarrow V_n \subseteq X_n$，于是 $V_\omega \subseteq X_\omega$

令 $G : \omega \to \mathrm{WF}$ 为 $G(n) = V_\alpha$

验证 G 相对于 X_ω 是绝对的，G 的任何一个片段都是有穷的，因此片段的值域都在 X_ω 中，因为 X_ω 对于任何有穷集合封闭

注：当 $M \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{Pow}$，我们知道递归函数 G 的绝对性，此时 $X_\omega \nvDash$ Rep，然而 X_ω 的任何有穷子集都属于 X_ω，故而对任何 $f : \omega \to X_\omega$，有 $f(\{0, \dots, n\}) \in X_\omega$，可以证明 G 的绝对性（练习）

V_ω 被公式 $\eta(x) : \exists n \in \omega(x \in G(n))$

(V_ω 被“$\alpha \in V_\omega$”定义，但是 X_ω 不一定认为 V_ω 是集合，必需用 X_ω 认可的方式定义)

V_ω 存在指的是

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \eta(x))$$

由于 G 是绝对的，$\eta(x)$ 绝对，因此 X_ω 认为“V_ω 存在”当且仅当 $\exists y \in X_\omega \forall x \in X_\omega(x \in y \leftrightarrow \eta(x))$

由于 $V_\omega \subseteq X_\omega$ 且 X_ω 是传递的，以上的公式等价于

$$\exists y \in X_\omega \forall x(x \in y \leftrightarrow \eta(x))$$

而这样的 y 只能是 V_ω，而 $V_\omega \notin X_\omega$，因此以上句子不成立

即 ZFC $\vdash$ "$X_\omega \vDash$ ZC $+$ V_ω不存在"

证明“x 存在且 trcl(x) 不存在”，假设 $V \vDash$ ZFC，令 $t(u) = \{u\}$，$x_n = t^n(n)$，rank$(x_n) = 2n$，$x = \{x_n \mid n < \omega\}$，令 $X_0 = x$，$X_1 = \bigcup X_0$，...，$X_{n+1} = \bigcup X_n$，则 trcl$(x) = \bigcup_{n<\omega} X_n$

令 $Y_0 = \omega \cup X_0$，$Y_{n+1} = \mathcal{P}(Y_n) \cup Y_n \cup X_n$，验证 $Y_\omega = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ 是传递的，验证 $Y_\omega \vDash$ ZC，验证 $x \in Y_1 \subseteq Y$，验证 trcl$(x) = \bigcup_{n<\omega} X_n \notin Y$，即验证 $\forall n \exists m(X_m \not\subseteq Y_n)$

后面类似，证明 $Y_\omega \vDash$ " trcl(x)不存在" □

Theorem 1.71. 如果 κ 是不可达基数，则在 *ZF*$^-$ 中可以证明 $V_\kappa \vDash$ ZF，在 *ZFC*$^-$ 中可以证明 $V_\kappa \vDash$ ZFC

证明. 已知 ZF$^- \vDash (V_\kappa \vDash Z)$，ZFC$^- \vDash (V_\kappa \vDash$ ZC)，下面验证替换公理模式

$$\forall A(\forall x \in A \exists! y \psi(x, y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y))$$

相对化

$$\forall A \in M(\forall x \in A \exists! y \in M \psi^M(x, y) \to \exists B \in M \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y))$$

假设 $A \in V_\kappa$ 且 $\forall x \in A \exists! y \in V_\kappa \psi^M(x, y)$

由于 κ 是极限序数，故 $A \in V_\kappa \Rightarrow \exists \alpha < \kappa(A \in V_\alpha)$，因此 $A \subseteq V_\alpha$，而 $V \vDash (\psi^M : A \to V_\kappa)$，于是 $V \vDash |A| \leq |V_\alpha| < \kappa$，$V \vDash |f(A)| < \kappa$，$V \vDash f(A) \subseteq$

V_κ，由 κ 的正则性，所以存在 $\beta<\kappa$，$f(A)\subseteq V_\beta$，于是 $f(A)\in V_{\beta+1}\subseteq V_\kappa$，即 $B=f(A)$ 即可 □

注：V_κ 的基数小于 κ 的子集都是 V_κ 的元素

若 M 的有穷子集都是 M 的元素，则 $M\vDash$ 有穷 Rep

Corollary 1.72. *ZFC 中不能证明"存在不可达基数"*

证明. 若 ZFC $\vdash$"存在不可达基数"，则 ZFC $\vdash$ "$V_\kappa \vDash$ ZFC"，即 ZFC $\vdash$ $\exists X(\text{ZFC})^X$，因为 V_κ 是个集合，因此 ZFC $\vdash$ Con(ZFC)

若只能找到一个真类，我们不能得到能证明一致性 □

若 T 是可公理化的，则

$$\text{ZFC}\vdash \text{Con}(T)\leftrightarrow \exists M(T)^M$$

（粗略的完全性定理）取一个适当大的子集 $P\subseteq$ ZFC，有

$$P\vdash \text{Con}(T)\leftrightarrow \exists M(T)^M$$

已知若 $V\vDash \text{ZF}^-$，则 $\text{WF}\vDash \text{ZF}$,$\text{ZF}^-\vdash(\text{ZF})^{\text{WF}}\nRightarrow \text{ZF}^-\vDash Con(\text{ZF})$，因为 WF 不是集合

Lemma 1.73. *设 κ 是不可达基数（极限序数），则以下概念对 V_κ 都是绝对的*

1. *x 是一个基数*
2. *x 是正则基数*
3. *x 是一个不可达基数*

证明. 1. x 是基数被公式 $\varphi(x)$ 表示："x 是序数"$\wedge\forall f\forall y\in x((f:y\to x)\to \text{ran}(f)\neq x)$

三个子公式对 ZF − Pow − Inf −Rep 的传递模型都是绝对的

若 κ 是极限序数，则

$$V_\kappa\vDash \text{ZF}-\text{Pow}-\text{Inf}-\text{Rep}$$

由于 $\varphi(x)$ 是一个 Π_1 公式，故

$$\forall x \in V_\kappa(\varphi(x) \to \varphi^{V_\kappa}(x))$$

另一方面，要证明 $\forall x \in V_\kappa(\varphi^{V_\kappa}(x) \to \varphi(x))$，只需证明若 $x, y \in V_\kappa$ 且 $f : y \to x$，则 $f \in V_\kappa$

显然若 $f : y \to x$，则 $f \in x^y$，而 $x, y \in V_\alpha$，$x^y \in V_{\alpha+\omega}$，故 $f \in V_\kappa$，$\text{rank}(f) \leq \max\{\text{rank}(x), \text{rank}(y)\} + 2$

2. x 是正则基数被公式 $\varphi(x)$ 表示: "x 是基数"$\wedge \forall f \forall y \in x[(f : y \to x) \to \exists z \in x(\text{ran}(f) \subseteq z)]$

   与 1 类似

3. x 是不可达基数被公式 $\varphi(x)$ 表示: "x 是正则基数"$\wedge \forall f \forall y \in x((f : 2^y \to x) \to \text{ran}(f) \neq x)$

   2^y 是 y 到 2 的全体函数为绝对概念

$\square$

用"I"表示"存在不可达基数"

Lemma 1.74. *如果 ZFC 一致，则 ZFC $+\neg I$ 也是一致的，即*

$$\text{ZFC} \vdash Con(\text{ZFC}) \to Con(\text{ZFC} + \neg I)$$

证明. 设 $V \vDash \text{ZFC} + \text{Con(ZFC)}$，$V \vDash \exists M(ZFC)^M$

先在 $M \vDash \text{ZFC}$，视 M 为集合宇宙，若 κ 是 M 中最小的不可达基数，则 $V_\kappa \vDash \text{ZFC} + \neg I$，即 $M \vDash (\text{ZFC} + \neg I)^{V_\kappa}$

存在 M 中的元素 X 使得 $M \vDash$ "$(X, \in) \vDash \text{ZFC} + \neg I$", 即 $M \vDash (\text{ZFC} + \neg I)^X$，则 $V \vDash ((\text{ZFC} + \neg I)^X)^M$，即 $\forall y \rightsquigarrow \forall y \in X \rightsquigarrow \forall y \in X \cap M$，因此 $V \vDash (\text{ZFC} + \neg I)^{X \cap M}$ （验证：归纳）

注：M 看到 $(X, \in)$ 恰好是 V 看到的 $(X \cap M, \in)$

因此 $V \vDash \text{Con}(\text{ZFC} + \neg I)$

若 M 中不存在不可达基数，则 $M \vDash \text{ZFC} + \neg I$，因此 $V \vDash (\text{ZFC} + \neg I)^M$

事实上 $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1) + AC + \text{Con(ZFC)} \vdash \text{Con}(\text{ZFC} + \neg I)$ （完全性要 AC） $\square$

以上引理表明：ZFC $\nvdash I$

以上证明没有使用哥德尔不完全定理

最好的情况是，“ZFC $+I$”一致，即我们希望 ZFC 下构造“ZFC $+I$”的模型

Corollary 1.75. *在 ZFC 中不能生成“$ZFC+I$”的模型，即*

$$\text{ZFC} + Con(\text{ZFC}) \nvdash Con(\text{ZFC} + I)$$

证明. 否则，假设 ZFC 一致，则 ZFC $+I$ 一致，目标 ZFC $+I \vdash$ Con(ZFC $+I$)

任取 $V \vDash$ ZFC $+I$，则 $V \vDash (\text{ZFC})^{V_\kappa}$，由完全性，$V \vDash$ Con(ZFC)，因此有了矛盾 □

Definition 1.76. 对任意的无穷基数 κ

$$H_\kappa = \{x \mid |\text{trcl}(x)| < \kappa\}$$

称 H_κ 的元素为 **遗传基数 $< \kappa$ 的基数**

称 $x \in H_\omega$ 为 **遗传有穷集**

Lemma 1.77 ($V \vDash$ ZFC)**.** *对任意的无穷基数 κ 有*

$$H_\kappa \subseteq V_\kappa$$

证明. $V = \text{WF}$，只需验证 $\forall x \in H_\kappa$，有 $\text{rank}(x) < \kappa$

设 $x \in H_\kappa$，令 $t = \text{trcl}(x)$，令 $s = \{\text{rank}(y) \mid y \in t\} \subseteq \text{On}$，验证 s 是序数

假设 α 是最小的不属于 s 的序数，$\alpha \subseteq s$，若 $\alpha \neq s$，令 $\beta = \min(s \setminus \alpha)$，因此 $\beta > \alpha$，令 $y \in t$ 使得 $\beta = \text{rank}(y)$，$\forall z \in y$，$z \in t$ 且 $\text{rank}(z) < \text{rank}(y)$，由 β 的极小性，$\forall z \in y(\text{rank}(z) < \alpha)$，$\beta = \text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(z) + 1 \mid z \in y\}$，因此 $\beta \leq \alpha$，矛盾

故 $s = \alpha$，且 $|s| \leq |t| = |\text{trcl}(x)| < \kappa$，所以 $\alpha < \kappa$，$x \subseteq \text{trcl}(x) \subseteq V_s$ □

Lemma 1.78. *如果 κ 是正则基数，则 $H_\kappa = V_\kappa$ 当且仅当 κ 是不可达基数*

证明. 设 κ 不可达，只需证明 $V_\kappa \subseteq H_\kappa$

对 $\alpha<\kappa$ 进行归纳证明：$|V_\alpha|<\kappa$ (练习)

设 $x\in V_\kappa$，则存在 $\alpha<\kappa$ 使得 $x\in V_\alpha$，$\text{trcl}(x)\subseteq V_\alpha$，因此 $|\text{trcl}(x)|<\kappa$

假设 κ 不是不可达基数，则存在 $\lambda<\kappa$，$2^\lambda\geq\kappa$，$\mathcal{P}(\lambda)\in V_{\lambda+\omega}\subseteq V_\kappa$,$|\text{trcl}(P(\lambda))|\geq 2^\lambda\geq\kappa$，因此 $P(\lambda)\in V_\kappa\setminus H_\kappa$ □

Lemma 1.79. *对于任意无穷基数 κ*

1. *H_κ 传递*
2. *$H_\kappa\cap\text{On}=\kappa$*
3. *$x\in H_\kappa\Rightarrow\bigcup x\in H_\kappa$*
4. *$x,y\in H_\kappa\Rightarrow\{x,y\}\in H_\kappa$*
5. *$x\in H_\kappa$ 且 $y\subseteq x$，则 $y\in H_\kappa$*
6. *如果 κ 正则，则*

$$\forall x(x\in H_\kappa\leftrightarrow x\subset H_\kappa\wedge|x|<\kappa)$$

证明.

1. 设 $x\in y\in H_\kappa$，则 $|\text{trcl}(y)|<\kappa$，而 $\text{trcl}(x)\subset\text{trcl}(y)$，因此 $x\in H_\kappa$
2. 若 $\alpha<\kappa$，则 $\alpha=\text{trcl}(\alpha)$，因此 $\alpha\in H_\kappa$

   若 $\alpha\in H_\kappa$，则 $|\alpha|<\kappa$，因此 $\alpha<\kappa$
3. $\bigcup x\subseteq\text{trcl}(x)\Rightarrow\text{trcl}(\bigcup x)\subseteq\text{trcl}(x)$，故 $x\in H_\kappa\Rightarrow\bigcup x\in H_\kappa$
4. $\text{trcl}(\{x,y\})=\{x,y\}\cup\text{trcl}(x)\cup\text{trcl}(y)$
5. $\text{trcl}(y)\subseteq\text{trcl}(x)$
6. 若 $x\in H_\kappa$，由传递性，$x\subset H_\kappa$，$|x|\leq|\text{trcl}(x)|<\kappa$

   若 $x\subset H_\kappa$,$|x|<\kappa$, 设 $x=\{x_i\mid i<\lambda\}$，则 $\text{trcl}(x)=x\cup\bigcup_{i<\lambda}\text{trcl}(x_i)$，若 $|\text{trcl}(x)|\geq\kappa$，则 $\forall\alpha<\kappa$，存在 $i<\lambda$ 使得 $|\text{trcl}(x_i)|>\alpha$，故 λ 与 κ 共尾

$\square$

Theorem 1.80 (ZFC). 若 κ 是不可数正则基数，则 $H_\kappa \models \mathrm{ZFC} - \mathrm{Pow}$

证明. H_κ 传递 $\Rightarrow$ 外延公理

H_κ 非空 $\Rightarrow$ 存在公理

由于 $x \in H_\kappa \leftrightarrow x \subset H_\kappa \wedge |x| < \kappa$，故分离公理 + 替换公理成立

H_κ 对 $\bigcup x$ 与 $\{x, y\}$ 封闭，故对集公理 + 并集公理成立

H_κ 满足以上公理 $\Rightarrow \emptyset, \omega, x^+, x \cap y$ 的绝对性

由于 $\omega \in H_\kappa$, $H_\kappa \models \mathrm{Inf}$

$\emptyset, x \cap y$ 的绝对性，$H_\kappa \models Fud$

选择公理：$\forall x \in H_k \exists R \in H_\kappa (R\text{是 } X \text{ 的良序})^{H_\kappa}$

已知，若 $x, R \in H_\kappa$，则 R 是 x 的良序当且仅当 $(R\text{是 } X \text{ 的良序})^{H_\kappa}$ $(\mathrm{ZF} - \mathrm{Pow})$

只需验证：如果 $X \in H_\kappa$，则 $\forall R \subseteq X \times X$，有 $R \in H_\kappa$

显然 $|X| < \kappa$，因此 $|X \times X| < \kappa$，若 $a, b \in X$，则 $|\mathrm{trcl}((a,b))| < |\mathrm{trcl}(x)| + \aleph_0$，因此 $(a, b) \in H_\kappa$，因此 $R \subset H_\kappa$，根据 (6)，有 $R \in H_\kappa$ $\square$

Theorem 1.81 (ZFC). 如果 κ 是不可数正则基数，*TFAE*

1. $H_\kappa \models \mathrm{ZFC}$
2. $H_\kappa = V_\kappa$
3. κ 不可达

证明. 已知 $2 \leftrightarrow 3$

$1 \to 2 + 3$: 若 κ 不是不可达基数，则存在 $\lambda < \kappa$ 使得 $2^\lambda \geq \kappa$，$\lambda \in H_\kappa$ 且 $\mathcal{P}(\lambda) \notin H_\kappa$，于是 $H_\kappa \not\models \mathrm{Pow}$

$V \models \forall z \in H_\kappa \forall x \in H_\kappa (x \in z \leftrightarrow x \subseteq \lambda)$

$2 \to 1$ 显然 $\square$

以上引理表明，若 κ 正则且不是不可达的，则

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\mathrm{ZFC} - \mathrm{Pow} + \neg \mathrm{Pow})^{H_\kappa}$$

故 Con(ZFC) $\to$ Con(ZFC $-$ Pow $+\neg$ Pow)，即 Pow 不能由 ZFC 中的其它公理推出

Corollary 1.82. *Con*(ZFC) $\to$ *Con*(ZFC $-$ Pow $+\forall(x$ *countable*))

证明. $H_{\omega_1} \vDash$ ZFC $-$ Pow

x 可数：存在 f，$(f : x \to \omega)$ 是双射，只需要这个 f 是属于 H_{ω_1} 就行了，但这是显然的 $\forall x, y \in H_\kappa$, $x^y \in H_\kappa$ 用性质 6

这个可数我们得在 H_{ω_1} 里看到 □

1.9 反映定理

已知 $V \vDash$ ZF $\Rightarrow V_\alpha \vDash Z$ $\alpha > \omega$

$V \vDash$ ZFC $\Rightarrow V_\alpha \vDash$ ZC $(\alpha > \omega)$

$V_\omega \vDash$ ZFC $-$ Inf

V_α 不能"反映"V 的全貌，除非 α 是不可达基数

对不可达基数 κ，V_κ 能"反映"V 的全貌（不全对）

H_κ 也类似，

本节讨论另一个方向：对给定的句子 φ，若 φ 在 V 中成立，则能否找到 α 使得 $V_\alpha \vDash \varphi$

问：是否存在 φ，它在 V 中成立，但是 $\forall\alpha(V_\alpha \nvDash \varphi)$ (因为 ZC 少了无穷条 Rep)

Theorem 1.83 (反映定理)**.** *对于任意有穷 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$，存在 α 使得*

$$V \vDash \varphi_i \Leftrightarrow V_\alpha \vDash \varphi_i (i = 1, \dots, n)$$

即

$$V \vDash \varphi_i \leftrightarrow \varphi_i^{V_\alpha}$$

设 F 是一个集合论语言的公式集，如果对每个 $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F$，对每个 $a_1, \dots, a_n \in M$，有 $M \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow N \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$，则称 M 是 N 的相对于 F 的初等子模型，记作 $M \prec_F N$

反映定理是 Löwenheim–Skolem Theorem 的有穷"版本"，等价地说 F 中的公式相对于 V_α 绝对

Lemma 1.84. 令 $M \subseteq N$ 都是类，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 是对子公式封闭的公式集，则以下命题等价

1. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 相对于 M 和 N 绝对

2. 如果 φ_i 是形如 $\exists x \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_m)$ 的公式，则

$$\forall \bar{y} \in M(\exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y}) \to \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}))$$

证明. $1 \to 2$: 设 φ_i 形如这样的形式，由绝对性

$$\forall \bar{y} \in M(\varphi_i^N(\bar{y}) \leftrightarrow \varphi_i^M(\bar{y}))$$

载有 φ_j 的绝对性,$\forall \bar{y}(\exists x \in M \varphi_j^M(x, \bar{y}) \leftrightarrow \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}))$

$2 \to 1$: 对 φ_i 的长度归纳证明：若 $|\varphi_i|$ 最小，则 φ_i 无量词，因此绝对

若长度小于 $|\varphi_i|$ 的公式都是绝对的，则 φ_i 的所有子公式都绝对，而 φ_i 的形式有以下形式

1. $\varphi_j \to \varphi_k$

2. $\neg \varphi_j$

3. $\exists x \varphi_j(x, \bar{y})$

只需验证情形 3: 任取 $\bar{y} \in M$，由题设条件，

$$\exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y}) \to \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y})$$

由 φ_j 的绝对性，有

$$\exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y}) \to \exists x \in M \varphi_j^M(x, \bar{y})$$

而显然

$$\exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}) \to \exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y})$$

□

这个证明没有用到有穷性，因此无穷情况也成立

Theorem 1.85 (反映定理，ZF)**.** 对于任意有穷公式集 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$，对任意 $\alpha \in \mathrm{On}$，存在 $\beta \geq \alpha$ 使得 F 对 V_β 绝对

在 ZF 中，$\mathrm{WF} = V$

证明. 由于没有选择公理，无法"构造"$\mathcal{H}(V_\alpha)$，V_α 的 Skolem hull

本质上，我们只需要找到一个 V_β 使得每个形如 $\exists x \varphi(x, \bar{y})$ 的公式以及每一组参数 $\bar{b} \in V_\beta$ 有 $V \vDash \exists x \varphi_j(x, \bar{b}) \Leftrightarrow V_\beta \vDash \exists x \varphi_j(x, \bar{b})$，即系数来自 V_β 的方程若有解，则有一个解 $\in V_\beta$

设 $\varphi_i \in F$ 且形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$，定义函数 h_i 如下：

- 任取 $\bar{x} \in V$，令 $U = \{y \mid \varphi_j(\bar{x}, y)\}$
- 若 $U = \emptyset$，则 $h_i(\bar{x}) = 0$
- 若 $U \neq \emptyset$，则存在最小的 ξ 使得 $U \cap V_\xi \neq \emptyset$，此时令 $h_i(\bar{x}) = V_\xi$（用了序数的良序性）
- 函数 h_i 满足

$$\forall \bar{x} (\exists y \varphi_j(\bar{x}, y) \to \exists y \in h_i(\bar{x})) \varphi_j(\bar{x}, y)$$

定义 h_F 为：

$$h_F(x_1, \dots, x_m) = \bigcup \{h_i(x_1, \dots, x_m) : i = 1, \dots, n\}$$

这里必需要求只能有穷多个，因为 h_i 是类

则 h_F 满足：对每个形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$ 的公式，有

$$\forall \bar{x} (\exists y \varphi_j(\bar{x}, y) \to \exists y \in h_F(\bar{x}) \varphi_j(\bar{x}, y))$$

任取 α，递归定义 V_α^i，$i \in \omega$ 如下：

- $V_\alpha^0 = V_\alpha$
- $V_\alpha^{i+1} = V_\alpha^i \cup \bigcup \{h_F(\bar{y}) \mid \bar{y} \in V_\alpha^i\}$

令 $V_\beta = \bigcup V_\alpha^i$，相当于 V_α 的 F-Skolem hull，若 $\varphi_i \in F$ 形如 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$

任取 $\bar{x} \in V_\beta$，则存在 $k < \omega$ 使得 $\bar{x} \in V_\alpha^k$，若 $\exists y \varphi_j(\bar{x}, y)$，则

$$\exists y \in h_F(\bar{x}) \varphi_j(\bar{x}, y)$$

□

Corollary 1.86 (ZF)**.** 令 $F = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ 为 ZF 的有穷子集，则

$$\forall \alpha \exists \beta \geq \alpha (\sigma_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \sigma_n^{V_\beta})$$

证明. 将 F 扩张为 F'，有穷且对子公式封闭，于是 $\forall \alpha \exists \beta \geq \alpha$ 使得 F' 相对于 V_β 绝对

对于 F' 中的句子，有

$$\mathrm{ZF} \vdash \sigma \leftrightarrow \sigma^{V_\beta}$$

□

Corollary 1.87. 设 $F = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subseteq \mathrm{ZF}$，除非 ZF 不一致，否则 "$F \nvdash \mathrm{ZF}$"

证明. 存在 V_β 使得 $\mathrm{ZF} \vdash (F)^{V_\beta}$，若 $F \vdash \mathrm{ZF} \Rightarrow \mathrm{ZF} \vdash (\mathrm{ZF})^{V_\beta}$，故 $\mathrm{ZF} \vdash (\mathrm{ZF})^{V_\beta} \to \mathrm{Con(ZF)}$ (无需 AC，反过来要)，因此 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Con(ZF)}$ □

Remark. 以上推论对 ZF 的任意扩张成立

若 AC 成立，则反映定理可以改进为存在可数 $(M, \in)$ 使得 $M \prec_F V$（绝对性强于 $\prec_F$）

- 若 F 含有无穷公理，则 $M \neq V_\omega$
- 若 F 含有幂集公理，若 M 传递，则没有绝对性
  - 令 $\psi(x, y)$ 表示 $\forall u (u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$，令 $\mathrm{Pow}: \forall x \exists y \psi(x, y)$，则 ψ 与 Pow 不能同时绝对

    M 传递时，$\subseteq \leftrightarrow \subseteq^{\mathrm{eq}}$，若 ψ 绝对，则 V 看到的幂集跟 M 看到的幂集，而 M 是可数的

- 若 $F \subseteq_f$ ZFC，由 Mostowski collapsing 定理，存在传递模型使得 $(M, \in) \cong (N, \in)$

  F 相对于 N 绝对，但是 F 的子公式不一定绝对（比如 ψ 与 Pow）

Theorem 1.88 (ZFC)**.** *对任意有穷公式集 F，对任意集合 N，存在集合 M 使得*

1. $N \subseteq M$
2. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *相对于* $(M, \in)$ *绝对*
3. $|M| \leq |N| + \aleph_0$
4. *若 N 至多可数，则 M 可数*

证明. 不妨设 F 对于子公式封闭，令 $\mathcal{H}_F$ 为 F 对应的 Skolem 函数集，令 $M = \mathcal{H}_F(N)$ （练习） □

Corollary 1.89 (ZFC)**.** *对任意有穷句子集 $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$，对任意的传递集 N，存在 M 满足*

1. $N \subseteq M$
2. F *相对于* $(M, \in)$ *是绝对的*
3. $|M| \leq |N| + \aleph_0$
4. M *传递*

证明. 不妨设外延公理 $\in F$，则存在 $(M', \in)$ 满足 $1-3$

$(M', \in)$ 良基似集合且满足外延公理

故 $G : M' \to V, x \mapsto \{G(y) \mid y \in M' \wedge y \in x\}$ 是 M' 到 $M = G(M')$ 的同构，M 传递，由 M' 的绝对性, $V \vDash \varphi_i \leftrightarrow \varphi_i^{M'}$

由同构

$$\varphi_i^{M'} \Leftrightarrow M' \vDash \varphi_i \Leftrightarrow M \vDash \varphi_i \Leftrightarrow \varphi_i^M$$

故 F 相对于 M 绝对

设 $N \subseteq M'$ 传递，对 N 中元素的 rank 归纳证明：$\forall x \in N(G(x) = x)$，即 $G(N) = N \subseteq M$ □

句子集的绝对性被同构保持，而公式不是这样（例子是幂集公理）

Remark. 若 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 是一个公式，且 $(M, \in) \cong (M', \in)$ 则 φ 相对于

1.10 Exercise

Exercise 1.10.1.
1. $V_\alpha = \{x \in \mathrm{WF} \mid \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$
2. WF is transitive
3. $\forall x, y \in \mathrm{WF}, x \in y \Rightarrow \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$
4. $\forall y \in \mathrm{WF}, \mathrm{rank}(y) = \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

证明.
1. by definition, $x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \setminus V_{\mathrm{rank}(x)}$, $\mathrm{rank}(x) < \alpha \Rightarrow x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \subseteq V_\alpha$

   $\mathrm{rank}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \notin V_\alpha$
2. WF is the "union" of transitive sets
3. $y \in V_{\mathrm{rank}(y)+1} \setminus V_{\mathrm{rank}(y)}$, $y \subseteq V_{\mathrm{rank}(y)}$, $x \in y \Rightarrow x \in V_{\mathrm{rank}(y)} \Rightarrow \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$
4. by 3, $\sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \leq \mathrm{rank}(y)$.

   induction on $\mathrm{rank}(y) \leq \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

   - $\mathrm{rank}(y) = 0$
   - $\mathrm{rank}(y) = \beta + 1$, $y \in V_{\beta+2} \setminus V_{\beta+1}$

     $y \in V_{\beta+2} \Rightarrow y \subseteq V_{\beta+1}$. $y \notin V_{\beta+1} \Rightarrow y \nsubseteq V_\beta \Rightarrow y \setminus V_\beta$ nonempty. Let $x \in y \setminus V_\beta$, $\mathrm{rank}(x) \geq \beta$, $\sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \beta + 1 = \mathrm{rank}(y)$
   - $\mathrm{rank}(y) = \gamma$ for some limit, then $y \subseteq V_\gamma$ and for any $\xi < \gamma$, $y \nsubseteq V_\xi$, let $X_\xi \in y \setminus V_\xi$, then $\mathrm{rank}(X_\xi) \geq \xi$, $\sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \sup\{\xi + 1 \mid \xi < \mathrm{rank}(y)\} \geq \mathrm{rank}(y)$

□

Exercise 1.10.2. R 是似集合的，则 R 是外延的当且仅当对任意 $x, y \in X$

$$x \neq y \to \text{pred}(X, x, R) \neq \text{pred}(X, y, R)$$

Exercise 1.10.3 (7.10.7). 证明莫斯托夫斯基定理中的 **M** 和 **G** 唯一

证明. 假设 M, N 是传递类且 $f : (M, \in) \cong (N, \in)$，$S = \{x \in M \mid f(x) \neq x\}$。因为 $M \neq N$，因此 S 非空，取 S 的极小元 x_0，则对于任意 $y \in x_0$，$y = f(y) \in f(x_0)$，于是 $x_0 \subset f(x_0)$，又因为 f 是双射，同理有 $f(x_0) \subset x_0$，于是 $f(x_0) = x_0$，矛盾。因此 $M = N$。

若 $f_1 : (X, R) \cong (M, \in)$，$f_2 : (X, R) \cong (N, \in)$，则 $M = N$，于是 $f_1 f_2 = f_2 f_1 = \text{id}$，因此 $f_1 = f_2$ □

Exercise 1.10.4 (7.10.8). 证明以下概念对任意 $\text{ZF} - \text{Pow}$ 的传递模型绝对

1. $X^{<\omega}$

证明. 1. $f \in X^{<\omega}$ 当且仅当存在有穷序数 n 使得 $f \in X^n$

而任意这样的模型都有有穷序数 □

Exercise 1.10.5 (7.10.9). $V_\omega \vDash \text{ZF} - \text{Inf} + \neg \text{Inf}$

证明. □