Advanced Logic

2022 年 4 月 3 日

目录

第一章　逻辑与代数

1.1　布尔代数

给定任意集合 X，X 的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 在 $\cap, \cup, -$ 运算下，形成一个代数结构，这个结构是所谓“布尔代数”的最直观最典型的代表。

定义 1.1.1. 令 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 为一个结构，其中 B 是非空集合，$+, \cdot$ 是二元函数，$-$ 是一元函数，$0, 1$ 为常量。如果 $\mathcal{B}$ 满足以下公理：

(1) 结合律：$a + (b + c) = (a + b) + c$，$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(2) 交换律：$a + b = b + a$，$a \cdot b = b \cdot a$;

(3) 吸收律：$a + (a \cdot b) = a$，$a \cdot (a + b) = a$;

(4) 分配律：$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$，$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$;

(5) $x + (-x) = 1$，$x \cdot (-x) = \emptyset$。

则称 $\mathcal{B}$ 为**布尔代数**。

练习 1.1.2. $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, -, X, \emptyset)$ 是一个布尔代数。

注记 1.1.3. 在定义中我们没有要求 $0 \neq 1$，所以可以有一个元素的布尔代数。

例如，如果 $X = \emptyset$，则 $\mathcal{P}(X)$ 只有一个元素 $\emptyset$，它也是一个布尔代数。只有一个元素的布尔代数是**平凡的**。

一个**非平凡**的布尔代数至少有两个元素 $\{0, 1\}$，例如对任意非空集合 X，$\{X, \emptyset\}$ 是一个布尔代数。

练习 1.1.4. 令 $B=\{T,F\}$ 为命题真值的集合，则 B 在命题逻辑联结词 $\vee$、$\wedge$ 和 $\neg$ 下是一个布尔代数。

练习 1.1.5. 令 $\mathscr{B}$ 为任意布尔代数，$a,b\in B$，证明:

(1) $a+a=a$;

(2) $a\cdot a=a$;

(3) $a+b=b$ 当且仅当 $a\cdot b=a$;

(3) $a\cdot 0=0$，$a\cdot 1=a$;

(4) $a+0=a$，$a+1=1$;

(5) $a=-b$ 当且仅当 $a+b=1$ 并且 $a\cdot b=0$;

(6) $--a=a$;

(7) $-(a+b)=-a\cdot(-b)$;

(8) $-(a\cdot b)=-a+(-b)$。

例 1.1.6. 令 $\mathscr{L}$ 为命题逻辑的语言，T 为 $\mathscr{L}$ 中的理论。

- 对任意公式 α,β，定义一个二元关系:
$$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow T\vdash\alpha\leftrightarrow\beta.$$
- 对任意公式 α，我们令 $[\alpha]_T$ 表示 α 在这一等价关系下的等价类，即集合 $\{\beta\mid\beta\sim\alpha\}$。在不致引起混淆的情形下，我们通常省略掉下标 T。
- 令 $B=\{[\alpha]_T\mid\alpha\text{是一个公式}\}$，定义 B 上的运算:

$$\begin{aligned}
[\alpha]+[\beta] &= [\alpha\vee\beta]\\
[\alpha]\cdot[\beta] &= [\alpha\wedge\beta]\\
-[\alpha] &= [\neg\alpha]\\
0 &= [\alpha\wedge\neg\alpha]\\
1 &= [\alpha\vee\neg\alpha].
\end{aligned}$$

在这里，我们需要验证以上定义是合理的：即定义中的 $+, \cdot$ 的确是二元函数；$-$ 的确是一元函数；$0, 1$ 的确是常量，或者说是零元函数。所以，以 $+$ 为例，我们需要验证对任意 $\alpha, \beta, \delta, \gamma$，如果 $[\alpha] = [\beta]$，$[\delta] = [\gamma]$，则 $[\alpha \vee \delta] = [\beta \vee \gamma]$。具体的验证请读者完成。

- $\mathcal{B}(T) = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 是一个布尔代数，称为（命题逻辑的）Lindenbaum 代数。

练习 1.1.7. 令 T 为命题逻辑中的理论，

1. 请验证 $\mathcal{B}(T) = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 是一个布尔代数。
2. T 是一致的当且仅当 $\mathcal{B}(T)$ 是非平凡的。

定义 1.1.8. 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是布尔代数，$f : A \to B$ 映射，如果 f 满足：

(1) $f(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$，$f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$；

(2) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$，$f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$，$f(-a) = -f(a)$。

就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**同态**。

如果同态 f 是单射，就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**嵌入**。

如果 f 还是双射，就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**同构**。

如果 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，$A \subseteq B$，并且等同映射 $\mathrm{id} : A \to B$ 是一个嵌入（注意，这要求 $0, 1 \in A$ 并且 A 在 $\mathcal{B}$ 的运算下也是一个布尔代数），就称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的**子代数**。

例 1.1.9. 对任意集合 X，$\{X, \emptyset\}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数。

令 $B = \{T, F\}$，则 $f(T) = X$，$f(F) = 0$ 是到 $\mathcal{P}(X)$ 的嵌入，其中 $X \neq \emptyset$ 为任意非空集合。它同时也是 $\{T, F\}$ 和 $\{X, \emptyset\}$ 之间的同构。事实上，任何有只两个元素的布尔代数都是同构的，我们今后用 $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ 表示。

今后，我们称 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数为**集合代数**，并且，我们会证明，任何布尔代数都同构于一个集合代数。

练习 1.1.10. 令 X 为任意集合，$Y \subseteq X$ 称为在 X 中是**余有穷的**，如果 $X - Y$ 是有穷集合。对任意集合 X，令 $B = \{Y \subseteq X \mid Y$是有穷的或余有穷的$\}$，则 $X, \emptyset \in B$。证明 B 对 $\cap, \cup, -$ 封闭，所以 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，是一个集合代数。

练习 1.1.11. 证明不存在基数为 3 的布尔代数。思考一下，一个有穷的布尔代数，其基数需要满足什么条件?

引理 1.1.12. *如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是布尔代数，$f : A \to B$ 映射，则以下命题等价:*

(1) f *是* $\mathcal{A}$ *到* $\mathcal{B}$ *的同态;*

(2) *对任意* $a, b \in A$，$f(-a) = -f(a)$，$f(a + b) = f(a) + f(b)$;

(3) *对任意* $a, b \in A$，$f(-a) = -f(a)$，$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$;

(4) $f(0) = 0$，$f(1) = 1$，*并且* $f(a + b) = f(a) + f(b)$，*并且如果* $a \cdot b = 0$，*则* $f(a) \cdot f(b) = 0$。

证明. □

作为简单的推论，请证明以下命题:

练习 1.1.13. 如果 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$A \subseteq B$ 为非空子集，则以下命题等价:

(1) $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的子代数;

(2) A 对 $+, -$ 封闭;

(3) A 对 $\cdot, -$ 封闭。

练习 1.1.14. 如果 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是同态，并且对任意 $a \in \mathcal{A}$，如果 $a \neq 0$，则 $f(a) \neq 0$，那么 f 是一个嵌入。

引理 1.1.15. *如果* $\mathcal{B}$ *是布尔代数,* Γ *是一族* $\mathcal{B}$ *的子代数,* $\bigcap \Gamma$ *是* $\mathcal{B}$ *的子代数。*

定义 1.1.16. 假设 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$X \subseteq B$。

$$A = \bigcap\{C \mid X \subseteq C \wedge \mathcal{C} \text{ 是 } \mathcal{B} \text{ 的子代数}\} \tag{1.1}$$

是一个布尔代数，称为由 X 生成的代数。

引理 1.1.17. *令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$X \subseteq B$，以下命题等价*

(1) $\mathcal{A}$ 是 X 生成的布尔代数；

(2) $A = \bigcup_{n\in\omega} X_n$，其中 $X_0 = X$，

$$X_{n+1} = X \cup \{a + b \mid a, b \in X_n\} \cup \{a \cdot b \mid a, b \in X_n\} \cup \{-a \mid a \in X\}.$$

定义 1.1.18. 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数，对任意 $a, b \in B$，我们定义二元关系 $a \leq b$ 为 $\exists c(a + c = b)$。$a < b$ 当且仅当 $a \leq b$ 并且 $a \neq b$。

例 1.1.19. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，我们显然有以下事实：对任意 $a, b \in B$，

- $a \leq a + b$，$b \leq a + b$；
- $a \cdot b \leq a$，$a \cdot b \leq b$；
- 对任意 $a \in B$，$0 \leq a \leq 1$。

练习 1.1.20. 令 T 为命题逻辑中的理论，对任意公式 α, β，$[\alpha] \leq [\beta]$ 当且仅当 $T \vdash \alpha \to \beta$。

练习 1.1.21. 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数，$a, b, c \in B$，证明：

(1) $a \leq b$ 当且仅当 $a + b = b$ 当且仅当 $a \cdot b = a$；

(2) 如果 $a \leq c$ 并且 $b \leq c$，则 $a + b \leq c$；

(3) 如果 $a \leq b$ 并且 $a \leq c$，则 $a \leq b \cdot c$。

练习 1.1.22. 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数，

(1) 证明任意布尔代数 $\mathcal{B}$ 在关系 $\leq$ 下是一个偏序集。

(2) 证明如果 $\mathcal{B}$ 是一个集合代数，则 $\leq$ 就是集合上的子集关系 $\subseteq$。

(3) 对任意 $a, b \in B$，$a \leq b$ 当且仅当 $-b \leq -a$，

(4) 对任意 $a, b \in \mathcal{B}$，$a \leq b$ 当且仅当 $a \cdot (-b) = 0$,（当且仅当 $-a + b = 1$），

(5) 对任意 $a, b, c \in \mathcal{B}$，$a \cdot b \leq c$ 当且仅当 $b \leq -a + c$。

定义 1.1.23. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$, 如果一个非零元素 $a \in B$ 满足: 不存在 $b \in B$ 使得 $0 < b < a$，就称 a 是 $\mathcal{B}$ 的**原子**。

一个布尔代数 $\mathcal{B}$ 如果没有原子，就称 $\mathcal{B}$ 是**无原子的**。

如果对任意 $b \in \mathcal{B}$，都存在一个原子 $a \in \mathcal{B}$ 使得 $a \leq b$，就称 $\mathcal{B}$ 是**原子化的**。

例 1.1.24. 对任意集合 X, X 的有穷子集和余有穷子集构成的布尔代数是原子化的，每个单点集 $\{x\}$ 都是一个原子。

练习 1.1.25. 任何有穷的布尔代数都是原子化的。

引理 1.1.26. *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$a \in B$，则以下命题等价:*

(1) a 是原子。

(2) 对任意 $b \in B$，$b \neq 0$，$a \leq b$ 或 $a \leq -b$，但不能同时成立。

(3) $0 < a$，并且如果 $a \leq b + c$，则 $a \leq b$ 或 $a \leq c$。

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 如果 $a \cdot b = c \neq 0$，则 $a = c \leq b$，否则 $c < a$，与 a 是原子矛盾。如果 $a \cdot b = 0$，则 $a \cdot (-b) \neq 0$，同理 $a \leq -b$。如果 $a \leq b$ 且 $a \leq (-b)$，令 $c_1, c_2 \in B$ 为见证 $\leq$ 的元素。我们有 $a + c_1 = -(a + c_2)$，所以 $a \cdot (a + c_1) = 0$，这蕴涵着 $a = 0$，矛盾。

(2)$\Rightarrow$(3). $0 < a$ 是显然的。假设 $a \leq b + c$ 并且 $a \not\leq b$，则根据（2），$a \leq -b$，所以 $a \leq (-b) \cdot (b + c) \leq (-b) \cdot c \leq c$，所以 $a \leq c$。

(3)⇒(1). 反设 a 不是原子，令 $0 < b < a$，并且令 $c \neq 0$ 为见证这一点的元素，则 $a = b + c$。由于 b 也不为 0，所以 $c < a$。这样，$a \not\leq b$ 并且 $a \not\leq c$，与（3）矛盾。 □

定理 1.1.27. *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，令 $A \subseteq B$ 为 $\mathcal{B}$ 中全体原子的集合。定义 $f : B \to \mathcal{P}(A)$ 为：对任意 $b \in B$，*

$$f(b) = \{a \in A \mid a \leq b\}, \tag{1.2}$$

则 f 是一个同态映射。如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则 f 是一个嵌入。

证明. 检查 f 是一个同态映射并不困难，我们留作练习。

练习 1.1.28. 证明 f 是同态映射。

下面我们证明：如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则 f 是一一映射。注意到，如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则对任意 $b \in \mathcal{B}$，如果 $b \neq 0$，则 $f(b) \neq \emptyset$。现在假设 $b_1 \neq b_2$，则 $b_1 \cdot (-b_2) \neq 0$ 或者 $(-b_1) \cdot b_2 \neq 0$。不妨设前者为 $c \neq 0$，则 $f(c) = f(b_1) \cap f(-b_2) = f(b_1) \cap (A - f(b_2)) \neq \emptyset$，所以 $f(b_1) \neq f(b_2)$。 □

推论 1.1.29. *任何原子化的布尔代数都同构于一个集合代数。特别地，如果 $\mathcal{B}$ 是一个有穷的布尔代数，并且有 m 个原子，则 $\mathcal{B}$ 同构于集合代数 $\mathcal{P}(m)$。*

注记 1.1.30. 这是斯通表示定理的一个特殊版本。

推论 1.1.31. *对任意自然数 n，以下命题等价：*

(1) 存在一个布尔代数 $\mathcal{B}$，$|B| = n$；

(2) n 是一个平方数。

推论 1.1.32. *如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是有穷的布尔代数，则 $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ 当且仅当 $|A| = |B|$。*

定义 1.1.33. 对任意的布尔代数 $\mathcal{B}$，令 $\leq$ 为 B 上的标准偏序，$X \subseteq B$ 是 B 的非空子集。

(1) 如果存在 $u \in \mathcal{B}$ 满足：

(a) 对任意 $x \in X$，$x \leq u$，

(b) 如果有 $b \in B$ 满足对任意 $x \in X$ 都有 $x \leq b$，则 $u \leq b$。

就称 u 是 X 的上确界，一般记作 $\sum X$。

(2) 如果存在 $l \in \mathcal{B}$ 满足：

(a) 对任意 $x \in X$，$l \leq x$，

(b) 如果有 $b \in B$ 满足对任意 $x \in X$ 都有 $b \leq x$，则 $b \leq l$。

就称 l 是 X 的下确界，一般记作 $\prod X$。

如果对布尔代数 $\mathcal{B}$ 的任意非空子集 X，都有 $\sum X \in \mathcal{B}$ 并且 $\prod X \in \mathcal{B}$，就称 $\mathcal{B}$ 是完全的。

引理 1.1.34. *假设 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$X \subseteq B$，则*

(1) 如果 $\sum X$ 存在，则 $\prod(-X)$ 也存在，并且等于 $-\sum X$；

(2) 如果 $\sum X$ 存在，$a \in B$，则 $\sum\{a \cdot b \mid b \in X\}$ 存在并且等于 $a \cdot \sum X$。

证明. (2) 对任意 $b \in X$，$b \leq \sum X$，所以 $a \cdot b \leq a \cdot \sum X$，即 $\sum X$ 是上界。现在假设 u 也是上界，即对任意 $b \in X$，$a \cdot b \leq u$。注意到这蕴含 $b = a \cdot b + (-a) \cdot b \leq u + (-a) \cdot b \leq u + (-a)$，所以 $\sum X \leq u + (-a)$，而这又蕴含 $a \cdot \sum X \leq a \cdot u \leq u$。 □

引理 1.1.35. *对任意一阶逻辑中的理论 T，令 $\mathcal{B}(T)$ 为相应的 Lindenbaum 代数，则*

$$\begin{aligned}[]
[\exists x\phi] &= \textstyle\sum\{[\phi^x_y] \mid y\text{是变元}\} \\
[\forall x\phi] &= \textstyle\prod\{[\phi^x_y] \mid y\text{是变元}\}
\end{aligned}$$

证明. 显然，我们只需证明其中一个等式。因为对任意变元 y，$\models \forall x\phi \to \phi^x_y$，所以 $[\forall x\phi] \leq \prod\{[\phi^x_y] \mid y\text{是变元}\}$，即，它是这个集合的下界。另一个方向，令 $[\psi]$ 是一个下界，则对任意变元 y，$T \vdash \psi \to \phi^x_y$。特别地，这对一个不在 $T \cup \{\psi, \phi\}$ 中出现的变元 y 仍然成立。利用全称量词引入规则，我们有 $T \vdash \psi \to \forall x\phi$。所以，$[\forall x\phi]$ 是下确界。

□

练习 1.1.36. 如果 $B = \mathcal{P}(X)$，则对任意 $Y \subseteq B$，$\sum Y = \bigcup Y$，$\prod Y = \bigcap Y$。$\mathcal{P}(X)$ 是完全的布尔代数。

练习 1.1.37. 如果 $\mathcal{B}$ 是一个集合代数并且是完全的，则存在 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$。

例 1.1.38. 令 $B = \{x \subseteq \mathbb{N} \mid x\text{是有穷的或余有穷的}\}$，参见练习 1.1.10，$\mathcal{B}$ 在集合运算下是一个布尔代数。对任意 $n \in \mathbb{N}$，令 $x_n = \{p < n \mid p\text{是素数}\}$，同时令 $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$，则 $\sum X$ 在 $\mathcal{B}$ 中不存在。它是全体素数的集合，是无穷的，但不是余有穷的。

练习 1.1.39. 在定理1.1.27中，如果 $\mathcal{B}$ 还是完全的，则 f 是一个同构。所以，如果 $\mathcal{B}$ 是一个完全的原子化的布尔代数，则存在集合 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$。【证明：如果 A 是全体原子的集合，$Y \subseteq A$，则 $f(\sum Y) = Y$，所以 f 是一个满射。】

引理 1.1.40. *假设 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，以下命题等价：*

(1) $\mathcal{B}$ 是原子化的；

(2) 对任意 $b \in B$，

$$\sum\{a \mid a \leq b \wedge a \text{ 是原子}\}$$

存在并且等于 b。

推论 1.1.41. *如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的并且只有有穷多个原子，则 $\mathcal{B}$ 是有穷的。*

1.2　滤与理想

定义 1.2.1. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$，如果 F 满足以下条件：

1. $0 \notin F$，$F \neq \emptyset$；

2. 如果 $a, b \in F$，则 $a \cdot b \in F$；

3. 如果 $a \in F$ 并且 $a \leq b$，$b \in F$。

就称 F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤。

例 1.2.2. 对任意集合 X，$(\mathcal{P}(X), X, \emptyset, \cap, \cup, -)$ 是布尔代数。

- $\{X\}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 上的滤，称为平凡的。
- 如果 X 是无穷的，令 $F = \{Y \subseteq X \mid Y\text{是余有穷的}\}$，则 F 是一个滤。条件（1）和（3）是显然的；关于（2），如果 Y_1, Y_2 是余有穷的，则 $X - Y_1 \cap Y_2 = (X - Y_1) \cup (X - Y_2)$ 也是有穷的，所以 $Y_1 \cap Y_2 \in F$。

习惯上，如果 $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是滤，我们更经常地称其为“X 上的滤”。

练习 1.2.3. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$，以下命题等价：

(1) F 是滤；

(2) $0 \notin F$，$1 \in F$ 并且对任意 $a, b \in B$，$a \cdot b \in F$ 当且仅当 $a \in F$ 且 $b \in F$。

定义 1.2.4. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，它的子集 $G \subseteq B$ 如果满足：对任意 $n \in \omega$，任意 $g_1, \cdots, g_n \in G$，它们的积不为 0，即，$g_1 \cdot g_2 \cdots g_{n-1} \cdot g_n > 0$，就称 G 有**有穷交性质**。

练习 1.2.5. 如果 $G \subseteq B$ 有有穷交性质，$a \in B$，则 $G \cup \{a\}$ 或 $G \cup \{-a\}$ 有有穷交性质。

引理 1.2.6. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$G \subseteq B$ 有有穷交性质，则

$$F = \{b \in B \mid \exists g_1, \cdots, g_n \in G(g_1 \cdots g_n \leq b)\} \tag{1.3}$$

是 $\mathcal{B}$ 上的滤，称为 G **生成**的滤。

练习 1.2.7. 如果 F 是由 G 生成的滤，则 F 是包含 G 的最小的滤，即，$G \subseteq F$ 并且如果 $F' \supseteq G$ 也是滤，则 $F \subseteq F'$。

注记 1.2.8. 对任意 $a \neq 0$，由于 $\{a\}$ 总是有有穷交性质，所以，任意非 0 的 $a \in B$，$\{a\}$ 生成 $\mathcal{B}$ 上的一个滤。由单点集生成的滤称为**主滤**。

定义 1.2.9. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$ 是滤。如果对任意的 $b \in B$，b 和 $-b$ 有且只有一个属于 F，就称 F 是 $\mathcal{B}$ 上的**超滤**。

由单点集 $\{a\}$ 生成的主滤是超滤的等价条件是 a 是原子，请尝试以下练习：

练习 1.2.10. 假设 $G = \{g\} \subseteq B$，F 是由 G 生成的滤，则以下命题等价：

(1) g 是原子；

(2) F 是超滤；

(3) F 是主超滤。

在偏序集的意义上，超滤也是极大滤。

引理 1.2.11. *令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤。以下命题等价：*

(1) F 是超滤；

*(2) F 是***极大滤***：不存在滤 F' 使得 $F \subsetneq F'$。*

(3) F 是素的：对任意 $a, b \in B$，如果 $a + b \in F$，则 $a \in F$ 或者 $b \in F$。

证明. (1)⇒(2). 反设 F 不是极大滤，F' 是 F 的真扩张。令 $b \in F' - F$。由于 $b \notin F$ 而 F 是超滤，所以 $-b \in F \subseteq F'$，这样 $b \cap (-b) = 0 \in F'$，矛盾。

(2)⇒(3). 首先，我们验证，如果 F 是极大滤，而 $a \notin F$，则至少存在一个 $c \in F$，$c \cdot a = 0$：否则，$F \cup \{a\}$ 有有穷交性质，因而生成一个滤 F'，它是 F 的真扩张。

现在假设 a, b 都不属于 F，令 $c_1, c_2 \in F$ 见证这一点，即 $c_1 \cdot a = c_2 \cdot b = 0$。所以 $c_1 \cdot c_2 \cdot (a + b) = 0$。由于 $c_1 \cdot c_2 \in F$，所以 $a + b \notin F$。

(3)⇒(1). 对任意 $b \in B$，如果 $b \notin F$，因为 $b + (-b) = 1 \in F$，所以由（3），$-b \in F$。 □

与滤对偶的概念是理想。

定义 1.2.12. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$I \subseteq B$，如果 I 满足以下条件：

1. $1 \notin I$，$I \neq \emptyset$;
2. 如果 $a, b \in I$，则 $a + b \in I$；
3. 如果 $a \in I$ 并且 $b \leq a$，$b \in I$。

就称 I 是 $\mathcal{B}$ 上的**理想**。

所谓“对偶”的意思由以下练习表达。

练习 1.2.13. F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤当且仅当 $I = \{-a \mid a \in F\}$ 是 $\mathcal{B}$ 上的理想。

练习 1.2.14. 令 F 是布尔代数 $\mathcal{B}$ 上的滤，令 $(\{0,1\}, +, \cdot, -, 0, 1)$ 为两个元素的布尔代数。定义 $f : B \to \{0,1\}$ 为

$$f(b) = \begin{cases} 1, & b \in F; \\ 0, & b \notin F. \end{cases} \tag{1.4}$$

即，f 是 F 的特征函数。证明：F 是超滤当且仅当 f 是布尔代数 $\mathcal{B}$ 到 $\{0,1\}$ 的同态映射。

以上练习提示了滤与同态的联系，这值得进一步探讨。

引理 1.2.15. 如果 $h : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是一个同态，则 $F = \{b \in B \mid f(b) = 1\}$ 是 $\mathcal{B}$ 上的一个滤，称为 f 的 *shell*；$I = \{b \in B \mid f(b) = 0\}$ 是 $\mathcal{B}$ 上的一个理想，称为 f 的 *kernel*

定义 1.2.16. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，任意 $a, b \in B$；

(1) 令 $a \nabla b$ 表示以下运算：$(a + (-b)) \cdot (b + (-a))$，称为 a, b **对称和**;

(2) 令 $a \triangle b$ 表示以下运算：$(a \cdot (-b)) + (b \cdot (-a))$，称为 a, b **对称差**。

练习 1.2.17. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$a, b \in B$，证明：

(1) $a \triangle a = 0$;

(2) $a \triangle b = b \triangle a$;

(3) $a\nabla b = -(-a\triangle -b)$。

引理 1.2.18. 令 $\mathscr{B}$ 是布尔代数，$I \subseteq B$ 是理想，定义 $a \sim_I b$ 为 $a\triangle b \in I$，则 $\sim_I$ 是一个等价关系。对称地，如果 $F \subseteq B$ 是滤，定义 $a \sim_F b$ 为 $a\nabla b \in F$，$\sim_F$ 也是等价关系。

证明. 我们只证明传递性。假设 $a\triangle b \in I$，$b\triangle c \in I$。我们计算 $a\cdot(-c)$。

$$\begin{aligned} a\cdot(-c) &= a\cdot(b+(-b))\cdot(-c) \\ &= a\cdot b\cdot(-c) + a\cdot(-b)\cdot(-c) \end{aligned}$$

首先，$a\cdot b\cdot(-c) \le b\cdot(-c) \le b\triangle c \in I$，所以 $a\cdot b\cdot(-c) \in I$。其次，$a\cdot(-b)\cdot(-c) \le a\triangle b \in I$。所以 $a\cdot(-c) \in I$。类似地论证，$(-a)\cdot b \in I$，所以 $a\triangle c \in I$。 □

引理 1.2.19. 令 $\sim_I$ 是滤 I 确定的等价关系，如果 $a \sim_I b, c \sim_I d$，则

(1) $-a \sim_I -b$;

(2) $a + c \sim_I b + d$;

(3) $a\cdot c \sim_I b\cdot d$。

证明. (1) $-(-a)\cdot(-b) + (-a)\cdot(-(-b)) = a\cdot(-b) + (-a)\cdot b = a\triangle b \in I$。

(2) 先计算 $(a+c)\cdot(-(b+d))$，

$$\begin{aligned} (a+c)\cdot(-(b+d)) &= a\cdot(-b)\cdot(-d) + c\cdot(-b)\cdot(-d) \\ &\le a\cdot(-b) + c\cdot(-d) \in I. \end{aligned}$$

类似地，$-(a+c)\cdot(b+d) \in I$。

（3）显然。 □

由于滤和理想是完全对偶的，所以选择用哪一个表述接下来的结果是一个纯语言问题。我们选择滤。

练习 1.2.20. 证明：$a \sim_F b$ 当且仅当存在 $c \in F$，$c\cdot a = c\cdot b$。

引理 1.2.21. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$F \subseteq B$ 是滤，令 B/F 为等价关系 $\sim_F$ 确定的商集，定义 $[a]+[b]=[a+b]$, $[a]\cdot[b]=[a\cdot b]$, $-[a]=[-a]$, $0=[0]$, $1=[1]$，则 $\mathcal{B}/F$ 是一个布尔代数，称为 F 确定的**商代数**。

引理 1.2.22. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，函数 $h(a)=[a]$ 是 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}/F$ 的同态映射。

引理 1.2.23. F 是 $\mathcal{B}$ 上的超滤当且仅当 $\mathcal{B}/F \cong \{0,1\}$。

定理 1.2.24 (超滤存在定理)**.** 布尔代数 $\mathcal{B}$ 上的任意滤 F，都存在 $\mathcal{B}$ 上的超滤 U 使得 $F \subseteq U$。

证明. 令 $\mathcal{F}=\{U \mid U\text{是 }\mathcal{B}\text{ 上的滤并且}F \subseteq U\}$。$\mathcal{F}$ 在关系 $\subseteq$ 下是一个偏序集，并且它的每个链都有上界。根据佐恩引理，$\mathcal{F}$ 有极大元 U。显然，U 是极大滤，因而是超滤，而且 $F \subseteq U$。 □

推论 1.2.25. 如果 G 有有穷交性质，则存在超滤 $U \supseteq G$。

练习 1.2.26. 如果 $a \neq b$，则存在超滤 U，$a \in U$ 但 $b \notin U$，或者 $b \in U$ 但是 $a \notin U$。

定义 1.2.27. 今后我们用 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 表示布尔代数 $\mathcal{B}$ 上所有超滤的集合，以下定义的函数 $f: B \to \mathcal{P}(\mathrm{Ult}(\mathcal{B}))$ 称为**斯通映射**：

$$f(b)=\{U \in \mathrm{Ult}(\mathcal{B}) \mid b \in U\}. \tag{1.5}$$

定理 1.2.28 (斯通表示定理)**.** 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，存在集合 X，$\mathcal{B}$ 同构于 $\mathcal{P}(X)$ 的一个子代数。

证明. 令 $X=\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$，$f: B \to \mathcal{P}(X)$ 为斯通映射。我们证明 f 是嵌入，这样 $f[B]$ 就是 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数，并且与 $\mathcal{B}$ 同构。

由于 0 不属于任何滤而 1 属于任何滤，所以 $f(0)=\emptyset$, $f(1)=\mathcal{P}(X)$。如果 $a\cdot b \in U$，则一定有 $a \in U$ 并且 $b \in U$，反之亦然，所以 $f(a\cdot b)=f(a)\cap f(b)$。另外，任意超滤 U 都是素的，所以 $a+b \in U$ 当且仅当 $a \in U$ 或者 $b \in U$，所以 $f(a+b)=f(a)\cup f(b)$。这就验证了 f 是同态。

最后，假设 $a \neq b$，不妨设 $a\cdot(-b)=c \neq 0$，则 $c\cdot b=0$。令 U_c 和 U_b 分别为 c 和 b 生成的超滤，则 $c \notin U_b$ 且 $b \notin U_c$。但是 $a \in U_c$，所以 $f(a) \neq f(b)$。所以 f 是一个嵌入。 □

1.3　完全性与紧致性

回到命题逻辑的 Lindenbaum 代数 $\mathcal{B}(T)$，以下命题表明每个命题赋值函数都对应着到 $\{0,1\}$ 这个代数上一个同态。

引理 1.3.1. *假设 $h:\mathcal{B}(T)\to\{0,1\}$ 是从 Lindenbaum 代数到 $\{0,1\}$ 的同态，定义 $V:P\to\{0,1\}$ 为：对任意命题符号 $p\in P$，*

$$V(p)=1\quad\text{当且仅当}\quad h([p])=1,$$

则 V 是一个赋值，并且对任意 α，$\bar{V}(\alpha)=h([\alpha])$。

再由引理1.2.23，每个超滤都对应着一个命题逻辑的赋值。

引理 1.3.2. *对任意 Lindenbaum 代数 $\mathcal{B}(T)$ 上的超滤 U，存在一个命题逻辑的赋值 V_U 使得对任意 α，$\bar{V}_U(\alpha)=1$ 当且仅当 $[\alpha]\in U$；反之，如果 V 是一个赋值并且 $V\models T$，则 $U=\{[\alpha]\mid\bar{V}(\alpha)=1\}$ 是一个超滤。*

证明. □

引理 1.3.3. *令 $\mathcal{B}(T)$ 为 Lindenbaum 代数，$F=\{[\alpha]\mid T\vdash\alpha\}$ 是 $\mathcal{B}(T)$ 上的滤。*

证明. 显然 F 不为空，并且由于 T 是一致的，所以 $[0]\notin F$。如果 $T\vdash\alpha$ 并且 $T\vdash\beta$，则 $T\vdash\alpha\wedge\beta$，所以 $[\alpha],[\beta]\in F$ 蕴含 $[\alpha]\cdot[\beta]\in F$。最后，如果 $T\vdash\alpha$ 并且 $\alpha\to\beta$，则 $T\vdash\beta$。所以 $[\alpha]\in F$ 且 $[\alpha]\leq[\beta]$ 蕴含 $[\beta]\in F$。 □

定理 1.3.4 (命题逻辑完全性定理)**.** *令 α 为任意命题逻辑的公式，Σ 为公式集，*

(1) 如果 $\Sigma\models\alpha$，则 $\Sigma\vdash\alpha$。

(2) 如果 Σ 一致，则存在赋值 V，$V\models\Sigma$。

证明.（1）与（2）是等价的，我们证明（2）。假设 Σ 是一致的，令 $F=\{[\alpha]\mid\Sigma\vdash\alpha\}$ 为 $\mathcal{B}(\Sigma)$ 上的滤。根据超滤存在定理，令 $U\supseteq F$ 为超滤，则 U 确定了一个命题逻辑上的赋值 V_U，并且满足，对任意 $[\alpha]\in U$，$\bar{V}_U(\alpha)=1$。所以 $V_U\models\Sigma$。 □

在通常的逻辑教材中，紧致性定理是完全性定理的推论。但以上代数证明没有给出更多信息。另一方面，从代数的角度看，紧致性定理更为深刻。接下来我们尝试给出这个定理的不同证明。

1.3.1　紧致性定理的布尔代数证明

任给命题逻辑的语句集 Σ，我们定义一个新的等价关系 $\equiv$ 为：

$$\alpha \equiv \beta \quad \text{当且仅当} \quad \Sigma \vdash_f \alpha \leftrightarrow \beta,$$

其中 $\Sigma \vdash_f \alpha$ 表示：存在一个有穷的 $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$，$\Sigma \vdash \alpha$。

引理 1.3.5. 如果 Σ 是有穷可满足的，则 $\mathcal{B}(\Sigma/\equiv)$ 是一个非平凡的布尔代数。

定理 1.3.6 (紧致性定理)**.** 令 Σ 是命题逻辑的公式集，如果 Σ 是有穷可满足的，则 Σ 是可满足的。

证明. 令 Σ 是有穷可满足的，$\mathcal{B}(\Sigma/\equiv)$ 是布尔代数。$F = \{[\alpha] \mid \Sigma \vdash_f \alpha\}$ 是一个滤。根据超滤存在定理，令 $U \supseteq F$ 为超滤，V_U 为 U 确定的赋值，则 $V_U \models \Sigma$。 □

1.3.2　紧致性定理的超积证明

证明. 令 I 是 Σ 的所有有穷子集的集合。对每一 $i \in I$，存在一个赋值 V_i 使得 $V_i \models i$，即，对任意 $\alpha \in i$，$V_i \models \alpha$。

令 α 为任意公式，定义 $X_\alpha = \{i \in I \mid V_i \models \alpha\}$。

接下来我们要定义一个超滤 U 使得对任意 $\alpha \in \Sigma$，$X_\alpha \in U$。

对任意 α，我们定义 $Y_\alpha = \{i \in I \mid \alpha \in i\}$。令 $G = \{Y_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$。$G$ 有有穷交性质：对任意 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，显然 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \in Y_{\alpha_1} \cap \cdots \cap Y_{\alpha_n}$。所以 G 生成 $\mathcal{P}(I)$ 上的超滤 U。

如果 $\alpha \in \Sigma$，则必有 $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$，所以 $X_\alpha \in U$。

显然，U 可以确定一个命题逻辑的赋值 V_U：对任意命题符号 p，$V_U(p) = 1$ 当且仅当 $X_p \in U$。这个赋值满足对任意 α，$\bar{V}_U(\alpha) = 1$ 当且仅当 $X_\alpha \in U$。所以 $V_U \models \Sigma$。

□

1.3.3　布尔代数与一阶逻辑的完全性

定义 1.3.7. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，U 是 $\mathcal{B}$ 上的超滤：

(1) 令 $D \subseteq B$ 并且 $\sum D$ 存在。我们称 U 是D-完全的，或者称 U 保持 $\sum D$，如果 $\sum D \in U$ 蕴涵存在 $d \in D$，$d \in U$。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，对任意 $D \in \mathcal{D}$，$\sum D$ 都存在。我们称 U 是$\mathcal{D}$-完全的，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，U 都是 D-完全的。

练习 1.3.8. 定义1.3.7中的（1）可以替换为以下条件：$D \subseteq U$ 蕴涵 $\prod D \in U$。

引理 1.3.9 (Rasiowa−Sikorski 引理)**.** *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，并且 $\mathcal{D}$ 是可数的，则存在 $\mathcal{B}$ 上的滤 U，U 是 $\mathcal{D}$-完全的。*

证明. 令 $\{D_0, D_1, \cdots\}$ 为 $\mathcal{D}$ 的一个枚举。我们如下递归定义 $G = \{g_0, g_1, \cdots\} \subseteq B - \{0\}$：

(1) $g_0 = 1$；

(2) 假设 g_n 已定义，如果 $g_n \cdot \sum D_n = 0$，则令 $g_{n+1} = g_n$；否则，一定存在 $d \in D_n$，$g_n \cdot d > 0$，任取这样的一个 $d_n \in D$，令 $g_{n+1} = g_n \cdot d_n$。

对任意 $g_i \in G$，都有 $g_{i+1} \leq g_i$，所以 G 有有穷交性质。最后，令 U 为 G 生成的超滤。我们以下证明 U 是 $\mathcal{D}$-完全的。

对任意 $D_n \in \mathcal{D}$，如果 $\sum D_n \in U$，则 $g_n \cdot \sum D_n > 0$，所以存在 $d_n \in D$，$g_{n+1} = g_n \cdot d_n$。由于 $g_{n+1} \in U$ 并且 $g_{n+1} \leq d_n$，所以 $d_n \in U$。 □

练习 1.3.10. 对于任意偏序集 $(P, \leq)$，我们也可以定义相应的概念：

(1) 如果 $D \subseteq P$ 满足：对任意 $p \in P$，总存在 $d \in D$ 使得 $0 < d \leq p$，就称 D 是 P 的**稠密子集**。（注意，P 可能不包含 0，但这时我们的定义不影响。）

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 P 的稠密子集的族，U 是 P 上的超滤，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，$U \cap D \neq \emptyset$，就称 U 是 **$\mathcal{D}$-脱殊的**。

证明：令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，它也是一个偏续集。$\mathcal{D}$ 为 $(\mathcal{B}, \leq)$ 可数的稠密子集的族，对任意 $p \in P$，存在一个脱殊的超滤 U，$p \in U$。

注记 1.3.11. 引理1.3.9中，要求 $\mathscr{D}$ 是可数的这一点是必须的。如果 $\mathscr{D}$ 不可数，相应的命题在 ZFC 中不可证明，虽然它与 ZFC 是一致的。

为了证明一阶逻辑的完全性，我们给出以下定义，它是 $\mathscr{D}$-完全的逻辑版本。

定义 1.3.12. $\mathscr{B}(T)$ 上的超滤 U 是 Henkin 的，如果对任意存在公式 $\exists x\psi$，$[\exists x\psi]\in U$ 蕴含存在变元 y，$[\psi_y^x]\in U$。

引理 1.3.13. *如果 T 是一阶逻辑的一致的理论，$\mathscr{B}(T)$ 是 Lindenbaum 代数。如果 U 是 $\mathscr{B}(T)$ 上的 Henken 超滤，则存在一个模型 $\mathfrak{A}_U$，和赋值函数 s，$(\mathfrak{A}_U,s)\models T$。*

证明. 首先，定义所有项上的等价关系：$t_1\sim t_2$ 当且仅当 $[t_1=t_2]\in U$。令 $|\mathfrak{A}_U|=\{[t]\mid t\text{是项}\}$。接下来定义非逻辑符号的解释：

- 对任意 n-元谓词符号 P，任意项 $t_1,\cdots,t_n$，$([t_1],\cdots,[t_n])\in P^{\mathfrak{A}_U}$ 当且仅当 $[Pt_1,\cdots t_n]\in U$。
- 对任意函数符号 f，任意项 $t_1,\cdots,t_n$，$f^{\mathfrak{A}_U}([t_1],\cdots,[t_n])=[t]$ 当且仅当 $[ft_1,\cdots t_n=t]\in U$。
- 对任意常量符号 c，$c^{\mathfrak{A}_U}=[c]$。

最后，我们还需定义赋值函数 $s:V\to|\mathfrak{A}_U|$ 为：$s(x)=[x]$。

断言 1.3.14. 对任意公式 ϕ, $(\mathfrak{A}_U,s)\models\phi$ 当且仅当 $[\phi]\in U$。所以, $(\mathfrak{A}_U,s)\models T$.

断言的证明. 首先，验证对任意项 t，$\bar{s}(t)=[t]$。这需要对项做归纳，我们留给读者作为练习。

然后我们对公式做归纳证明断言。

如果 ϕ 是原子公式 $t_1=t_2$，则 $(\mathfrak{A}_U,s)\models t_1=t_2$ 当且仅当 $\bar{s}(t_1)=\bar{s}(t_2)$，当且仅当 $[t_1]=[t_2]$，当且仅当 $[t_1=t_2]\in U$。

如果 ϕ 是 $Pt_1\cdots t_n$，$(\mathfrak{A}_U,s)\models Pt_1\cdots t_n$ 当且仅当 $([t_1],\cdots,[t_n])\in P^{\mathfrak{A}_U}$ 当且仅当 $[Pt_1,\cdots t_n]\in U$。

关于命题连接词 $\neg,\to$ 的验证留给读者。

如果 ϕ 是存在公式 $\exists x\psi$。$(\mathfrak{A}_U,s)\models\phi$ 当且仅当存在 $[t]$, $(\mathfrak{A}_U,s^x_{[t]})\models\psi$，当且仅当存在 $[t]$, $(\mathfrak{A}_U,s)\models\psi^x_t$，当且仅当存在 $[t]$, $[\psi^x_t]\in U$。由于 $[\psi^x_t]\leq[\exists x\psi]$，所以 $[\exists x\psi]\in U$。另一方面，由于 U 是 Henkin 的，所以 $[\exists x\psi]\in U$ 蕴含存在 y，$[\psi^x_y]\in U$，后者蕴含 $(\mathfrak{A}_U,s)\models\psi^x_y$，这又蕴含 $(\mathfrak{A}_U,s^x_{[y]})\models\psi$，所以 $(\mathfrak{A}_U,s)\models\exists x\psi$。

□

□

定理 1.3.15 (一阶逻辑完全性定理)**.** 如果一阶逻辑的公式集 Σ 是一致的，则 Σ 是可满足的。

1.3.4　超积与一阶逻辑的紧致性

令 S 为一集合，考虑语言 $\mathcal{L}$ 的模型族 $\{\mathfrak{A}_x\mid x\in S\}$。如果 U 是 S 上的超滤，则可以定义 $\prod_{x\in S}A_x$ 上的等价关系：

$$f=_U g\ \ \{x\in S\mid f(x)=g(x)\}\in U.$$

令 $A=\prod_{x\in S}A_x/=_U$ 为相应的等价类，我们可以定义语言 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathfrak{A}$ 如下：

1. 如果 $P(x_1,\ldots,x_n)$ 为谓词，则对任意 $[f_1],\ldots,[f_n]\in A$，

   $$P^{\mathfrak{A}}([f_1],\ldots,[f_n])\text{ 当且仅当 }\{x\in S\mid P^{\mathfrak{A}_x}(f_1(x),\ldots,f_n(x))\}\in U.$$

2. 如果 $F(x_1,\ldots,x_n)$ 是函数，$[f_1],\ldots,[f_n]\in A$，则令：

   $$F^{\mathfrak{A}}([f_1],\ldots,[f_n])=[f],$$

   其中 f 是如下定义的函数：对任意 $x\in S$, $f(x)=F^{\mathfrak{A}_x}(f_1(x),\ldots,f_n(x))$。

3. 如果 c 是常量，则令

   $$c^{\mathfrak{A}}=[f],$$

   而 f 则是如下定义的函数：对任意 $x\in S$，$f(x)=c^{\mathfrak{A}_x}$。

如上定义的模型 $\mathfrak{A}$ 称为U 生成的 $\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$ 的**超积**，记为 $\mathrm{Ult}_U\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$。以下重要定理表明，对任意公式 φ，超积 $\mathrm{Ult}_U\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$ 满足 φ 当且仅当“几乎所有的 $\mathfrak{A}_x$”满足 φ。

定理 1.3.16 (Łoś)**.** 令 U 为集合 S 上的超滤，并且 $\mathfrak{A} = \mathrm{Ult}_U\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$ 为超积，则

（*1*）对任意公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$，任意 $f_1, \ldots, f_n \in \prod_{x \in S} A_x$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[[f_1], \ldots, [f_n]] \text{ 当且仅当 } \{x \in S \mid \mathfrak{A}_x \models \varphi[f_1(x), \ldots, f_n(x)]\} \in U.$$

（*2*）如果 σ 是句子，则

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ 当且仅当 } \{x \in S \mid \mathfrak{A}_x \models \sigma\} = S \in U.$$

定理 1.3.17 (一阶逻辑紧致性)**.** 对任意语句集 Σ，如果 Σ 是有穷可满足的，则 Σ 可满足。

证明. 令 I 为 Σ 的所有有有穷子集的族。对任意 $i \in I$，令 $\mathfrak{A}_i$ 为 i 的一个模型。对任意公式 $\sigma \in \Sigma$，令 $Y_\sigma = \{i \in I \mid \sigma \in i\}$，则 $\{Y_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ 有有穷交性质。令 U 为由它生成的超滤，Ult_U 为超积。对任意 $\sigma \in \Sigma$，$X_\sigma = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \sigma\} \subseteq Y_\sigma$，所以 $X_\sigma \in U$，由 Łoś 定理，$\mathrm{Ult}_U \models \Sigma$。

□

如果对任意 $x \in S$，$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}$ 都相等，则超积称为$\mathfrak{A}$ **的超幂**，记为 $\mathrm{Ult}_U\, \mathfrak{A}$。根据 Łoś 定理，模型 $\mathfrak{A}$ 和它的超幂是初等等价的。不仅如此，我们还有以下结果：

推论 1.3.18. 对任意模型 $\mathfrak{A}$，存在 $\mathfrak{A}$ 到其超幂上的初等嵌入 $j : \mathfrak{A} \to \mathrm{Ult}_U\, \mathfrak{A}$。

证明. 对任意 $a \in A$，定义 $c_a : S \to A$ 为常值函数：

$$\forall x \in S(c_a(x) = a).$$

由此，定义 $j : \mathfrak{A} \to \mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A})$ 为：

$$j(a) = [c_a].$$

以下证明 j 是初等嵌入。如果 $a \in A$，则根据 Łoś 定理，$\mathrm{Ult}_U \mathfrak{A} \models \varphi[j(a)]$ 当且仅当 $\mathrm{Ult}_U \mathfrak{A} \models \varphi[c_a]$，当且仅当 $\{x \in S \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a]\} \in U$，由于集合 $\{x \in S \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$ 或者为空集或者为 S，而空集不属于 U，所以它等于 S，即 $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$。 □

推论1.3.18中所定义的嵌入又称为**标准嵌入**。

1.4 习题

1.4.1. 令 $\mathscr{B}$ 为任意布尔代数，$a, b, c \in B$，证明：

$$-(-a + (-b) + c) + (-(-a + b)) + (-a) + c = 1.$$

1.4.2. 在 Lingdenbaum 代数中 $\mathscr{B}(\emptyset)$ 中，如果 $[\alpha]$ 是原子，则对任意公式 β，$\vdash \alpha \to \beta$ 或者 $\vdash \alpha \to \neg\beta$。

1.4.3. 对任意布尔代数 $\mathscr{A}, \mathscr{D}$，定义它们的积 $\mathscr{C}$ 为:

1. $C = A \times B$;
2. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$;
3. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$;
4. $-(a, b) = (-a, -b)$;
5. $0 = (0, 0)$，$1 = (1, 1)$。

证明 $\mathscr{C}$ 是一个布尔代数。

1.4.4. 对任意布尔代数 $\mathscr{B}$，任意 $a \in B$ 且 $a > 0$，令 $B \upharpoonright a = \{b \in B \mid b \leq a\}$。令 $\mathscr{B} \upharpoonright a$ 中的运算 $+, \cdot, 0$ 保持与 $\mathscr{B}$ 中一致，而 1 和 $-b$ 分别为 a 和 $a \cdot (-b)$。

1. 证明 $\mathscr{B} \upharpoonright a$ 是一个布尔代数;
2. 对任意 $a \in B$，$\mathscr{B} \cong (\mathscr{B} \upharpoonright a) \times (\mathscr{B} \upharpoonright -a)$。

1.4.5. 令 $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 为同态，$D \subseteq B$ 且 $\sum D$ 存在，称 h **保持** $\sum D$，如果 $\sum f[D]$（在 $\mathscr{B}$ 中）存在，并且 $f(\sum D) = \sum f[D]$。类似地可以定义保持 $\prod D$。证明：$\mathscr{B}$ 上的超滤 U 保持 $\sum D$ 当且仅当 U 所确定的同态 $f : \mathscr{B} \to \{0,1\}$ 保持 $\sum D$。

1.4.6. 令 $\mathscr{B}$ 为布尔代数，$h : \mathscr{B} \to \mathscr{P}(\mathrm{Ult}(\mathscr{B}))$ 为 Stone 映射。对任意 $b \in B$，称 $h(b)$ 为 $S(\mathscr{B})$ 的**基本开集**，如果集合 $X \subseteq \mathrm{Ult}(\mathscr{B})$ 能表示成基本开集的并集，就称 X 为**开集**，开集的补集称为**闭集**。

1. 证明 $h(d)$ 既是开集也是闭集，称为**开闭集**。

2. 对任意 $U, V \in \mathrm{Ult}(\mathscr{B})$，如果 $U \neq V$，则存在一个开闭集包含 U，但不包含 V。（或者相反，包含 U，不包含 V。）

1.4.7. 如果 $C \subseteq \mathscr{P}(\mathrm{Ult}(\mathscr{B}))$ 是开集的族，且 $\bigcup C = \mathrm{Ult}(\mathscr{B})$，就称 X 是**开覆盖**。证明：如果 C 是开覆盖，则存在有穷的 $C_0 \subseteq C$，$\bigcup C_0 = \mathrm{Ult}(\mathscr{B})$。

1.4.8. 对任意布尔代数 $\mathscr{B}$，$D \subseteq B$ 并且 $\sum D$ 存在。证明：Stone 映射保持 $\sum D$ 当且仅当存在有穷的 $D_0 \subseteq D$，$\sum D = \sum D_0$。

1.4.9. 存在布尔代数 $\mathscr{B}$，$X \subseteq B$，$0, 1 \in X$，并且 X 关于 $+, \cdot$ 封闭，但 X 不是 $\mathscr{B}$ 的子代数。

1.4.10. 令 $\mathscr{B} = (B, 0, 1, +, \cdot)$ 为一个结构，$B \neq \emptyset$，并且满足：对任意 a, b, c，

(1) $a \cdot 1 = a$，$a + 0 = a$；

(2) $a + b = b + a$，$a \cdot b = b \cdot a$；

(3) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$，$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$；

(4) $x + (-x) = 1$，$x \cdot (-x) = \emptyset$。

证明：$\mathscr{B}$ 是一个布尔代数。

1.4.11. 令 $\mathscr{B} = (B, 0, 1, +, \cdot)$ 为一个结构，$B \neq \emptyset$，并且满足：对任意 a, b，

(1) $+$ 满足结合律和交换律；

(2) $-(-a+(-b))+(-(-a+b))=a$；

(3) $a\cdot b=-(-a+(-b))$；

(4) $1=-a+a$，$0=-(-a+a)$。

证明：$\mathcal{B}$ 是一个布尔代数。【证明它等价于习题1.4.10中的条件。】

1.4.12. 令 $\mathcal{B}=(B,0,1,+,\cdot)$ 为一个结构，$B\neq\emptyset$，并且满足：对任意 a,b，

(1) $+$ 满足结合律和交换律；

(2) $-(-a)=a$；

(3) $a+(-(-b+b))=a$；

(4) $a+-(b+c)=-(-(-b+a)+(-(-c+a)))$；

(5) $a\cdot b=-(-a+(-b))$；

(6) $1=-a+a$，$0=-(-a+a)$。

证明：$\mathcal{B}$ 是一个布尔代数。【证明它等价于习题1.4.10中的条件。】

1.4.13. 令 $\mathcal{B}=(B,0,1,+,\cdot)$ 为一个结构，$B\neq\emptyset$，并且满足：

1. $+$ 满足结合律；
2. 对任意 a,b,c，$a+(-b)=c+(-c)$ 当且仅当 $a+b=b$。

证明：$\mathcal{B}$ 是一个布尔代数。【证明它等价于习题1.4.10中的条件。】

1.4.14. 令 $\mathbb{Z}$ 表示整数集合，E,O 分别表示偶数和奇数集，$X\subseteq_f Y$ 表示 X 是 Y 的有穷子集。如果 $B=\{X\subseteq\mathbb{Z}\mid X\subseteq_f E\vee O\subseteq\mathbb{Z}-X\}$，证明 $\mathcal{B}=(B,\emptyset,\mathbb{Z},\cap,\cup,-)$ 是布尔代数。

1.4.15. 令 $\mathbb{Z}$ 表示整数集合，$X \subseteq \mathbb{Z}$ 称为**周期的**，如果存在 $m \in \mathbb{Z}$，$X = \{x + m \mid x \in X\}$，并称 m 是 X 的**周期**。我们用 $m\mathbb{Z}$ 表示 $\mathbb{Z}$ 的所有周期为 m 的子集组成的集合族。证明：

1. $0\mathbb{Z} = \mathscr{P}(\mathbb{Z})$;
2. $1\mathbb{Z} = \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$;
3. $2\mathbb{Z}$，$3\mathbb{Z}$ 都（在通常的集合运算下）是布尔代数。它们各有几个元素?
4. 对任意 m，$m\mathbb{Z}$ 都（在通常的集合运算下）是布尔代数，它有几个元素?你能写出这些元素吗?

1.4.16. 令 $\mathbb{R}$ 是实数集，引进两个符号 $-\infty, \infty$，用 $-\infty < x < \infty$ 表示 $x \in \mathbb{R}$。我们用 $[p, q) = \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq x < q\}$，其中 $p, q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$，表示实数的半开半闭区间。其中，$[-\infty, \infty) = \mathbb{R}$，对任意实数 p，$[-\infty, p) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < p\}$，$[p, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq x\}$。另外，如果 $q < p$，则规定 $[p, q) = \emptyset$。

1. 对任意 r_1, r_2, s_1, s_2，$[r_1, r_2) \cap [s_1, s_2) = [p, q)$，其中 $p = \max\{r_1, s_1\}$，$q = \min\{r_2, s_2\}$;
2. $[p, q) \neq \emptyset$ 当且仅当 $r_1, s_1 < r_2, s_2$。
3. 对任意 $X \subseteq \mathbb{R}$，如果存在 $p_1 < q_1 < \cdots p_n < q_n$ 使得
$$X = [p_1, q_1) \cup \cdots \cup [p_n, q_n),$$
则
$$\mathbb{R} - X = [-\infty, p_1) \cup [q_1, p_2) \cup \cdots \cup [q_{n-1}, p_n) \cup [q_n, \infty).$$
4. 证明 $I = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X\text{可以表示成有穷多个半开半闭区间的并}\}$ 在通常的集合运算下是布尔代数。