Homework7

陈淇奥
21210160025

2021 年 11 月 22 日

Lemma 1. *1.* $-0 = 1$

2. $-1 = 0$

3. $a \cdot 1 = a$

4. $a + 0 = a$

5. $a + a = a$

6. $a \cdot a = a$

7. $1 + a = 1$

8. $0 \cdot a = 0$

9. $a + b = 1 \wedge a \cdot b = 0 \Rightarrow b = -a$

10. $-(a \cdot b) = (-a) + (-b)$

证明. 1. $1 = 0 + (-0) = (0 \cdot (-0)) + (-0) = -0$

2. $0 = 1 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = -1$

3. $a \cdot 1 = a \cdot (a + (-a)) = a$

5. $a + a = a + (a \cdot 1) = a$

7. $1+a=(a+1)\cdot 1=(a+1)\cdot(a+-a)=a\cdot a+0+a+-a=a+-a=1$

8. $0\cdot a=(a\cdot(-a))\cdot a=a\cdot a\cdot(-a)=a\cdot(-a)=0$

9. $-a=(-a)\cdot 1=(-a)\cdot(a+b)=(-a)\cdot a+(-a)\cdot b=(-a)\cdot b.$

   $ab+(-a)b=-a.\ b(a+(-a))=b=-a$

10. $ab+(-a)+(-b)=ab+(-a)+(-b)\cdot 1=ab+(-a)+(-b)a+(-b)(-a)=a(b+(-b))+(-a)+(-b)(-a)=1+(-b)(-a)=1$

□

Exercise 1. 证明不存在基数为 3 的布尔代数

证明. 若存在基数为 3 的布尔代数 $\mathcal{B}$，则令 $B=\{0,1,a\}$。

如果 $-a=0$, 那么 $a+(-a)=a+0=a+(a\cdot(-a))=a\neq 1$，矛盾。如果 $-a=1$，那么 $a\cdot(-a)=a\cdot 1=a\cdot(a+(-a))=a\neq 0$，矛盾。如果 $-a=a$，那么 $a=a\cdot 1=a\cdot(a+a)=a\cdot a+a\cdot a=0+0=0$，矛盾。

因此不存在基数为 3 的布尔代数。 □

Exercise 2 (3.1.10). 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数

1. 证明任意布尔代数 $\mathcal{B}$ 在关系 $\leq$ 下是偏序

4. 对任意 $a,b\in\mathcal{B}$，$a\cdot(-b)=0$ 当且仅当 $a\leq b$

证明. 1. 因为 $x=x$，因此 $x=x$

若 $x\leq y\wedge y\leq x$ 则存在 c,d 使得 $c\neq 0\wedge d\neq 0\wedge x+c=y\wedge y+d=x$，于是 $x=y+d=y+y+d=x+y=x+x+c=x+c=y$。

若 $x\leq y\wedge y\leq z$，则存在 c,d 使得 $c\neq 0\wedge d\neq 0\wedge x+c=y\wedge y+d=z$，因此 $x+c+d=z$。

4. $a\cdot(-b)=0\Rightarrow a=ab\Rightarrow b=(a+1)b=a+b$

   若存在 $c\neq 0\wedge a+c=b$，则 $a+b=a+a+c=a+c=b$，因此 $a(-b)=a(-b)+0=b(-b)=0$。若 $a=b$，则 $a\cdot(-b)=0$。

$\square$

Exercise 3 (3.1.13). 任意有穷的布尔代数都是原子化的

证明. 给定一个有限布尔代数 $\mathcal{B}$，对任意 $b \in \mathcal{B}$，任选一条 b 的最长下降链 $C = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ 使得 $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$，若 c_1 不是原子，则存在 $0 < c' < c_1$，于是 C 不是最长的，矛盾。因此 $c_1 \leq b$ 是原子 $\square$

Exercise 4 (3.1.16). 证明 f 是同态映射

证明. 因为 0 不是原子，于是 $f(0) = \emptyset$。有因为所有原子都小于等于 1，因此 $f(1) = A$。

对于任意 $b_1, b_2 \in B$，因为 $b_1 \leq b_1 + b_2$ 且 $b_2 \leq b_1 + b_2$，因此 $f(b_1 + b_2) \supseteq f(b_1)$ 且 $f(b_1 + b_2) \supseteq f(b_2)$，于是 $f(b_1 + b_2) \supseteq f(b_1) \cup f(b_2)$。对于任意原子 $a \leq b_1 + b_2$，由引理 3.1.14，$a \leq b_1$ 或 $a \leq b_2$，于是 $a \in f(b_1) \cup f(b_2)$。因此 $f(b_1 + b_2) = f(b_1) \cup f(b_2)$。

对于任意 $b_1, b_2 \in B$，有 $b_1 b_2 \leq b_1 \wedge b_1 b_2 \leq b_2$，因此 $f(b_1 b_2) \subseteq f(b_1) \cap f(b_2)$。对于任意原子 $a \in f(b_1) \cap f(b_2)$，则 $a \leq b_1 \wedge a \leq b_2$，若 $a \leq -(b_1 b_2) = (-b_1) + (-b_2)$，则 $a \leq -b_1$ 或 $a \leq -b_2$，矛盾。因此 $a \leq b_1 b_2$，于是 $a \in f(b_1 b_2)$

对于任意 $b \in B$，$x \in f(-b) \Leftrightarrow x \leq -b \Leftrightarrow x \nleq b \Leftrightarrow x \notin f(b) \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) - f(b)$。 $\square$

Exercise 5 (3.1.22). 若 $\mathcal{B}$ 完全且是原子化的，A 是 $\mathcal{B}$ 中所有原子的集合，则 $f : B \to \mathcal{P}(A)$ 是一个同构

证明. 对于任意 $Y \subseteq A$ 与原子 a，若 $a \in Y$，则 $a \leq \sum Y$；若 $a \leq \sum Y$，假设 $a \notin Y$，那么对于任意 $b \in Y$ 都有 $a \leq -b$ 等价于 $b \leq -a$，于是 $-a \geq \sum Y \geq a$，因此 $-a = a + (-a) = 1$，而 $a = 0$，与 a 是原子矛盾。因此存在 $b \in Y$ 使得 $a \leq b$，因为 a, b 都是原子，因此 $a = b \in Y$。

因此对于任意原子 a，$a \in Y$ 当且仅当 $a \leq \sum Y$，所以 $f(\sum Y) = Y$，于是 f 是满射，于是 f 是双射 $\square$