First Order Logic

wu

2021 年 12 月 31 日

目录

1 递归论基础

1.1 primitive recursive

Definition 1.1. 初始函数

1. 零函数 $Z(x) = 0$
2. 后继函数 $S(x) = x + 1$
3. 投射函数 $\pi_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$

Definition 1.2. 设 $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ 与 $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$，称 $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ 是从 g 和 h **经原始递归得到的**，如果

1. $f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$
2. $f(\bar{x}, n+1) = h(\bar{x}, f(\bar{x}, n), n)$

Definition 1.3. 全体原始递归函数的集合 C 是最小的满足以下条件的自然数上的函数集合

1. 初始函数 $\subseteq C$
2. 复合封闭
3. 原始递归封闭

称 C 中的元素为原始递归函数

Lemma 1.4. *以下为原始递归函数*

1. *加法*
2. $C_k^n(x_1, \dots, x_n) = k$
3. $x \cdot y$, x^y,$x!$
4. *非零检测和零检测*

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & \end{cases} \qquad \delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \end{cases}$$

5. *前驱函数 pred*(x)

6. 截断减法

$$x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geq y \end{cases}$$

证明. $\sigma(0) = 0$,$\sigma(n+1) = C_1^2(n, \sigma(n))$

$\text{pred}(0) = 0$,$\text{pred}(n+1) = \pi_1^2(n, \text{pred}(n))$ □

Lemma 1.5. *$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ p.r., $g : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$*

$$g(x_1, \dots, x_r) = f(y_1, \dots, y_k)$$

y_j is either x_i or a constant, then g is p.r.

证明. $h_1, \dots, h_k : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$

- if y_j is x_i, then $h_j(x_1, \dots, x_r) = \pi_i^r(x_1, \dots, x_r)$
- if y_j is a constant $k \in \mathbb{N}$, then $h_j(x_1, \dots, x_r) = C_k^r(x_1, \dots, x_r)$

$$g(x_1, \dots, x_r) = f(h_1(x_1, \dots, x_r), \dots, (h_k(x_1, \dots, x_r)))$$

□

Definition 1.6. $A \subseteq \mathbb{N}^k$ is **primitive recursive** if its characteristic function is p.r.

Lemma 1.7. *1. If $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ is p.r., then $\mathbb{N}^k \setminus A$, $A \cup B$, $A \cap B$ is p.r.*

2. if P, Q is p.r. predicate, then $\neg P$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$ is p.r.

证明. $1 \dot{-} \chi_A(x)$, $\sigma(\chi_A(x) + \chi_B(x))$, $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ □

if $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ is p.r., then

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$$

is p.r.

Lemma 1.8. *If f_1, f_2 is k-ary p.r., P p.r. predicate, then*

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) & P(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \end{cases}$$

is p.r.

证明. $f(x) = \chi_P(x) f_1(x) + (1 \dot{-} \chi_P(x)) f_2(x)$ □

Lemma 1.9. *quo(x, y) and rem(x, y) are p.r.*

证明. Intuition

$$\text{rem}(x, y+1) = \begin{cases} \text{rem}(x, y) + 1 & \text{rem}(x, y) + 1 < x \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{quo}(x, y+1) = \begin{cases} \text{quo}(x, y) & \text{rem}(x, y) + 1 < x \\ \text{quo}(x, y) + 1 \end{cases}$$

solution

$\text{rem}(x, 0) = 0$

$\text{rem}(x, y+1) = (\text{rem}(x, y) + 1)\sigma(x - \text{rem}(x, y) - 1)$

$\text{quo}(x, 0) = 0$

$\text{quo}(x, y+1) = \text{quo}(x, y)\sigma(x - \text{rem}(x, y) - 1) + (\text{quo}(x, y) + 1)\delta(x - \text{rem}(x, y) - 1)$

□

Definition 1.10.
1. $(\exists x < a)\phi(x) := \exists x(x < a \wedge \phi(x))$
2. $(\forall x < a)\phi(x) := \forall x(x < a \to \phi(x))$
   bounded quantifier

Lemma 1.11. *If $P(\bar{x}, y)$ is a p.r. predicate*

1. *predicate*

$$E(\bar{x}, y) := (\exists z \le y) P(\bar{x}, z)$$
$$A(\bar{x}, y) := (\forall z \le y) P(\bar{x}, z)$$

are p.r.

2. *function*

$$f(\bar{x}, y) := (\mu z \le y) P(\bar{x}, z)$$

is p.r.

Lemma 1.12. 1. *predicate "x divides y" is p.r.*

2. *"x is not prime" "x is prime" are p.r.*

3. $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*,* $n \mapsto n$*th prime is p.r.*

证明. $p(0) = 2$. $p(n+1) = (\mu z \le y)(z > p(n) \wedge z \text{ prime} \wedge y = p(n)! + 1)$ □

- $\langle a_0, \dots, a_n \rangle := p_0^{a_0+1} \dots p_n^{a_n+1}$ is the Gödel number of $(a_0, \dots, a_n)$
- $\langle \rangle = 1$
- lh : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is $\mathrm{lh}(a) = \mu k \le a(p_k \nmid a)$
- $(a)_i : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ is $(a)_i = (\mu k \le a)(p_i^{k+2} \nmid a)$
- for any $a = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$, $(a)_i = a_i$
- concatenation function $\frown : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$a \frown b = a \cdot \prod_{i < \mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+i}^{(b)_i + 1}$$

Lemma 1.13. 1. *Set of Gödel numbers are p.r.*

2. $\mathrm{lh}(a)$ *and* $(a)_i$ *is p.r.*

3. *$a \frown b$ is p.r. and*

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle \frown \langle b_0, \dots, b_m \rangle = \langle a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \rangle$$

证明.

$$\exists n \leq x \left(\forall i \leq n (p_i \mid x) \wedge \forall j \leq x (j > n \to p_j \nmid x) \right)$$

□

function $f(\bar{x}, y)$,

$$F(\bar{x}, n) = p_0^{f(\bar{x},0)+1} \dots p_n^{f(\bar{x},n)+1}$$

Definition 1.14. function $g(\bar{x})$ and $h(\bar{x}, y, z)$, $f(\bar{x}, y)$ 是从 g 与 h 经 **强递归**得到的如果

$$f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$$
$$f(\bar{x}, n+1) = h(\bar{x}, n, F(\bar{x}, n))$$

Lemma 1.15. *如果 $f(\bar{x}, y)$ 是从 g 与 h 经强递归得到，and g, h p.r., then f is p.r.*

证明.

$$F(\bar{x}, 0) = 2^{f(\bar{x},0)+1} = 2^{g(\bar{x})+1}$$
$$F(\bar{x}, n+1) = F(\bar{x}, n) p_{n+1}^{f(\bar{x},n+1)+1} = F(\bar{x}, n) p_{n+1}^{h(\bar{x},n,F(\bar{x},n))+1}$$

Hence $F(\bar{x}, y)$ is p.r., so $f(\bar{x}, y) = (F(\bar{x}, y))_y$ is p.r. □

1.2 recursive function

- 假设有一个程序可以枚举所有的原始递归函数
- 设 $g_0, g_1, g_2, \dots$ 是所有原始递归函数的枚举
- 令 $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为 $F(n) = g_n(n) + 1$
- 虽然 F 在直观上可计算，但不属于原始递归函数

Definition 1.16. total function $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$,$g(\bar{x})$ 是从 f 通过正则极小化或正则 μ-算子得到的如果

- $\forall \bar{x} \exists y f(\bar{x}, y) = 0$
- $g(\bar{x})$ 是使得 $f(\bar{x}, y) = 0$ 最小的 y

  记作 $g(\bar{x}) = \mu y(f(\bar{x}, y) = 0)$

Definition 1.17. 1. 全体递归函数的集合为最小的包含所有初始函数，并且对复合、原始递归、正则极小化封闭的函数集合

2. $A \subseteq \mathbb{N}^k$ 是递归集如果 χ_A 是递归函数

Definition 1.18. partial function f, g 是从 f 通过极小化或者由 μ-算子得到的如果

$$g(\bar{x}) = \mu y(\forall z \leq y(f(x, z) \downarrow) \wedge f(x, y) = 0)$$

Definition 1.19. 全体部分递归函数的集合为最小的包含所有初始函数、并且怼复合、原始递归、极小化封闭的函数集合

Lemma 1.20. *Ackermann function is partial recursive*

$$A(0, y) = y + 1, \quad A(x + 1, 0) = A(x, 1)$$
$$A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$$

1.3 Turing Machine

规定输入向量为 $(x_1, \ldots, x_n)$ 时，初始格局为

$$q_s 1^{x_1+1} 0 1^{x_2+1} 0 \ldots 0 1^{x_k+1}$$

输出时，格局为 $q_h 1^y$，表示输出值为 y

Definition 1.21. 一个部分函数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 是被图灵机 M 所计算的，或者说图灵机 M 计算函数 f，如果

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{如果 } M \text{ 对输入 } x \text{ 的输出为 } y \\ \text{没有定义} & \text{如果计算过程无限或没有终止格局} \end{cases}$$

称部分函数 f 为图灵可计算的，如果存在一个图灵机 M 计算它

1.4 turing computability and partial recursive function

Theorem 1.22. *一个函数是图灵可计算的当且仅当它是部分递归的*

Lemma 1.23. *每个初始函数都是图灵可计算的*

Lemma 1.24. *任何一台标准图灵机都可以被一台单向无穷纸带图灵机模拟*

Corollary 1.25. *任何图灵可计算函数 h 都可以被一台加了如下限制的图灵机计算*

1. *在初始格局中，纸带中有一个不在字母表中的新字符 \$，可以在任何实现给定的位置，只要不混在输入字符串中见*
2. *计算完成后，\$ 左边的内容不变*
3. *输出字符串的位置起始于 \$ 右边一格*

Lemma 1.26. *图灵可计算对复合封闭*

Definition 1.27. $T(e,x,z)$ 表示 z 是图灵机 e 对输入 x 的计算过程（格局序列）的编码，称为 Kleene 谓词

Lemma 1.28. *Kleene predicate is p.r.*

Theorem 1.29. *存在原始递归函数 $U:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 和原始递归谓词 $T(e,x,z)$ 使得对任意的部分递归函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 都存在自然数 e 使得 $f(x)=U(\mu z T(e,x,z))$*

Corollary 1.30. *一个函数是递归的当且仅当它是部分递归的全函数*

证明. $\Leftarrow$. 部分递归的全函数 $f(x)=U(\mu z T(e,x,z))$ 满足正则性 □

Theorem 1.31 (通用函数定理)**.** *存在一个通用的部分递归函数；即存在二元函数 $\Phi:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 使得对任何一元部分递归函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 都存在一个自然数 e 使得对所有 x 有 $f(x)=\Phi(e,x)$*

令 $e_0,e_1,...$ 是图灵机的一个枚举，则 $\phi_0(x),\phi_1(x),...$ 是对应的对全体部分递归函数的枚举，即 $\phi_i(x)=\Phi(e_i,x)$

Theorem 1.32. 对递归函数来说，不存在通用函数，即不存在递归函数 $T:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 使得对任何一元递归函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 都存在一个自然数 e 使得对所有 x 有 $f(x)=T(e,x)$

存在一个部分函数 f 使得对任何递归全函数 g，都存在 $n\in\mathrm{dom}(f)$ 使得 $f(n)\neq g(n)$

$f(n)=\Phi(n,n)+1$, $g(x)=\Phi(m,x)$,$f(m)=\Phi(m,m)+1\neq g(x)$

1.5 递归可枚举

Definition 1.33. $A\subseteq\mathbb{N}$ is recursively enumerable (r.e.) if $A=\emptyset$ or $A=\mathrm{im}(f)$ for some recursive f

Lemma 1.34. *$A\subseteq\mathbb{N}$, TFAE*

1. *A r.e.*
2. *$A=\emptyset$ or $A=\mathrm{im}(f)$ for some p.r. f*
3. *$A=\emptyset$ or $A=\mathrm{im}(f)$ for some partial recursive f*
4. *χ_A is partial recursive*
5. *$A=\mathrm{dom}(f)$ for some partial recursive f*
6. *there is a recursive/primitive recursive predicate $R(x,y)$ s.t.*

$$A=\{x\mid\exists yR(x,y)\}$$

证明. $1\to 2$. Suppose $A=\mathrm{im}(f)$ where $f=U(\mu zT(e,x,z))$, for any $a_0\in A$

$$F(x,n)=\begin{cases}U(\mu\leq nT(e,x,n)) & \exists y\leq nT(e,x,y)\\ a_0\end{cases}$$

Then $F(\mathbb{N}^2)=f(\mathbb{N})$

$2\to 4$. $A=f(\mathbb{N})$

$$\chi_A(y)=C_1^1(\mu xf(x)=y)$$

$5 \to 6$. $f(x) = U(\mu z T(e,x,z))$

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \mid \exists z T(e,x,z)\}$$

$6 \to 1$.

$$A = \{x \mid \exists y R(x,y)\}, g(y) = x \cdot C_1^1(\mu x R(x,y))$$

$\square$

Theorem 1.35. 一个自然数的集合 A 是递归的当且仅当 A 和它的补集 $\mathbb{N} \setminus A$ 都是递归可枚举的

证明. 设 A 是 $f_1 : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的值域，$\mathbb{N} \setminus A$ 是 $f_2 : 2\mathbb{N}+1 \to \mathbb{N}$ 的值域

$R_i(x,y) \Leftrightarrow y = f_i(x)$

$$h(y) = \mu x(R_1(x,y) \vee R_2(x,y))$$

$\square$

Definition 1.36. $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ r.e., then

1. $A \cup B$,$A \cap B$ r.e.
2. $\{x \in \mathbb{N}^{k-1} \mid \exists y (x,y) \in A\}$ r.e.

Theorem 1.37. $K = \{e \in \mathbb{N} \mid \phi(e,e) \downarrow\}$ *is r.e., but not recursive*

证明. $K = \mathrm{dom}(\Phi(x,x))$, thus is r.e.

If K is recursive, then $\mathbb{N} \setminus K$ is recursive. Thus $x \in K$ and $x \notin K$ are recursive predicates. Then function

$$f(x) = \begin{cases} \Phi(x,x)+1 & x \in K \\ 0 & \end{cases}$$

is recursive. Thus there is a natural number e s.t. $f(x) = \Phi(e,x)$. If $e \in K$, then $f(e) = \Phi(e,e)+1$, a contradiction. If $e \notin K$, then $\Phi(e,e) \uparrow$, but $f(e) = 0$, contradiction $\square$

2 自然数的模型

Definition 2.1 (皮亚诺公理系统)**.** 语言 $L_{ar} = \{0, S, +, \times\}$, 则皮亚诺公理系统 PA 由下列公式的全称概括组成

1. $Sx \neq 0$
2. $Sx = Sy \to x = y$
3. $x + 0 = x$
4. $x + Sy = S(x + y)$
5. $x \times Sy = x \times y + x$
6. 对每个一阶公式 ϕ, 都有 ϕ 的归纳公理

$$(\phi(0) \wedge \forall(\phi(x) \to \phi(S(x)))) \to \forall x \phi(x)$$

2.1 可判定的理论

Definition 2.2. 理论 T 可公理化如果存在一个可判定的闭语句集 Σ 使得

$$T = \{\sigma \mid \Sigma \vDash \sigma\}$$

如果 Σ 有穷，则称 T 是有穷公理化的

Definition 2.3. 理论 T 是可判定的，如果存在一个算法，使得对任何闭语句 σ，该算法都能告诉我们 σ 是否在 T 中

证明. T is decidable iff

$$\#T = \{\#\sigma \mid \sigma \in T\}$$

is a recursive set □

Lemma 2.4. *complete axiomatizable theory is decidable*

证明. A set is recursive iff itself and its complement is r.e.. $T = \{\sigma \mid \Sigma \vDash \sigma\} = \{\sigma \mid \Sigma \vdash \sigma\}$.

Σ the axiom set. Σ is decidable, there is a recursive function $f : \mathbb{N} \to \#T$, for any sentence τ, check whether $\#\tau$ or $\#\tau$ is in $f(\mathbb{N})$

Σ 可判定，χ_Σ 递归 □

Theorem 2.5 (Łoś-Vaught test)**.** *T is a theory on countable language, if*

1. *T is λ-categorical for some cardinal λ*
2. *T doesn't have finite model*

Then T is complete

证明. Suppose T is not complete, then there is σ s.t. $T \cup \{\sigma\}$ and $T \cup \{\neg\sigma\}$ is consistent.

Let $\mathfrak{M}_1 \vDash T \cup \{\sigma\}$, $\mathfrak{M} \vDash T \cup \{\not\sigma\}$. $\mathfrak{M}_1$ and $\mathfrak{M}_2$ are infinite

By LST, since T is at most countable, there is $\mathfrak{M}_1'$ and $\mathfrak{M}_2'$ of cardinality λ s.t.

$$\mathfrak{M}_1' \vDash T \cup \{\sigma\}, \quad \mathfrak{M}_2' \vDash T \cup \{\neg\sigma\}$$

By categoricity, $\mathfrak{M}_1' \cong \mathfrak{M}_2'$ □

2.2 只含后继的自然数模型

Definition 2.6. 结构 $\mathfrak{N}_S = (\mathbb{N}, 0, S)$，语言 $L_S = \{0, S\}$，公理集

1. $0 \neq Sx$
2. $Sx = Sy \to x = y$
3. $x \neq 0 \to \exists y(x = s(y))$
4. $\bigwedge_{i<n}(Sx_i = x_{i+1}) \to x_0 \neq x_n$

令 T_S 为以上公式的全称概括的逻辑后承的集合

Lemma 2.7. *T_S 是不可数范畴的理论，从而是完备的*

Theorem 2.8. $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_S)$ *has quantifier elimination*

3 哥德尔不完备性定理

3.1 鲁宾逊算数理论 Q

设 T 是一个包含 Q 的理论

Definition 3.1. 称一个自然数上的 k-元关系 P 在 T 中 **数码逐点可表示的** (简称可表示的)，如果存在公式 $\rho(x)$，称为 P 的一个表示公式，使得

$$(n_1, \dots, n_k) \in P \Rightarrow T \vdash \rho(n_1, \dots, n_k)$$
$$(n_1, \dots, n_k) \notin P \Rightarrow T \vdash \neg\rho(n_1, \dots, n_k$$

Lemma 3.2. *如果 T 可公理化，则 T 是递归可枚举的*

证明. T 可公理化 $\Leftrightarrow$ 存在可判定的 Σ 使得

$$T = \{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$$

Σ 可判定：$\sharp\Sigma = \{\sharp\sigma \mid \sigma \in \Sigma\} \subseteq \mathbb{N}$ 可判定（递归）集合
Σ 的证明集合 P_Σ 可判定（递归）:

- 公式序列 $(\sharp\sigma_1, \dots, \sharp\sigma_n) \mapsto p \in \mathbb{N}$
- $p \in P_\Sigma \Leftrightarrow \forall i < \ln(p)$
  - $p_i \in \Sigma \cup A$ 或者
  - $\exists j, k < \ln(p)(\alpha_k := \alpha_j \to \alpha_i)$,$\sharp\alpha_{ijk} = p_{ijk}$
- P_Σ 递归
- $\sigma \in T \Leftrightarrow \exists p(p \in P_\Sigma \wedge \exists i < \ln(p)(p_i = \sharp\sigma))$
- T ($\sharp T$) 是递归可枚举的
- $\sharp T$ 递归函数的值域

□

Lemma 3.3. *1. 自然数上的等同关系 $\{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 被公式 $x = x$ 表示*

2. $\leq$ 关系被 $x \leq y$ 表示

3. 如果 P 是可表示的，则 P 是递归的

4. 可表示的关系在布尔运算下封闭

5. 如果 P 在 Q 中被 ρ 表示，则 P 在 Q 的任何一致扩张中都被 ρ 表示

6. P 在 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 中被 ρ 表示当且仅当 P 在结构 $\mathfrak{N}$ 中被 ρ 表示

证明. 3. P 是可表示的使得肯定能枚举出 $\rho(n_1, \dots, n_k)$ 或者 $\neg\rho(n_1, \dots, n_k)$，对于枚举函数 f,$\#\rho \in \mathrm{im}(f)$ 或者 $\#\neg\rho \in \mathrm{im}(f)$，不管怎么说肯定存在一个自然数对应它们，并且自然数是有限的

□

Corollary 3.4. P 在 Q 中可表示，则 P 在 $\mathfrak{N}$ 中可定义

证明. $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 是 Q 的一致扩张 □

- 称一个 L_{ar} 公式是 Δ_0 的，如果它只包含有界量词
- 如果一个公式 ϕ(Q 下) 等价于 $\exists x_1 \dots \exists x_n \theta$，其中 θ 是 Δ_0 的，则称 ϕ 是 Σ_1 的公式
- 如果一个公式 ϕ 等价于 $\forall x_1 \dots \forall x_n \theta$，其中 θ 是 Δ_0 的，则 ϕ 是 Π_1 公式
- 如果一个公式既等价于 Σ_1，又等价于 Π_1，则它是 Δ_1 的

Theorem 3.5 (Σ_1-完备性)**.** 对任何一个 Σ_1-闭语句，我们有

$$\mathfrak{N} \vDash \tau \Leftrightarrow Q \vdash \tau$$

证明. $\Rightarrow$: 对任何 Δ_0-闭语句 σ，对任何 $\mathfrak{M} \vDash Q$，有

$$\mathfrak{M} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{N} \vDash \sigma$$

设 σ 为 $(\forall x \leq t)\psi$ 且 ψ 是一个 Δ_0 公式，t 是一个闭项，于是存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $Q \vdash t = n$。如果 $\mathfrak{M} \vDash (\forall x \leq t)\psi(x,t)$，则 $\mathfrak{M} \vDash (\forall x \leq n)\psi(x,n)$

若 $\sigma := \exists \bar{x}\psi(\bar{x})$,$\psi$ 是 Δ_0 公式,设 $\mathfrak{N} \vDash \sigma$,则存在 $\overline{m} \in \mathbb{N}^n$ 使得 $\mathfrak{N} \vDash \psi(\overline{m})$。$Q \vdash \psi(\overline{m}) \Rightarrow Q \vdash \exists \bar{x}\psi(\bar{x})$ □

Definition 3.6. 称一个函数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 在 T 中可表示，如果存在 L_{ar} 公式 $\phi(x_1, \dots, x_k, y)$ 使得对所有 $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ 有

$$T \vdash \forall y \, (\phi(n_1, \dots, n_k, y) \leftrightarrow y = f(n_1, \dots, n_k))$$

此时称 ϕ 作为一个函数表示 f

表示函数图象的公式不能表示函数

设 f 是一个函数，$G_f = \{(\bar{x}, y) \mid y = f(\bar{x})\}$，设 $\phi(\bar{x}, y)$ 表示 G_f，于是对任意 $\bar{a} \in \mathbb{N}^k$,$b \in \mathbb{N}$，有

$$f(a) = b \Rightarrow T \vdash \phi(\bar{a}, b), \quad f(a) \neq b \Rightarrow T \vdash \neg\phi(\bar{a}, b)$$

若 $\mathfrak{M} \vDash T$，对于非标准 $y \in M \setminus \mathbb{N}$，

$$\mathfrak{M} \vDash y \neq f(\bar{a}) \to \neg\phi(\bar{a}, y)$$

不一定成立

例如 $Z(x) = 0$，于是 $\phi(x, y) := y + y = y$ 表示 G_Z,Q 不能证明 $y + y = y \to y = 0$，考虑 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Lemma 3.7. 令 t 为 L_{ar} 的项，则 t 诱导出来的函数是可表示的

Theorem 3.8. 可表示函数类关于复合封闭

Lemma 3.9. 可表示函数类关于极小算子封闭

1. 设 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 被 $\alpha(\bar{x}, y)$ 表示
2. 令 $\phi(\bar{x}, y)$ 味 $\alpha(\bar{x}, y) \wedge (\forall z < y)\neg\alpha(\bar{x}, z)$
3. 则 $f : \bar{a} \mapsto \mu b[P(\bar{a}, b)]$ 被 $\phi(\bar{x}, y)$ 表示

Corollary 3.10. 函数 f 可表示当且仅当 G_f 可表示

证明. $a \mapsto \mu b[G_f(a, b)]$ 是可表示函数，它是 f 自身 □

Corollary 3.11. 加定函数 $g(x, y)$ 可表示，则函数

$$f(x) := \mu y(g(x, y) = 0)$$

也可表示

目标：可表示函数类关于原始递归封闭，

Definition 3.12. 哥德尔函数 $\beta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^{<\omega}$ 定义为：对任意 u, v, w,$\beta(u, v, w)$ 是一个长度为 w 的序列 $a_0, \dots, a_{w-1}$，其中

$$u = d((i + 1)v + 1) + a_i$$

定义 $\alpha(u, v, i)$ 为 $\frac{u}{v(i+1)+1}$ 的余数，即 β 函数的坐标分量函数，则 $\alpha(u, v, i)$ 是可表示的

Theorem 3.13. β 是满射

Lemma 3.14 (欧几里得引理)**.** 设 $a, b \in \mathbb{N}$ 互素，则存在 $x, y \in \mathbb{Z}$ 使得 $ax + by = 1$

证明. 令 $X = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$，则 X 有最小元 x_0, 若 x_0 不能整除 a，则 $a = cx_0 + r$，因此 x_0 是最小公倍数

consider $a\mathbb{N}$ and $b\mathbb{N}$, then $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N} = c\mathbb{N}$ for some $c \in \mathbb{N}$ since $\mathbb{N}$ is a PID □

Theorem 3.15 (中国剩余定理)**.** 设 $d_0, \dots, d_n$ 是两两互素的自然数，$a_0, \dots, a_n$ 为满足 $a_i < d_i$ 的自然数，则存在 $c \in \mathbb{N}$ 使得 $c \equiv a_i \mod d_i$ *for all* i

Lemma 3.16. 对任意 n，存在 $n + 1$ 个数两两互素

$$1 + n!, 1 + 2 \cdot n!, \dots, 1 + (n + 1) \cdot n!$$

Theorem 3.17. β 是满射

证明. 设 $a_0, \dots, a_{w-1}$ 是一个自然数的序列，令 $n = \max\{a_0, \dots, a_{w-1}, w\}$，令 $v = n!$, 则 $\{v(i + 1) + 1 \mid i = 0, \dots, w - 1\}$ 两两互素且 $a_i < v(i + 1) + 1$，根据中国剩余定理，存在 $u \in \mathbb{N}$ 使得 $u \equiv_{v(i+1)+1} a_i$ □

Lemma 3.18. $\alpha(u,v,i) = \frac{u}{v(i+1)+1}$ 的余数是可表示的

证明. $P(c,d,i,r,q) := (c = q(1+(i+1)d)+r)$ 可表示

$R(c,d,i,r) := \exists q \leq c\, P(c,d,i,r,q)$ 可表示:

$\mu r(R(c,d,i,r))$ 可表示 □

Theorem 3.19. 递归函数都是可表示的

证明. 只需证明 $\mathfrak{N}$ 中的可表示函数类包含初始函数，且对复合、极小化、原始递归封闭 □

4 作业

7.5.3 (2)/

7.5.5 $h[A]$ 递归吗

7.1 7.2 7.3

Exercise 4.0.1. 令 Σ_1 和 Σ_2 两个语句集，并且没有模型能同时满足 Σ_1 和 Σ_2. 证明存在一个语句 σ 使得 $\operatorname{Mod}\Sigma_1 \subseteq \operatorname{Mod}\tau$ 并且 $\operatorname{Mod}\Sigma_2 \subseteq \operatorname{Mod}\neg\tau$

证明. $\operatorname{Mod}\Sigma_1 \cap \operatorname{Mod}\Sigma_2 = \emptyset$. $\operatorname{Mod}\Sigma_1 \subseteq \operatorname{Mod}\tau \Leftrightarrow \Sigma_1 \models \tau$

suppose for all τ, $\Sigma_1 \not\models \tau$ or $\Sigma_2 \not\models \tau$

Then for all $\tau \in \Sigma_1$, $\Sigma_2 \not\models \neg\tau$ and hence $\Sigma_2 \cup \{\tau\}$ is satisfiable. Thus $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ is satisfiable, a contradiction □

Exercise 4.0.2. $\vdash_{\mathsf{PA}} x < y \leftrightarrow Sx \leq y$ and $\vdash_{\mathsf{PA}} x \leq y \vee y \leq x$

证明. $x < y \Leftrightarrow \exists z(\neg z \approx 0 \wedge x + z = y)$. $\neg z \approx 0 \Leftrightarrow \exists m(z \approx S(m))$. $x + S(m) \approx S(x+m) \approx S(x) + m \approx y$. □

Exercise 4.0.3. 证明有端点的稠密线序理论 $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}\cap[0,1),<)$,$\mathrm{Th}(\mathbb{Q}\cap[0,1],<)$,$\mathrm{Th}(\mathbb{Q}\cap(0,1],<)$ 都分别是 $\aleph_0$-categorical，因而是完全的。再验证它们和 $\mathrm{Th}(\mathbb{Q},<)$ 是稠密线序理论仅有的四个完全扩张

Exercise 4.0.4. ACF_0 is not finitely axiomatizable

证明. proof □

Exercise 4.0.5. 证明：理论 T_S 被下列公理公理化：(S1) (S2) 加上对语言 $\mathcal{L}_S = \{0, S\}$ 的归纳公理模式

$$[\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(Sx))] \to \forall x \varphi(x)$$

其中 φ 是任意的语言 $\mathcal{L}_S$ 上的公式

Exercise 4.0.6. T_S 不能被有穷公理化

证明. 如果 T_S 能被有穷公理化 □