这样，(x_k, y_0) 在 $X \times Y$ 中就是第

$$(1+2+\cdots k)+1=\frac{k(k+1)}{2}+1$$

个元素。更一般地，$(x_m, y_n) \in D_k$，其中 $n \leq k$，$m = k-n$，是第 $\frac{k(k+1)}{2}+1+n$ 个元素。将 $k = m+n$ 带入，就得到以下函数：

$$f(x_m, y_n)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+n+1. \tag{2.15}$$

不难证明 $f : X \times Y \to \omega$ 是双射，所以 $X \times Y \approx \omega$。 □

注记 2.1.54. 对于初学者，往往会疑惑以上证明中哪里用到了选择公理？关键在于两个“不妨令”上。我们知道 X 可数，所以“存在”一个 ω 到 X 的双射，但这没有给我们一个具体的双射，或者 X 的一个具体的枚举。我们必须“选择”一个。对于 A_m 也是如此。每个 Y 的枚举（即 ω 到 Y 的双射）都给出 A_m 的一个枚举，但同样，Y 可数只是保证存在这样的枚举，而我们必须选择其中一个。因此，实质上我们需要做可数多次选择，这就是使用选择公理的地方。当然，这里只使用了选择公理的一个较弱的形式，被称为“可数选择公理”，即在选择公理中要求非空集合族 X 是可数的。

与此对照，$\omega \times \omega$ 是可数的，其证明完全可以按照引理 2.1.53，但却不需要选择公理。因为 ω 上的良序是具体给定的，不仅仅是“存在”。这体现出所谓构造主义的观点与经典立场的差别之处。

引理2.1.53还蕴涵着 $\mathbb{Q}$ 是可数的。但后者同样不需要选择公理，本质上也是使用 ω 上的那个具体给定的良序。

最后，引理2.1.53的证明也给出了以下推论。

推论 2.1.55. 可数个可数集合的并还是可数的。

2.2　基数算术

本节定义基数的算术运算，即加法，乘法和幂运算，同时研究它们的性质。由于自然数就是有穷基数，因此，在有穷情况下，基数运算等同于自然数的运算，但对于无穷基数，情况则很不相同。

定义 2.2.1. $\kappa \oplus \lambda = |A \cup B|$，其中 $\kappa = |A|$ 而 $\lambda = |B|$，并且 $A \cap B = \emptyset$。

我们对加法的定义不依赖于 A, B 的选择。因而这个定义是合理的。

练习 2.2.2. 如果 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$，而且 $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$，则 $|A \cup B| = |A' \cup B'|$。

容易验证，以上定义的的加法满足：

- 交换律：$\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$；
- 结合律：$\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$；
- $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda$；
- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\kappa_1 \oplus \lambda_1 \leq \kappa_2 \oplus \lambda_2$。

定义 2.2.3. $\kappa \otimes \lambda = |A \times B|$，其中 $|A| = \kappa$ 而 $|B| = \lambda$。

练习 2.2.4. 如果 A, B, A', B' 满足 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$，则 $|A \times B| = |A' \times B'|$。

同样，以上定义的的乘法满足：

- 交换律：$\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$；
- 结合律：$\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu$；
- 分配律：$\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) = \kappa \otimes \lambda \oplus \kappa \otimes \mu$；
- $\kappa \leq \kappa \otimes \lambda$，如果 $\lambda > 0$；
- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\kappa_1 \otimes \lambda_1 \leq \kappa_2 \otimes \lambda_2$。
- $\kappa \oplus \kappa = 2 \otimes \kappa$：如果 $A = \kappa$，则 $2 \otimes \kappa$ 是集合 $\{0, 1\} \times A = \{0\} \times A \cup \{1\} \times A$ 的基数，而 $\{0\} \times A = \{1\} \times A = \kappa$，而它们又是不相交的，所以 $\kappa \oplus \kappa = 2 \otimes \kappa$。所以：

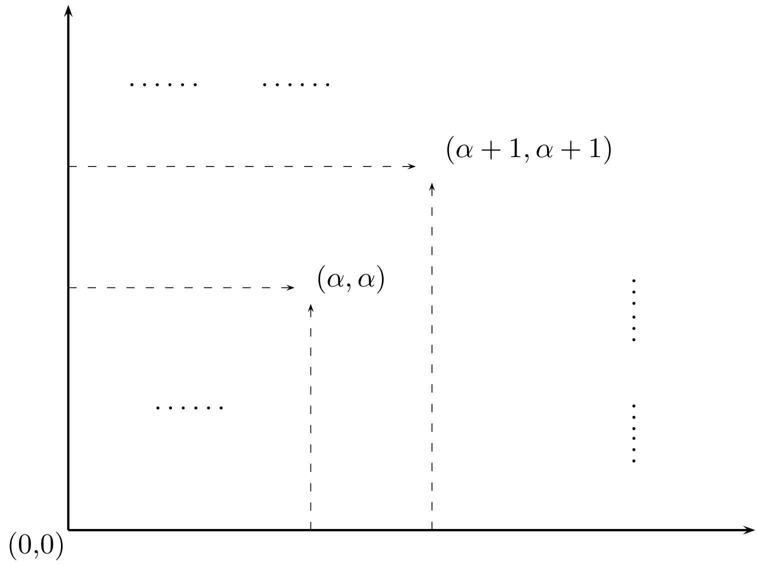

图 2.1: 良序集 $(\kappa\times\kappa,\lhd)$

- 如果 $\kappa\geq 2$，$\kappa\oplus\kappa\leq\kappa\otimes\kappa$。

定理 2.2.5. 对任意无穷基数 κ，$\kappa\otimes\kappa=\kappa$。

证明. 由于 $\kappa=\aleph_0$ 时命题成立（两个可数集合的卡氏积依然可数，见引理2.1.53），我们不妨设 $\kappa\geq\aleph_1$。对 κ 作（无穷基数上的）归纳。假设对任意无穷基数 $\lambda<\kappa$ 命题已成立。我们定义 $\kappa\times\kappa$ 上的一个序 $\lhd$ 为:

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1,\beta_1)\lhd(\alpha_2,\beta_2)\quad\text{当且仅当}\quad & \alpha_1+\beta_1<\alpha_2+\beta_2,\text{或}\\
& \alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2\wedge\alpha_1<\alpha_2,\text{或}\\
& \alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2\wedge\alpha_1=\alpha_2\wedge\beta_1<\beta_2.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

$\lhd$ 实际上是首先按照 $\alpha+\beta$，然后按照字典顺序排序。这个序有时也称为 $\kappa\times\kappa$ 上的“标准序”。

练习 2.2.6. 证明以上定义的 $\lhd$ 是 $\kappa\times\kappa$ 上的良序。

接下来我们证明 $(\kappa\times\kappa,\lhd)$ 的**序型**是 κ。对任意 $\alpha<\kappa$，令 D_α 表示“正方形”$\alpha\times\alpha$ 中的点，即 $(\gamma,\eta)\in D_\alpha$ 当且仅当 $\gamma+\eta<\alpha$。注意到 $\kappa\times\kappa=\bigcup_{\alpha<\kappa}D_\alpha$。

由于 $D_\alpha \subseteq \alpha \times \alpha$，所以根据归纳假设，对任意 $\alpha < \kappa$，$|D_\alpha| \leq |\alpha| < \kappa$，每个良序集 $(D_\alpha, \lhd)$ 都可以一一映射到某个小于 κ 的序数中，或者说每个这样的良序集的序型都小于 κ。所以，$\kappa \times \kappa$ 就可以一一映射到 κ 中。另一方面，每个 D_α 也都是 $\kappa \times \kappa$ 的真前段，所以 κ 也一一映射到 $\kappa \times \kappa$ 中。 □

推论 2.2.7. 对任意无穷基数 κ, λ，$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$。

证明. 不妨设 $\lambda \leq \kappa$，由定理，$\kappa \otimes \lambda \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$，所以 $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \otimes \lambda \leq \kappa$。 □

以下我们定义基数的幂运算，而这将引出集合论的一些根本问题。

定义 2.2.8. 对任意集合 A, B，我们用 A^B 表示全体 B 到 A 的函数的集合，即

$$A^B = \{f \mid f : A \to B\text{是函数}\}. \tag{2.17}$$

练习 2.2.9. 令 A, B 为集合，

(1) A^B 为集合。

(2) 当 $B = \emptyset$ 时，A^B 是什么？

(3) 如果 $A = \emptyset$ 呢？

定义 2.2.10. $\kappa^\lambda = |A^B|$，其中 $|A| = \kappa$ 且 $|B| = \lambda$。

注意到我们使用了与序数运算相同的记法，但一般并不会混淆，读者在阅读时稍加注意即可区分。而且，κ^λ 还表示集合 λ 到集合 κ 全体映射的集合，这个集合的基数就是 κ^λ。

引理 2.2.11. 如果 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$，则 $|A^B| = |A'^{B'}|$。

幂运算满足以下一些性质：

- 如果 $\lambda > 0$，则 $\kappa \leq \kappa^\lambda$；
- 如果 $\kappa > 1$，则 $\lambda \leq \kappa^\lambda$；

- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$；
- $\kappa \otimes \kappa = \kappa^2$：如果 $|A| = \kappa$，则任何 $(a_0, a_1) \in A \times A$ 都是一个 $\{0,1\}$ 到 A 中的函数，反之亦然，所以 $|A \times A| = |A^{\{0,1\}}| = \kappa^2$。

引理 2.2.12. 假设 κ, λ 是无穷基数，则

（*1*）$\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$；

（2）$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$；

（*3*）$(\kappa \otimes \lambda)^\mu = \kappa^\mu \otimes \lambda^\mu$；

（*4*）$2^\kappa > \kappa$。

证明. 见习题2.6.5。 □

引理 2.2.13. 如果 $2 \leq \kappa \leq \lambda$ 并且 λ 是无穷基数，则 $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^\lambda$。

证明. 练习。 □

定义 2.2.14. 假设 X 为集合，

(1) 如果 α 为序数，我们令 $X^{<\alpha} = \bigcup\{X^\beta \mid \beta < \alpha\}$；

(2) 如果 λ 是基数，则定义 $\kappa^{<\lambda} = |X^{<\lambda}|$，其中 $|X| = \kappa$。

(3) 我们以 $[\kappa]^\lambda$ 表示集合 $\{X \subseteq \kappa \mid |X| = \lambda\}$ 的基数，注意，当 $\kappa < \lambda$ 时，$[\kappa]^\lambda = 0$；

(4) 类似地，我们以 $[\kappa]^{<\lambda}$ 表示集合 $\{X \subseteq \kappa \mid |X| < \lambda\}$ 的基数。

命题 2.2.15. 对任意无穷基数 κ, λ，

（*1*）　$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\eta \mid \eta$ 是基数并且 $\eta < \lambda\}$；

（2）　如果 $\lambda \leq \kappa$，则 $[\kappa]^\lambda = \kappa^\lambda$；

（*3*）　如果 $\lambda \leq \kappa$，则 $[\kappa]^{<\lambda} = \kappa^{<\lambda}$。

证明.（1）假设 $\gamma = \sup\{\kappa^\eta \mid \eta$是基数并且 $\eta < \lambda\}$，我们证明 $\kappa^{<\lambda} = \gamma$。一个方向是平凡的，因为集合 $\{\kappa^\eta \mid \eta$是基数并且 $\eta < \lambda\} \subseteq \{\kappa^{|\beta|} \mid \beta < \lambda\}$，所以

$$\gamma = \sup\{\kappa^\eta \mid \eta\text{是基数并且 } \eta < \lambda\} \leq \sup\{\kappa^{|\beta|} \mid \beta < \lambda\} = \kappa^{<\lambda}. \tag{2.18}$$

另一方面，对任意 $\alpha < \lambda$，如果 $|\alpha| = \eta$，则 $|\kappa^\alpha| = \kappa^{|\alpha|} = \kappa^\eta \leq \gamma$，所以 $\kappa^{<\lambda}$ 是不多于 γ 个基数不大于 γ 的集合的并，所以 $\kappa^{<\lambda} \leq \gamma$。

（2）对任意 $X \in \{X \subseteq \kappa \mid |X| = \lambda\}$，令 $[f]_X = \{f \mid f : \lambda \to \kappa$ 并且 $\mathrm{ran}(f) = X\}$，则所有这些 $[f]_X$ 构成一个非空集合的族 $\mathcal{F}$。如果令 $h(X) = [f]_X$ 为 $[\kappa]^\lambda$ 到 $\mathcal{F}$ 的双射而 g 为 $\mathcal{F}$ 上的选择函数，则 $g \circ h$ 为 $[\kappa]^\lambda$ 到 κ^λ 中的单射，所以 $[\kappa]^\lambda \leq \kappa^\lambda$。另一个方向，注意到对任意 $f \in \kappa^\lambda$，f 都是 $\lambda \otimes \kappa$ 的子集并且 $|f| = \lambda$，所以 $\kappa^\lambda \leq [\lambda \otimes \kappa]^\lambda$，而由于 $\lambda \otimes \kappa = \kappa$，所以后者等于 $[\kappa]^\lambda$。

（3）由（2），

$$\begin{aligned} [\kappa]^{<\lambda} &= \bigcup\{[\kappa]^\eta \mid \eta < \lambda \text{ 且 } \eta \text{ 是基数}\} \\ &= \bigcup\{\kappa^\eta \mid \eta < \lambda \text{ 且 } \eta \text{ 是基数}\} \end{aligned}$$

而根据（1），这正是 $\kappa^{<\lambda}$。 □

练习 2.2.16. 证明 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$。

关于基数的幂运算我们已经知道一些事实，例如，对任意 $\aleph_\alpha$，$2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$，特别地，$2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$。既然所有的无穷基数都是某个 $\aleph_\alpha$，那 $2^{\aleph_0} = \aleph_?$ 呢？由于我们还知道 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$，这个问题就有了更能引起兴趣的形式：实数到底有多少个呢？康托的连续统假设 CH（Continuum Hypothesis）给出了如下回答：实数恰好是比自然数大的第一个无穷，即：

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{2.19}$$

而自然地，所谓的广义连续统假设 GCH（General Continuum Hypothesis）就是：

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}. \tag{2.20}$$

今后我们常会将 $2^{\aleph_0}$ 称为**连续统的基数**，将函数 $2^{\aleph_\alpha}$ 称为**连续统函数**。康托花费了很多年试图去证明这一假设。事实上，他已经证明至少对于实数的闭子集，连续统假设是成立的：每个不可数的闭集都具有连续统的基数。这也是他在连续统问题上取得的最好结果，虽然他始终坚信会找到关于这个问题的证明。

2.3 共尾

共尾概念在基数算术的研究中有着极为重要的作用。我们可以把它看作对如下现象的刻画：比起 $\aleph_0$，$\aleph_\omega$ 是一个很大的基数，但却存在从 $\aleph_0$ 到 $\aleph_\omega$ 的映射 $f(n) = \aleph_n$，f 的值域在 $\aleph_\omega$ 中是“无界的”，就是说我们能在 ω 步内从下面达到 $\aleph_\omega$。而另一方面，$\aleph_1$，比起 $\aleph_\omega$ 要小很多，但却不存在满足以上条件的由 $\aleph_0$ 到 $\aleph_1$ 的映射，从这个角度，$\aleph_1$ 比 $\aleph_\omega$“大”。

定义 2.3.1. （1）设 A 是序数 α 的子集，如果 A 满足

$$\forall \gamma < \alpha \exists \xi \in A(\gamma \leq \xi), \tag{2.21}$$

则称 A 在 α 中是无界的。

（2）对任意序数 α，$\mathrm{cf}(\alpha)$ 是满足以下性质的最小序数 β:

$$\text{存在映射} f : \beta \to \alpha, \text{使得} f[\beta] \text{在} \alpha \text{中是无界的。}$$

这样的映射 f 称为共尾映射，$\mathrm{cf}(\alpha)$ 称为 α 的共尾。

（3）对任何序数 α，如果 $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$，就称 α 是正则的，不是正则的序数称为奇异的。

命题 2.3.2. （*1*）$A \subset \alpha$ 是无界的当且仅当 $\alpha = \bigcup\{\xi + 1 \mid \xi \in A\}$。因此，对任意序数，如果 $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ 是共尾映射，则 $\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}[f(\xi) + 1] = \alpha$。

（*2*）对任意 α，$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$;

（*3*）任意后继序数 $\alpha = \beta + 1$ 的共尾是 1;

（*4*）对任意极限序数 $\alpha > 0$，$\mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega$。

证明. 练习。 □

以上命题表明，只有极限序数的共尾是令人感兴趣的。

定理 2.3.3. 对任何极限序数 α 都存在一个严格递增的共尾映射：$f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$。

证明. 如果 α 是极限序数，并且 $g : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ 是共尾映射。对任意 $\eta < \mathrm{cf}(\alpha)$，递归定义

$$f(\eta) = \max\{g(\eta), \bigcup_{\xi<\eta}(f(\xi)+1)\}. \tag{2.22}$$

显然，对任意 $\xi < \eta < \mathrm{cf}(\alpha)$，$f(\xi) < f(\xi)+1 \le f(\eta)$。所以 f 是严格递增函数。以下证明 f 是共尾映射。首先我们归纳证明

$$\text{对任意}\eta < \mathrm{cf}(\alpha), f(\eta) \in \alpha. \tag{2.23}$$

即 f 是 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 的映射。假设对任意 $\xi < \eta < \mathrm{cf}(\alpha)$，$f(\xi) \in \alpha$，则

$$f(\eta) = \max\{g(\eta), \bigcup_{\xi<\eta}(f(\xi)+1)\} \le \alpha. \tag{2.24}$$

但是 $f(\eta)$ 不能等于 α，否则 $f \restriction \eta$ 就是到 α 的共尾映射，即 $\eta \ge \mathrm{cf}(\alpha)$，矛盾。其次，对任意 $\xi \in \alpha$，存在 $\eta < \mathrm{cf}(\alpha)$，$\xi \le g(\eta) \le f(\eta)$。 □

推论 2.3.4. 对任意极限 α，$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$。

证明. 令 $f : \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \to \mathrm{cf}(\alpha)$ 和 $g : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ 为严格递增的共尾映射。考虑 $g \circ f : \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \to \alpha$。对任意 $\xi \in \alpha$，存在 $\eta < \mathrm{cf}(\alpha)$，$\xi \le g(\eta)$；而对于 η，存在 $\zeta \in \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$，$\eta \le f(\zeta)$，因此

$$\xi \le g(\eta) \le g(f(\zeta)) = (g \circ f)(\zeta). \tag{2.25}$$

所以 $g \circ f$ 是共尾映射，所以 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \ge \mathrm{cf}(\alpha)$，所以 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$。 □

也即是说任意序数的共尾都是正则的。又，所有正则的序数都是基数，所以任意一个序数的共尾都是基数。

练习 2.3.5. 假设 γ 是极限序数，$(\alpha_\xi, \xi < \gamma)$ 是序数的严格递增序列，而 α 是它的极限，则 $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\gamma)$。

定理 2.3.6. 对任意无穷基数 κ，κ^+ 是正则的。

证明. 令 $\alpha < \kappa^+$，$f : \alpha \to \kappa^+$ 为函数。显然 $|\alpha| \le \kappa$，并且对任意 $\xi < \alpha$，$|f(\xi)| \le \kappa$。这样，$|\bigcup_{\xi<\alpha}(f(\xi)+1)| \le \kappa$，所以 $\bigcup_{\xi<\alpha}(f(\xi)+1) \ne \kappa^+$。这就证明了对任意 $\alpha < \kappa^+$，$\mathrm{cf}(\kappa^+) \ne \alpha$。因此 $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$。 □

这个定理表明，任何奇异的基数都是极限基数。考虑任意无穷基数 $\aleph_\alpha$，存在由 $\aleph_\alpha$ 开始的序列：

$$\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1}, \aleph_{\alpha+2}, \cdots, \aleph_{\alpha+n}, \cdots$$

显然 $f(n) = \aleph_{\alpha+n}$ 是 ω 到 $\aleph_{\alpha+\omega}$ 的共尾映射，即 $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\omega}) = \omega$，因此，$\aleph_{\alpha+\omega}$ 是奇异基数。这就表明，对任意无穷基数，总存在比它大的奇异基数。

后继基数都是正则的，ω 也是正则的，那是否存在大于 ω 的正则极限基数呢？假设存在这样的极限基数 $\aleph_\alpha$，由于 α 是极限序数，故 $\aleph_\alpha = \bigcup\{\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$。因此 $f : \alpha \to \aleph_\alpha$ 是共尾映射，所以 $\aleph_\alpha = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \alpha$，这蕴涵着 $\aleph_\alpha = \alpha$。这就说明，一个极限基数是正则基数的必要条件是：$\alpha = \aleph_\alpha$. 但这并不是充分条件。任取 $\aleph_\gamma$，构造基数的序列：

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \aleph_\gamma \\ \alpha_{n+1} &= \aleph_{\alpha_n} \end{aligned} \tag{2.26}$$

令 $\alpha = \bigcup\{\alpha_n \mid n < \omega\}$，则 $\aleph_\alpha = \alpha$，然而，由于 $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$，因此 α 是奇异基数，这同时也证明了存在任意大的奇异基数。事实上，正则的极限基数被称为**弱不可达基数**，我们在 ZFC 中不能证明存在这样的基数。一个正则基数 κ 如果还是**强极限的**，即对任意 $\lambda < \kappa$，都有 $2^\lambda < \kappa$（定义见2.5.2），则称 κ 是**强不可达基数**，或**不可达基数**。在 ZFC 中自然也不能证明不可达基数的存在。

正如我们已经提到的，共尾在基数算术中有很重要的应用，这一点在以下定理以及随后的章节中都会有所体现。

引理 2.3.7 (寇尼希引理)**.** 对任何无穷基数 κ，

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa. \tag{2.27}$$

证明. 令 $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ 为共尾映射，令 $G : \kappa \to \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ 为任意函数，我们证明 G 不可能是满射。为此定义 $h \in \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ 为：对任意 $\alpha \in \mathrm{cf}(\kappa)$，

$$h(\alpha) = \min(\kappa - \{G(\xi)(\alpha) \mid \xi < f(\alpha)\}). \tag{2.28}$$

由于 $|\{G(\xi)(\alpha) \mid \xi < f(\alpha)\}| \leq |f(\alpha)| < \kappa$，所以以上定义是合理的。对任意 $\xi < \kappa$，总存在 $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ 使得 $\xi < f(\alpha)$，所以 $h(\alpha) \neq G(\xi)(\alpha)$。因此，对任意 $\xi < \kappa$，$h \neq G(\xi)$，即 $h \notin G[\kappa]$。 □

推论 2.3.8. 对任意序数 α，$\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$。

证明. 反设 $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) \leq \aleph_\alpha$，则 $(2^{\aleph_\alpha})^{\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$，与定理矛盾。 □

注记 2.3.9. （1）由此我们可以立即得到 $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$，而这意味着 $2^{\aleph_0}$ 不能是 $\aleph_\omega$，也不能是 $\aleph_{\omega+\omega}$ 等等。这一结果的意义在于，它是目前已知的 ZFC 对连续统基数的唯一限制。

（2）对于连续统函数 $2^{\aleph_\alpha}$，除了以上推论，已知 ZFC 对它仅有的限制是单调性，即 $\alpha < \beta$ 蕴涵 $2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta}$。

推论 2.3.10. 对任意序数 α, β，$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) > \aleph_\beta$。

证明. 与推论2.3.8类似，留作练习。 □

2.4　无穷和与积

定义 2.4.1. 假设 $\{\kappa_i \mid i \in I\}$ 为一集基数，而 $\{X_i \mid i \in I\}$ 为两两不交的集合族，并且对任意 $i \in I$，$X_i = \kappa_i$，则

$$\bigoplus_{i\in I} \kappa_i = \bigcup_{i\in I} X_i; \quad \bigotimes_{i\in I} \kappa_i = \prod_{i\in I} X_i. \tag{2.29}$$

首先注意到，由选择公理可以证明，以上定义不依赖于 X_i 的选择。同时，$\bigotimes$ 的定义并不要求 X_i 是两两不交的。以下我们证明一些简单事实。

命题 2.4.2. 若 λ 为无穷基数而 $\{\kappa_\xi\}_{\xi<\lambda}$ 是非零基数的序列，则 $\bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \lambda \otimes \sup_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$。

证明. 令 $\kappa = \sup_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$，对任意 $\xi < \lambda$，显然有 $\kappa \geq \kappa_\xi$，所以 $\bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa = \lambda \otimes \kappa$。另一方面，$\lambda$ 和 κ 都不大于 $\bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$，因此 $\lambda \otimes \kappa = \max(\lambda, \kappa) \leq \bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$。 □