一阶逻辑（一）

第二章 - 一阶语言

姚宁远

复旦大学哲学学院

September 27, 2021

目录

命题逻辑的局限性

- 命题逻辑本质上是对逻辑联结词研究；
- 命题符号是命题逻辑的最小单位；
- 无法分析原子命题的主谓结构。

1 一阶语言的定义和例子
- 一阶语言的定义
- 一阶公式举例

2 自由出现和约束出现

一阶语言 I

一阶语言 L 包括：

1. 括号：$($, $)$；
2. 逻辑联结词：$\neg$, $\rightarrow$；
3. 全称量词：$\forall$；
4. 变元：$v_1, v_2, \ldots$；
5. 等词符号：$=$；
6. 常数符号集 $\mathcal{C}$：若干（可以没有）；
7. 谓词符号集 $\mathcal{R}$：对每个自然数 $n > 0$，有若干（可以没有）n 元谓词符号，$\mathcal{R} = \bigcup \mathcal{R}_n$；

一阶语言 II

8. **函数符号集** $\mathcal{F}$：对每个自然数 $n > 0$，有若干（可以没有）n 元函数符号，$\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_n$。

其中 1 - 5 是**逻辑符号**，6 - 8 是**非逻辑符号**。在讨论一阶语言 L 时，通常只列出其非逻辑符号。

例：

1. 集合论的语言 $L_{set} = \{\in\}$，其中 $\in$ 是二元谓词符号；
2. 初等数论的语言 $L_{NT} = \{0, <, S, +, \cdot\}$，其中 0 是常数符号，$<$ 是二元谓词符号，S 是一元函数符号，$+$ 和 $\cdot$ 是二元函数符号；
3. 序关系的语言 $L_o = \{R\}$，其中 R 是二元谓词符号。

项

定义

设 L 是一个一阶语言。定义 L 中的所有的项的集合是满足以下条件的最小集合：

1. 每个变元 v_i 是项；
2. 每个常数符号 c 是项；
3. 若 $t_1, \ldots, t_n$ 是项，且 f 是 n-元函数符号，则 $ft_1 \ldots t_n$ 是项。

$ft_1 \ldots t_n$ 一般记作 $f(t_1, \ldots, t_2)$。

注

项是复合函数的符号。

合式公式

定义

设 L 是一个一阶语言。定义 L 中的所有的合式公式的集合是满足以下条件的最小集合：

1. 若 t_1, t_2 是项，则 $t_1 = t_2$ 是合式公式；
2. 若 $t_1, ..., t_n$ 是项，且 R 是 n-元谓词符号，则 $Rt_1...t_n$ 是合式公式；
3. 若 α 和 β 是合式公式，则 $(\neg\alpha)$ 和 $(\alpha \to \beta)$ 均是合式公式；
4. 若 α 是合式公式，则 $\forall v_i \alpha$ 是合式公式。

$Rt_1...t_n$ 一般记作 $R(t_1, ..., t_2)$。称 1 和 2 中的公式为原子公式。

几点说明

- 逻辑联词 $\vee$，$\wedge$，$\leftrightarrow$ 的“含义”与命题逻辑相同；
- $\exists x\alpha$ 是 $(\neg\forall x(\neg\alpha))$ 的简写；
- $= tu$ 记作 $t = u$，$(\neg = tu)$ 记作 $t \neq u$；
- 一阶逻辑的项与合式公式也有唯一可读性；
- 约定量词 $\forall$ 和 $\exists$ 的辖域尽可能短，即 $\forall x\alpha \to \beta$ 表示 $(\forall x\alpha) \to \beta$。

1 一阶语言的定义和例子
- 一阶语言的定义
- 一阶公式举例

2 自由出现和约束出现

哲学语言

1. 当今法国国王是秃子。

$$\forall x(P_1^1(x) \to P_2^1(x));$$

2. 金山不存在。

$$\neg\exists x(P_3^1(x) \wedge P_4^1(x));$$

3. 趁星即暮星

$$\forall x(P_5^1(x) \to \forall y(P_6^1(y) \to x = y)).$$

一阶算术语言 I

一阶算术的公式

$L = \{0,\ <,\ S,\ +,\ \cdot\}$。

1. 0 不是任何自然数的后继。

$$\forall x(s(x) \neq 0).$$

2. 两个自然数相等当且仅当其后继相等。

$$\forall x \forall y(s(x) = s(y) \leftrightarrow x = y).$$

3. 对任意的合式公式 $\phi(v_1)$，其数学归纳原理表示为

$$\Big(\psi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \to \phi(s(x)))\Big) \to \forall x(\phi(x)).$$

一阶算术语言 II

4 x 是素数

$$s(0) < x \wedge \left(\forall y \forall z (y < x \wedge z < x) \rightarrow x \neq y \cdot z \right)$$

集合论的语言 I

集合论的公式

$L = \{\in\}$。

1. 两个集合相等当且仅当其元素相同。

$$\forall x \forall y(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

2. x 是 y 的子集。

$$\forall z(z \in x \to z \in y).$$

3. x 是 y 的幂集集。

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow \forall u(u \in z \to u \in y))$$

集合论的语言 II

4. z 是空集

$$\forall x(x \notin z).$$

5. 选择公理

$$\forall X\Big((X \neq \emptyset \wedge \emptyset \notin X) \to$$
$$\exists C(\forall u(\exists a(a \in u \wedge a \in C)$$
$$\wedge \forall a(\forall b((a \in u \wedge a \in C \wedge b \in u \wedge b \in C) \to a = b)))\Big)$$

群与环的语言

- 群的语言：$L_g = \{+,\ e\}$;
- 环的语言：$L_r = \{+,\ \cdot\ 1,\ 0\}$

目录

自由出现和约束出现

定义

递归定义变元 x 在公式 α 中**自由出现**如下：

1. 若 α 是原子公式，则 x 在 α 中自由出现当且仅当 x 在 α 中出现；
2. 若 α 是 $\neg\beta$，则 x 在 α 中自由出现当且仅当 x 在 β 中自由出现；
3. 若 α 是 $\beta \to \gamma$，则 x 在 α 中自由出现当且仅当 x 在 β 中自由出现或在 γ 中自由出现；
4. 若 α 是 $\forall v_i \beta$，则 x 在 α 中自由出现当且仅当 x 在 β 中自由出现且 x 不是 v_i。

在 α 中出现的变元若不是自由出现，则称之为**约束出现**。若 α 中没有自由出现的变元，则称 α 为**闭公式**或语句。

变元替换

定义

设 α 是公式，x 是变元，t 是项。递归定义公式 α^x_t 中如下：

1. 若 α 是原子公式，则 α^x_t 是将 α 中出现的 x 替换为 t 而得到的公式；
2. 若 α 是 $\neg\beta$，则 α^x_t 是 $\neg(\beta^x_t)$；
3. 若 α 是 $\beta \to \gamma$，则 α^x_t 是 $\beta^x_t \to \gamma^x_t$；
4. 若 α 是 $\forall v_i \beta$，则当 $x = v_i$ 时，α^x_t 是 α，否则 α^x_t 是 $\forall v_i(\beta^x_t)$

Thanks!