第三章　滤、理想与无界闭集

"每个自然数是四个平方数的和"比"存在一个不可达基数"更是真的吗？我认为不是 [它只是更显然]，但又不完全确定。

罗伯特·索洛维

3.1　布尔代数

给定任意集合 X，X 的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 在 $\cap, \cup, -$ 运算下，形成一个代数结构，这个结构是所谓"布尔代数"的最直观最典型的代表。

定义 3.1.1. 令 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 为一个结构，其中 B 是非空集合，$+, \cdot$ 是二元函数，$-$ 是一元函数，$0, 1$ 为常量。如果 $\mathcal{B}$ 满足以下公理：

(1) 结合律：$a + (b + c) = (a + b) + c$，$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(2) 交换律：$a + b = b + a$，$a \cdot b = b \cdot a$;

(3) 吸收律：$a + (a \cdot b) = a$，$a \cdot (a + b) = a$;

(4) 分配律：$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$，$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$;

(5) $x + (-x) = 1$，$x \cdot (-x) = \emptyset$。

则称 $\mathcal{B}$ 为**布尔代数**。

例 3.1.2. 显然，$(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, -, X, \emptyset)$ 是一个布尔代数。称为 X 上的**集合代数**。

如果 $X = \emptyset$，则 $\mathcal{P}(X)$ 只有一个元素 $\emptyset$，它也是一个布尔代数。只有一个元素的布尔代数是平凡的。

一个非平凡的布尔代数至少有两个元素 $\{0, 1\}$，例如对任意非空集合 X，$\{X, \emptyset\}$ 是一个布尔代数。

令 $B = \{T, F\}$ 为命题真值的集合，则 B 在命题逻辑联结词 $\vee$ 、$\wedge$ 和 $\neg$ 下是一个布尔代数。

例 3.1.3. 令 $\mathcal{L}$ 为命题逻辑的语言，T 为 $\mathcal{L}$ 中的理论。

- 对任意公式 α, β，定义一个二元关系：

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta.$$

- 令 $B = \{[\alpha]_\sim \mid \alpha\text{是一个公式}\}$，定义 B 上的运算：

$$\begin{aligned}
[\alpha] + [\beta] &= [\alpha \vee \beta] \\
[\alpha] \cdot [\beta] &= [\alpha \wedge \beta] \\
-[\alpha] &= [\neg\alpha] \\
0 &= [\alpha \wedge \neg\alpha] \\
1 &= [\alpha \vee \neg\alpha].
\end{aligned}$$

- $\mathcal{B}(T) = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 是一个布尔代数。

定义 3.1.4. 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是布尔代数，$f : A \to B$ 映射，如果 f 满足：

(1) $f(0_\mathcal{A}) = 0_\mathcal{B}$，$f(0_\mathcal{A}) = 0_\mathcal{B}$；

(2) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$，$f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$，$f(-a) = -f(a)$。

就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的同态。

如果同态 f 是单射，就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的嵌入。

如果 f 还是双射，就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的同构。

如果 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，$A \subseteq B$，并且等同映射 $\mathrm{id} : A \to B$ 是一个嵌入（注意，这要求 $0, 1 \in A$ 并且 A 在 $\mathcal{B}$ 的运算下也是一个布尔代数），就称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的子代数。

例 3.1.5. 对任意集合 X，$\{X, \emptyset\}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数。

令 $B = \{T, F\}$, 则 $f(T) = X$，$f(F) = 0$ 是到 $\mathcal{P}(X)$ 的嵌入, 其中 $X \neq \emptyset$ 为任意非空集合。

所有单点集 $\{a\}$，$f(a) = \emptyset$ 都是到 $\mathcal{P}(X)$ 的嵌入。

今后，我们称 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数为**集合代数**。并且，我们会证明，任何布尔代数都同构于一个集合代数。

练习 3.1.6. 令 X 为任意集合，$Y \subseteq X$ 称为在 X 中是**余有穷的**，如果 $X - Y$ 是有穷集合。对任意集合 X，令 $B = \{Y \subseteq X \mid Y \text{是有穷的或余有穷的}\}$，则 $X, \emptyset \in B$。证明 B 对 $\cap, \cup, -$ 封闭，所以 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，是一个集合代数。

练习 3.1.7. 证明不存在基数为 3 的布尔代数。思考一下，一个有穷的布尔代数，其基数需要满足什么条件?

定义 3.1.8. 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数，对任意 $a, b \in B$，我们定义二元关系 $a < b$ 为 $\exists c(c \neq 0 \wedge a + c = b)$。$a \leq b$ 当且仅当 $a < b$ 或者 $a = b$。

例 3.1.9. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，我们显然有以下事实：对任意 $a, b \in B$，

- $a \leq a + b$，$b \leq a + b$;
- $a \cdot b \leq a$，$a \cdot b \leq b$;
- 对任意 $a \in B$，$0 \leq a \leq 1$。

练习 3.1.10. 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数，

(1) 证明任意布尔代数 $\mathcal{B}$ 在关系 $\leq$ 下是一个偏序集。

(2) 证明如果 $\mathcal{B}$ 是一个集合代数，则 $\leq$ 就是集合上的子集关系 $\subseteq$。

(3) 对任意 $a, b \in B$，$a \leq b$ 当且仅当 $-b \leq -a$，

(4) 对任意 $a, b \in \mathcal{B}$，$a \cdot (-b) = 0$ 当且仅当 $a \leq b$。（当且仅当 $-a + b = 1$）。

定义 3.1.11. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，如果一个非零元素 $a \in B$ 满足：不存在 $b \in B$ 使得 $0 < b < a$，就称 a 是 $\mathcal{B}$ 的**原子**。

一个布尔代数 $\mathcal{B}$ 如果没有原子，就称 $\mathcal{B}$ 是**无原子的**。

如果对任意 $b \in \mathcal{B}$，都存在一个原子 $a \in \mathcal{B}$ 使得 $a \leq b$，就称 $\mathcal{B}$ 是**原子化的**。

例 3.1.12. 对任意集合 X，X 的有穷子集和余有穷子集构成的布尔代数是原子化的，每个单点集 $\{x\}$ 都是一个原子。

练习 3.1.13. 任何有穷的布尔代数都是原子化的。

引理 3.1.14. *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$a \in B$，则以下命题等价：*

(1) a 是原子。

(2) 对任意 $b \in B$，$a \leq b$ 或 $a \leq -b$，但不能同时成立。

(3) $0 < a$，并且如果 $a \leq b + c$，则 $a \leq b$ 或 $a \leq c$。

证明. (1)⇒(2). 如果 $a \cdot b = c \neq 0$，则 $a = c \leq b$，否则 $c < a$，与 a 是原子矛盾。如果 $a \cdot b = 0$，则 $a \cdot (-b) \neq 0$，同理 $a \leq -b$。如果 $a \leq b$ 且 $a \leq (-b)$，令 $c_1, c_2 \in B$ 为见证 $\leq$ 的元素。我们有 $a + c_1 = -(a + c_2)$，所以 $a \cdot (a + c_1) = 0$，这蕴涵着 $a = 0$，矛盾。

(2)⇒(3). $0 < a$ 是显然的。假设 $a \leq b + c$ 并且 $a \not\leq b$，则根据（2），$a \leq -b$，所以 $a \leq (-b) \cdot (b + c) \leq (-b) \cdot c \leq c$，所以 $a \leq c$。

(3)⇒(1). 反设 a 不是原子，令 $0 < b < a$，并且令 $c \neq 0$ 为见证这一点的元素，则 $a = b + c$。由于 b 也不为 0，所以 $c < a$。这样，$a \not\leq b$ 并且 $a \not\leq c$，与（3）矛盾。 □

定理 3.1.15. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，令 $A \subseteq B$ 为 $\mathcal{B}$ 中全体原子的集合。定义 $f : B \to \mathcal{P}(A)$ 为：对任意 $b \in B$，

$$f(b) = \{a \in A \mid a \leq b\}, \tag{3.1}$$

则 f 是一个同态映射。如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则 f 是一个嵌入。

证明. 检查 f 是一个同态映射并不困难，我们留作练习。

练习 3.1.16. 证明 f 是同态映射。

下面我们证明：如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则 f 是一一映射。注意到，如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则对任意 $a \in \mathcal{B}$，如果 $a \neq 0$，则 $f(a) \neq \emptyset$。现在假设 $b_1 \neq b_2$，则 $b_1 \cdot (-b_2) \neq 0$ 或者 $(-b_1) \cdot b_2 \neq 0$。不妨设前者为 $c \neq 0$，则 $f(c) = f(b_1) \cap f(-b_2) = f(b_1) \cap (A - f(b_2)) \neq \emptyset$，所以 $f(b_1) \neq f(b_2)$。 □

推论 3.1.17. 任何原子化的布尔代数都同构于一个集合代数。

注记 3.1.18. 这是斯通表示定理的一个特殊版本。

定义 3.1.19. 对任意的布尔代数 $\mathcal{B}$，令 $\leq$ 为 B 上的标准偏序，$X \subseteq B$ 是 B 的非空子集。

(1) 如果存在 $u \in \mathcal{B}$ 满足：

  (a) 对任意 $x \in X$，$x \leq u$，

  (b) 如果有 $b \in B$ 满足对任意 $x \in X$ 都有 $x \leq b$，则 $u \leq b$。

 就称 u 是 X 的上确界，一般记作 $\sum X$。

(2) 如果存在 $l \in \mathcal{B}$ 满足：

  (a) 对任意 $x \in X$，$l \leq x$，

  (b) 如果有 $b \in B$ 满足对任意 $x \in X$ 都有 $b \leq x$，则 $b \leq l$。

 就称 l 是 X 的下确界，一般记作 $\prod X$。

如果对布尔代数 $\mathcal{B}$ 的任意非空子集 X，都有 $\sum X \in \mathcal{B}$ 并且 $\prod X \in \mathcal{B}$，就称 $\mathcal{B}$ 是**完全的**。

练习 3.1.20. 如果 $B = \mathcal{P}(X)$，则对任意 $Y \subseteq B$，$\sum Y = \bigcup Y$，$\prod Y = \bigcap Y$。$\mathcal{P}(X)$ 是完全的布尔代数。

练习 3.1.21. 如果 $\mathcal{B}$ 是一个集合代数并且是完全的，则存在 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$。

练习 3.1.22. 在定理3.1.15中，如果 $\mathcal{B}$ 还是完全的，则 f 是一个同构。所以，如果 $\mathcal{B}$ 是一个完全的原子化的布尔代数，则存在集合 X，$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$。【证明：如果 A 是全体原子的集合，$Y \subseteq A$，则 $f(\sum Y) = Y$，所以 f 是一个满射。】

3.2　滤与理想

定义 3.2.1. 令 $(P, \leq)$ 为任意偏序集，$F \subseteq P$，如果 F 满足

(1) $F \neq \emptyset$;

(2) 如果 $p, q \in F$，存在 $r \in F$，$r \leq p$ 并且 $r \leq q$;

(3) 如果 $p \in F$ 并且 $p \leq q$，则 $q \in F$，

就称 F 是偏序集 P 上的**滤**。

定义 3.2.2. 令 $(P, \leq)$ 为任意偏序集，$I \subseteq P$，如果 I 满足

(1) $I \neq \emptyset$;

(2) 如果 $p, q \in I$，存在 $r \in I$，$p \leq r$ 并且 $q \leq r$;

(3) 如果 $p \in I$ 并且 $q \leq p$，则 $q \in I$，

就称 I 是偏序集 P 上的**理想**。

例 3.2.3. 偏序集 P 本身是自己上的滤。如果 $p \in P$，则集合 $\{q \in P \mid p \leq q\}$ 是一个滤，称为 p 生成的滤。由一个元素生成的滤称为**主滤**。

不等于 P 自身的滤称为“真滤”。

任意布尔代数 $\mathcal{B}$ 上都有一个标准的偏序，因此任意布尔代数上都可以定义滤。如果 $F \subseteq B$ 是滤，则 $1 \in F$。

练习 3.2.4. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$F \subseteq B$ 是 $\mathcal{B}$ 上的滤，则 $F \neq B$ 当且仅当 $0 \notin F$。

练习 3.2.5. 如果 F 是布尔代数 $\mathcal{B}$ 上的滤，$I = \{-a \mid a \in F\}$ 是 $\mathcal{B}$ 上理想，并且 $F \cup I$ 是 $\mathcal{B}$ 的子代数。

注记 3.2.6. 因此，今后考虑布尔代数上的滤时，我们要求 $0 \notin F$，即，布尔代数上的滤指的是真滤。

引理 3.2.7. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$，则以下命题等价：

(1) F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤；

(2) F 满足以下条件：

  (a) $0 \notin F$，$F \neq \emptyset$；

  (b) 如果 $a, b \in F$，则 $a \cdot b \in F$；

  (c) 如果 $a \in F$ 并且 $a \leq b$，$b \in F$。

证明. 习题。 □

例 3.2.8. 对任意非空集合 X，$\mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$ 是 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 上的滤。$\{X\}$ 也是 $\mathcal{P}(X)$ 上的滤，称为平凡的。习惯上，如果 $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是滤，我们更经常地称其为"X 上的滤"而不称其为"$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 上的滤"。

定义 3.2.9. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，它的子集 $G \subseteq B$ 如果满足：对任意 $n \in \omega$，任意 $g_1, \cdots, g_n \in G$，它们的积不为 0，即，$g_1 \cdot g_2 \cdots g_{n-1} \cdot g_n > 0$，就称 G 有有穷交性质。

练习 3.2.10. 如果 $G \subseteq B$ 有有穷交性质，$a \in B$，则 $G \cup \{a\}$ 或 $G \cup \{-a\}$ 有有穷交性质。

引理 3.2.11. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$G \subseteq B$ 有有穷交性质，则

$$F = \{b \in B \mid \exists g \in G (g \leq b)\} \tag{3.2}$$

是 $\mathcal{B}$ 上的滤，称为 G 生成的滤。

练习 3.2.12. 如果 F 是由 G 生成的滤，则 F 是包含 G 的最小的滤，即，$G \subseteq F$ 并且如果 $F' \supseteq G$ 也是滤，则 $F \subseteq F'$。

定义 3.2.13. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$ 是滤。如果对任意的 $b \in B$，b 和 $-b$ 有且只有一个属于 F，就称 F 是 $\mathcal{B}$ 上的**超滤**。

引理 3.2.14. *令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤。以下命题等价：*

(1) F 是超滤；

*(2) F 是*极大滤*：不存在滤 F' 使得 $F \subsetneq F'$。*

(3) F 是素的：对任意 $a, b \in B$，如果 $a + b \in F$，则 $a \in F$ 或者 $b \in F$。

证明. (1)⇒(2). 反设 F 不是极大滤，F' 是 F 的真扩张。令 $b \in F - F'$。由于 $b \notin F$ 而 F 是超滤，所以 $-b \in F \subseteq F'$，这样 $b \cap (-b) = 0 \in F'$，矛盾。

(2)⇒(3). 首先，我们验证，如果 F 是极大滤，而 $a \notin F$，则至少存在一个 $c \in F$，$c \cdot a = 0$：否则，$F \cup \{a\}$ 有有穷交性质，因而生成一个滤 F'，它是 F 的真扩张。

现在假设 a, b 都不属于 F，令 $c_1, c_2 \in F$ 见证这一点，即 $c_1 \cdot a = c_2 \cdot b = 0$。所以 $c_1 \cdot c_2 \cdot (a + b) = 0$。由于 $c_1 \cdot c_2 \in F$，所以 $a + b \notin F$。

(3)⇒(1). 对任意 $b \in B$，如果 $b \notin F$，因为 $b + (-b) = 1 \in F$，所以由（3），$-b \in F$。 □

练习 3.2.15. 如果 $a \neq b$，则存在超滤 U，$a \in U$ 但 $b \notin U$。

练习 3.2.16. 令 F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤，令 $(\{0, 1\}, +, \cdot, -, 0, 1)$ 为两个元素的布尔代数。定义 $f : B \to \{0, 1\}$ 为

$$f(b) = \begin{cases} 1, & b \in F; \\ 0, & b \notin F. \end{cases} \tag{3.3}$$

即，f 是 F 的特征函数。证明：F 是超滤当且仅当 f 是布尔代数 $\mathcal{B}$ 到 $\{0, 1\}$ 的同态映射。

定理 3.2.17 (超滤存在定理)**.** 布尔代数 $\mathcal{B}$ 上的任意滤 F，都存在 $\mathcal{B}$ 上的超滤 U 使得 $F \subseteq U$。

证明. 令 $\mathcal{F} = \{U \mid U$是 $\mathcal{B}$ 上的滤并且$F \subseteq U\}$。$\mathcal{F}$ 在关系 $\subseteq$ 下是一个偏序集，并且它的每个链都有上界。根据佐恩引理，$\mathcal{F}$ 有极大元 U。显然，U 是极大滤，因而是超滤，而且 $F \subseteq U$。 □

定义 3.2.18. 今后我们用 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 表示布尔代数 $\mathcal{B}$ 上所有超滤的集合，以下定义的函数 $f : B \to \mathcal{P}(\mathrm{Ult}(\mathcal{B}))$ 称为**斯通映射**：

$$f(b) = \{U \in \mathrm{Ult}(\mathcal{B}) \mid b \in U\}. \tag{3.4}$$

定理 3.2.19 (斯通表示定理)**.** 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$, 存在集合 X, $\mathcal{B}$ 同构于 $\mathcal{P}(X)$ 的一个子代数。

证明. 令 $X = \mathrm{Ult}_((\mathcal{B}))$，$f : B \to \mathcal{P}(X)$ 为斯通映射。我们证明 f 是嵌入，这样 $f[B]$ 就是 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数，并且与 B 同构。

由于 0 不属于任何滤而 1 属于任何滤，所以 $f(0) = \emptyset$，$f(1) = X$。如果 $a \cdot b \in U$, 则一定有 $a \in U$ 并且 $b \in U$, 反之亦然, 所以 $f(a \cdot b) = f(a) \cap f(b)$。另外，任意超滤 U 都是素的，所以 $a + b \in U$ 当且仅当 $a \in U$ 或者 $b \in U$，所以 $f(a + b) = f(a) \cup f(b)$。这就验证了 f 是同态。

最后, 假设 $a \neq b$, 不妨设 $a \cdot (-b) = c \neq 0$, 则 $c \cdot b = 0$。令 U_c 和 U_b 分别为 c 和 b 生成的超滤，则 $c \notin U_b$ 且 $b \notin U_c$。但是 $a \in U_c$，所以 $f(a) \neq f(b)$。所以 f 是一个嵌入。 □

定义 3.2.20. 令 $(P, <)$ 是偏序集，

(1) 如果 $D \subseteq P$ 满足：对任意 $p \in P$，总存在 $d \in D$ 使得 $p \leq d$，就称 D 是 P 的**稠密子集**。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 P 的稠密子集的族，F 是 P 上的超滤，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，如果 $F \cap D \neq \emptyset$，则就称 F 是 **$\mathcal{D}$-脱殊的**。

定义 3.2.21. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，U 是 $\mathcal{B}$ 上的超滤：

(1) 令 $D \subseteq B$ 并且 $\sum D$ 存在。我们称 U 是D-完全的，或者称 U 保持 $\sum D$，如果 $\sum D \in U$ 蕴涵存在 $d \in D$，$d \in U$。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，对任意 $D \in \mathcal{D}$，$\sum D$ 都存在。我们称 U 是$\mathcal{D}$-完全的，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，U 都是 D-完全的。

练习 3.2.22. 定义3.2.21中的 (1) 可以替换为以下条件：$D \subseteq U$ 蕴涵 $\prod D \in U$。

练习 3.2.23. 对于任意偏序集 $(P, \leq)$，我们也可以定义相应的概念：

(1) 如果 $D \subseteq P$ 满足：对任意 $p \in P$，总存在 $d \in D$ 使得 $d \leq p$，就称 D 是 P 的**稠密子集**。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 P 的稠密子集的族，U 是 P 上的超滤，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，$U \cap D \neq \emptyset$，就称 U 是 $\mathcal{D}$**-脱殊的**。

证明：如果将 $\mathcal{B}$ 看做偏序集，U 是 $\mathcal{D}$-完全的当且仅当 U 是 $\mathcal{D}$-脱殊的。

引理 3.2.24 (Rasiowa–Sikorski 引理)**.** *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，并且 $\mathcal{D}$ 是可数的，则存在 $\mathcal{B}$ 上的滤超滤 U，U 是 $\mathcal{D}$-完全的。*

证明. 令 $\{D_0, D_1, \cdots\}$ 为 $\mathcal{D}$ 的一个枚举。我们如下递归定义 $G = \{g_0, g_1, \cdots\} \subseteq B - \{0\}$：

(1) $g_0 = 1$;

(2) 假设 g_n 已定义，如果 $g_n \cdot \sum D_n = 0$，则令 $g_{n+1} = g_n$；否则，一定存在 $d \in D_n$，$g_n \cdot d > 0$，任取这样的一个 $d_n \in D$，令 $g_{n+1} = g_n \cdot d_n$。

对任意 $g_i \in G$，都有 $g_{i+1} \leq g_i$，所以 G 有有穷交性质。最后，令 U 为 G 生成的超滤。我们以下证明 U 是 $\mathcal{D}$-完全的。

对任意 $D_n \in \mathcal{D}$，如果 $\sum D_n \in U$，则 $g_n \cdot \sum D_n > 0$，所以存在 $d_n \in D$，$g_{n+1} = g_n \cdot d_n$。由于 $g_{n+1} \in U$ 并且 $g_{n+1} \leq d_n$，所以 $d_n \in U$。 □