week 1

陈淇奥
21210160025

2022 年 2 月 23 日

Exercise 1 (1.1.5). 令 T 为命题逻辑中的理论

1. 请验证 $\mathcal{B}(T) = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 是一个布尔代数
2. T 是一致的当且仅当 $\mathcal{B}(T)$ 是非平反的

证明. 1. 下面验证 $\mathcal{B}(T)$ 满足布尔代数公理。对于任意公式 $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in B$

(a)

$$
\begin{aligned}
[\alpha] + ([\beta] + [\gamma]) &= [\alpha] + [\beta \vee \gamma] = [\alpha \vee (\beta \vee \gamma)] \\
&= [(\alpha \vee \beta) \vee \gamma] = [\alpha \vee \beta] + [\gamma] = ([\alpha] + [\beta]) + [\gamma] \\
[\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) &= [\alpha] \cdot [\beta \wedge \gamma] = [\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)] \\
&= [(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma] = [\alpha \wedge \beta] \cdot [\gamma] = ([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma]
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta] = [\beta \vee \alpha] = [\beta] + [\alpha] \\
[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [\beta \wedge \alpha] = [\beta] \cdot [\alpha]
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
[\alpha] + ([\alpha] \cdot [\beta]) = [\alpha] + [\alpha \wedge \beta] = [\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)] = [\alpha] \\
[\alpha] \cdot ([\alpha] + [\beta]) = [\alpha] \cdot [\alpha \vee \beta] = [\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)] = [\alpha]
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
[\alpha]\cdot([\beta]+[\gamma]) &= [\alpha]\cdot[\beta\vee\gamma] = [\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)] \\
&= [(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)] = ([\alpha]\cdot[\beta])+([\alpha]\cdot[\gamma]) \\
[\alpha]+([\beta]\cdot[\gamma]) &= [\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)] = [(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)] \\
&= ([\alpha]+[\beta])\cdot([\alpha]+[\gamma])
\end{aligned}
$$

(e)

$$
[\alpha]+(-[\alpha]) = [\alpha]+[\neg\alpha] = [\alpha\vee\neg\alpha] = 1
$$
$$
[\alpha]\cdot(-[\alpha]) = [\alpha]\cdot[\neg\alpha] = [\alpha\wedge\neg\alpha] = 0
$$

2. 若 T 不一致，则对于任意公式 α,β，总有 $T\vdash\alpha\leftrightarrow\beta$，因此 $|B|=1$，$\mathcal{B}(T)$ 平凡

   若 $\mathcal{B}(T)$ 是平凡的，于是对于任意公式 α 与公式 $\beta\in T$，有 $T\vdash\beta\leftrightarrow\alpha$，于是 $T\vdash\alpha$。因此 T 不一致

□

Exercise 2 (1.1.8). 令 $B=\{Y\subseteq X\mid Y\text{是有穷的或余有穷的}\}$，则 $X,\emptyset\in B$。证明 B 对 $\cap,\cup,-$ 封闭，所以 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，是一个集合代数

证明. 对于任意 $X,Y\in B$，

1. 若 X,Y 有穷，则 $X\cap Y$ 有穷，$X\cup Y$ 有穷，$-X$ 余有穷
2. 若 X 有穷，Y 余有穷，则 $X\cap Y$ 余有穷，$X\cup Y$ 余有穷
3. 若 X 余有穷，Y 有穷，则 $X\cap Y$ $X\cup Y$ 余有穷，$-X$ 有穷
4. 若 X,Y 余有穷，则 $X\cap Y,X\cup Y$ 余有穷

□

Exercise 3 (1.1.9). 证明不存在基数为 3 的布尔代数。一个有穷的布尔代数，其基数需要满足什么条件?

证明. 若存在基数为 3 的布尔代数 $\mathcal{B}$，则令 $B = \{0, 1, a\}$。

如果 $-a = 0$, 那么 $a + (-a) = a + 0 = a + (a \cdot (-a)) = a \neq 1$，矛盾。如果 $-a = 1$，那么 $a \cdot (-a) = a \cdot 1 = a \cdot (a + (-a)) = a \neq 0$，矛盾。如果 $-a = a$，那么 $a = a \cdot 1 = a \cdot (a + a) = a \cdot a + a \cdot a = 0 + 0 = 0$，矛盾。

因此不存在基数为 3 的布尔代数。

$|\mathcal{B}| = 2^n$ for some n □

Lemma 1. *给定布尔代数 $\mathcal{B}$，对于任意 $a, b, c \in B$*

1. $a + 0 = a$
2. $a \cdot 1 = a$
3. *若* $a + b = 1$ *且* $a \cdot b = 0$，*则* $b = -a$
4. $-(a \cdot b) = (-a) + (-b)$。$-(a + b) = (-a) \cdot (-b)$
5. $- - a = a$

证明.

1. $a + 0 = a + (a \cdot (-a)) = a$
2. $a \cdot 1 = a \cdot (a + (-a)) = a$
3. $b = b + 0 = b + a \cdot (-a) = (a + b) \cdot (b + (-a)) = 1 \cdot (b + (-a)) = (a + (-a)) \cdot (b + (-a)) = (-a) + (a \cdot b) = -a$
4. $(-a) + (-b) + (a \cdot b) = ab + (-a) + (-b) \cdot (a + -a) = a(b + -b) + (-a)(1 + -b) = a + (-a) = 1.$

   $(a \cdot b) \cdot (-a + -b) = ab(-a) + ab(-b) = 0 + 0 = 0.$

   同理可得 $-(a + b) = (-a) \cdot (-b)$
5. 由 3 可知

□

Exercise 4 (1.1.10). $1 \to 2$: 定义

$2 \to 3$: 对任意 $a, b \in A$, $f(a \cdot b) = f(- - (a \cdot b)) = -f((-a) + (-b)) = -(-f(a) + -f(b)) = f(a) \cdot f(b)$

$3 \to 2$: 对任意 $a, b \in A$，$f(a+b) = f(--(a+b)) = -f((-a)\cdot(-b)) = f(a) + f(b)$

$2 \to 4$: 对任意 $a, b \in A$, $f(1) = f(a + (-a)) = f(a) + -f(a) = 1$, $f(0) = f(-1) = -f(1) = 1$。若 $a \cdot b = 0$，则 $f(a \cdot b) = f(0) = 0$

$4 \to 2$: 对任意 $a \in A$ $f(-a) \cdot f(a) = f(-a \cdot a) = 0$，$f(-a) + f(a) = f(-a + a) = f(1) = 1$，因此 $f(-a) = -f(a)$

因此 $4 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2$，而 $4 \wedge 3 \wedge 2 \to 1$，因此 $2 \to 1$