第二章　格

在布尔代数中，我们用 + 定义 $\leq$：$a \leq b$ 当且仅当存在 c，$a+c=b$。同时，我们也看到偏序集与布尔代数以及逻辑的平行关系：同一个结果，例如引理1.3.9，可以有代数和偏序集的两种版本。（也有逻辑的版本。）

这一章我们尝试以序为基本概念。

2.1　序与格

我们已经熟悉了偏序集的概念，对任意一个偏续集 $(P,\leq)$，如果 $X \subseteq P$，$\sup X$ 和 $\inf X$ 分别为 X 的上确界和下确界。

定义 2.1.1. 对任意非空的偏序集 $(L,\leq)$，如果任意 $a,b \in L$，$\sup\{a,b\}$，$\inf\{a,b\}$ 都存在并属于 L，就称 L 是一个格。

注记 2.1.2. 如果只有 $\inf\{a,b\}$ 或只有 $\sup\{a,b\}$ 存在，就称为下半格和上半格。

例 2.1.3. 例如 $(\mathbb{N},\leq)$ 是一个格。事实上，任意线序集都是格。同时，所有布尔代数作为偏序集都是格。

引理 2.1.4. *令 $(L,\leq)$ 为格，定义 $a+b=\sup\{a,b\}$，$a\cdot b=\inf\{a,b\}$，则*

(1) 幂等律：$a+a=a$，$a\cdot a=a$；

(1) 结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$，$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$；

(2) 交换律：$a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$；

(3) 吸收律：$a + (a \cdot b) = a$，$a \cdot (a + b) = a$;

练习 2.1.5. 反之，如果一个结构 $(L, +, \cdot)$ 满足引理中的（1）-（4），定义 $a \le b$ 为：$a + b = b$，$\inf\{a, b\} = a \cdot b$，$\sup\{a, b\} = a + b$，则 $(L, \le)$ 是一个格。

例 2.1.6. 令 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，$S = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的所有子代数的集合，则 S 在 $\subseteq$ 下是一个格。对任意 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$，$\inf\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} = \bigcap\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$。但是 $\sup\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \neq \bigcup\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$，因为后者不一定是 $\mathcal{B}$ 的子代数。$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 的上确界是 $A_1 \cup A_2$ 生成的子代数。

格的定义中只要求两个元素的集合有上确界和下确界，这当然等价于任意有穷子集有上确界和下确界。

练习 2.1.7. 偏序集 L 是一个格当且仅当对任意 $X \subseteq_f L$，$\sup X$ 和 $\inf X$ 存在。

定义 2.1.8. 令 L 为格，如果对任意 $X \subseteq L$，$\inf X$ 和 $\sup X$ 存在，就称 L 是**完全的**。为了符号一致性，我们将它们分别记作 $\prod X$ 和 $\sum X$。

作为偏序集，并非所有的格有极大和极小元，有极大极小元的格称为**有界的**。如果 L 有极大极小元，则分别记作 1 和 0。

如果 L 是完全的，它一定是有界的。$\prod L$ 和 $\sum L$ 分别是 L 的极小元和极大元。

练习 2.1.9. 如果 L 是完全的，$\prod \varnothing$ 和 $\sum \varnothing$ 分别是什么?

练习 2.1.10. 在偏序集 $(L, \le)$ 中，如果对任意非空的 $X \subseteq L, \prod X$ 都存在，则对任意 $X \subseteq L$，如果 X 有上界，则 $\sum X$ 也存在。

引理 2.1.11. 令 L 为一个格，则以下命题等价：

(1) L 是完全的；

(2) 对任意 $X \subseteq L$，$\prod X \in L$;

(3) L 有最大元 1 并且对任意非空 $X \subseteq L, \prod X \in L$。

推论 2.1.12. 令 A 为集合，$L \subseteq \mathcal{P}(A)$，假设 $A \in L$ 并且 L 对任意交封闭，则 L 是一个完全格，其中对任意 $X \subseteq L$，$\prod X = \bigcap X$，而

$$\sum X = \bigcap \{B \in L \mid \bigcup X \subseteq B\}.$$

练习 2.1.13. 对任意格 L，$+$ 关于 $\cdot$ 的分配律成立当且仅当 $\cdot$ 关于 $+$ 的分配律成立。

练习 2.1.14. 令 $M_3 = \{0, a, b, c, 1\}$，a, b, c 不可比。求证：$+$ 关于 $\cdot$ 的分配律和 $\cdot$ 关于 $+$ 的分配律在 L 中都不成立。

所以，与布尔代数不同，分配律在格中不一定成立。关于 $+, \cdot$ 的两个分配律成立的格称为**分配格**。

前面提到每个布尔代数在 $+, \cdot$，但即使是有界的分配格也不一定是布尔代数。

练习 2.1.15. 任意有端点的线序都是一个分配格，但不是布尔代数。

定义 2.1.16. 令 L 为一个有界格，

(1) 对任意 $a \in L$，如果存在 $b \in L$，$a + b = 1$ 并且 $a \cdot b = 0$，就称 b 是 a 的补。

(2) 如果对任意 $a \in L$，a 的补都存在，就称 L 是**补封闭的**。

显然，如果 a 是 b 的补，则 b 也是 a 的补。0 的补是 1。

练习 2.1.17. 证明：如果 L 是分配格，则对任意 $a \in L$，如果 a 的补存在，则是唯一的。

定理 2.1.18. 一个补封闭的分配格是一个布尔代数。

与布尔代数类似，我们可以讨论关于格的以下概念：子格，格之间的同态、同构、嵌入等等。同样，也可以讨论格上的滤和理想。由于不是所有格都有 0 和 1，即不都是有界的，所以格上的滤和理想的定义略有不同。

定义 2.1.19. 令 L 是一个格，L 上的理想 I 是满足以下条件的子集：

(1) 如果 $x, y \in I$，则 $x + y \in I$；

(2) 对任意 $x \in I$，$a \in L$，$x \cdot a \in I$。

L 上的滤 F 是满足以下条件的子集:

(3) 如果 $x, y \in F$，$x \cdot y \in F$；

(4) 对任意 $x \in F$，$a \in L$，$x + a \in F$。

这样，在有界格的情形下，以上定义与我们的定义是一致的，除了：L 上的理想可以包含 1，滤可以包含 0。不过，此时它们都等于 L 本身。今后将不等于 L 本身的滤和理想称为真滤和真理想。

2.2　理想格

令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，我们考虑 $\mathcal{B}$ 的全体理想的族:

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \text{是 } \mathcal{B} \text{ 的理想}\},$$

我们证明在集合的 $\subseteq$ 关系下，$\mathcal{I}$ 是一个完全的分配格。

理想与滤是对偶的概念，以上的结论对

$$\mathcal{F} = \{F \mid F \text{是 } \mathcal{B} \text{ 的滤}\}$$

也同样成立：$\mathcal{B}$ 的全体滤的族也构成一个完全的分配格。

显然，$(\mathcal{I}, \subseteq)$ 是偏序集。对任意 $I, J \in \mathcal{I}$，$I \cap J$ 还是理想，所以 $\inf\{I, J\}$ 存在。但是 $I \cup J$ 通常不是理想，所以 $\sup\{I, J\}$ 只能定义为 $I \cup J$ 生成的理想，即包含 I, J 的最小的理想。自然，我们用 $I + J$ 和 $I \cdot J$ 表示它们的上确界和下确界。

我们在前面讨论过 $\mathcal{B}$ 的子集 G 可以生成滤的条件：G 有有穷交性质。从这里关于滤和理想的定义看，这个条件等价于 G 生成的滤是真滤，即不等于 B 本身。以下引理则是刻画 G 生成的理想中元素的性质。

引理 2.2.1. 假设 I 是 G 生成的理想，$a \in I$ 当且仅当存在有穷的 $X \subseteq G$，$a \leq \sum X$。

证明. 令 $J = \{a \in B \mid \exists X \subseteq_f G(a \leq \sum X)\}$。我们首先证明 J 是一个理想。如果 $a, b \in J$，$a + b \in J$ 是显然的。$0 \leq \sum \varnothing$，所以 $0 \in J$。最后，假设 $x \in J$，$a \in B$，令 $x \leq \sum X$，其中 $X \subseteq_f G$。显然 $x \cdot a \leq a \leq \sum X$。

另外，注意到 $G \subseteq J$，所以 $I \subseteq J$。我们只需再证明 $J \subseteq I$。但是，G 的任意有穷子集 X，$\sum X \in I$，所以如果 $a \leq \sum X$，则 $a \cdot \sum X = a \in I$。 □

虽然前面已经研究过关于滤的结果，但我们顺带讨论以上定理的一些推论。

练习 2.2.2. 如果一个理想是有穷生成的，则它是主理想。

推论 2.2.3. 如果 I 是 $\mathcal{B}$ 的全体原子生成的理想，则 I 是真理想当且仅当 $\mathcal{B}$ 是无穷的布尔代数。

证明. 如果 $\mathcal{B}$ 是有穷的，则 $\mathcal{B}$ 是原子化的。令 $A \subseteq B$ 为它的全体原子，A 是有穷的。不难看出，$1 \leq \sum A$。这是因为对任意 $b \in B$，都有 $b = \sum\{a \in A \mid a \leq b\}$，所以 $b \leq \sum A$。这样，$1 \in I$，所以 I 不是真理想。

如果 I 不是真理想，即 $1 \in I$。存在 $X \subseteq_f A$，$1 \leq \sum X$，这蕴含 $1 = \sum X$。这又蕴含 $\mathcal{B}$ 是原子化的并且 $X = A$。所以 $\mathcal{B}$ 是有穷的布尔代数。 □

引理 2.2.4. 令 I 为 $\mathcal{B}$ 上的理想，$a \in B \setminus I$，如果 J 是 $I \cup \{a\}$ 生成的滤，则

$$J = \{b + c \mid b \leq a \wedge c \in I\}$$

证明. 根据引理，$x \in J$ 当且仅当存在 $X \subseteq_f I \cup \{a\}$，$x \leq \sum X$。由于 X 有穷且 I 是理想，所以这等价于存在 $y \in I$，$x \leq y + a$。后者等价于 $x \cdot (y + a) = x \cdot y + x \cdot a = x$。令 $b = x \cdot y \in I$ 而 $c = x \cdot a \leq a$，则 $x = b + c$。 □

推论 2.2.5. 令 I 为 $\mathcal{B}$ 上的真理想，$a \in I$。如果 J 是 $I \cup \{a\}$ 生成的理想，则 J 是真理想当且仅当 $-a \notin I$。

证明. 如果 J 不是真理想，则 $-a \in J$，我们只需证明 $-a \in I$。由前面的引理，存在 $b \le a, c \in I$，$-a = b + c$。简单的计算可以验证 $-a \cdot c = -a$，所以 $-a \le c$，$-a \in I$。 □

引理 2.2.6 (Stone)**.** 假设 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{B}$ 的所有理想的族，对任意 $I, J \in \mathcal{I}$，

$$\begin{aligned} I + J &= \{a + b \mid a \in I \wedge b \in J\} \\ I \cdot J &= \{a \cdot b \mid a \in I \wedge b \in J\}. \end{aligned}$$

证明. 先证第一个关于 $+$ 的等式。假设 $a \in I, b \in J$，则 $a + b \in I + J$ 是显然的，所以等式右边是左边的子集。现在假设 $c \in I + J$，存在 $X \subseteq_f I + J$，$c \le \sum X$。令 $x = \sum(X \cap I), y = \sum(Y \cap J)$，则 $c \le x + y$。令 $a = c \cdot x$，$b = c \cdot y$，显然，$c = c \cdot (x + y) = c \cdot x + c \cdot y = a + b$。但是，$a \in I, b \in J$，所以左边也是右边的子集。

对于 $I \cdot J$，注意到它就是 $I \cap J$。对任意 $a \in I, b \in J$，$a \cdot b \in I$ 并且 $a \cdot b \in J$，即 $a \cdot b \in I \cdot J$。反过来，对任意 $a \in I \cap J$，$a = a \cdot a$。 □

引理 2.2.7. 布尔代数 $\mathcal{B}$ 的所有理想的族 $\mathcal{I}$ 是一个完全的分配格。

证明. 令 $X \subseteq \mathcal{I}$ 为任意一组理想，显然，$\bigcap X$ 是理想，并且是 X 的下确界。而 $\bigcup X$ 不是理想，但它生成一个理想，是 X 的上确界。需要注意的是，我们此处将 B 本身看作理想，所以 $\bigcup X$ 生成的理想总是存在的。这样，$\mathcal{I}$ 是完全的格。

对任意 $I, J, K \in \mathcal{I}$，我们需要验证

$$I + (J \cdot K) = (I + J) \cdot (I + K).$$

根据前面的引理，等式左边可表示为：

$$\{a + (b \cdot c) \mid a \in I \wedge b \in J \wedge c \in K\},$$

而这又等于

$$\{(a + b) \cdot (a + c)) \mid a \in I \wedge b \in J \wedge c \in K\}.$$

再次运用引理，这等于

$$(I + J) \cdot (I + K).$$

类似地可以证明

$$I \cdot (J + K) = (I \cdot J) + (I \cdot K).$$

□

虽然很接近，但理想格不一定是布尔代数，因为不是所有的理想都有补。

引理 2.2.8. *如果布尔代数 $\mathcal{B}$ 有一个极大的非主理想 I_0，则 I_0 在 $\mathcal{I}$ 中没有补，所以 $\mathcal{I}$ 不是布尔代数。*

证明. 假设 J 是 I_0 的补，则 $I_0 \cdot J = \{0\}$，$I_0 + J = B$。任取 $x \in J$，对任意 $a \in I_0$，$a \cdot x = 0$。所以 $a \leq -x$，所以，如果 $(-x)$ 是 $-x$ 生成的主滤，则 $I_0 \subseteq (-x)$。由于 I_0 不是主滤，所以它不能等于 $(-x)$。所以 $(-x) = B$，也就是说 $-x = 1$，$x = 0$。这证明了 $J = \{0\}$。但这样一来，依据 $I_0 + J = B$，立刻有 $I_0 = B$，与 I_0 是非主滤矛盾。 □

理想的对偶概念是滤，以上关于理想的结果对于滤也都成立。具体说：如果 $\mathcal{F}$ 是布尔代数 $\mathcal{B}$ 上的所有滤的族，$\mathcal{F}$ 是一个完全的分配格。

引理 2.2.9. *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$\mathcal{I}, \mathcal{F}$ 为其上理想和滤。定义 $h : \mathcal{I} \to \mathcal{F}$ 为 $f(I) = -I$，即 I 的对偶滤，则 h 是格同构。*

证明. 令 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ 为如此定义的映射：$f(F) = -F$。对任意 $F \in \mathcal{F}$，我们有

$$h(f(F)) = h(\{-a \mid a \in F\}) = \{-(-a) \mid a \in F\} = F,$$

反之，对任意 $I \in \mathcal{I}$，

$$f(h(I)) = f(\{-a \mid a \in I\}) = \{-(-a) \mid a \in I\} = I,$$

所以 h 是双射。

对任意 $I, J \in \mathcal{I}$，如果 $I \subseteq J$，则显然有 $-I \subseteq -J$，这就意味着 $h(I) \subseteq h(J)$，反之依然。所以 h 保持格上的偏序，因此是一个格同构。 □