第三章　布尔代数与型空间

总结一下第一章中布尔代数与逻辑的几个主要结果。

1. 任给一个一致的理论 T，存在一个由 T 确定的布尔代数 $\mathcal{B}(T)$，它的元素是等价关系 $\sim$ 下的等价类，对任意公式 α, β，$\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$。这个 $\mathcal{B}(T)$ 称为 Lindenbaum 代数。

2. 在 Lindenbaum 代数 $\mathcal{B}(T)$ 中，每个滤 F 都是 T 的一致扩张。因此每个滤都是一个一致的理论。而每个超滤则是一个完全理论。

3. 如果 T 是完全的，则 $\mathcal{B}(T)$ 是特殊的布尔代数 $\{0, 1\}$，其中 $0 = \{\alpha \mid T \vdash \neg\alpha\}$，$1 = \{\alpha \mid T \vdash \alpha\}$。

4. 从另一个角度看，$\mathcal{B}(T)$ 上的每个超滤 U 都对应着 T 的一个模型 $\mathfrak{A}_U$，对任意公式 α，$\mathfrak{A}_u \models \alpha$ 当且仅当 $[\alpha] \in U$。所以超滤存在定理蕴涵着完全性定理。

5. 在 Stone 表示定理的证明中，借助 Stone 映射，我们为每一个 $a \in B$ 指定一个超滤的集合 $\{U \mid U \in a\}$。这实际上是为 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 定义了一个拓扑结构，（参见习题1.4.6 和1.4.7）。$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 连同其上的拓扑称为 Stone 空间。

3.1　Stone 空间

Stone 空间是一个非常典型的结构，与逻辑有很多密切的联系。我们接下来讨论一些有关这个空间的性质，并给出模型论中的更为深刻的一个例子。

定义 3.1.1. 对任意集合 X，$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 称为 X 上的一个**拓扑**，如果以下条件成立：

1. $X, \varnothing \in \mathcal{T}$；
2. 如果 $O, V \in \mathcal{T}$，则 $O \cap V \in \mathcal{T}$；
3. 对任意 $A \subseteq \mathcal{T}$，$\bigcup A \in \mathcal{T}$。

$(X, \mathcal{T})$ 称为**拓扑空间**，$\mathcal{T}$ 中的 X 的子集称为**开集**，开集的补集称为**闭集**。

例 3.1.2. 令 $\mathbb{R}$ 为全体实数的集合，对任意实数 $r \in \mathbb{R}$，开区间

$$N = \{x \subseteq \mathbb{R} \mid |x - r| < \delta\}$$

称为 r 的**邻域**，其中 δ 为任意实数，称为 N 的半径。$\mathbb{R}$ 的子集 O 如果满足：对任意 $r \in O$，都存在 r 的邻域 N 使得 $N \subseteq O$，就称 U 为**开集**。令 $\mathcal{T}$ 为所有开集的族，则 $\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{T}$ 下是一个拓扑空间。

证明. 首先，$\varnothing \in \mathcal{T}$，并且 $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$。其次，如果 O, V 是开集，$r \in O \cap V$，则根据定义，存在 N_1, N_2 都是 r 的邻域，且 $N_1 \subseteq O, N_2 \subseteq V$。不妨假设 $\delta_1 < \delta_2$，则 $N_1 \subseteq O \cap V$ 的子集。最后，如果 $\{O_i\}_{i \in I}$ 是任意开集的族，$r \in O = \bigcup O_i$，则存在 i，$r \in O_i$，所以存在邻域 N，使得 $r \in N \subseteq O$。 □

以下练习几乎是显然的事实。

练习 3.1.3. 令 $\mathbb{R}$ 为实数，在3.1.2 定义的拓扑中，以下命题等价：

(1) O 是开集；

(2) 存在邻域的族 $\{N_i\}_{i \in I}$，$O = \bigcup_{i \in I} N_i$。

这使得我们可以做如下定义：

定义 3.1.4. 令 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ 称为这个空间的一个**拓扑基**，如果 $\mathcal{T}$ 中的元素都可以表示为 S 中元素的并。S 中的元素称为**基本开集**。

例 3.1.5. 例3.1.2中，实数上的拓扑 $\mathcal{T}$ 以所有开区间为拓扑基。事实上，所有以有理数为端点的开区间也是它的拓扑基，并且是一个可数的拓扑基。

引理 3.1.6. *令 X 为一集合，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$，$\mathcal{S}$ 构成 X 上某一拓扑的拓扑基当且仅当以下条件成立：*

(1) 对任意 $x \in X$，存在 $S \in \mathcal{S}$，$x \in S$；

(2) 对任意 $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$，如果 $x \in S_1 \cap S_2$，则存在 $S_3 \in \mathcal{S}$，$x \in S_3$ 并且 $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$。

练习 3.1.7. 令 X 为一集合，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$，$\mathcal{S}$ 构成 X 上某一拓扑的拓扑基当且仅当以下条件成立：

(1) $\bigcup \mathcal{S} = X$；

(2) 对任意 $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$，$S_1 \cap S_2$ 是 $\mathcal{S}$ 中集合的并。

练习 3.1.8. 任给布尔代数 $\mathcal{B}$，令 $X = \mathrm{Ult}(\mathcal{B})$。对任意 $a \in B$，定义

$$N_a = \{U \in \mathrm{Ult}(\mathcal{B}) \mid a \in U\},$$

则 $\{N_a \mid a \in B\}$ 构成 X 的一个拓扑基。

习题1.4.6告诉我们，N_a 既是开集也是闭集，在一个拓扑空间中，我们称这样的集合为**开闭集**。显然，对任意的拓扑空间 X，$\varnothing, X$ 是开闭集。

定义 3.1.9. 一个拓扑空间 X 称为**零维的**，如果它有一个开闭集构成的拓扑基。

零维空间也称为“完全不连通空间”。$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个零维空间。

定义 3.1.10. 令 X 为拓扑空间，如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ 是开集的族，并且 $\bigcup \mathcal{C} = X$，就称 $\mathcal{C}$ 是 X 的**开覆盖**。如果 X 的每个开覆盖 C 都有一个有穷的子覆盖，即存在 $\mathcal{C}_0 \subseteq_f \mathcal{C}$，并且 $\bigcup C_0 = X$，则称 X 为**紧致空间**。

由习题1.4.7知道，$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个紧致空间。

定义 3.1.11. 令 X 为拓扑空间，如果对任意 $x, y \in X$，总存在开集 M, N，$x \in M, y \in N$，使得 $M \cap N = \varnothing$，就称 X 为 Hausdorff 空间。

由习题1.4.6(2) 可知 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个 Hausdorff 空间：如果超滤 $U_0 \neq V_0$，任取 $a \in U_0$ 且 $a \notin V_0$，则 $U_0 \in N_a$。由于 V_0 是超滤，$-a \in V_0$，所以 $V_0 \in N_{-a}$，但 $N_a \cap N_{-a} = \varnothing$。

令 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，称 X 的子集族 $\mathcal{Z}$ 有**有穷交性质**，如果对任意有穷的集族 $\{Y_1, \cdots, Y_n\} \subseteq \mathcal{Z}$，$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \neq \varnothing$。

练习 3.1.12. 对任意 Haudorff 空间 X，以下命题等价：

(1) X 是紧致空间；

(2) 如果 $\mathcal{Z}$ 是闭集的族且有有穷交性质，则 $\bigcap \mathcal{Z} \neq \varnothing$。

定理 3.1.13. *对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 在以 $\mathcal{S} = \{N_a \mid a \in B\}$ 为拓扑基的拓扑下，是一个零维的紧致 Hausdorff 空间。这样的空间通常称为 Stone 空间。*

也有文献称为布尔空间，见 Halmos。

例 3.1.14. 给定一阶语言 $\mathcal{L}$，令 X 是所有完全理论的族。对任意语句 $\sigma \in \mathcal{L}$，令 $\langle\sigma\rangle = \{T \in X \mid T \models \sigma\}$，则 $\mathcal{S} = \{\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in \mathcal{L}\}$ 构成 X 的一个拓扑基：这是因为 $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle = \langle\sigma \wedge \tau\rangle$，由引理3.1.6可得。

同时，这个完全理论的空间是一个零维空间：每个基本开集都是开闭集。（请验证）

X 也是 Haudorff 空间：令 T_1, T_2 为两个完全理论，且 $T_1 \neq T_2$，则必有 $\sigma \in \mathcal{L}$，$T_1 \models \sigma$ 而 $T_2 \models \neg\sigma$。这样，$T_1 \in \langle\sigma\rangle, T_2 \in \langle\neg\sigma\rangle$。

在完全理论的空间中，开集是形如 $\langle\sigma\rangle$ 的基本开集的并，对偶地，闭集是这样的基本开集的交。令 Σ 为一致的语句集，$F = \bigcap\{\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in \Sigma\}$，则 F 不空，并且是闭集。对任意 $T \in F$，$\Sigma \subseteq T$。任取语句 τ，$\Sigma \models \tau$ 当且仅当对所有 $T \in F$，$T \models \tau$。所以 F 确定了一个以 Σ 为公理集的理论。除非 F 是一个单点集 $\{T\}$，否则 F 确定的理论是一个不完全的理论。

为了证明这个完全理论的拓扑空间是紧致空间，我们需要几个新的定义。这也是为了充分利用我们所熟悉的超滤工具。

定义 3.1.15. 给定拓扑空间 X，X **中的滤** 指的是某一个 X 的子集 Y 上的滤。

例 3.1.16. 对任意 $x \in X$，所有包含 x 的开集构成的族

$$\mathcal{N}_x = \{O \mid O\text{是开集并且 } x \in O\}$$

是整个空间 X 上的滤。请读者验证。

定义 3.1.17. 给定拓扑空间 X 中的滤 U，$x \in X$ 称为 U 的**极限点**，如果 U 是 $\mathcal{N}_x$ 的扩张。此时称 U **收敛**到 x。如果 U 至少有一个极限点，就称 U 是**收敛的**。

练习 3.1.18. Haudorff 空间中的滤如果有极限点，则它的极限点是唯一的。

定理 3.1.19. *一个 Hausdorff 空间 X 是紧致的当且仅当 X 中的每个超滤都是收敛的。*

证明.（$\Rightarrow$）假设 U 是 X 中的超滤，并且不收敛。对任意 $x \in X$，$\mathcal{N}_x \not\subseteq U$，即存在一个开集 $O_x \in \mathcal{N}_x$，$O_x \notin U$。令 $\{O_x \mid x \in X \ \&\ O_x \notin U\}$ 为这样的开集的族。这是整个空间的一个开覆盖。令 $\{O_1, \cdots, O_n\}$ 为它的一个有穷子覆盖，并且 $\bigcup_{i=1}^n O_i = X$。任取 U 中元素 u，

$$(u \cap O_1) \cup \cdots \cup (u \cap O_n) = u \in U,$$

但 U 是超滤，所以存在 O_i，$u \cap O_i \in U$，而这又蕴涵着 $O_i \in U$，矛盾。

（$\Leftarrow$）现在假设 X 不是紧致的。令 $\{O_i\}_{i\in I}$ 为 X 的一个开覆盖，并且没有有穷的子覆盖。任取 $\{O_1, \cdots, O_n\}$，$O_1 \cup \cdots \cup O_n \neq X$，所以 $(-O_1) \cap \cdots \cap (-O_n) \neq \varnothing$。这即是说 $\{-O_i\}_{i\in I}$ 有穷交性质。令 U 为这个集族生成的超滤。对任意 $x \in X$，存在 O_i，$x \in O_i$，由于 $-O_i \in U$，所以 $O_i \notin U$，即 $\mathcal{N}_x \not\subseteq U$，即 U 不是收敛的。 □

引理 3.1.20. *一阶语言 $\mathscr{L}$ 中全体完全理论的空间是零维的 Hausdorff 紧致空间。*

证明. 我们需要证明这个空间中的任意超滤都是收敛的。给定超滤 U，对每一完全理论 T，令 $\mathfrak{A}_T$ 为 T 的一个模型。同时，令 $\mathfrak{A} = \mathrm{Ult}_U \mathfrak{A}_T$ 为相应的超积模型。注意到 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ 是一个完全理论。对任意开集 O，由于 O 是基本开集的并，所以，如果 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \in O$，则存在 σ，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \in \langle\sigma\rangle$，这意味着 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \sigma$，亦即 $\mathfrak{A} \models \sigma$。由 Łoś 定理，$\langle\sigma\rangle = \{T \mid \mathfrak{A}_T \models \sigma\} \in U$。这就证明了超滤 U 收敛于 U 所确定的超积模型的理论 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$。 □

引理 3.1.21. 令 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，Σ 为 $\mathcal{L}$ 中的语句集，Σ 是一致的当且仅当 Σ 是有穷一致的。

证明. 考虑 $\mathcal{L}$ 的所有完全理论构成的空间。由引理3.1.20，它是一个零维的 Hausdorff 紧致空间。对任意 $\sigma \in \Sigma$，$\langle\sigma\rangle$ 是这个空间中的闭集。由题设，$\{\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in \Sigma\}$ 是一个有有穷交性质的闭集族，由练习 3.1.12，$\bigcap_{\sigma\in\Sigma}\langle\sigma\rangle \neq \varnothing$。对任意完全理论 $T \in \bigcap_{\sigma\in\Sigma}\langle\sigma\rangle$，都有 $\Sigma \subseteq T$，所以 Σ 是一致的。 □

3.2　型空间

给定一个语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$ 的完全理论的空间由句子集的族构成。很自然地，我们是否可以用类似的工具来处理带自由变元的公式呢？这就是型空间。

对任意 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$，任意 $a \in |\mathfrak{A}|$，公式集 $\{\phi(x) \mid \mathfrak{A} \models \phi(a)\}$ 就称为 a 在 $\mathfrak{A}$ 中实现的 1-型，记作 $\mathrm{tp}^{\mathfrak{A}}(a)$。（多数不引起误解的情形下，我们省略上标 $\mathfrak{A}$。）$\mathrm{tp}(a)$ 中的元素是 $\mathcal{L}$ 中所有那些至多只含一个自由变元的公式，并且“在 a 处为真”。所以完全理论 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ 包含在 $\mathrm{tp}(a)$ 中。通常我们也将 $\mathrm{tp}(a)$ 的子集称为 1-型，而 $\mathrm{tp}(a)$ 称为**完全 1-型**，因为对任意只含一个自由变元的公式 $\phi(x)$，$\phi(x) \in \mathrm{tp}(a)$ 或 $\neg\phi(x) \in \mathrm{tp}(a)$。

定义 3.2.1. 给定语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$ 的公式集 p 称为一个 1-型，如果存在 $\mathcal{L}$ 的结构 $\mathfrak{A}$，$a \in |\mathfrak{A}|$，$p \subseteq \mathrm{tp}(a)$。如果 p 还满足：对任意只含一个自由变元的公式 $\phi(x)$，$\phi(x) \in p$ 或 $\neg\phi(x) \in p$，就称 p 为**完全 1-型**。

定义 3.2.2. 给定语言 $\mathcal{L}$，$\Sigma(x)$ 为 $\mathcal{L}$ 的只含一个自由变元的公式集。

(1) 对任意 $\mathscr{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$，任意 $a \in |\mathfrak{A}|$，如果 $\mathfrak{A} \models \Sigma(a)$，就称 a 是 $\Sigma(x)$ 的一个实现。

(2) $\Sigma(x)$ 在 $\mathfrak{A}$ 中可满足，如果存在 $a \in |\mathfrak{A}|$，a 实现 $\Sigma(x)$；

(3) $\Sigma(x)$ 在 $\mathfrak{A}$ 中有穷可满足，如果对任意 $X \subseteq_f \Sigma(x)$，X 都在 $\mathfrak{A}$ 中可满足。

显然，如果 p 是一个 1-型，则 a 实现 p 当且仅当 $p \subseteq \mathrm{tp}(a)$。

例 3.2.3. 令 $\mathscr{L} = \{<\}$ 为序的语言，则 $\{x > 1, x > 2, \cdots\}$ 在 $(\mathbb{R}, <)$ 中有穷可满足，但在 $\mathbb{R}$ 中没有实现。

回忆数理逻辑的两个基本概念。

定义 3.2.4. 令 $\mathscr{L}$ 为一阶语言，$\mathfrak{A}, \mathscr{B}$ 为 $\mathscr{L}$ 结构。

(1) 如果对所有 $\mathscr{L}$ 语句 σ，都有 $\mathfrak{A} \models \sigma$ 当且仅当 $\mathfrak{B} \models \sigma$，就称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 是初等等价的，通常表示为 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。

(2) 如果 $f : A \to B$ 是单射，并且对任意 $\mathscr{L}$ 公式 $\phi(x_1, \cdots, x_n)$，任意 $a_1, \cdots, a_n$，都有

$$\mathfrak{A} \models \phi(a_1, \cdots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \phi(f(a_1), \cdots, f(a_n)),$$

就称 f 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的初等嵌入，我们用 $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ 表示 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的初等子模型，即 $\mathrm{id} : A \to B$ 是初等嵌入。此时也称 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的初等扩张。

引理 3.2.5. *给定语言 $\mathscr{L}$，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 为 $\mathscr{L}$ 结构。*

(1) 如果 $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$，$a \in |\mathfrak{A}|$，则 $\mathrm{tp}^{\mathfrak{A}}(a) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{B}}(a)$；

(2) 如果公式集 $\Sigma(x)$ 在 $\mathfrak{A}$ 的某一初等扩张 $\mathfrak{B}$ 中可满足，则 $\Sigma(x)$ 在 $\mathfrak{A}$ 中有穷可满足。

(3) 如果 $\Sigma(x)$ 在 $\mathfrak{A}$ 中有穷可满足，则 $\Sigma(x)$ 是一个 1-型。

证明. (1) 是显然的：$\mathrm{tp}^{\mathfrak{A}}(a) = \{\phi \mid \mathfrak{A} \models \phi(a)\} = \{\phi \mid \mathfrak{B} \models \phi(a)\} = \mathrm{tp}^{\mathfrak{B}}(a)$。

(2) 任取 $X \subseteq_f \Sigma(x)$，令 ϕ 为 X 中公式的合取。存在 $b \in |\mathfrak{B}|$，$\mathfrak{B} \models \phi(b)$，所以 $\mathcal{B} \models \exists x\phi$，所以 $\mathcal{A} \models \exists x\phi$，所以 X 在 $\mathfrak{A}$ 中可满足。

(3) 令 $X(x) \subseteq_f \Sigma(x)$，并且 $a \in |\mathfrak{A}|$ 使得 $\mathfrak{A} \models X(a)$。给语言 $\mathcal{L}$ 增加一个新的常量符号 c_a，并且令 $c_a^{\mathfrak{A}} = a$，则 $\{\sigma \in \mathcal{L} \cup \{c_a\} \mid \mathfrak{A} \models \sigma\} \cup X(c_a)$ 是可满足的（语句集），所以由紧致性定理，存在模型 $\mathcal{B} \models \Sigma(c_a)$，令 $c_a^{\mathcal{B}} = b$，则 $\Sigma(x) \subseteq \mathrm{tp}^{\mathcal{B}}(b)$。 □

我们还可以从另一个角度看待型。$\mathrm{tp}(a)$ 仍可以看做一个完全理论，只是不是 $\mathcal{L}$ 中的，而是 $\mathcal{L} \cup \{c\}$ 中的，其中 c 是一个新的常量符号，它在 $\mathfrak{A}$ 中的解释是 a。为了简便，$\mathcal{L} \cup \{c\}$ 有时直接记作 $\mathcal{L}(a)$，其中 a 是解释 c 的元素。这样，$\mathrm{tp}(a)$ 就恰好是在 $\mathfrak{A}$ 中为真的所有 $\mathcal{L}(a)$ 语句。

引理 3.2.6. *$\mathcal{L}$ 中公式集 p 是一个 1-型当且仅当 p 是 $\mathcal{L} \cup \{c\}$ 中的一个理论；p 是一个完全 1-型当且仅当它是 $\mathcal{L} \cup \{c\}$ 中的一个完全理论。*

我们将所有 $\mathcal{L}$ 中的完全 1-型构成的空间记作 S_1：对任意只含一个自由变元的公式 ϕ，令 $\langle\phi\rangle = \{p \in S_1(T) \mid \phi \in p\}$，则所有 $\langle\phi\rangle$ 构成它的一个拓扑基，$S_1(T)$ 在这个拓扑下是一个零维的 Hausdorff 紧致空间。相应地，$\mathcal{L}$ 中的完全理论的空间记作 S_0。

事实上，对每个自然数 n，我们还可以定义完全 n-型：对任意 $\mathcal{L}$ 模型 $\mathfrak{A}$，任意 $a_1, \cdots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，$\mathcal{L}(a_1, \cdots, a_n)$ 上的一个完全理论称为 $a_1, \cdots, a_n$ 实现的完全 n 型。S_n 表示所有完全 n-型组成的空间。

我们总是对某一类具体的型空间有兴趣。给定理论 T（不一定是完全的），对任意 n，$S_n(T)$ 表示所有 T 的模型上的完全 n-型构成的空间。事实上，它是 S_n 中的一个闭集：对任意 $\sigma \in T$，$\langle\sigma\rangle = \{p \in S_n \mid \sigma \in p\}$ 是 S_n 中的开闭集。而 $S_n(T) = \bigcap_{\sigma \in T} \langle\sigma\rangle$，它是闭集的交，所以是闭集。

事实上，$S_n(T)$ 本身也是一个零维的 Hausdorff 紧致空间，或者说是一个 Stone 空间。接下来我们讨论型空间与 Lindenbaum 代数之间的关系。

对任意理论 T，任意 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $\mathcal{B}_n(T)$ 表示

$$\{[\phi]_T \mid \phi \text{至多有 } n\text{-个自由变元}\}.$$

容易验证 $\mathcal{B}_n(T)$ 是一个布尔代数。

与第一章类似，给定 $\mathcal{B}_n(T)$，令 F 是其上的滤，令 $\Sigma_F = \{\phi \mid [\phi] \in F\}$ 为 F 确定的公式集，则以下事实成立：

(1) Σ_F 是一致的，并且 $T \subseteq \Sigma_F$；

(2) 如果 $\phi \in \Sigma_F$，$T \models \phi \to \psi$，则 $\psi \in \Sigma_T$；

(3) 如果 $\phi, \psi \in \Sigma_F$，则 $\phi \wedge \psi \in \Sigma_F$；

(4) 如果 F 是超滤，则对任意至多含有 n 个变元的公式 ϕ，$\phi \in \Sigma_F$ 或 $\neg\phi \in \Sigma_F$；

(5) Σ_F 对推演封闭。

反过来，

引理 3.2.7. 对任意至多包含 n-个自由变元的公式集 Σ，如果 $T \subseteq \Sigma$ 并且 Σ 对推演封闭，则存在 $\mathcal{B}_n(T)$ 上的滤 F，$\Sigma = \Sigma_F$。

练习 3.2.8. 对任意 n，令 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B}_n(T))$ 为 $\mathcal{B}_n(T)$ 上所有超滤的族，则 $h(U) = \Sigma_U$ 是到 $S_n(T)$ 上的双射。

回忆一下布尔代数中原子的定义：$a \in B$ 是原子当且仅当 $0 < a$ 并且不存在 $b \in B$ 使得 $0 < b < a$。所以如果 $[\alpha]$ 是 $\mathcal{B}_n(T)$ 中的原子，则不存在公式 ϕ 使得 $T \models \phi \to \alpha$，但 $T \not\models \alpha \to \phi$。另外，如果 $[\alpha]$ 是原子，则对任意公式 ϕ，$T \models \alpha \to \phi$ 或 $T \models \alpha \to \neg\phi$。

如果 T 是完全理论，则 $\mathcal{B}_n(T) = \{0, 1\}$，所以 1 是原子。

练习 3.2.9. 如果 T 有一个模型 $\mathfrak{A}$，至少有两个元素，则对任意 $n > 0$，$\mathcal{B}_n(T)$ 没有原子。

练习 3.2.10. 以下命题等价：

(1) $[\alpha]$ 是 $\mathcal{B}_n(T)$ 的原子；

(2) $p = \{\phi \mid T \models \alpha \to \phi\} \in S_n(T)$，即 p 是一个完全 n-型。

定义 3.2.11. 令 $p \in S_n(T)$ 为 T 的完全 n-型，如果存在 α，$\{p\} = \langle\alpha\rangle$，就称 p 是孤立型，此时称 α 孤立 p。

练习 3.2.12. α 孤立 p 当且仅当对任意 T 的模型 $\mathfrak{A}$，任意 $a_1, \cdots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，$p = \mathrm{tp}(\bar{a})$ 当且仅当 $\mathfrak{A} \models \alpha(\bar{a})$。

引理 3.2.13. *以下命题等价:*

(1) α *孤立* p;

(2) $T \cup \{\alpha\}$ *可满足，并且对任意* $\phi \in p$，$T \models \alpha \to \phi$;

证明. (1)⇒(2)。如果 $T \not\models \alpha \to \phi$，则 $T \cup \{\alpha, \neg\phi\}$ 可满足，所以存在 $q \in S_n(T)$，$\{\alpha, \neg\phi\} \subseteq q$，根据（1），$\alpha$ 只属于 p，所以 $p = q$，所以 $\phi \notin p$。

(2)⇒(1)。假设（1）不成立，令 $q \neq p$，$\alpha \in q$。任取 $\psi \in q$ 但 $\psi \notin p$，则 $\neg\psi \in p$，由（2），$T \models \alpha \to \neg\psi$，所以 $T \cup \{\alpha, \psi\}$ 不可满足，但它是 T 的一个型，矛盾。 □

引理 3.2.14. *如果* T *是一致的理论，* p *是* T *的型。以下命题等价:*

(1) p *不是孤立型;*

(2) *在* $\mathcal{B}_n(T)$ *中，* $\prod\{[\phi] \mid \phi \in p\} = 0$。

证明. 假设 p 不是孤立型，即任意 α 都不孤立 p，所以，对任意 α，存在 $\phi \in p$，$T \not\models \alpha \to \phi$，$[\alpha] \not\leq [\phi]$。所以，对任意 α，如果 $[\alpha] \leq \prod\{[\phi] \mid \phi \in p\}$，则 $[\alpha] = 0$，所以 $\prod\{[\phi] \mid \phi \in p = 0\}$。

反之，假设（2）成立。如果 α 孤立 p，即对任意 $\phi \in p$，$T \models \alpha \to \phi$，则 $[\alpha] = 0$，所以 $T \cup \{\alpha\}$ 不可满足。

□

引理 3.2.15. *对任意* $n > 0$，*以下命题等价:*

(1) $S_n(T)$ *是有穷的;*

(2) *所有型都是孤立型;*

(3) $\mathscr{B}_n(T)$ *是有穷的。*

证明. 由练习3.2.8，（1）与（3）等价。我们只需证明（1）与（2）等价。

(1)⇒(2)。令 $S_n(T) = \{p_1, \cdots, p_m\}$，任取 p_i，我们令 $\phi_1, \cdots, \phi_{i-1}, \phi_{i+1}, \cdots \phi_m$ 为一组公式，它们都属于 p_i，但对任意 $j \neq i$，$\phi_j \notin p_j$。这样，$p_i \in \langle \phi_j \rangle$，但 $p_j \notin \langle \phi_j \rangle$。令 ϕ 为这些公式的并，则 $\langle \phi \rangle = \{p_i\}$，所以 p_i 是孤立型。

(2)⇒(1)。显然，$\{\{p\} \mid p \in S_n(T)\}$ 是 $S_n(T)$ 的一个开覆盖，它有一个有穷的子覆盖，所以 $S_n(T)$ 只能是有穷的。 □

引理 3.2.16. *令 T 是完全理论，如果 $p \in S_n(T)$ 是孤立型，则 p 在 T 的所有模型中都有一个实现。*

证明. 给定任意 T 的模型 $\mathfrak{A}$。令 $\{p\} = \langle \phi \rangle$，并且令 $\mathfrak{B} \models T$ 和 $b \in |\mathfrak{B}|$ 使得 $p = \mathrm{tp}^{\mathfrak{B}}(b)$。所以 $\mathfrak{B} \models \phi(b)$，这蕴涵着 $\mathfrak{B} \models \exists x \phi$。由于 T 是完全理论，所以 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，所以 $\mathfrak{A} \models \exists x \phi$，即存在 $a \in |\mathfrak{A}|$，$\mathfrak{A} \models \phi(a)$。由于 ϕ 孤立 p，所以 $p = \mathrm{tp}^{\mathfrak{A}}(a)$。 □