1.3.4　序

定义 1.3.16. 如果集合 X 上的二元关系 $<$ 满足（1）传递性：$x < y$ 并且 $y < z$ 蕴涵 $x < z$，（2）反对称：$x < y$ 蕴涵 $\neg y < x$，就称 $<$ 为**偏序**。

如果偏序关系 $<$ 还满足（3）三歧性：对任意 $x \neq y$，$x < y$ 或 $y < x$，就称 $<$ 为**线序**或**全序**。

如果偏序集 $<$ 满足（4）良基性：如果 $Y \subseteq X$ 是非空的，则存在 $y_0 \in Y$，对任意 $y \in Y$，都有 $y_0 = y$ 或 $y_0 < y$，就称 $<$ 是**良序**。

记法 1.3.17. 今后我们用 $x \leq y$ 表示 $x < y$ 或 $x = y$，并且如果 $<$ 是偏序、线序或良序，则相应地也称 $\leq$ 为偏序、线序或良序。同时，我们也用 $(X, <)$ 表示 $<$ 是 X 上的序。

练习 1.3.18. 令 $<$ 为偏序。证明：

- $<$ 是非自反的：$\neg x < x$；【事实上，在偏序的定义中，我们可以用非自反性代替反对称性：传递性与非自反性也可以得到反对称性。】
- 如果 $<$ 是良序，则它也是线序。
- 如果 $<$ 是 X 上的良序，$Y \subseteq X$，则 $<$ 也是 Y 上的良序。以上结果对线序也成立。

练习 1.3.19. 证明自然数 $\mathbb{N}$ 上的小于关系 $<$ 是良序；整数 $\mathbb{Z}$，有理数 $\mathbb{Q}$，实数 $\mathbb{R}$ 上的小于关系是线序，但不是良序。

1.3.5　从自然数到序数

到目前为止，已有的公理已经可以让我们在集合论中“模拟”（你也可以说是定义）单个自然数。显然，0 就是空集 $\emptyset$。为了模拟后继，我们做以下定义：

定义 1.3.20. 对任意集合 x，集合 $x \cup \{x\}$ 称为 x 的**后继**，一般记为 $S(x)$ 或者 x^+。

所以，0 的后继 $S(\emptyset)=\{\emptyset\}$ 就模拟 1，1 的后继，$S(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ 就模拟 2。然后 2 的后继 $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ 就是 3。我们可以暂时直观地将自然数定义为:

从 0 开始，经过反复使用后继运算得到的集合。

观察这些单个自然数的一些性质可以让我们达到更一般的概念。例如，它们之间的小于关系就是 $\in$：$0\in 1\in 2\in 3\cdots$。另外，作为集合我们发现:

$$1=\{0\},2=\{0,1\},3=\{0,1,2\},\cdots$$

可以一般地设想，$n+1=\{0,1,\cdots,n\}$。我们还发现，作为集合的自然数有以下性质：$1\subseteq 2$，$2\subseteq 3$，特别地，如果 $k\in n$，则 $k\subseteq n$。

定义 1.3.21. 一个集合 X 称为**传递的**，如果对任意 $x\in X$，都有 $x\subseteq X$。

自然数都是传递集。

练习 1.3.22. 假设 X,Y 是传递集，

1. $X\cap Y$，$X\cup Y$ 与 $\mathcal{P}(X)$ 都是传递集。
2. $X\cup\{X\}$ 是传递集。
3. 如果 $\mathcal{T}$ 的元素都是传递集，则 $\bigcup\mathcal{T}$ 是传递集。

命题 1.3.23. *假设 X 是传递集。如果 X 的所有元素也是传递集，则 $\in$ 在 X 上是一个传递关系。反之亦然，如果 $\in$ 在 X 上是传递关系，对任意 $a\in X$，a 是传递集。*

证明. 对任意 $a,b,c\in X$，假设 $a\in b$ 并且 $b\in c$。因为 c 是传递的，所以 $b\subseteq c$，所以 $a\in c$。

反过来，任取非空集合 $a\in X$，任取 $b\in a$。如果 $x\in b$，我们需要证明 $x\in X$，而这是显然的：X 是传递集，所以 $b\in a\subseteq X$，所以 $b\subseteq X$。现在 x,b,a 都属于 X，而且 $x\in b$ 且 $b\in a$。根据假设 $\in$ 是 X 上的传递关系，所以 $x\in a$，即 a 是传递的。 □

传递集是集合论中非常重要的概念，一个简单的事实是：外延公理在任何传递集中都成立。

练习 1.3.24. 如果 $(\mathcal{T}, \in)$ 是传递集，则外延公理在 $\mathcal{T}$ 中成立，即：对任意 $X, Y \in \mathcal{T}$，$X = Y$ 当且仅当对任意 $a \in \mathcal{T}$，$a \in X$ 当且仅当 $a \in Y$。【你要使用 $\mathcal{T}$“外面的”的外延公理证明以上 $\mathcal{T}$“里面的”外延公理。】

除了是传递集，$\in$ 作为“大小关系”在每个自然数上都是一个良序。而正是这两点，使得我们可以从前面直观的自然数构造中得出以下序数的一般概念：

定义 1.3.25. 对任意传递集合 α，如果 $\in$ 是 α 上的良序，就称 α 是**序数**。

显然，0，1，2，3……都是序数。

命题 1.3.26. *令 α 是序数，$\beta \in \alpha$，则 β 也是序数。*

证明. 根据序数的定义，$\beta \subseteq \alpha$。所以 $\in$ 是 β 上的良序。又，$\in$ 在 β 上是传递的，根据 1.3.23，β 是传递集。 □

练习 1.3.27. 令 α, β 是序数。

(1) $\alpha \cap \beta$ 是序数；（$\alpha \cup \beta$ 是序数吗?）

(2) $\alpha \cup \{\alpha\}$ 也是序数；

(3) 如果 $\beta \subseteq \alpha$ 并且 $\beta \neq \alpha$，则 $\beta \in \alpha$。【提示：一定存在 $\gamma \in \alpha$ 使得：对任意 $\eta \in \beta$，$\eta < \gamma$。令 γ_0 是这样的序数中最小的，则 $\beta = \gamma_0 \in \alpha$。】

对任意序数 α, β，我们记 $\alpha \in \beta$ 为 $\alpha < \beta$，并称 α 小于 β。

引理 1.3.28. *对任意序数 α, β, γ，*

(1) $\alpha < \beta$ 并且 $\beta < \gamma$，则 $\alpha < \gamma$；

(2) 如果 $\alpha < \beta$，则 $\neg \beta < \alpha$；

(3) $\alpha < \beta$ 或 $\alpha = \beta$ 或 $\beta < \alpha$；

(4) 如果 X 是序数的非空集合，则存在 $\alpha \in X$，α 是 X 在 $\in$ 下的最小元。

证明.（1）和（2）都是显然的。关于（3），令 $\gamma = \beta \cap \alpha$，$\gamma$ 是序数，并且 $\gamma \subseteq \beta$，$\gamma \subseteq \alpha$。如果 $\gamma = \beta$，$\beta \leq \alpha$；如果 $\gamma = \alpha$，$\alpha \leq \beta$。只剩下一种情况，γ 既不等于 α 也不等于 β，但根据练习 1.3.27（3），这意味着 $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$，是不可能的。

（4）任取 $\alpha \in X$，考虑 $\alpha \cap X$。如果 $\alpha \cap X = \emptyset$，则 α 就是最小元，否则 $\alpha \cap X$ 有最小元，也是 X 的最小元。 □

练习 1.3.29. 令 $\mathbb{O}$ 表示**全体序数的类**，如果 $\mathbb{O}$ 是集合，则 $\mathbb{O}$ 是一个序数。所以，$\mathbb{O}$ 是真类。

定义 1.3.30. 一个序数 α 如果是另一个序数的后继，就称 α 为**后继序数**。不是后继的非 0 序数称为**极限序数**。我们通常将序数 α 的后继记作 $\alpha + 1$。

练习 1.3.31. 令 α, β 为序数，

(1) 如果 $\alpha < \beta + 1$，则 $\alpha \leq \beta$。所以，$\beta + 1$ 是大于 β 的最小序数。

(2) α 是极限序数当且仅当对任意 γ，$\gamma < \alpha$ 蕴涵 $\gamma + 1 < \alpha$。

显然，$1, 2, 3, \cdots$ 都是后继序数。而我们现在可以严格定义自然数概念了：

定义 1.3.32. 一个集合 n 是**自然数**，如果 $n = 0$，或者 n 是后继序数并且所有小于 n 的序数也是后继序数或 0。

练习 1.3.33. 如果 X 是序数的集合，则 $\bigcap X$ 和 $\bigcup X$ 都是序数。

练习 1.3.34. 对任意序数 α，α 是极限序数当且仅当 $\bigcup \alpha \notin \alpha$。

1.3.6　无穷集合与极限序数

我们通过模拟自然数得到了序数，所以序数是自然数的推广。而只有存在一个极限序数时，这种推广才是实质性的。目前的公理只能保证每个单个自然数，它们不能证明存在一个极限序数。我们会看到，最小的极限序数必定是一个无穷集合。

我们已经看出，每个自然数都是比它小的自然数组成的集合，我自然地会考虑所有自然数组成的类。如果它是一个集合，则应该是“下一个”序数。

定义 1.3.35. 令 ω 为全体自然数组成的类，也就是说：

$$\omega = \{n \mid n = 0 \vee (n \text{ 是后继序数} \wedge \text{所有小于 } n \text{ 的序数也是后继序数或 } 0)\} \tag{1.8}$$

无穷公理 6 （Inf）*存在一个集合 X，$\emptyset \in X$，并且对任意 $x \in X$，x 的后继 $S(x)$ 也属于 X。*这样的集合通常称为归纳集。

练习 1.3.36. 证明：对任意归纳集 X，$\omega \subseteq X$，因此无穷公理保证了它是一个集合，并且是最小的归纳集。【提示：假设 n 是最小的满足 $n \in \omega$，$n \notin X$ 的序数，令 $n = S(m)$，则 $m \in X$，由此得到矛盾。】

练习1.3.36实际上是我们熟悉的数学归纳原理。

引理 1.3.37 (数学归纳原理)**.** *令 $X \subseteq \omega$，*

(1) 如果 X 是归纳集，即，如果 $0 \in X$，并且 $n \in X$ 蕴涵 $S(n) \in X$，则 $X = \omega$。

(2) 如果对任意 $n \in \omega$，以下命题成立：

如果对所有 $m < n$，$m \in X$，则 $n \in X$，

则 $X = \omega$。

并且命题（1）和（2）等价。

证明. (1) 由习题1.3.36立得：$X \subseteq \omega$ 并且 $\omega \subseteq X$，所以根据外延原理，$X = \omega$。接下来我们证明（1）与（2）等价。

(1)⇒(2). 令 $\phi(n)$ 表示：“如果对所有 $m < n$，$m \in X$，则 $n \in X$”。并且假设对任意 n，$\phi(n)$ 成立，我们需要证明 $X = \omega$。

定义集合 $Y = \{m \mid \forall k < m(k \in X)\}$ 首先，因为没有 $k < 0$，所以 $0 \in Y$。假设 $n \in Y$，即，对任意 $m < n$，m 属于 X。因为我们假设 $\phi(n)$ 成立，这蕴

涵 $n \in X$，而这又蕴涵 $S(n) \in Y$。根据（1），$Y = \omega$。即，对任意 $m \in \omega$，对任意 $k < m$，$k \in X$。所以 $\omega \subseteq X$，所以 $X = \omega$。

(2)⇒(1). 假设 $0 \in X$ 并且 $n \in X$ 蕴涵 $S(n) \in X$，我们需要证明 $X = \omega$。为了利用（2），我们需要证明对任意 $n \in \omega$，$\phi(n)$。

如果 $n = 0$, 则 $\phi(0)$ 显然成立。现在假设 $n = S(k)$。如果 $\forall m < n(m \in X)$，则特别地，$k \in X$。根据假设，$n = S(k) \in X$，所以 $\phi(n)$ 也成立，所以由（2），$X = \omega$。 □

我们接下来证明 ω 是一个序数。

定理 1.3.38. *ω 是一个极限序数。*

证明. 首先，ω 是一个序数的集合，所以 $\bigcup \omega$ 是一个序数。由于 ω 是传递集，所以 $\bigcup \omega \subseteq \omega$。我们验证 $\bigcup \omega$ 是归纳集：由于自然数的每个元素都是自然数，所以这几乎是显然的。所以 $\omega = \bigcup \omega$ 是序数。由于 $\omega \notin \omega$，所以 ω 是极限序数。 □

如果 ω 是一个序数，那 $S(\omega) = \omega + 1$ 也是，于是就有：

$$0, 1, 2, 3 \cdots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \cdots$$

现在，自然数的概念被超穷序数实质性地扩展了。

注记 1.3.39. 与 ω 类似，我们能否有“下一个”极限序数？这需要

$$\{0, 1, \cdots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \cdots\} \tag{1.9}$$

是集合。但是哪个公理能保证它是呢？目前的公理，包括无穷公理，都不行。

类似于自然数，序数上也有归纳原则，通常称为“超穷归纳”。

定理 1.3.40. *令 $\phi(x)$ 为任意性质，*

(1) 第一形式超穷归纳：如果 $\phi(x)$ 满足

(i) $\phi(0)$ 成立；

(ii) 如果 $\phi(\alpha)$ 成立，则 $\phi(\alpha+1)$ 成立；

(iii) 对于极限序数 λ，如果对所有的 $\alpha<\lambda$，$\phi(\alpha)$ 成立，则 $\phi(\lambda)$ 成立，

则对任意 $\alpha\in\mathbb{O}$，$\phi(\alpha)$ 成立。

(2) 第二形式超穷归纳：如果 $\phi(x)$ 满足：

$$\text{如果对所有 }\alpha\text{，}\forall\beta<\alpha\phi(\beta)\text{ 蕴涵 }\phi(\alpha)\text{，}$$

则对任意 $\alpha\in\mathbb{O}$，$\phi(\alpha)$ 成立。

证明. 如果存在 α，$\phi(\alpha)$ 不成立，并且令 α_0 是最小的这样的 α，则对任意 $\beta<\alpha_0$，$\phi(\beta)$ 成立。但这蕴涵 $\phi(\alpha_0)$ 成立，矛盾。 □

1.3.7 层垒的谱系

有了序数的概念，我们可以定义著名的“层垒的谱系”：

定义 1.3.41.

- $V_0=\emptyset$;
- $V_{\alpha+1}=\mathcal{P}(V_\alpha)$;
- 如果 λ 是极限序数，则 $V_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}V_\alpha$

最后，

$$V=\bigcup_{\alpha\in\mathbb{O}}V_\alpha. \tag{1.10}$$

其中 $\mathbb{O}$ 是全体序数的类。

注记 1.3.42. 如果你感到以上定义有问题，不管能否明确指出问题所在，那说明你是一个细心的读者，并且对数学基础有正确的感觉。在以上定义形式称为“超穷递归定义”。以这种方式定义的对象，例如真类 V 是否存在，是否是唯一的？这是需要证明的。这就是超穷递归定理。但是，目前已有的公理不能证明这个定理，我们将它的证明推迟到本章的最后。

练习 1.3.43. 利用超穷归纳法证明以下关于 V_α 的性质：

(1) 对所有 α，V_α 是传递集；

(2) 如果 $\alpha < \beta$，则 $V_\alpha \subseteq V_\beta$。【给定序数 β，对任意 $\alpha < \beta$ 做归纳。】

定义 1.3.44. 对任意 $x \in V$，我们定义 x 的**秩**rank(x) 为：

$$\text{rank}(x) = \text{最小的 } \alpha \text{ 使得 } x \in V_{\alpha+1}. \tag{1.11}$$

显然，如果 $\text{rank}(x) = \alpha$，则 $x \subseteq V_\alpha$，并且对任意 $\lambda > \alpha$，$x \in V_\lambda$。

练习 1.3.45. 证明以下命题。

（1） $V_\alpha = \{x \in V \mid \text{rank}(x) < \alpha\}$；

（2） V 是传递的，即，对任意 $y \in V$，如果 $x \in y$，则 $x \in V$；

（3） 对任意 $x, y \in V$，如果 $x \in y$，则 $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$；

（4） 对任意 $x \in V$，$\text{rank}(x) = \bigcup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$。

以上练习表明，V 中的集合按照秩分层，每一集合的元素都出现在这个集合下面的层次中，而下层的集合都包含在上面的层次中，类似于一个漏斗形。我们把这样的结构称为“层垒的谱系”（cumulative hierarchy），见图1.1。

接下来的引理表明，所有的序数都在 V 中，并且它的秩就是其本身。

引理 1.3.46. *假设 α 为任意序数，*

（*1*） $\alpha \in V$ *并且* $\text{rank}(\alpha) = \alpha$；

（*2*） $V_\alpha \cap \mathbb{O} = \alpha$。

证明.（1）显然，$0 \in V_1$，所以 $0 \in V$ 并且 $\text{rank}(0) = 0$。假设 $\alpha = \beta + 1$，并且 $\text{rank}(\beta) = \beta$，则 $\alpha \subseteq V_\alpha$，所以 $\alpha \in V_{\alpha+1}$。如果 α 是极限序数，且对任意 $\beta < \alpha$，$\text{rank}(gb) = gb$，则 $\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} V_{\beta+1} = V_\alpha$，所以 $\alpha \in V_{\alpha+1}$。

（2）注意到 $\alpha = \{\beta \in \mathbb{O} \mid \beta < \alpha\}$。 □

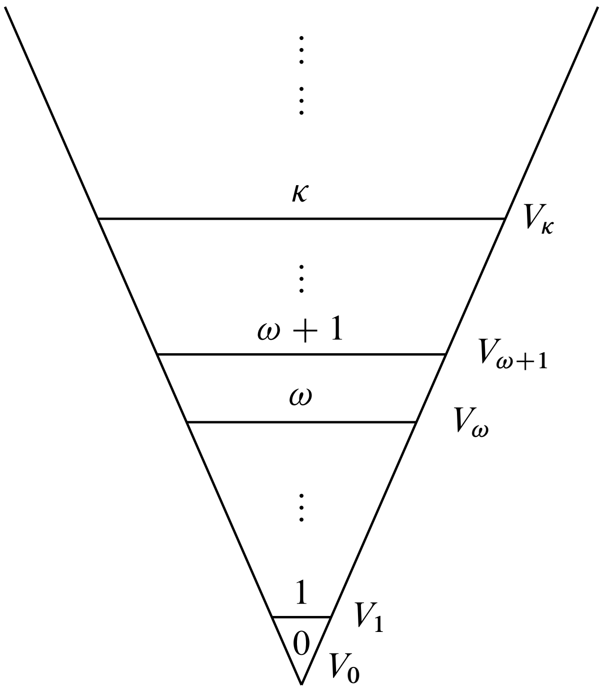

图 1.1: V.

1.3.8 良基

对任意序数 α，$\alpha \notin \alpha$。因为我们定义序数的时候要求 $\in$ 是一个良基的关系。对任意集合来说，$x \notin x$ 似乎也是合理的一个要求。

事实上，在 V 中，这一点是成立的。

引理 1.3.47. *如果 $x \in V$，则 $x \notin x$。*

证明. 如果 $x \in x$，则 $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(x)$，矛盾。 □

但到目前为止的公理并不能保证这一点成立。

基础公理 7（Fnd）*对任意集合 $x \neq \emptyset$，存在 $y \in x$ 使得 $y \cap x = \emptyset$:*

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)). \tag{1.12}$$

基础公理有时也叫做*正则公理*，它实际上断定的是：对任意非空集合 x，x 总有一个元素 y 是关系 $\in$ 限制在 x 上的“最小元”。也就是说，x 中再没有元素属于 y 了。

它的一个直接推论就是：

定理 1.3.48. *任意集合 x 都不属于自身。*

证明. 反设存在集合 $x \in x$，令 $I = \{x\}$，则对 I 的任意元素，事实上 I 只有一个元素，x，都有 $x \cap I = x \neq \emptyset$。与基础公理相矛盾。 □

练习 1.3.49. 证明不存在集合 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$，其中对任意 n，$x_{n+1} \in x_n$。这样的集合称为*无穷下降链*，基础公理确保不存在无穷下降链。

注记 1.3.50. 注意到引理1.3.47和定理1.3.48 的不同对于理解逻辑很有帮助。引理1.3.47是说 $x \notin x$ 这个命题在一个“模型”V 中成立，而定理 1.3.48则是说这个命题可由公理 1-7 证明，这意味着它在这些公理的所有模型中都真，所以定理强于引理。但同时也注意到，引理 1.3.47的证明没有使用基础公理。我们后面会看到，V 是这些公理的“模型”。特别地，它是基础公理的模型。我们下面先给出一个不是完全严格的版本。

引理 1.3.51. 基础公理在 V 中成立，即以下命题成立：

$$\forall x \in V(x \neq \emptyset \to \exists y \in V(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)). \tag{1.13}$$

证明. 因为 $x \in V$，所以存在 α，$x \in V_\alpha$。V_α 是传递的，所以 $x \subseteq V_\alpha$。取 $y_0 \in x$ 并且对任意 $y \in x$，$\mathrm{rank}(y_0) \leq \mathrm{rank}(y)$，则 $y_0 \cap x = \emptyset$。 □

我们已经知道了自然数和超穷序数上的归纳原理，事实上，归纳原理只依赖于良基性。对于良基的偏序关系，归纳原理依然成立。

定理 1.3.52 (良基关系上的归纳原理)**.** 令 $(X, <)$ 是良基的偏序集，对任意 $Y \subseteq X$，如果以下命题成立：

$$\text{对任意 } a \in X,\ \forall x < a(x \in Y) \Rightarrow a \in Y,$$

则 $Y = X$。

证明. 如果 $X - Y \neq \emptyset$，令 a_0 为这个集合在 $<$ 关系下的最小元，则对任意 $x < a_0$，$x \in Y$。 □

自然数和超穷序数上的归纳原理是以上定理的特殊情形。

1.3.9 替换公理与超穷递归

我们虽然定义了 V，但尚不能保证这个定义是合理的。同时我们也看到，无穷公理保证了存在一个极限序数，但它似乎不能保证存在第二个极限序数。这些都需要替换公理。

为了进一步的叙述，我们首先引入一个记法：

记法 1.3.53. $\exists! x\psi(x)$ 表示 $\exists x\psi(x) \wedge \forall x\forall y(\psi(x) \wedge \psi(y) \to x = y)$。

显然，$\exists! x\psi(x)$ 的意思是：有唯一的 x 具有性质 ψ。

替换公理模式 8（Rep）给定公式 $\psi(x, y)$，并且对任意 x，都有唯一的 y，使得 $\psi(x, y)$ 成立，则对任意集合 A，以下集合存在：

$$B = \{y \mid \exists x(x \in A \wedge \psi(x, y))\}. \tag{1.14}$$

用公式表示就是

$$\forall A[\forall x \in A \exists! y \psi(x, y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x, y)]. \tag{1.15}$$

首先注意到对每一公式 ψ，都有一个相应的替换公理，因此与概括公理模式一样，替换公理模式代表了无穷多条公理。其次，公式 $\forall x \in A \exists! y \psi(x, y)$ 实际上是说 ψ 表示的性质是一个函数所以替换公理是说，任何集合在一个函数下的像仍然是一个集合。因为这个像的元素个数不会比原像的元素个数多，所以它是一个不会更大的集合，因而是没有危险的。引起麻烦的集合都是因为它们太"大"了！

练习 1.3.54. 令

$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, \cdots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \cdots\}.$$

证明 $\omega + \omega$ 是集合，并且是一个极限序数。

我们接下来证明超穷递归，从而令 V 的定义合法化。

定义 1.3.55. 定义域为序数 α 的函数称为长度为 α 的序列。

注记 1.3.56. 虽然 $\mathbb{O}$ 是真类，但我们依然可以考虑定义域为 $\mathbb{O}$ 的序列，它是一个"函数"$F : \mathbb{O} \to V$。更一般地，如果存在一个公式 $\varphi(x, y)$ 满足

$$\forall x \exists! y \varphi(x, y), \tag{1.16}$$

定义类 F 为

$$F = \{(x, y) \mid \varphi(x, y)\}, \tag{1.17}$$

则 $F(x)$ 就是使得 $\varphi(x, y)$ 成立的唯一的 y，此时我们也会不严格地称 $F : V \to V$ 为函数，而 $F(x) = y$ 不过是 $\varphi(x, y)$ 的另一种更为直观更为集合论的写法。

定理 1.3.57 (超穷递归定理)**.** 假设 $G : V \times V \times V \to V$ 为函数，则存在唯一的函数 $F : \mathbb{O} \to V$，它满足对任意序数 α，$F(\alpha) = G(\alpha, F \upharpoonright \alpha, u)$。

注记 1.3.58. 我们首先对定理本身的形式做一点解释。

(1) G 相当于一个公式 $\phi(x,y,u,z)$，并且满足：给定集合 u，对任意集合 x,y 有唯一的集合 z 使得 $\phi(x,y,u,z)$ 成立。其中 u 是事先被给定的一个参数，在很多情形下，定义不一定需要参数，所以 u 这一维不是必须的。

(2) 递归的含义在于，借助 G 定义的函数 F，它在每个序数 α 上的取值由它“前面”的取值所决定，或者说 $F(\alpha)$ 由 $F(0),F(1),\cdots$ 这些小于 α 的取值决定。这就是 $G(\alpha,F\upharpoonright\alpha,u)$ 中 $F\upharpoonright\alpha$ 所要表达的。这里还要提醒一下，虽然 F 是一个真类，但 $F\upharpoonright\alpha$ 是集合，而这正是超穷递归定理使用替换公理的地方。

(3) 我们在 $F(\alpha)$ 的定义中还包含了 α，即令其等于 $G(\alpha,F\upharpoonright\alpha,u)$，是为了明确表明 $F(\alpha)$ 的值跟 α 有关，但这并不是必须的，因为从集合 $F\upharpoonright\alpha$ 中可以确定 α：α 是最小的不在函数 $F\upharpoonright\alpha$ 的定义域中的序数。所以，G 可以是一个二元函数 $G(y,u)=z$，甚至是一元函数 $G(y)=z$，如果没用到参数的话。相应地，$F(\alpha)=G(F\upharpoonright\alpha,u)$，或者 $F(\alpha)=G(F\upharpoonright\alpha)$。

(4) $F(0)=G(0,\emptyset,u)$，如果 $G(0,\emptyset,u)=z_0$，则我们立刻可以计算 $F(1)=G(1,\{z_0\},u)=z_1$，$F(2)=G(2,\{z_0,z_1\},u)=z_2$，等等。如果 λ 是极限序数，令 $z_\lambda=\{z_0,z_1,\cdots,z_\alpha,\cdots\}$，则 $F(\lambda)=G(\lambda,z_\lambda,u)$。这表明，给定 α，我们可以找到 $F(\alpha)$。而就引出了证明的思路：对任意 α，我们都有唯一的对于 F 的 α-近似。如果我们还能证明对任意 $\beta<\alpha$，$F\upharpoonright\beta\subseteq F\upharpoonright\alpha$，即这些近似是相容的，则 F 就是这些近似的极限。

练习 1.3.59. 1. 如果 $\alpha>0$，则

(a) 外延公理在 V_α 中成立，即：对任意 $X,Y\in V_\alpha$，$X=Y$ 当且仅当对任意 $a\in V_\alpha$，$a\in X$ 当且仅当 $a\in Y$。

(b) 基础公理在 V_α 中成立。即，对任意 $X\in V_\alpha$，如果 X 非空，则存在 $x\in V_\alpha$，$x\in X$ 并且 $x\cap X=\emptyset$。

(c) 并集公理在 V_α 中成立。即，如果 $X\in V_\alpha$，则 $\bigcup X\in V_\alpha$。

2. 如果 $\alpha>0$ 并且是极限序数，则

(a) 分离公理在 V_α 中成立，即：给定公式 $\phi(x)$，对任意 $X\in V_\alpha$，存在 $Y\in V_\alpha$，$Y=\{x\in V_\alpha\mid x\in X\wedge\phi^{V_\alpha}(x)\}$。其中，$\phi^{V_\alpha}(x)$ 可以理解

为将 ϕ 中的量词都限制到 V_α 上。例如，如果 $\phi(x)$ 是 $\exists y \psi(x, y)$，则 $\phi^{V_\alpha}(x)$ 就是 $\exists y \in V_\alpha \psi^{V_\alpha}(x, y)$。

(b) 对集公理在 V_α 中成立。即，对任意 $x, y \in V_\alpha$，$\{x, y\} \in V_\alpha$。

(c) 幂集公理在 V_α 中成立。即，对任意 $X \in V_\alpha$，$\mathcal{P}(X) \in V_\alpha$。

3. 如果 $\alpha < \omega$，则无穷公理在 V_α 中成立。即，V_α 中存在归纳集。

4. 思考一下，以上条件是否能让 V_α 满足替换公理？如果要让 V_α 满足替换公理，α 要满足哪些性质？设想一个 V_κ，使得无穷公理和替换公理都成立。