一阶逻辑（一）

第三章 - 一阶语言

姚宁远

复旦大学哲学学院

September 27, 2021

目录

一阶逻辑的公理集合为以下公式的全称化（记作 Λ）

1. A(1)，A(2)，A(3)；
   (A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$；
   (A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$；
   (A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中 t 在 α 中可以替换 x；
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$；
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现；
5. $x = x$；
6. $(x = y) \to (\alpha \to \alpha')$，其中 α 为原子公式，并且 α' 是将 α 中的若干个 x 的自由出现替换为 y 而得到；

推理规则 I

分离规则

证明与内定理

1. $\Gamma \vdash \phi$
2. $\vdash \phi$。

一阶重言式

素公式

1. 原子公式是素公式；
2. 全称公式 $\forall x \alpha$ 是素公式

与模态重言式类似，对每个素公式指定一个命题符号，可以定义一阶重言式。

定理

如果 ϕ 是一阶重言式，则 ϕ 是内定理。

项的替换 I

例

令 α 为公式 $\exists y x \neq y$，则 $\forall x\alpha \to \alpha_z^x$ 为

$$\forall x \exists y x \neq y \to \exists y\ z \neq y;$$

而 $\forall x\alpha \to \alpha_y^x$ 则成为

$$\forall x \exists y x \neq y \to \exists y\ y \neq y.$$

- 替换 x 的 z 没有被 α 中的量词约束；
- 替换 x 的 y 被 α 中的量词约束；

项的替换 II

- 被约束的变元不再是“变元”，不能被项替换。

定义:
“t 在 α 中可以替换 x” 递归定义如下

1. 对原子公式 α，t 总是可以在 α 中替换；
2. t 在公式 $\neg\beta$ 中可以替换 x 当且仅当 t 在 β 中可以替换 x；
3. t 在公式 $\beta \to \gamma$ 可以替换 x 当且仅当 t 在 β 和 γ 中都可以替换 x。
4. t 在公式 $\forall y\beta$ 中可以替换 x 当且仅当
   (a) x 不在 $\forall y\beta$ 中自由出现；或者
   (b) y 不在 t 中出现并且 t 在 β 中可以替换 x。

项的替换 III

例

变元 x 在公式 α 中都可以替换为自己。从而总是有 $\forall x\phi \to \phi$。

例

如果变元 y 不在 α 中约束出现，则 y 可以替换公式 α 的任何变元。从而总是有 $\forall x\phi \to \phi^x_y$。

例

不在公式 α 中出现的变元 y 可以替换公式 α 的任何变元。从而总是有 $\forall x\phi \to \phi^x_y$。

概括定理 I

概括定理

如果 $\Gamma \vdash \phi$ 并且 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现，则 $\Gamma \vdash \forall x \phi$。

证明：

1. 对证明长度归纳证明;
2. 设 $(\phi_0, \ldots, \phi_n)$ 是 Γ 的一个证明;
3. $\phi_0 \in \Gamma \cup \Lambda$;
4. 若 $\phi_0 \in \Gamma$，则 $\phi_0 \to \forall x \phi_0 \in \Lambda$;
5. 若 $\phi_0 \in \Lambda$，则 $\forall x \phi_0 \in \Lambda$;
6. 设对每个 $i < k$ 有 $\Gamma \vdash \forall x \phi_i$;
7. 若 $\phi_k \in \Gamma \cup \Lambda$，则显然 $\Gamma \vdash \forall x \phi_k$;
8. 设 ϕ_k 由 ϕ_i 和 $\phi_j = \phi_i \to \phi_k$ 通过分离规则而得到;

概括定理 II

9. 由于 $\{\forall x(\phi_i \to \phi_k), \forall x\phi_i\} \vdash \forall x\phi_k$，故 $\Gamma \vdash \forall x\phi_k$.

注

如果 $\Gamma \vdash \phi$，并且 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现，设 $(\phi_0, ..., \phi_n)$ 是 Γ 到 ϕ 的一个证明。则存在有 Γ 到 $\forall x\phi$ 的一个仅含有符号 $\bigcup_{i \leq n} \phi_i \cup \{x, \forall, (,)\}$ 的证明。

例

证明

$\forall x \forall y \alpha \vdash \forall y \forall x \alpha$.

1. $\forall x \forall y \alpha \to \alpha$，$\forall x \forall y \alpha \vdash \alpha$；
2. $\forall x \forall y \alpha \vdash \forall x \alpha$ （概括定理）；
3. $\forall x \forall y \alpha \vdash \forall y \forall x \alpha$ （概括定理）。

目录

重言规则

引理（重言规则）

如果 $\Gamma \vdash \alpha_i$， $i = 1, ..., n$ 并且 $\alpha_1 \to ... \to \alpha_n \to \beta$ 是一阶重言式，则 $\Gamma \vdash \beta$.

注

$\alpha_1 \to ... \to \alpha_n \to \beta$ 是一阶重言式当且仅当 $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ 重言蕴涵 β。

例

$\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha\}$ 重言蕴涵 $\alpha \leftrightarrow \beta$，故要证明 $\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$，只需证明 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ 和 $\Gamma \vdash \beta \to \alpha$。

一阶演绎定理

定理（一阶演绎定理）

$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \phi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash (\gamma \to \phi)$。

逆否命题

推论（逆否命题）

$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\phi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \neg\psi$。

反证法

不一致

称一阶公式集 Γ 是不一致的，如果存在一阶公式 ψ 使得 $\Gamma \vdash \psi$ 且 $\Gamma \vdash \neg\psi$。

推论（反证法）

如果 $\Gamma \cup \{\phi\}$ 不一致，则 $\Gamma \vdash \neg\phi$。

例 I

例

证明：$\vdash \exists x \forall y \phi \to \forall y \exists x \phi$。

Proof.

- 只需证明 $\exists x \forall y \phi \vdash \forall y \exists x \phi$；
- 只需证明 $\exists x \forall y \phi \vdash \exists x \phi$；
- 只需证明 $\forall x \neg \phi \vdash \forall x \neg \forall y \phi$；
- 只需证明 $\forall x \neg \phi \vdash \neg \forall y \phi$；
- 只需证明 $\{\forall x \neg \phi, \forall y \phi\}$ 不一致；
- $\{\forall x \neg \phi, \forall y \phi\} \vdash \phi$，$\{\forall x \neg \phi, \forall y \phi\} \vdash \neg \phi$

□

例 II

例

证明：$\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \exists x\beta)$。

证明：

- 只需证明 $\forall x(\alpha \to \beta) \vdash (\exists x\alpha \to \exists x\beta)$；
- 只需证明 $\forall x(\alpha \to \beta),\ \exists x\alpha \vdash \exists x\beta$；
- 只需证明 $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\neg\beta \vdash \forall x\neg\alpha$；
- 只需证明 $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\neg\beta \vdash \neg\alpha$；
- $\forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x\neg\beta \vdash \alpha \to \beta,\ \neg\beta$；
- $\alpha \to \beta,\ \neg\beta \vdash \neg\alpha$。

否定式的证明

设 ϕ 是一个否定式，想要证明 $\Gamma \vdash \phi$。

1. 如果 ϕ 是 $\neg(\psi \to \theta)$，则只需证明 $\Gamma \to \psi$ 且 $\Gamma \to \neg\theta$；
2. 如果 ϕ 是 $\neg\neg\psi$，则只需证明 $\Gamma \vdash \psi$；
3. 如果 ϕ 是 $\neg\forall x\psi$，则只需要证明存在一个项 t 使得 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$。

目录

常数概括定理

定理

假设 $\Gamma \vdash \phi$，而 c 是不在 Γ 中出现的常数符号，则存在变元 y，它不在 ϕ 中出现，使得 $\Gamma \vdash \phi^c_y$。更进一步，存在 Γ 到 $\forall y \phi^c_y$ 的不含 c 的推演。

证明

对证明序列的长度归纳证明：如果 $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ 是证明序列，则 $((\alpha_0)^c_y, ..., (\alpha_n)^c_y)$ 也是证明序列，其中 y 不出现在 α_i 中。

循环替换引理

引理

如果变元 y 不在公式 ϕ 中出现，则变元 x 可以在公式 ϕ^x_y 中替换 y，并且 $(\phi^x_y)^y_x = \phi$。

证明

1. 对 ϕ 的长度归纳证明。
2. 我们仅讨论 $\phi := \forall z\psi$ 的情形；
3. 若 $x = z$，则 $\phi^x_y := \phi$，结论显然成立；
4. 若 $x \neq z$，则 $\phi^x_y := \forall z(\psi^x_y)$；
5. 由定义，$(\forall z(\psi^x_y))^y_x := \forall z((\psi^x_y)^y_x)$；
6. 而根据归纳假设，总有 $((\psi^x_y)^y_x) := \psi$.

循环替换引理的推论

推论

假定 $\Gamma \vdash \phi^x_c$，其中常数符号 c 不在 Γ 和 ϕ 出现。则 $\Gamma \vdash \forall x\phi$，并且有一个 c 完全不出现的从 Γ 到 $\forall x\phi$ 的证明。

证明

1. 令 ϕ 为 $\phi(x)$。则 $\Gamma \vdash \phi(c)$;
2. 根据常数概括定理，有 $\Gamma \vdash \forall y\phi(y)$，且 c 不出现在证明中。
3. 不妨设 y 是新变元，由于 c 是新常数，$\phi(y) = \phi(x)^x_y$，故根据循环替换引理，有 $\phi(x) = \phi(y)^y_x$;
4. 从而 $\vdash \forall y\phi(y) \to \phi(x)$
5. 由演绎定理，$\forall y\phi(y) \vdash \phi(x)$;
6. 根据概括定理，$\forall y\phi(y) \vdash \forall x\phi(x)$;

约束变元的替换定理 I

定理

设 ϕ 是一个公式，t 是一个项，x 是一个变元。我们总是可以找到公式 ϕ' 使得 ϕ 与 ϕ' 的差别仅在于约束变元，并且

1. $\phi \vdash \phi'$ 且 $\phi' \vdash \phi$;
2. t 可以在 ϕ' 中替换 x。

证明

1. 对 ϕ 的长度归纳证明。
2. 我们只考虑 ϕ 形如 $\forall z\psi$;
3. 由归纳假设，存在满足条件的 ψ';
4. 取一个新变元 u，令 ϕ' 为 $\forall u({\psi'}_u^z)$;
5. 显然，t 可在 ψ' 中替换 x，故而可在 $\forall u({\psi'}_u^z)$ 中替换 x;

约束变元的替换定理 II

6. $\forall u(\psi'^{\,z}_{u}) \vdash (\psi'^{\,z}_{u})^{u}_{z} = \psi'$，故 $\forall u(\psi'^{\,z}_{u}) \vdash \psi$;
7. 由概括定理，$\forall u(\psi'^{\,z}_{u}) \vdash \forall z\psi$;
8. 同理，$\forall z\psi \vdash \psi$，从而 $\forall z\psi \vdash \psi'$;
9. 由概括定理，$\forall z\psi \vdash \forall z\psi'$;
10. 而 $\vdash \forall z\psi' \to \psi'^{\,z}_{u}$，故 $\forall z\psi \vdash \psi'^{\,z}_{u}$;
11. 由概括定理，$\forall z\psi \vdash \forall u(\psi'^{\,z}_{u})$;
12. 即 $\vdash \phi \leftrightarrow \phi'$.

与等词相关的内定理

(Eq1) $\forall xx = x$；

(Eq2) $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$；

(Eq3) $\forall x \forall y \forall z(x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z)$；

(Eq4) $\forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_n(x_1 = y_1 \rightarrow ... \rightarrow x_n = y_n \rightarrow Px_1 ... x_n \rightarrow Py_1 ... y_n)$，其中 P 是 n-元谓词符号；

(Eq5) $\forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_n(x_1 = y_1 \rightarrow ... \rightarrow x_n = y_n \rightarrow fx_1 ... x_n = fy_1 ... y_n)$，其中 f 是 n-元函数符号。

目录

前束范式

定义

形如

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \alpha$$

的公式称为**前束范式**，其中 n 是自然数，Q_i 是量词 $\forall$ 或 $\exists$，x_i 是变元，α 是不含量词的公式。

定理

任何一个公式都可以找到与之等价的前束范式。

Thanks!