第二章　基数与选择公理

无穷！从未有其他问题能如此震撼人类的精神；从未有其他观念能如此激励人类的理智，让它结出丰硕的果实；也从未有其他概念比无穷更需要澄清……

大卫·希尔伯特

2.1　ZF 中基数概念

我们用自然数计数时，在回答“多少”的同时，也给被计数对象排出了一个次序。所以，在有穷的情况下，表示“多少”的基数与表示“次序”的序数是同一的。自然数既是序数也是基数。

在无穷的情况下它们并不同一。我们已经看到，良序集 $\{0 < 1 < 2 < \cdots < \omega\}$ 的序型是 $\omega + 1$（事实上它就是序数 $\omega + 1$），但是这同样的集合，如果我们将 ω 排在最前面，即，$\{\omega < 0 < 1 \cdots\}$，这个良序集的序型却是 ω。也就是说序型为 $\omega + 1$ 的集合，却只有“ω”个元素。所以并不是所有无穷序数都表示基数。

另一个更重要的问题是，我们只能保证每个良序集被一个唯一的序数“计数”（定理1.4.19），除非我们相信任意集合都可以被良序化，不是每个集合都能有一个序数与其对应。而每个集合都可良序化的信念等价于一个新的公理，即选择公理。现有的公理不保证这一点。

在没有选择公理的情形下，我们首先讨论一些有关集合基数的概念，看看能走多远。

2.1.1　等势

定义 2.1.1. 如果存在一个以集合 X 为定义域，以集合 Y 为值域的双射，就称集合 X 和 Y 是 等势的，用符号表示为 $X \approx Y$。

如果存在集合 X 到集合 Y 内的单射，就称X 的势小于等于 Y 的势。表示为 $X \precsim Y$。

$X \prec Y$ 表示 $X \precsim Y$ 但 $X \not\approx Y$。

练习 2.1.2. (1) $X \precsim Y$ 意味着存在 Y 的子集 Z 使得 $X \approx Z$。

(2) $X \prec Y$ 并不等价于存在 Y 的真子集 Z 使得 $X \approx Z$。

练习 2.1.3. $\approx$ 是一个等价关系。

练习 2.1.4. 对任意集合 X（不一定是良序集），存在一个序数 $H(X)$，$H(X)$ 不与 X 的任何子集等势，并且是具有如此性质的最小序数。$H(X)$ 称为 X 的哈特格斯数（Hartogs number）。【提示：令 $W = \{w \subseteq X \mid w$ 上存在良序$\}$，令

$$H(X) = \{\alpha \mid \text{存在 } w \in W\text{，}\alpha \text{ 是与 } w \text{ 同构的唯一序数}\}. \tag{2.1}$$

证明 W 是集合，$H(X)$ 是序数。】

直观上，$\prec$ 应该是一个偏序，传递性是显然的。但反对称性却并不是平凡的结果。

定理 2.1.5 (康托-伯恩斯坦定理)**.** 如果 $X \precsim Y$ 并且 $Y \precsim X$，则 $X \approx Y$。

证明. 因为 $X \precsim Y$，故存在由 X 到 Y 的单射：$f : X \to Y$；又 $Y \precsim X$，所以存在由 Y 到 X 的单射：$g : Y \to X$。我们归纳定义两个集合的 X_n 和 Y_n 如下：

$$\begin{aligned} X_0 &= X & Y_0 &= Y; \\ X_{n+1} &= g[Y_n] & Y_{n+1} &= f[X_n]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

注意到，对任意 $n \in \omega$，$X_{n+1} \subseteq X_n$，$Y_{n+1} \subseteq Y_n$。所以，我们可以做如下定义：对任意 $n \in \omega$，

$$\begin{array}{ll} \overline{X}_n = X_n - X_{n+1} & \overline{Y}_n = Y_n - Y_{n+1}; \\ X' = \bigcap_{n\in\omega} X_n & Y' = \bigcap_{n\in\omega} Y_n. \end{array} \tag{2.3}$$

(1) 首先，$\overline{X}_n$，X' 是 X 的一个划分。即，$\overline{X}_n$，X' 两两互不相交，并且 $X = X' \cup \bigcup_{n\in\omega} \overline{X}_n$。同样 $\overline{Y}_n$，Y' 也 Y 的划分。
(i) 如果 $x \in X'$，则对任意 $n \in \omega$，$x \in X_n$，所以 $x \notin \overline{X}_n$。如果 $n < m$，则 $X_m \subseteq X_{n+1}$，所以 $X_m \cap \overline{X}_n = \emptyset$。
(ii) 如果 $x \notin X'$，则存在 n，$x \notin X_n$，令 n_0 为最小的这样的 n，则由于 $X' \subseteq X$，所以 $n_0 > 0$，所以 $x \in X_{n_0} - X_{n_0+1} = \overline{X}_{n_0}$。

(2) 对任意 $n \in \omega$，$f[\overline{X}_n] = \overline{Y}_{n+1}$，$g[\overline{Y}_n] = \overline{X}_{n+1}$。并且 $f[X'] = Y'$。
(i) $f[\overline{X}_n] = f[X_n - X_{n+1}]$，由于 f 是单射，所以这又等于 $f[X_n] - f[X_{n+1}]$，后者就是 $\overline{Y}_{n+1}$。
(ii)

$$\begin{aligned} f[X'] &= f[X_0 - \bigcup_{n\in\omega} \overline{X}_n] \\ &= Y_1 - \bigcup_{n\in\omega} \overline{Y}_{n+1} \\ &= (Y_1 \cup (Y_0 - Y_1)) - ((Y_0 - Y_1) \cup \bigcup_{n\in\omega} \overline{Y}_{n+1}) \\ &= (Y_0 \cup Y_1) - (\overline{Y}_0 \cup \bigcup_{n\in\omega} \overline{Y}_{n+1}) \\ &= Y_0 - \bigcup_{n\in\omega} \overline{Y}_n \\ &= Y'. \end{aligned}$$

(3) 定义 $h : X \to Y$ 为

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X'; \\ f(x) & x \in \overline{X}_{2n}; \\ g^{-1}(x) & x \in \overline{X}_{2n+1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

由（1），$\mathrm{dom}(h) = X$；由（1）和（2），$\mathrm{ran}(h) = Y$；由于 f, g 都是单射，所以 h 是单射。总结起来，h 是 X 到 Y 的双射。 □

练习 2.1.6. 如果 $X \precsim Y$，

(1) 容易定义一个满射 $f : Y \to X$。所以如果 $Y \succsim X$，则存在 Y 到 X 满射。

(2) 以上命题的逆命题是否成立呢？即，如果存在满射 $f : Y \to X$，是否一定有 $Y \succsim X$ 呢？事实上，现有的公理不能证明这一点，这需要选择公理。

定理 2.1.7. $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$。

定义 2.1.8. 对任意集合 X，

(1) 如果存在 $n \in \omega$，使得 $X \approx n$，就称 X 为有穷的；

(2) 如果对任意 $n \in \omega$ 都有 $X \succ n$，称 X 为无穷的；

(3) 如果 $X \approx \omega$，就称 X 是可数的或可数无穷的；

(4) 有穷的或可数的集合称为至多可数的；

(5) 不是可数的无穷集合称为不可数的。

练习 2.1.9 (鸽笼原理)**.** [1] 如果 X 是有穷的，则不存在 X 到它的真子集 $Y \subsetneq X$ 上的双射。

注记 2.1.10. 根据鸽笼原理（练习2.1.9），如果 X 是有穷集合，则对 X 的任意真子集 Y，$Y \not\approx X$。那这个命题的逆命题，即，如果对 X 的任意真子集 Y，$Y \not\approx X$，则 X 是有穷集合，是否成立？现有的公理不能证明这一点，这需要选择公理。条件“不与自己的真子集等势”也被称为**戴德金有穷**。在 ZF 下，每个有穷集都是戴德金有穷的，而要证明每个戴德金有穷的集合都是有穷的，则需要选择公理。

我们定义有穷用到了自然数的概念。以下介绍几种有穷的定义，可以避免使用自然数。

命题 2.1.11. 以下命题等价：

[1]通常也会称为“抽屉原理”或“鸟巢原理”。

(1) 集合 X 是有穷的。

(2) 存在 X 上的线序 $\leq$ 满足 X 的每一非空子集在 $\leq$ 下有最大元和最小元。

(3) X 的每一非空子集族都有 $\subseteq$ 关系下的极大元。

证明.（1）$\Leftrightarrow$（2）。如果 X 有穷，则 $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，$0, 1, \ldots n$ 是自然数。定义 X 上的关系为: $x_m \leq x_n$ 当且仅当 $m \leq n$，则 $\leq$ 是线序，并且 X 的每个子集都有最大最小元。反之，如果 X 满足条件，则 X 有最小元，令 X 的最小元为 x_0，而 $X - \{x_0\}$ 也有最小元，令其为 x_1，如此，令 x_{n+1} 为 $X - \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 的最小元。由于 X 有最大元，故总存在 m，使得 $X - \{x_0, x_1, \cdots, x_m\} = \emptyset$，即 $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$。

（1）$\Leftrightarrow$（3）。如果 X 有穷，则存在 m，$X = m$。如果 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 X 的子集族，则对任意 $Y \in \mathcal{F}$，$Y \leq m$。因此，存在一个 $Y \in \mathcal{F}$，对任意 $X \in \mathcal{F}$，都有 $X \precsim Y$，令 $Y = n$，则满足 $Y = n$ 的 Y 是 $\mathcal{F}$ 的极大元。反过来，如果 X 无穷，则 $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid Y\text{是有穷的}\}$ 没有极大元。 □

练习 2.1.12. 如果 X, Y 都是可数的，则 $X \cup Y$ 是可数的。【不妨假设 $X \cap Y \neq \emptyset$，定义函数 $f : X \cup Y \to \omega$ 为 $f(x_n) = 2n$，$f(y_n) = 2n + 1$，这是 $X \cup Y$ 到 ω 的单射。】

定理 2.1.13. *有理数 $\mathbb{Q}$ 是可数的，实数 $\mathbb{R}$ 是不可数的。*

引理 2.1.14. *如果 α 是一个可数极限序数，则存在函数 $f : \omega \to \alpha$ 满足:*

(1) 如果 $n < m$，则 $f(n) < f(m)$；

(2) $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$。

证明. 令 $h : \omega \to \alpha$ 是双射。我们递归定义 f 如下：$f(0) = h(0)$；如果 $f(n)$ 已经定义，令 k 为最小的自然数使得 $h(k) > f(n)$。这样的 k 一定存在：因为 ω 是无穷的，而 $f(0) < \cdots < f(n)$ 只有穷个元素。令 $f(n + 1) = h(k)$。

f 显然是保序的。我们只需证明对任意 $\beta < \alpha$，存在 $n \in \omega$，$f(n) > \beta$。假设 $\beta = h(k)$，由 f 的构造可以看出，对任意 $k \in \omega$，$f(k) \geq h(k)$。如果 $f(k) = h(k)$，则令 $n = k + 1$，$f(n) > h(k) = \beta$。 □

注记 2.1.15. 注意到（2）不意味着 f 是满射，但它等价于 f 的值域在 α 中是无界的。这样的映射称为"共尾映射"。

定理 2.1.16. 一个序数是 α 是至多可数的，当且仅当存在 $\mathbb{R}$ 的子集 A, $\mathrm{ot}(A) = \alpha$。

证明. 首先，假设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 并且 $\mathrm{ot}(A) = \alpha$，即 $A = \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$，并且 $a_\beta < a_\gamma$ 当且仅当 $\beta < \gamma$。对任意 $\beta < \alpha$，令 $I_\beta = (a_\beta, a_{\beta+1})$ 为实数的区间。如果 $\alpha = \eta + 1$ 是后继序数，则令 $I_\eta = (a_\eta, a_\eta + 1)$。这样的区间只有可数多，但 $\beta \mapsto I_\beta$ 是 α 到这些区间的双射，所以 α 是可数的。

反过来，假设 α 至多可数。我们对 α 施归纳证明。如果 $\alpha = \eta + 1$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ 并且 $\mathrm{ot}(Y) = \eta$。由于 $(\mathbb{R}, <)$ 与区间 $(0, 1)$ 同构，我们不妨假设 $Y \subseteq (0, 1)$，这样的话 $Y \cup \{1\}$ 的序型就是 α。

如果 α 是极限序数。根据引理2.1.14，令 $f : \omega \to \alpha$ 为保序函数，并且 $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$。对任意 $n \in \omega$，考虑 α 中的区间 $J_n = (f(n), f(n+1))$ 以及 $\mathbb{R}$ 中的区间 $I_n = (n, n+1)$。根据归纳假设，对任意 n，存在 $X_n \subseteq I_n$, $\mathrm{ot}(X_n) = \mathrm{ot}(J_n)$。于是，$X = \bigcup_{n\in\omega} X_n \subseteq \mathbb{R}$，并且 $\mathrm{ot}(X) = \alpha$。 □

练习 2.1.17. 证明：如果 X 是无穷序数的集合，则 $X \precsim \sup X$。

2.1.2　弗雷格基数

我们定义了任意集合 X, Y 之间的一个等价关系 $X = Y$，以及它们之间的偏序关系：$X \precsim Y$。但是，我们并没有定义"X 的基数"是什么。早期的数学家，例如弗雷格，曾尝试将 X 的基数定义为一个等价类：

$$[X]_\sim = \{Y \mid Y \approx X\}, \tag{2.5}$$

但这个定义有一个问题，那就是如果 $X \neq \emptyset$，$[X]_\sim$ 是一个真类。为了避免这样的问题，以下定义使用了所谓的"司各特技巧"（Scott's trick）。

定义 2.1.18. 对任意集合 X，

(1) X 的**弗雷格基数**是以下集合：

$$\{Y \mid Y \approx X \wedge \forall Z(Z \approx X \to \mathrm{rank}(Y) \le \mathrm{rank}(Z))\}. \tag{2.6}$$

X 的弗雷格基数记作 $\overline{\overline{X}}$。

(2) 一个集合 $\mathfrak{a}$ 是**弗雷格基数**，当且仅当存在集合 X，$\mathfrak{a} = \overline{\overline{X}}$。

(3) 对任意集合 X, Y，$\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$ 当且仅当 $X < Y$，或者，等价地，存在单射 $f : X \to Y$，但不存在单射 $f : Y \to X$。

康托的以下定理证明不存在最大的弗雷格基数。

定理 2.1.19. 对任意集合 X，$\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$。

证明. 显然，$\overline{\overline{X}} \le \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$，因为函数 $f(x) = \{x\}$ 是 X 到 $\mathcal{P}(X)$ 的单射。以下用反证法证明 $X \neq \mathcal{P}(X)$。反设存在双射 $f : X \to \mathcal{P}(X)$，令

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \tag{2.7}$$

则 $Y \in \mathcal{P}(X)$，因此存在 $z \in X$，$f(z) = Y$。但是，$z \in Y$ 当且仅当

$$z \in \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

当且仅当 $z \notin f(z)$ 当且仅当 $z \notin Y$，矛盾。 □

引理 2.1.20. 令 C 是弗雷格基数的集合，则 C 在偏序关系 $<$ 下有一个上界：存在弗雷格基数 $\mathfrak{a}$，对任意 $\mathfrak{b} \in C$，$\mathfrak{b} \le \mathfrak{a}$。

证明. 对任意 $\mathfrak{b} \in C$，令

$$f(\mathfrak{b}) = \min\{\mathrm{rank}(X) \mid X = \mathfrak{b}\}, \tag{2.8}$$

则 f 是定义在 C 上的函数，其值域是序数的子集。令 $\delta = \bigcup \mathrm{ran}(f)$。对任意这样的集合 X：$X = \mathfrak{b}$，$\mathrm{rank}(X) = f(\mathfrak{b})$，都有 $X \subseteq V_\delta$。令 $\mathfrak{a} = V_\delta$，则对任意 $\mathfrak{b} \in C$，$\mathfrak{b} \le \alpha$。 □

推论 2.1.21. 全体弗雷格基数的类是一个真类。

证明. 如果全体弗雷格基数是一个集合，则根据引理2.1.20，存在最大的弗雷格基数。这与定理2.1.19矛盾。 □

注记 2.1.22. 定义2.1.18有几个明显的问题。

- $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ 是一个偏序，但不是线序。我们无法证明任意两个弗雷格基数都是可比的。
- $\overline{\overline{\emptyset}} = \{\emptyset\}$，即，空集的弗雷格基数是 1，而不是 0。

2.1.3 冯 · 诺伊曼基数

在上一章，我们证明了每个良序集 X 都与唯一的一个序数 α 同构，此时，$X \approx \alpha$，即，每个良序集都与一个序数等势。另一方面，在本章一开的讨论中，我们又看到，对于无穷的良序集，与其等势的序数往往不止一个。但序数上的良序告诉我们，这些序数中有最小的，这就引出了以下定义：

定义 2.1.23. 令 X 为任意可良序化的集合。

(1) 我们定义X 的**冯 · 诺伊曼基数**为使得 $X \approx \lambda$ 的最小的序数 λ，记作 $\mathsf{Card}(X) = \lambda$。

(2) 一个序数 λ 是冯 · **诺伊曼基数**当且仅当存在良序集 X，$\lambda = \mathsf{Card}(X)$。

练习 2.1.24. 对任意序数 λ，λ 是冯 · 诺伊曼基数当且仅当 $\lambda = \mathsf{Card}(\lambda)$。满足等值式右边性质的序数称为**前段序数**。

练习 2.1.25. 每个自然数 n 都是冯 · 诺伊曼基数；ω 是冯 · 诺伊曼基数。

今后，我们一般用希腊字母 $\kappa, \lambda, \ldots$ 表示冯 · 诺伊曼基数。

练习 2.1.26. 如果 κ 是冯 · 诺伊曼基数，且 $\kappa \geq \omega$，则 κ 是极限序数，即，无穷的冯 · 诺伊曼基数都是极限序数。

引理 2.1.27. *如果 λ, κ 是冯 · 诺伊曼基数，则 $\lambda < \kappa$ 当且仅当 $\overline{\overline{\lambda}} < \overline{\overline{\kappa}}$。即，对于冯 · 诺伊曼基数 λ, κ，作为集合，它们弗雷格基数上的偏序关系，与作为序数，它们的大小 $<$ 关系是一致的。*

证明. 如果 $\lambda < \kappa$，则 λ 是 κ 的真前段，所以 $\mathrm{id} : \lambda \to \kappa$ 是单射，并且不可能是双射。

反过来，如果 $\bar{\bar{\lambda}} < \bar{\bar{\kappa}}$，而 $\lambda \not< \kappa$，则必有 $\kappa \leq \lambda$。但这是不可能的：如果 $\kappa = \lambda$，则 $\bar{\bar{\kappa}} = \bar{\bar{\lambda}}$。如果 $\kappa < \lambda$，则前面已证 $\bar{\bar{\kappa}} < \bar{\bar{\lambda}}$，矛盾。 □

康托定理2.1.19证明了不存在最大的弗雷格基数，练习2.1.4也可以确保存在更大的冯·诺伊曼基数。

引理 2.1.28. *对任意集合 X，X 的 Hartogs 数是一个冯·诺伊曼基数。*

证明. 我们利用练习2.1.24。令 λ 为 $H(X)$，对任意 $\beta < \lambda$，如果 $\beta \approx \lambda$，则对任意 X 的子集 Y，$\beta \not\approx Y$，否则 λ 就不是满足这一性质最小的序数。所以，$\lambda = \mathsf{Card}(\lambda)$。 □

注记 2.1.29. 我们考虑 ω 的 Hartgos 数 $H(\omega)$。它是不能一一映入 ω 的最小的序数。对任意 $\beta < H(\omega)$，β 都是可数的，而所有可数的序数一定都属于 $H(\omega)$。所以 $H(\omega)$ 是所有可数序数的集合，它本身是第一个不可数的序数，也是 ω 之后的第一个冯·诺伊曼基数。

历史上，康托把所有可数序数称为“第一类数”，全体第一类数的集合就是最小的第二类数，即不可数的序数。

以上的过程可以迭代：如果我们记第一个不可数序数为 ω_1，则全体与 ω_1 等势的序数构成的集合是一个新的冯·诺伊曼基数。这就引出了如下定义：

定义 2.1.30. 我们定义类函数：$\aleph : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 如下：

(1) $\aleph(0) = \omega$；

(2) $\aleph(\alpha + 1) = H(\aleph(\alpha))$；

(3) 对于极限序数 ξ，$\aleph(\xi) = \bigcup_{\beta<\xi} \aleph(\beta)$。

通常我们将 $\aleph(\alpha)$ 记作 $\aleph_\alpha$。

练习 2.1.31. 定义2.1.30中的（3）需要以下命题：如果 X 是冯·诺伊曼基数的集合，则 $\bigcup X$ 也是冯·诺伊曼基数。

容易看出，$\aleph$ 的值域在序数中是无界的，所以全体冯·诺伊曼基数是一个真类，不存在最大的冯·诺伊曼基数。同时，任意 冯·诺伊曼基数都在 $\aleph$ 的值域中。

引理 2.1.32. 对任意冯·诺伊曼基数 λ，都存在 α 使得 $\lambda = \aleph_\alpha$。

证明. 令 $K = \{\aleph_\alpha \mid \aleph_\alpha < \lambda\}$。

如果 K 有最大元 $\aleph_\beta$，则 $\lambda \le \aleph_{\beta+1}$。如果 $\lambda < \aleph_{\beta+1}$，则由于 $\aleph_{\beta+1} = H(\aleph)$，所以 $\lambda \precsim \aleph_\beta$，而这意味着 $\lambda \approx \aleph_\beta$，这等价于 $\lambda = \aleph_\alpha$，矛盾。

如果 K 没有最大元，令 $\aleph_\xi = \bigcup K$。显然，$\aleph_\xi \le \lambda$。如果 $\aleph_\xi < \lambda$，则 $\aleph_\xi \in K$，与 K 没有最大元矛盾。 □

定义 2.1.33. 对任何冯·诺伊曼基数 λ，如果存在 α，$\lambda = \aleph_{\alpha+1}$，就称 λ 为**后继基数**。λ 作为冯·诺伊曼基数的后继也常记作 λ^+。

如果 $\lambda \ge \omega$ 并且不是后继基数，则称为**极限基数**。

练习 2.1.34. 假设 α 是序数，则

（1） $\mathsf{Card}(\alpha) \le \alpha < \mathsf{Card}(\alpha)^+$；

（2） 如果 κ 是冯·诺伊曼基数，则 $\alpha < \kappa^+$ 当且仅当 $\mathsf{Card}(\alpha) < \kappa^+$。

定义 2.1.35. 如果类函数 $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 满足：

(1) $\alpha \le \beta$ 蕴涵 $F(\alpha) \le F(\beta)$；

(2) 对任意极限序数 ξ，$F(\xi) = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta < \xi\}$，

就称 F 是**连续的**。

例 2.1.36. 给定 α，$F(\gamma) = \alpha + \gamma$，$F(\gamma) = \alpha \cdot \gamma$，$F(\gamma) = \alpha^\gamma$ 都是连续的。

定理 2.1.37. 如果 $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 是严格递增的，并且是连续的，则对任意序数 α，存在 $\epsilon > \alpha$，$F(\epsilon) = \epsilon$。即，F 有任意大的不动点。

证明. 留作练习。 □

例 2.1.38. $\aleph : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 是连续且严格递增的。所以对任意序数 α，有一个序数 $\epsilon > \alpha$，$\aleph_\epsilon = \epsilon$。

练习 2.1.39. 令 X 是一个不可良序化的集合，令 $\lambda = H(X)$。λ 是冯·诺伊曼基数。证明：$\lambda \not\precsim X$ 并且 $X \not\precsim \lambda$。

这说明，对于不可良序化的集合，冯·诺伊曼基数不能作为表示其大小的量。

2.1.4　选择公理

我们定义了两类“基数”，弗雷格基数和冯·诺伊曼基数。前者对任意集合都有意义，但是这种基数上的大小关系不是一个线序，我们不能保证任何两个集合都可以比较大小。后者的大小关系是良序，但它只对可良序化的的集合有意义。对于不可良序化的集合，冯·诺伊曼基数不能刻画其尺寸。

至此，关于定义集合基数这一基本概念的各种尝试都遇到了相同的障碍，而解决这个障碍的关键就是“每个集合都是可良序化的”，这被称为“良序定理”。历史上，是 Zermelo 首先试图证明这个定理，在证明中他使用了选择公理，然后人们发现，如果基于 ZF，则选择公理与良序定理是等价的命题。

注记 2.1.40. 选择公理曾经是最有争议的数学命题。这主要是因为一方面，数学中很多基本定理离开选择公理不能证明，一个典型的例子是初版于 1930 年的范·德·瓦尔登（van der Waerden ）的名著《近世代数》（*Modern Algebra*），作者在同事的压力下从第二版中删去了选择公理及其所有的推论，这遭到了代数学家们的激烈反对，迫使他在 1950 年的第三版中又把选择公理及其推论都加了回去，所以摩尔（G. E. Moore）评论说：“代数学家们坚持认为这个公理对他们的学科变得必不可少。”[2] 而另一方面，选择公理有着一些异乎寻常的推论，著名的如实数上存在一个良序，以及塔斯基-巴拿赫（Tarski-Banach）分球定理。所有，有人总结这种分裂状态到：“选择公理显然为真，良序定理显然为假；佐恩（Zorn）引理只有天知道。”[3]不过，关于选择公理的争论似乎已经过去，目前大多数数学家都会接受它为一条基本的数学公理。这使得那些研究在数学证明中是否可以避免使用选择公理的工作变得无足轻重了。正如马丁（Donald Martin）所说：“在很多情况下，我们看起来不能定义一个特定集合的选择函数，但这与选择函数是否存在的问题毫不相干。一旦避免了这种混淆，选择公理就是集合论公理中最没有问题的一个。”[4]

选择公理 9　（AC）令 $I \neq \emptyset$，对任意非空集合的族 $(X_i)_{i\in I}$，如果 $i \neq j$

[2]G. E. Moore，*The Axiom of Choice*，235 页。又见麦蒂（Pen Maddy）*Believing the Axioms*，9 页。

[3]E. Schechter，*Handbook of Analysis and its Foundation*. Acad. Press, 1997. 145 页

[4]Donald Martin，*Sets versus classes*，内部交流稿，页 1-2。

蕴涵 $X_i \cap X_j = \emptyset$，则存在集合 S，对每一 $i \in I$，$S \cap X_i \approx 1$。

我们首先介绍选择公理的一些常见的等价形式。

定义 2.1.41. 令 I 为非空集合，$\{X_i \mid i \in I\}$ 为集合族，则它们的一般卡式积定义为：

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \text{ 是函数并且对任意 } i,\ f(i) \in X_i\}. \tag{2.9}$$

练习 2.1.42. 如果 $I = \{i_0, \cdots, i_n\}$ 有穷，则 $\prod_{i\in I} X_i = X_{i_0} \times \cdots \times X_{i_n}$。

以下定理是 ZF 的定理：

定理 2.1.43. 令 $I \neq \emptyset$，以下命题等价*:*

(1) 对任意非空集合的族 $(X_i)_{i\in I}$，$\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$；

(2) 选择公理；

(3) 对任意非空集合的族 $(X_i)_{i\in I}$，存在函数 f，它满足对每一 $i \in I$，$f(X_i) \in X_i$，其中 f 称为选择函数；

(4)（良序定理）每一集合上都存在一个良序。

证明. (1)⇒(2)。取 $g \in \prod_{i\in I} X_i$，则 $S = \mathrm{ran}(g)$ 满足要求。
(2)⇒(3)。令 $Y_i = \{i\} \times X_i$，则 $(Y_i)_{i\in I}$ 两两不交。令 S 为满足对每一 Y_i，$Y_i \cap S = 1$ 的集合，则 S 为一函数，取 $f(X_i) = S(i)$，则 f 为所求函数。
(3)⇒(4)。对任意集合 X，令 f 为 $\mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$ 上的选择函数。令 δ 为 X 的哈特格斯数，递归定义函数 $g : \delta \to X \cup \{X\}$ 为：

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(X - g[\alpha]) & \text{如果} X - g[\alpha] \neq \emptyset; \\ X & \text{否则。} \end{cases} \tag{2.10}$$

显然，存在 $\alpha < \delta$，$X = g[\alpha]$。否则 $X - g[\delta]$ 不空，则 g 将 δ 一一映入 X，与 δ 是 X 的哈特格斯数矛盾。这样，$g \upharpoonright \alpha$ 是 α 到 X 的双射，从而引导出 X 上的一个良序。
(4)⇒(1)。令 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$，则 X 上存在良序，并且每一 X_i 都是 X 的非空子集。定义 $f : I \to X$ 为：$f(i) = X_i$的最小元，则 $f \in \prod_{i\in I} X_i$，故后者不空。 □

当然，选择公理不只这几种等价形式。

定义 2.1.44. 令 $(X,<)$ 为偏序集，$C \subseteq X$ 称为 X 中的**链**当且仅当 $(C,<)$ 是线序集。X 中的链 C 称为**极大的**，如果不存在 X 的链 D 使得 $C \subsetneq D$。

定义 2.1.45. 令 $(X,<)$ 为偏序集，

- a 是 X 的**极大元** 当且仅当对任意 $x \in X$，$a \nless x$。
- a 是 X 的**极小元** 当且仅当对任意 $x \in X$，$x \nless a$。
- 如果 $Y \subseteq X$ 是 X 中的链，则 a 是 Y 的**上界**当且仅当对任意 $y \in Y$，$y \leq a$。a 是 Y 的**下界** 当且仅当对任意 $y \in Y$，$a \leq y$。
- 如果 $Y \subseteq X$ 是 X 中的链，a 是 Y 的上界，则 a 是 Y 的**上确界** 当且仅当对任意 Y 的上界 b，$a \leq b$。类似地，如果 a 是 Y 的下界，则 a 是 Y 的**下确界** 当且仅当对任意 Y 的下界 b，$b \leq a$。

以下两种选择公理的等价形式在数学中尤为重要。

定理 2.1.46. *以下命题等价:*

(*1*) *选择公理;*

(2) *(***豪斯道夫极大链条件***) 任何偏序集都存在一个极大链。*

(*3*) *(***佐恩引理***) 如果偏序集 X 的每个链都有上界，则 X 有极大元。*

证明. (1)⇒(2)。令 X 为一偏序集。根据选择公理，存在 f 是 $\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ 上的选择函数。令 δ 是 X 的哈特格斯数，与定理 2.1.43类似，定义 $g:\delta \to X\cup\{X\}$，

$$g(\alpha) = f(\{x \in X - g[\alpha] \mid g[\alpha] \cup \{x\}\text{是}X\text{的链}\}) \tag{2.11}$$

如果存在 $x \in X - g[\alpha] \neq \emptyset$ 使得 $X - g[\alpha] \cup \{x\}$ 是 X 中的链。否则，令 $g(\alpha) = X$。容易看出，存在 $\alpha < \delta$，$\mathrm{dom}(g) = \alpha$。$\mathrm{ran}(g)$ 是 X 的极大链。

(2)⇒(3)。由 (2)，存在 X 的极大链 C，而 C 的上界就是 X 的极大元。

(3)⇒(1)。令 X 为非空集合的族，定义

$$Z = \{g \mid \text{存在}Y \subseteq X\text{，}g\text{是}Y\text{上的选择函数}\}. \tag{2.12}$$

注意到 $Z \neq \emptyset$，例如，对任意 $X_i \in X$，$x \in X_i$，$g = \{(X_i, x)\} \in Z$。并且，$\subseteq$ 是 Z 上的偏序。取 C 是 Z 的链，则 C 是相容的函数系统，所以 $\bigcup C$ 也是 X 的某个子集上的选择函数，故 $\bigcup C \in Z$，且是 C 的上界。这样，佐恩引理的条件得到满足，故 Z 有极大元，令其为 f。以下只需证明 $\mathrm{dom}(f) = X$。否则，存在 $X_i \in X - \mathrm{dom}(f)$，存在 $x \in X_i$，使得 $f \cup \{(X_i, x)\} \in Z$，与 f 是 Z 的极大元矛盾。 □

前面多处提到一些命题在缺少选择公理情况下不能证明，而有了选择公理，这些命题都是可证的。

定理 2.1.47. *选择公理与以下命题等价：对每个集合 X，都有唯一的冯·诺伊曼基数 λ，$\mathsf{Card}(X) = \lambda$。*

证明. 每个集合都是可良序化的。 □

定义 2.1.48. 在 ZFC 下，对任意集合 X，X 的**基数**定义为 X 的冯·诺伊曼基数。今后将 X 的基数记作 $|X|$。

引理 2.1.49. *基础公理等价于以下命题：不存在属于关系的无穷下降链，即不存在这样的集合：$\{x_n \mid n \in \omega \wedge \forall n \in \omega(x_{n+1} \in x_n)\}$*

证明. 一个方向是不需要选择公理的，参见练习1.3.49和练习 1.3.50。

我们现在证明不存在这样的无穷下降链蕴涵基础公理。反设基础公理不成立，令 X 为这样的集合：对任意 $x \in X$，$x \cap X \neq \emptyset$。根据选择公理，我们令 f 为 $\mathscr{P}(X) - \{\emptyset\}$ 上的选择函数。定义 X 中元素的序列 $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ 为：

$$\begin{aligned} x_0 &= f(X); \\ x_{n+1} &= f(g(n) \cap X). \end{aligned} \tag{2.13}$$

则 $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ 是 $\in$ 关系下的无穷下降链。 □

引理 2.1.50. *一个集合是有穷的当且仅当它是戴德金有穷的。*

证明. 我们已经证明了一个方向，即有穷的都是戴德金有穷的。假设 X 是戴德金有穷的，如果 X 无穷，令 $<$ 是 X 上的一个良序，我们选取 x_0 为 $<$ 关

系的最小元，x_n 是 $X-\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}$ 的最小元，就得到 X 的一个可数无穷子集 $X'=\{x_0,x_1,\cdots\}$。显然，$g(x_n)=x_{n+1}$ 是 X' 到 $X'-\{x_0\}$ 上的双射。令 $X_1=X-\{x_0\}$，定义 $f:X\to X_1$ 为:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{如果} x\in X-X', \\ g(x) & \text{如果} x\in X'. \end{cases}$$

则 f 是双射，这与 X 是戴德金有穷的矛盾。 □

引理2.1.50的证明同时给出了以下命题:

命题 2.1.51. 任意无穷集合都存在一个可数的子集。

定理 2.1.52. 令 $(L,<)$ 是线序集，则存在 $W\subseteq L$，$(W,<)$ 是良序集，并且 W 在 L 中无界，即对任意 $l\in L$，存在 $w\in W$，$l\leq w$。

证明. 根据选择公理，令 $\lambda=|L|$，则 $L=\{l_\alpha\mid\alpha<\lambda\}$。定义

$$W=\{l_\alpha\in L\mid\forall\beta<\alpha(x_\beta<x_\alpha)\} \tag{2.14}$$

对任意 $l_\alpha,l_\beta\in W$，都有 $l_\alpha<l_\beta$ 当且仅当 $\alpha<\beta$，所以 $(W,<)$ 是良序集。

对任意 $l_\alpha\in L$，如果 $l_\alpha\notin W$，则存在 $\beta<\alpha$，$l_\beta>l_\alpha$。令 β_0 为这样的 β 中最小的，则对任意 $\xi<\beta_0$，$l_\xi<l_{\beta_0}$，所以 $l_{\beta_0}\in W$ 并且 $l_\alpha<l_{\beta_0}$。 □

引理 2.1.53. 对任意集合 X，如果 X,Y 是可数的，则 $X\times Y$ 也是可数的。

证明. 由于 X,Y 是可数的，不妨令 $X=\{x_n\mid n\in\omega\}$。

对任意 $m\in\omega$，令 $A_m=\{x_m\}\times Y$。由于 Y 是可数的，所以 A_n 也是，不妨令 $A_m=\{(x_m,y_n)\mid n\in\omega\}$。这样，$X\times Y=\bigcup_{m\in\omega}A_m$。

对任意自然数 k，我们称 $D_k=\{(x_m,y_n)\mid m+n=k\}$ 为 $X\times Y$ 的第 $k+1$ 条对角线。注意到 D_k 有 $k+1$ 个元素。

现在我们按如下规则枚举 $X\times Y$ 的元素:

首先，如果 $k<l$，则 D_k 元素排在 D_l 的元素之前。

其次，对同意条对角线上的元素，我们规定它们按照 y_n 的下标排序，即，(x_k,y_0) 是第 $k+1$ 条对角线的第一个元素，(x_0,y_k) 是最后一个元素。

这样，(x_k, y_0) 在 $X \times Y$ 中就是第

$$(1 + 2 + \cdots k) + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

个元素。更一般地，$(x_m, y_n) \in D_k$，其中 $n \le k$，$m = k - n$，是第 $\frac{k(k+1)}{2} + 1 + n$ 个元素。将 $k = m + n$ 带入，就得到以下函数：

$$f(x_m, y_n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n + 1. \tag{2.15}$$

不难证明 $f : X \times Y \to \omega$ 是双射，所以 $X \times Y \approx \omega$。 □

注记 2.1.54. 对于初学者，往往会疑惑以上证明中哪里用到了选择公理？关键在于两个“不妨令”上。我么知道 X 可数，所以“存在”一个 ω 到 X 的双射，但这没有给我们一个具体的双射，或者 X 的一个具体的枚举。我们必须“选择”一个。对于 A_m 也是如此。每个 Y 的枚举（即 ω 到 Y 的双射）都给出 A_m 的一个枚举，但同样，Y 可数只是保证存在这样的枚举，而我们必须选择其中一个。因此，实质上我们需要做可数多次选择，这就是使用选择公理的地方。当然，这里只使用了选择公理的一个较弱的形式，被称为“可数选择公理”，即在选择公理中要求非空集合族 X 是可数的。

与此对照，$\omega \times \omega$ 是可数的，其证明完全可以按照引理 2.1.53，但却不需要选择公理。因为 ω 上的良序是具体给定的，不仅仅是“存在”。这体现出所谓构造主义的观点与经典立场的差别之处。

引理2.1.53还蕴涵着 $\mathbb{Q}$ 是可数的。但后者同样不需要选择公理，本质上也是使用 ω 上的那个具体给定的良序。

最后，引理2.1.53的证明也给出了以下推论。

推论 2.1.55. 可数个可数集合的并还是可数的。

2.2　基数算术

本节定义基数的算术运算，即加法，乘法和幂运算，同时研究它们的性质。由于自然数就是有穷基数，因此，在有穷情况下，基数运算等同于自然数的运算，但对于无穷基数，情况则很不相同。

定义 2.2.1. $\kappa \oplus \lambda = |A \cup B|$，其中 $\kappa = |A|$ 而 $\lambda = |B|$，并且 $A \cap B = \emptyset$。

我们对加法的定义不依赖于 A, B 的选择。因而这个定义是合理的。

练习 2.2.2. 如果 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$，而且 $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$，则 $|A \cup B| = |A' \cup B'|$。

容易验证，以上定义的的加法满足：

- 交换律：$\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$；
- 结合律：$\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$；
- $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda$；
- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\kappa_1 \oplus \lambda_1 \leq \kappa_2 \oplus \lambda_2$。

定义 2.2.3. $\kappa \otimes \lambda = |A \times B|$，其中 $|A| = \kappa$ 而 $|B| = \lambda$。

练习 2.2.4. 如果 A, B, A', B' 满足 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$，则 $|A \times B| = |A' \times B'|$。

同样，以上定义的的乘法满足：

- 交换律：$\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$；
- 结合律：$\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu$；
- 分配律：$\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) = \kappa \otimes \lambda \oplus \kappa \otimes \mu$；
- $\kappa \leq \kappa \otimes \lambda$，如果 $\lambda > 0$；
- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\kappa_1 \otimes \lambda_1 \leq \kappa_2 \otimes \lambda_2$。
- $\kappa \oplus \kappa = 2 \otimes \kappa$: 如果 $A = \kappa$, 则 $2 \otimes \kappa$ 是集合 $\{0, 1\} \times A = \{0\} \times A \cup \{1\} \times A$ 的基数，而 $\{0\} \times A = \{1\} \times A = \kappa$，而它们又是不相交的，所以 $\kappa \oplus \kappa = 2 \otimes \kappa$。所以:

- 如果 $\kappa \geq 2$，$\kappa \oplus \kappa \leq \kappa \otimes \kappa$。

定理 2.2.5. 对任意无穷基数 κ，$\kappa \otimes \kappa = \kappa$。

证明. 由于 $\kappa = \aleph_0$ 时命题成立（两个可数集合的卡氏积依然可数，见引理2.1.53），我们不妨设 $\kappa \geq \aleph_1$。对 κ 作归纳。假设对任意无穷的 $\lambda < \kappa$ 命题已成立，我们定义 $\kappa \times \kappa$ 上的一个序 $\lhd$ 为：

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1,\beta_1) \lhd (\alpha_2,\beta_2) \quad \text{当且仅当} \quad & \max(\alpha_1,\beta_1) < \max(\alpha_2,\beta_2), \text{或} \\
& \max(\alpha_1,\beta_1) = \max(\alpha_2,\beta_2), \alpha_1 < \alpha_2, \text{或} \\
& \max(\alpha_1,\beta_1) = \max(\alpha_2,\beta_2), \\
& \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 < \beta_2.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

$\lhd$ 实际上是首先按照 $\max(\alpha,\beta)$，然后按照字典顺序排序。这个序有时也称为 $\kappa \times \kappa$ 上的"标准序"。我们接下来证明 $\lhd$ 是 $\kappa \times \kappa$ 上的良序。这实际上很容易，例如证明 $\lhd$ 是连结的，任取 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)$，首先比较 $\max(\alpha_1,\beta_1)$ 和 $\max(\alpha_2,\beta_2)$，因为这是序数上的序，所以总可以进行。如果它们其中一个大于（或小于）另一个，则我们就达到了目的。如果它们相等，则继续比较 α_1 和 α_2，由于后者也是序数上的序，故也总是可以进行，直到最终比较 β_1 和 β_2。再比如，要证 $\lhd$ 的良基性，任取 $\kappa \times \kappa$ 的非空子集 X，首先取 X 中 $\max(\alpha,\beta)$ 最小的那些元素，这是序数上的序，所以总是存在，这些元素构成了 X 的非空子集。更具体地说就是令 $\delta = \min\{\max(\alpha,\beta) \mid (\alpha,\beta) \in X\}$，然后取

$$
Y = \{(\alpha,\beta) \in X \mid \max(\alpha,\beta) = \delta\}. \tag{2.17}
$$

Y 是 X 的非空子集，它的元素都比 $X - Y$ 的元素小。类似地，取 $\gamma = \min\{\alpha \mid (\alpha,\beta) \in Y\}$，而令 $Z = \{(\alpha,\beta) \in Y \mid \alpha = \gamma\}$，则 Z 是 Y 的非空子集，因而也是 X 的非空子集，而且其元素比 X 中的其他元素小。最后，令 $\eta = \min\{\beta \mid (\alpha,\beta) \in Z\}$，则 $\{(\alpha,\beta) \in Z \mid \beta = \eta\}$ 只有一个元素，它是 Z 的最小元，因而也是 X 的最小元。最后，我们证明 $(\kappa \times \kappa, \lhd)$ 的**序型**，即，与其同构的唯一序数是 κ。由于 κ 可以一一地映射入 $\kappa \times \kappa$，这个集合的序型显然不小于 κ。所以我们只需证明它也不大于 κ。为此我们也只需证明对任意 $(\alpha,\beta) \in \kappa \times \kappa$，

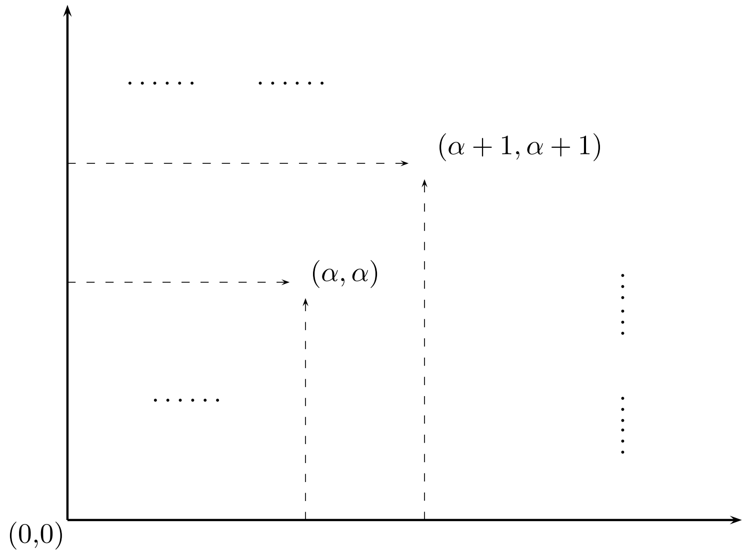

图 2.1: 良序集 $(\kappa \times \kappa, \lhd)$

若由 (α, β) 确定的前段是

$$W_{\alpha,\beta} = \{(\xi, \zeta) \mid (\xi, \zeta) \lhd (\alpha, \beta)\}, \tag{2.18}$$

良序集 $(W_{\alpha,\beta}, \lhd)$ 的序型严格小于 κ。如果 α, β 都是有穷的，则 (α, β) 确定的前段也是有穷的，命题显然成立。所以不妨设至少其中一个不小于 ω。这样，令 $\delta = \max(\alpha, \beta) + 1$，则 δ 是基数并且

$$\aleph_0 \leq \delta < \kappa.$$

由归纳假设，$\delta \otimes \delta = \delta < \kappa$，所以良序集 $(\delta \times \delta, \lhd)$ 的基数就是 δ。这样，如果与良序集 $(W_{\alpha,\beta}, \lhd)$ 同构的唯一序数是 γ，则 $\gamma \leq (\delta \times \delta, \lhd) = \delta$，所以

$$\gamma < \delta^+ \leq \kappa.$$

□

推论 2.2.6. 对任意无穷基数 κ, λ，$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$。

证明. 不妨设 $\lambda \leq \kappa$，由定理，$\kappa \otimes \lambda \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$，所以 $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \otimes \lambda \leq \kappa$。 □