一阶逻辑（I）

第 8 章 - 哥德尔不完备性定理

姚宁远

复旦大学哲学学院

December 13, 2021

目录

算术模型

标准算术模型

结构 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N},\ 0,\ 1,\ \times,\ +)$, 语言是 $L = \{0, 1, \times, +\}$。称 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 算术理论。

- 我们已经研究过结构 $\mathfrak{N}_S$, $\mathfrak{N}_<$, $\mathfrak{N}_+$；
- 其一阶理论可以分别被 $T_S, T_<, T_\equiv$ 公理化；
- 我们将证明 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 不能被公理化；
- 与之前的结构相比较，$\mathfrak{N}$ 的表达能力有本质提升；
- $\mathfrak{N}$ 可以表述有穷集合的理论。
- $\exists x_0 ... \exists x_n \phi(\bar{x})$ 是一个合法的一阶表达式；
- 该公式的含义是：存在一个长度为 $n+1$ 的序列使得 ϕ 成立
- 如何表述“存在一个有穷序列 x，使得 $\phi(x)$ 成立”？

目录

鲁宾逊算术理论 Q

鲁宾逊算术理论 Q

1. (Q1) $Sx \neq 0$;
2. (Q2) $Sx = Sy \rightarrow x = y$;
3. (Q3) $x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = sy)$;
4. (Q4) $x + 0 = x$;
5. (Q5) $x + Sy = S(x + y)$;
6. (Q6) $x \cdot 0 = 0$;
7. (Q7) $x \times Sy = x \times y + x$。

显然 $\mathfrak{N} \models Q$.

引理

1. $Q \nvdash \forall x(Sx \neq x)$；
2. 对每个标准自然数 $n \in \mathbb{N}$，$Q \vdash Sn \neq n$，其中 n 代表 $S^n 0$。

证明

1. 构造一个非标准的 $\mathfrak{M} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$；
2. 对 $n \in \mathbb{N}$ 归纳证明。

注

1. 标准自然数 n 对应闭项 S^n0；
2. 非标准数不是“自然的”。
3. 断言“对每个标准自然数 $n \in \mathbb{N}$，$Q \vdash Sn \neq n$”不是一个证明，而是一族证明。
4. 数学归纳法是元定理；

用 $x \leq y$ 表示 $\exists z(x+z=y)$。用 $\vdash$ 表示 $Q\vdash$

引理

对所有的 $m, n \in \mathbb{N}$，有

1. $\vdash \forall x(Sx+n=x+Sn)$;
2. $\vdash m+n=S^{m+n}0$ 并且 $\vdash m \cdot n=S^{m \cdot n}0$;
3. 如果 $n \neq m$ 则 $\vdash n \neq m$;
4. 如果 $n \neq m$ 则 $\vdash n \neq m$;
5. $\forall x(x \leq n \leftrightarrow x=0 \vee \ldots \vee x=n)$;
6. $\forall x(x \leq n \vee n \leq x)$。

注

设 $\mathfrak{M} \models Q$，$\mathfrak{N}$ 是标准模型，则

1. $n \mapsto n^{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{N}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的嵌入；
2. $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$;
3. 如果 $b \in \mathfrak{N}$ 且 $a \leq^{\mathfrak{M}} b$，则 $a \in \mathfrak{N}$；
4. $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的尾节扩张；

注

1. 设 t 是一个含有 n 个变元的项；
2. 则存在 $f \in \mathbb{N}[x_1 ..., x_n]$ 使得 $Q \vdash t(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$；
3. 如果 t 不含自由变元，则称 t 是一个闭项；
4. 如果 t 是一个闭项，则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $Q \vdash t = n$；
5. 对于闭项 t, s，

$$Q \vdash t = s \iff \mathfrak{N} \models t = s \quad (\mathfrak{M} \models t = s)$$

令 T 是包含 Q 的一个理论。

定义

称一个自然数上的 k-元关系 P 为在 T 中数码逐点可表示的（简称可表示的），如果存在公式 $\rho(x)$，称为 P 的一个表示公式，使得

$$(n_1, \ldots .n_k) \in P \;\Rightarrow\; T \vdash \rho(n_1, \ldots .n_k); \text{ 且}$$

$$(n_1, \ldots .n_k) \notin P \;\Rightarrow\; T \vdash \neg\rho(n_1, \ldots .n_k)$$

注

与

$$(n_1, \ldots .n_k) \in P \iff T \vdash \rho(n_1, \ldots .n_k); \text{ 且}$$

不等价。

引理

如果 T 可公理化，则 T 是递归可枚举的。

证明：

1. T 是可公理化的 $\iff$ 存在可判定的 Σ 使得
$$T = \{\sigma \mid \Sigma \vdash \sigma\}$$
2. Σ 可判定：$\sharp\Sigma = \{\sharp\sigma \mid \sigma \in \Sigma\} \subseteq \mathbb{N}$ 是可判定（递归）集合；
3. Σ 的证明的集合 P_Σ 可判定（递归）
   - 公式序列 $(\sharp\sigma_1, ..., \sharp\sigma_n) \mapsto p \in \mathbb{N}$；
   - $p \in P_\Sigma \iff \forall i < \mathrm{lh}(p)$
     - $p_i \in \Sigma \cup Ax$；
     - 或 $\exists j, k < \mathrm{lh}(p)(\alpha_k := \alpha_j \to \alpha_i)$，$\sharp\alpha_{ijk} = p_{ijk}$；
   - P_Σ 是递归的。

4. $\sigma \in T \iff \exists p(p \in P_\Sigma \wedge \exists i < \mathrm{lh}(p)(p_i = \sharp\sigma))$；
5. T（$\sharp T$）是递归可枚举的；
6. $\sharp T$ 递归函数的值域。

引理

1. 自然数上的等同关系 $\{(n,n) | n \in \mathbb{N}\}$ 被公式 $x = y$ 所表示；
2. 小于关系 $\le$ 被公式 $x \le y$ 所表示；
3. 如果 P 是可表示的，则 P 是递归的；
4. 可表示的关系在布尔运算下是封闭的;
5. 如果 P 在 Q 中被 ρ 表示，则 P 在 Q 的任何一致扩张中都被 ρ 表示；
6. P 在 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 中被 ρ 表示当且仅当 P 在结构 $\mathfrak{N}$ 中被 ρ 定义。

证明

证明：

【3】如果 P 是可表示的，则 P 是递归的。

1. T 有一个枚举函数（程序）f，即 $\sharp T = f(\mathbb{N})$;
2. 设 $P(x_1, ..., x_k)$ 被 ρ 表示；
3. 设 $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$;
4. 用 T 的枚举函数（程序）检测 $\rho(n_1, ..., n_k)$ 与 $\neg\rho(n_1, ..., n_k)$ 是否属于 T;
5. 如果 $\rho(n_1, ..., n_k) \in T$，则 $(n_1, ..., n_k) \in P$;
6. 如果 $\neg\rho(n_1, ..., n_k) \in T$，则 $(n_1, ..., n_k) \notin P$。
7. 以上的“算法”可以有效判定关系 $P(n_1, ..., n_k)$。

证明

【4】可表示的关系在布尔运算下是封闭的。

1. 设 $P, R \subseteq \mathbb{N}^k$ 分别被 ψ 和 ρ 表示；
2. $P \cup R$ 被 $\psi \vee \rho$ 表示，$\mathbb{N} \backslash P$ 被 $\neg\psi$ 表示。

证明

【5】如果 P 在 Q 中被 ρ 表示，则 P 在 Q 的任何一致扩张中都被 ρ 表示。

1. 对任意的 $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}^k$

$$Q \vdash \rho(n_1, ..., n_k) \text{ 和 } Q \vdash \neg\rho(n_1, ..., n_k) \text{ 有且仅有一个成立}$$

2. 如果 $Q \subseteq T$，则

$$T \vdash \rho(n_1, ..., n_k) \iff P \vdash \rho(n_1, ..., n_k)$$

$$T \vdash \neg\rho(n_1, ..., n_k) \iff P \vdash \neg\rho(n_1, ..., n_k).$$

证明

【6】P 在 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 中被 ρ 表示当且仅当 P 在结构 $\mathfrak{N}$ 中被 ρ 定义。

- 这是因为 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 是完备的。

推论

P 在 Q 中可表示，则 P 在 $\mathfrak{N}$ 中可定义。（反之则不成立）

Q 的 Σ_1-完备性

1. 称一个 L_{ar} 公式是 Δ_0 的，如果它只包含有界量词。;
2. 如果一个公式 ϕ（在 Q 下）等价于 $\exists x_1 \ldots \exists x_n \theta$，其中 θ 是 Δ_0 的，则称 ϕ 是 Σ_1 公式;
3. 如果一个公式 ϕ 等价于 $\forall x_1 \ldots \forall x_n \theta$，其中 θ 是 Δ_0 的，则 ϕ 是 Π_1 公式;
4. 如果一个公式既等价于 Σ_1 公式，又等价于 Π_1 公式。则它是 Δ_1 公式;

定理（Σ_1-完备性）

对任何一个 Σ_1-闭语句 τ，我们有

$$\mathfrak{N} \models \tau \iff Q \vdash \tau$$

证明 I

■: $\Leftarrow$: 对任意的 τ 都成立；

■: $\Rightarrow$:

■: 断言：对任何 Δ_0-闭语句 σ，对任何的 $\mathfrak{M} \models Q$, 有

$$\mathfrak{M} \models \sigma \iff \mathfrak{N} \models \sigma$$

（Δ_0-完备性）

1. 对 σ 归纳证明（$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$）；
2. σ 不含量词时，$\sigma = \psi(n)$：

$$\mathfrak{N} \models \psi(n) \iff \mathfrak{M} \models \psi(n^{\mathfrak{M}}) \iff \mathfrak{M} \models \psi(n).$$

3. $\vee$ 与 $\neg$ 显然保持归纳假设；
4. 设 σ 为 $(\forall x \leq t)\psi$ 且 ψ 是一个 Δ_0 公式，t 是一个闭项

证明 II

5 注意：存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $Q \vdash t = n$；
6 如果 $\mathfrak{M} \models (\forall x \leq t)\psi(x, t)$，则 $\mathfrak{M} \models (\forall x \leq n)\psi(x, n)$；
7 $Q \vdash x \leq n \leftrightarrow \bigvee_{k \leq n}(x = k)$；
8 $\mathfrak{M} \models (\forall x \leq t)\psi(x, t) \iff \mathfrak{M} \models \bigwedge_{k \leq n}\psi(k, n)$；
9 由归纳假设：$\mathfrak{M} \models \psi(k, n) \iff \mathfrak{N} \models \psi(k, n)$；
10 $\mathfrak{N} \models \bigwedge_{k \leq n}\psi(k, n) \iff \mathfrak{N} \models (\forall x \leq t)\psi(x, t)$

现在设 σ 形如 $\exists x\psi(x)$，$x = x_1, \ldots, x_n$，ψ 是 Δ_0 公式。

1 设 $\mathfrak{N} \models \sigma$；
2 则存在 $m \in \mathbb{N}^n$ 使得 $\mathfrak{N} \models \psi(m)$：
3 $Q \vdash \psi(m) \Rightarrow Q \vdash \exists x\psi(x)$.

引理

如果关系 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 被公式 $\rho(x, y)$ 所表示，则关系

$$(\exists c < b)P(a, c) \text{ 和 } (\forall c < b)P(a, c)$$

分别被

$$(\exists z < b)\rho(x, z) \text{ 和 } (\forall z < b)\rho(x, z)$$

所表示。

证明：$Q \vdash x \leq n \leftrightarrow \bigvee_{k \leq n}(x = k)$。

函数的可表示性

定义

称一个函数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 为在 T 中可表示的，如果存在一个 L_{ra} 中的公式 $\phi(x_1, ..., x_k, y)$，使得对所有的 $(n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}^k$，有

$$T \vdash \forall y \Big(\phi(n_1, ..., n_k, y) \leftrightarrow y = f(n_1, ..., n_k) \Big)$$

此时称 ϕ 作为一个函数表示 f。

注

- 以上定义中的 f 是任意函数，不必可定义；
- 可以推出 f 在 $\mathfrak{N}$ 中是可定义的；
- 公式 $\phi(x, y)$ 使得

$$\mathfrak{N} \models \phi(m, n) \Leftrightarrow n = f(m),$$

$$\mathfrak{N} \models \neg\phi(m, n) \Leftrightarrow n \neq f(m) \quad (\forall m, n \in \mathbb{N})$$

- 在 T 中可表示意味着：存在一个公式 $\psi(x, y)$ 表示函数 f 的图像，且对任意的 $a \in \mathbb{N}^k$，有

$$T \vdash \exists! y \psi(a, y) \text{（注意：} \mathfrak{N} \models \forall x \exists! y \psi(x, y) \text{总是成立）}$$

注

表示函数图像的公式不能表示函数：

- 设 f 是一个函数；
- 令 $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$；
- 设公式 $\phi(x, y)$ 表示 G_f;
- 对任意的 $a \in \mathbb{N}^k, b \in \mathbb{N}$，有

$$f(a) = b \Rightarrow T \vdash \phi(a, b), \quad f(a) \neq b \Rightarrow T \vdash \neg\phi(a, b)$$

- 设 $\mathfrak{M} \models T$，对于非标准的 $y \in M$

$$\mathfrak{M} \models y \neq f(a) \rightarrow \neg\phi(a, y)$$

不一定成立。

例

- 函数 $Z(x)=0$;
- 公式 $\phi(x,y): y+y=y$ 表示 G_Z;
- Q 不能证明 $y+y=y \rightarrow y=0$

■: 如果 $\phi(x,y)$ 表示一个函数 f，则 $\phi(x,y)$ 表示 f 的函数图像;

■: 反之则不成立。

引理

令 t 为语言 L_{ar} 中的项，则 t 诱导出来的函数是可表示的。

证明

$$\mathfrak{N} \models t(n_1, \ldots, n_k) = m \iff T \models t(n_1, \ldots, n_k) = m$$

$$T \models \forall x \exists! y (t(x) = y).$$

定理

可表示函数类关于复合封闭。

证明 I

- 设 $f(x) = g(h_1(x), ..., h_k(x))$
  1. $h_i(x)$ 被 $\theta_i(x, y_i)$ 表示；
  2. $g(y_1, ..., y_k)$ 被 $\psi(y_1, ..., y_n k, z)$ 表示；
- 断言：f 被

$$\varphi(x, z) := \forall y_1, ..., y_n (\bigwedge_i \theta_i(x, y_i) \to \psi(y_1, ..., y_k, z))$$

表示，即需要证明：$\forall n \in \mathbb{N}$，$T \vdash \forall z \left(\varphi(n, z) \leftrightarrow z = f(n)\right)$

- $\Rightarrow$

证明 II

显然 $T \vdash \bigwedge_i \theta_1(n, y_i) \leftrightarrow \bigwedge_i y_i = h_i(n)$;

$$\left(\bigwedge_i \theta_1(n, y_i) \rightarrow \psi(y_1, ..., y_k, z)\right) \leftrightarrow \left(\bigwedge_i y_i = h_i(n) \rightarrow \psi(y_1, ..., y_k, z)\right)$$

$$T \cup \{\bigwedge_i y_i = h_i(n) \rightarrow \psi(y_1, ..., y_n, z)\} \vdash \psi(h_1(n), ..., h_k(n), z)$$

$$T \cup \{\bigwedge_i y_i = h_i(n) \rightarrow \psi(y_1, ..., y_n, z)\} \vdash z = g(h_1(n), ..., h_k(n))$$

故

$$T \cup \{\bigwedge_i \theta_i(n, y_i) \rightarrow \psi(y_1, ..., y_n, z)\} \vdash z = f(n)$$

证明 III

故

$$T \vdash \forall z\left(\forall y_1, ..., y_n(\bigwedge_i \theta_i(n, y_i) \to \psi(y_1, ..., y_k, z)) \to z = f(n)\right)$$

即 $T \vdash \forall z\left(\varphi(n, z) \to z = f(n)\right)$

■ $\Leftarrow$

$$T \cup \{z = g(h_1(n), ..., h_k(n)), \bigwedge_i \theta_i(n, y_i)\} \vdash \psi(h_1(n), ..., h_k(n), z)$$

$$T \cup \{z = g(h_1(n), ..., h_k(n)), \bigwedge_i \theta_i(n, y_i)\} \vdash \bigwedge_i y_i = h_i(n)$$

证明 IV

$$T \cup \{z = f(n), \bigwedge_i \theta_i(n, y_i)\} \vdash \psi(y_1, ..., y_k, z)$$

$$T \cup \{z = f(n)\} \vdash \bigwedge_i \theta_i(n, y_i) \to \psi(y_1, ..., y_k, z)$$

引理

可表示函数类关于极小算子封闭:

1. 设 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 被 $\alpha(x, y)$ 表示;
2. 令 $\phi(x, y)$ 为 $\alpha(x, y) \wedge (\forall z < y)\neg\alpha(x, z)$;
3. 则 $f : a \mapsto \mu b[P(a, b)]$ 被 $\phi(x, y)$ 表示:

证明：
首先证明：$\vdash \forall(y = f(a) \to \phi(a, y))$：

1. $y = f(a) \implies P(a, f(a))$ 且对每个 $c < f(a)$ 有 $\neg P(a, c)$；
2. 故 $\vdash \alpha(a, f(a))$ 且；
3. $\vdash \bigwedge_{0 \leq i < f(a)} \neg\alpha(a, i)$；
4. $\vdash \bigwedge_{0 \leq i < f(a)} \neg\alpha(a, i) \longrightarrow (\forall z < f(a))\neg\alpha(a, i)$.
5. 故 $\vdash \forall(y = f(a) \to \phi(a, y))$.

再证明：$\vdash \forall(\phi(a, y) \to y = f(a))$：

1. 只需证明：$(f(a) < y \vee y < f(a)) \ \wedge \ \phi(a, y)$ 不一致；
2. $f(a) < y \vdash \exists z < y\ (\alpha(a, z))$；
3. $y < f(a) \vdash y = 0 \vee ... \vee y = f(a) - 1$；
4. 故 $(f(a) < y \vee y < f(a)) \ \wedge \ \phi(a, y)$ 不一致；
5. $\phi(a, y) \vdash y = f(a)$.

推论

函数 f 可表示当且仅当 G_f 可表示。

证明

$a \mapsto \mu b[G_f(a,b)]$ 是可表示函数，它是 f 自身。

推论

假定函数 $g(x, y)$ 可表示，则函数

$$f(x) := \ \mu y(g(x, y) = 0)$$

也可表示

目标

可表示函数类关于原始递归封闭

- ■：初始函数 Y
- ■：复合 Y
- ■：正则极小化 Y
- ■：原始递归？(编码)
- ■：$f(x,n)=m \Leftrightarrow$

$$\exists s\left(\mathrm{lh}(s)=n+1, s_0=g(x), \forall i<n\big(s_{i+1}=h(x,i,s_i)\big), s_n=m\right)$$

- ■：哥德尔数编码函数和解码函数涉及指数映射 x^y，不满足要求。

哥德尔的 β 函数 I

定义

哥德尔函数 $\beta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^{<\omega}$ 定义为：对任意的 u, v, w，$\beta(u, v, w)$ 是一个长度为 w 的序列 $a_0, ..., a_{w-1}$，其中 a_i 满足：

$$u = d((i+1)v+1) + a_i$$

注

- 定义 $\alpha(u, v, i)$ 为 $\frac{u}{v(i+1)+1}$ 的余数，即 β 函数的坐标分量函数，则 $\alpha(u, v, i)$ 是可表示的 (稍后证明)。
- β 将有穷序列 $\alpha(u, v, 0), ..., \alpha(u, v, w)$ 编码为一个三元组

哥德尔的 β 函数 II

定理

哥德尔函数 $\beta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^{<\omega}$ 是满射。

注

- 每个有穷序列被哥德尔函数编码为一个三元组；
- “存在一个有穷序列”可表述为“$(\exists u, v, w) \ldots$”

接下来我们来证明该定理。

欧几里得引理（PA 可证）

设 $a, b \in \mathbb{N}$ 是互素的，则存在 $x, y \in \mathbb{Z}$ 使得 $ax + by = 1$。

证明：

- 令 $X = \{ax + by | x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$;
- 则 X 有最小元 x_0；
- 如果 x_0 不能整除 a，则 $a = cx_0 + r$;
- 从而 $0 < r < x_0$，且 $r = a - cx_0 \in X$，与 x_0 是最小元矛盾。
- x_0 是 a, b 的公约数，即 $x_0 = 1$。

中国剩余定理（PA 可证）

令 $d_0, ..., d_n$ 是两两互素的自然数，$a_0, ..., a_n$ 为满足 $a_i < d_i$ 的自然数，则存在自然数 c，使得 a_i 是 c 除 d_i 的余数。即 c 是以下同余方程组的解。

$$\begin{aligned} x &\equiv_{d_0} a_0 \\ x &\equiv_{d_1} a_1 \\ &\ldots \\ x &\equiv_{d_n} a_n \end{aligned}$$

证明

对 n 归纳证明；

1. $n = 0$（一个方程）时显然
2. 设 $n = k$ 时成立，下面证明 $n = k + 1$ 的情形；
3. 令 b 为方程组 $\{x \equiv_{d_i} a_i | \ i \le k\}$ 的解；
4. 令 d 为 $d_0, ..., d_k$ 的最小公倍数，则 $(d, d_{k+1}) = 1$；
5. 显然，对任意的 m，以及 d_i, $b + md \equiv_{d_i} b$;
6. 故 $b + md$ 也是方程组 $\{x \equiv_{d_i} a_i | \ i \le k\}$ 的解；
7. **断言**：存在 r, s 使得 $b + rd = sd_{k+1} + a_{k+1}$：
8. 取 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使得 $ud + vd_{k+1} = 1$;
9. $b = b(ud + vd_{k+1})$. $a_{k+1} = a_{k+1}(ud + vd_{k+1})$;
10. $b - a_{k+1} = b(ud + vd_{k+1}) - a_{k+1}(ud + vd_{k+1}) = -rd - sd_{k+1}$;
11. 显然 $b + rd$ 是方程组 $\{x \equiv_{d_i} a_i | \ i \le k + 1\}$ 的解.

引理

对任意的 n，存在 $n+1$ 个数两两互素：

$$1+n!,\ 1+2\cdot n!,\ ...,\ 1+(n+1)\cdot n!$$

证明

设 $p|1+(i+1)\cdot s!$. $p|1+(j+1)\cdot s!$，则 $p|(j-i)\cdot s!\ \Rightarrow\ p|s!$。矛盾。

哥德尔定理

定理

哥德尔函数 $\beta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^{<\omega}$ 是满射。

证明：

- 设 $a_0, \ldots, a_{w-1}$ 是一个自然数的序列；
- 令 $n = \max\{a_0, \ldots, a_{w-1}, w\}$
- 令 $v = n!$
- 则 $\{v(i+1)+1 \mid i = 0, \ldots, w-1\}$ 两两互素且 $a_i < v(i+1)+1$；
- 根据中国剩余定理，存在 $u \in \mathbb{N}$ 使得 $u \equiv_{v(i+1)+1} = a_i$；
- 故 β 是满射。

注

对 $i < w$，令 $\beta(u, v, w, i) = a_i$，则 $\beta(u, v, w, i)$ 是一个可定义函数，也是递归函数。

$\alpha(u,v,i)$ 的可表示性 I

引理

$$\alpha(u,v,i) = \frac{u}{v(i+1)+1} \text{ 的余数}$$

是可表示的

1. 关系 $P(c,d,i,r,q) =_{\text{def}} (c = q(1+(i+1)d)+r)$ 可表示；
2. 关系 $R(c,d,i,r) =_{\text{def}} \exists q \leq c\, P(c,d,i,r,q)$ 可表示:

$\alpha(u, v, i)$ 的可表示性 II

3

$$R(c,d,i,r) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \exists q \leq c(P(c,d,i,r,q)$$

$$\Rightarrow Q \vdash \exists q \leq c(P(c,d,i,r,q);$$

$$\neg R(c,d,i,r) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \forall q \leq c\neg(P(c,d,i,r,q)$$

$$\iff \mathfrak{N} \models \bigwedge_{k \leq c} \neg P(k,d,i,r,q) \iff Q \vdash \bigwedge_{k \leq c} \neg P(k,d,i,r,q);$$

$$\Rightarrow Q \vdash \forall q \leq c\neg(P(c,d,i,r,q);$$

4 $\mu r(\ R(c,d,i,r))$ 是可表示函数。

递归函数的可表示性 I

定义 $\alpha(u,v,i)$ 为 $\frac{u}{v(i+1)+1}$ 的余数。

定理

递归可枚举函数都是可表示的。

证明：

- 只需证明 $\mathfrak{N}$ 中的可表示函数类包含初始函数，且对复合，极小化，以及原始递归封闭。
- 显然初始函数都是可定义的；
- 可定义函数显然对复合封闭；
- 可定义函数显然对极小化封闭；
- 可定义函数对原始递归封闭：
  1. 设 $f(x,0)=g(x)$，$f(x,n+1)=h(x,n,f(x,n))$；

递归函数的可表示性 II

2 其中 g, h 均是可定义函数；
3 令 $\psi(u,v,x) := \alpha(u,v,0) = g(x)$
4 令 $\phi(u,v,x) := \forall i < y\big(\alpha(u,v,i+1) = h(x,i,\alpha(u,v,i+1))\big)$
5 则定义 $f(x,y) = z$ 的公式为：

$$\exists u,v\Big(\psi(u,v,x) \bigwedge \phi(u,v,x) \bigwedge z = \alpha(u,v,y)\Big)$$

6 由 Q 的 Σ_1-完备性，f 可表示。

推论

由以上证明可知：原始递归函数都是 Σ_1-可表示的，从而也是 Π_1-可表示的。
同理，递归可枚举集合都是 Σ_1-可表示的，从而递归关系都是 Δ_1-可表示的。

注

1. （在 PA 下）根据中国剩余定理:
2. 对任意的 n，以及 $a_0, ..., a_n$;
3. 存在 c, d 使得 $\alpha(c, d, i) = a_i$:
4. 即 (c, d) 是 $a_0, ..., a_n$ 的编码，α 是一个解码函数。

引理（$\mathbb{N}^2$ 编码为 $\mathbb{N}$）

令

$$J(a,b)=\frac{1}{2}(a+b)(a+b+1)+a;$$

$$K(p)=\mu a\le p\exists b\le p(J(a,b)=p);$$

$$L(p)=\mu b\le p\exists a\le p(J(a,b)=p);$$

则函数 J,K,L 都在 Q 中可表示。

引理（*PA*）

$J(a,b)$ 是双射函数。因此对任意的 $(a,b)\in\mathbb{N}^2$，存在 $p\in\mathbb{N}$（$p=J(a,b)$）使得 $K(p)=a$，$L(p)=b$.

Proof.

对 a,b 归纳证明。 □

定理 (PA)

存在一个由加法，乘法，以及极小算子复合而成的函数 $\beta^*: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对任意的

$$n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$$

都存在 $s \in \mathbb{N}$ 满足 $\beta^*(s, i) = a_i$ $(i \leq n)$

证明

令 $\beta^*(s, i) = \alpha(K(s), L(s), i)$.

定理

所有的递归函数都是可表示的，故递归关系也都是可表示的。

回忆：可表示关系是被"$T \vdash$" 表示的，从而是递归的。

推论

若 $R \subseteq \mathbb{N}^k$，$Q \subseteq T$ 是递归且一致的。则以下命题等价

1. R 在 T 中可表示；
2. R 是递归关系；

推论

若 $R \subseteq \mathbb{N}^k$，$Q \subseteq T$ 是递归且一致的。则以下命题等价

1. R 在 T 中可表示；
2. R 是在 T 中被一个 Δ_1 公式表示；

断言

递归关系被结构 $\mathfrak{N}$ 中的一个 Δ_1 公式定义；

证明

$1 \Rightarrow 2$: R 被一个 Σ_1 公式定义，$\neg R$ 也被 Σ_1 公式定义（在 $\mathfrak{N}$ 中)。由 Q 的 Σ_1 完备性可得。

目录

哥德尔编码

本节的目标是利用编码在 $\mathfrak{N}$（或 Q）中讨论语法和部分语义

符号 ζ	$\forall$	0	S	+	$\cdot$	(	)	$\neg$	$\rightarrow$	$=$	v_0	v_1	...
哥德尔数 $\sharp\zeta$	0	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	...

1. 符号串 $\xi = \xi_0 ... \xi_n$ 的编码为哥德尔数

$$(\sharp\xi_0, ..., \sharp\xi_n) = p_0^{\sharp\xi_0+1} ... p_n^{\sharp\xi_0—+1}$$

2. 项与公式作为符号串，编码是一个偶数；
3. 作为符号的 0 编码为 3，作为项的 0 编码为 16;
4. 上述编码方案可以推广到一般的语言 L 上，要求 L 的符号集合可判定；
5. 本节的工作都是在标准模型 $\mathfrak{N}$ 中完成的。

语法算术化 I

变元集

$V = \{\sharp\alpha |\ \alpha$是一个变元$\}$ 是原始递归的：

$$\mathrm{Var} = \{n \in \mathbb{N} |\ \exists k < n(n = 2k + 21)\}$$

注

一般地，对逻辑对象 O，我们用 $\underline{O}$ 表示的编码集（其在 $\mathfrak{N}$ 中的同构像），即

$$\underline{O} = \{\sharp\alpha |\ \alpha \in O\}$$

语法算术化 II

项集

$$\text{Term} = \{\alpha |\ \alpha\text{是一个}\underline{\text{项}}\}$$

是原始递归的.

证明:

项的定义是递归的。t 是一个 $\underline{\text{项}}$，如果

1. $\exists s < t\big(t = (s) \wedge (s \in \text{Var} \vee s = 0)\big)$，或者
2. $\exists r, s < t\big(t = (r)\hat{}s \wedge r = \underline{S} \wedge s \in \text{Term})\big)$
3. $\exists q, r, s < t\big(t = (q)\hat{}r\hat{}s \wedge (q = \underline{+} \vee q = \underline{\cdot}) \wedge r, s \in \text{Term})\big)$

故 Term 是原始递归的

语法算术化 III

类似地：

公式集

$$\text{Form} = \{\alpha \mid \alpha\text{是一个}\underline{\text{公式}}\}$$

是原始递归的.

替换函数

语法算术化 IV

存在一个原始递归函数 Sb 使得对任意的项或者公式 α，对任意的变元 x 和任意的项 t，有

$$Sb(\sharp\alpha, \sharp x, \sharp t) = \sharp\alpha_t^x$$

是原始递归的.

语法算术化 V

数码集合

函数

$$f(n) = \sharp(S^n 0)$$

是原始递归的, 故数码集合

$$\mathrm{Num} = \{m|\ m\text{是一个}\underline{\text{数码}}\} = \{m|\ \exists n < m(m = f(n))\}$$

是原始递归的。

语法算术化 VI

- 设 x 是一个数，则 $\natural x$ 表示 x 的解码后得到的“一阶语言”对应物。

自由出现

Free(x, y) 表示：x 是 变元，y 是 项 或 变元，且 $\natural x$ 在 $\natural y$ 中自由出现。则 Free(x, y) 是原始递归的。

$$\mathrm{Free}(x, a) \iff Sb(a, x, (0)) \neq a$$

语法算术化 VII

闭语句

Sen(x) 表示：x 是 闭语句。则 Sen(x) 是原始递归的。

$$\mathrm{Sen}(x) \iff (x\text{是}\underline{\text{公式}}) \wedge (\forall x < a\ \neg\mathrm{Free}(x, a))$$

闭语句

$\mathrm{Sub}(x, t, a)$ 表示：a 是 公式，t 是 项，x 是 变元，$\natural t$ 可在 $\natural a$ 中替换 $\natural x$。则 $\mathrm{Sub}(x, t, a)$ 是原始递归的.

语法算术化 VIII

证明

1. a 是 $\neg b$，a 是 $b \to c$，和 a 是 $\forall y b$ 均是原始递归的；
2. $\mathrm{Sub}(x,t,a)$ 递归地定义为
   - 如果 a 是 原子公式，则 $\mathrm{Sub}(x,t,a)$ 总是成立；
   - 如果 a 是 $\neg b$，则 $\mathrm{Sub}(x,t,a) \iff \mathrm{Sub}(x,t,b)$；
   - 如果 a 是 $b \to c$，则 $\mathrm{Sub}(x,t,a) \iff \mathrm{Sub}(x,t,b) \wedge \mathrm{Sub}(x,t,b)$；
   - 如果 a 是 $\forall y b$，则 $\mathrm{Sub}(x,t,a) \iff \mathrm{Sub}(x,t,b) \wedge y \notin t$；

$\vdots$

语法算术化 IX

逻辑公理

集合

$$\mathrm{Ax} = \{a \mid a\text{是一条}\underline{\text{逻辑公理}}\}$$

是原始递归集。

证明序列

设 T 是可公理化的的，则 T 被可判定集合 X 公理化，集 $\underline{X}$ 是递归集，则谓词

$$b\text{是}T\text{上的一个}\underline{\text{证明序列}}$$

是递归的。

语法算术化 X

证明 + 结论

设 T 同上，令 $\mathrm{bew}_T(b,a)$ 表示

$$b\text{是}T\text{上的一个}\underline{\text{证明序列}}\text{且}b_{\mathrm{lh}(b)-1}=a$$

则 $\mathrm{bew}_T(b,a)$ 是递归的

可证性

设 T 同上，令 $\mathrm{bwb}_T(a)$ 表示 $\exists b\ \mathrm{bew}_T(b,a)$。它是递归可枚举的。

目录

不动点引理

设 $\beta(v_1)$ 是一个算术公式，其中变元 v_1 自有出现，则存在闭语句 σ 使得

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\sharp\sigma)$$

其中 $\sharp\sigma$ 表示 $S^{\sharp\sigma}0$，是一个闭项。

注

1. σ 说：β 满足我的镜像；
2. β 对我成立；
3. 我们将 $S^{\sharp\sigma}0$ 记作 $\ulcorner\sigma\urcorner$;
4. 即 $Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\ulcorner\sigma\urcorner)$

证明 I

1. $(\sharp\alpha(x), n) \mapsto \sharp\alpha(n)$ 是一个递归函数；$\theta(v_1, v_2.v_3)$ 表示此递归函数（作为函数）；
2. 则 $Q \vdash \forall v_3 \left(\theta(\ulcorner\alpha\urcorner, n, v_3) \leftrightarrow v_3 = \ulcorner\alpha(n)\urcorner \right)$；
3. 令公式 $\tau(v_1)$ 为
$$\forall v_3 \left(\theta(v_1, v_1, v_3) \to \beta(v_3) \right)$$
4. 令 q 为 τ 的编码；
5. 令 σ 为
$$\forall v_3 \left(\theta(q, q, v_3) \to \beta(v_3) \right)$$

证明 II

6. 下面验证 $Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\ulcorner\sigma\urcorner)$;
7. 显然 $Q \vdash \forall v_3\Big(\theta(\ulcorner\tau(v_1)\urcorner, q, v_3) \leftrightarrow v_3 = \ulcorner\tau(q)\urcorner\Big)$
8. $\ulcorner\tau(v_1)\urcorner = q$，$\tau(q) = \sigma$，故

$$Q \vdash \forall v_3\Big(\theta(q, q, v_3) \leftrightarrow v_3 = \ulcorner\sigma\urcorner\Big);$$

9. 故

$$\underbrace{\theta(q, q, v_3) \to \beta(v_3)}_{\sigma} \vdash_Q v_3 = \ulcorner\sigma\urcorner \to \beta(v_3);$$

10. 即 $\sigma \vdash_Q \beta(\ulcorner\sigma\urcorner)$;
11. 下面证明 $\beta(\ulcorner\sigma\urcorner) \vdash_Q \theta(q, q, v_3) \to \beta(v_3)$;

证明 III

12 $\theta(q,q,v_3)$ 成立当且仅当 $v_3 = \ulcorner\sigma\urcorner$，故

$$\beta(\ulcorner\sigma\urcorner) \vdash_Q \theta(q,q,v_3) \to \beta(v_3)$$

成立。

注

1. σ 和 β 没有关系；
2. $\beta :=_{def} \exists x(v_1 = x + x)$；
3. σ 取任意的公理（$0 = 0$，$S0 \neq 0$）；
4. 则 σ 是 β 的不动点。

克林尼递归定理

设 $\phi_0, ..., \phi_1, ...$ 是所有部分递归函数的能行枚举 $\phi_n = \Phi(n, x)$。对任何递归函数 $f(x)$ 都存在一个自然数 e 使得 $\phi_{f(e)} = \phi(e)$.

注

克林尼递归定理是递归论版的“不动点定理”；

不动点定理的其它证明

1. 设 $\beta(u)$ 是一个公式；
2. 设 $\phi_0(u), \phi_1(u), \ldots$ 是全部以 u 为自由变元的公式的枚举；
3. 显然 $h: n \mapsto \sharp\phi_n(n)$ 是一个递归函数;
4. 则 h 在 Q 下可表示；
5. 即存在 $\theta(x, y)$ 使得
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad Q \vdash \forall y(\theta(n, y) \leftrightarrow y = \ulcorner\phi_n(n)\urcorner).$$
6. 故
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad Q \vdash \exists y(\theta(n, y) \wedge \beta(y)) \leftrightarrow \beta(\ulcorner\phi_n(n)\urcorner);$$
7. 存在 $q \in \mathbb{N}$ 使得 $\exists y(\theta(u, y) \wedge \beta(y))$ 是 $\phi_q(u)$;
8. 即 $\forall n \in \mathbb{N}: \ Q \vdash \phi_q(n) \leftrightarrow \beta(\ulcorner\phi_n(n)\urcorner)$;
9. 特别地： $Q \vdash \phi_q(q) \leftrightarrow \beta(\ulcorner\phi_q(q)\urcorner)$；
10. 即 $\phi_q(q)$ 是 β 的不动点。

注

1. 在第一个证明中，β 的不动点是

$$\forall v_3\Big(\theta(q,q,v_3)\to\beta(v_3)\Big)$$

2. 当 β 是 Π_1 时，σ 是 Π_1 公式；
3. 在第二个证明中，β 的不动点是

$$\exists y(\theta(q,y)\wedge\beta(y))$$

4. 当 β 是 Σ_1 时，σ 是 Σ_1 公式；

目录

塔斯基定理

定理

集合 $\sharp\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 在结构 $\mathfrak{N}$ 中是不可定义的。

证明

1. 使用不动点定理；
2. 假设 $\sharp\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 被公式 $\beta(u)$ 定理；
3. 设 σ 是 $\neg\beta(u)$ 的不动点；
4. 可定义 $\Rightarrow$: $\mathfrak{N} \models \sigma \iff \mathfrak{N} \models \beta(\ulcorner\sigma\urcorner)$;
5. 不动点 $\Rightarrow$: $\mathfrak{N} \models \sigma \iff \mathfrak{N} \models \neg\beta(\ulcorner\sigma\urcorner)$

推论

集合 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 不是可判定的，即 $\sharp\,\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \subseteq \mathbb{N}$ 不是递归的。

哥德尔第一不完全性定理

定理

如果 $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 是可公理化的的，则 T 是不完全的。特别地，$\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 不能公理化。

证明

1. 如果 $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 是完全的，则 $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$；
2. 如果 T 可得公理化，则 T 是递归可枚举的；
3. 递归可枚举集合被一个 Σ_1-公式定义；
4. 也可以从 $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 是递归的推出可定义性。

ω-一致性

定义

设 T 是 L_{ar} 上的一个理论 (关于蕴含封闭)。称 T 是 ω-不一致的，如果存在公式 $\phi(x)$ 使得 $T \vdash \exists x \phi(x)$，且

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; T \vdash \neg\phi(n).$$

否则，称 T 是 ω-一致的，即

$$T \vdash \exists x \phi(x) \;\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}(T \nvdash \neg\phi(n))$$

注 I

1. T 是 ω-一致的，则 T 是一致的（不一致的理论可以证明任何句子）；
2. ω-一致性不是一个纯语法概念，是在“系统外面”定义的；
3. 如果 T 是 ω-不一致的，则 $\mathfrak{N} \not\models T$；
4. 这是因为

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \vdash \neg\phi(n) \iff \mathfrak{N} \models \neg\phi(n)$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}: \mathfrak{N} \models \neg\phi(n)\right) \iff \mathfrak{N} \models \forall x\phi(x).$$

5. 如果 $\mathfrak{N} \models T$，则 T 是 ω-一致的；

注 II

6 设 c 是一个新常元，则 $T = PA \cup \{c \neq n |\ n \in \mathbb{N}\}$ 是一致的，但

$$T \vdash \exists x(x = c),\ (\forall n : T \models \neg(n = c))$$

表明 T 不是 ω-一致的；

7 第二不完全性 $\Rightarrow$ $PA + \neg\,\mathrm{con}(PA)$ 一致，但不是 ω-一致的；

第 1 不完全性最初版

设 $T \supseteq Q$ 是可公理化的。如果 T 是 ω-一致的，则存在一个 Π_1-闭语句 σ，使得 $T \nvdash \sigma$ 并且 $T \nvdash \neg\sigma$

证明 I

1. 使用不动点定理；
2. 回忆公式 $\mathrm{bew}_T(x, y)$ 满足

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: \ T \vdash \mathrm{bew}_T(m, n) \iff x\text{是公式}y\text{的证明};$$

3. $\mathrm{bew}_T(x, y)$ 表示一个递归关系，因此是一个 Δ_1-公式；
4. 回忆公式 $\mathrm{bwb}_T(y)$ 为 $\exists x \mathrm{bew}_T(x, y)$，是一个 Σ_1-公式；
5. 如果 $T \vdash \alpha$，则存在在证明 α 的证明 m，因此

$$T \vdash \mathrm{bew}_T(m, \ulcorner\alpha\urcorner) \ \Rightarrow \ T \vdash \mathrm{bwb}_T(\ulcorner\alpha\urcorner);$$

6. 令 σ 为 $\neg\mathrm{bwb}_T(y)$ 的不动点；
7. 如果 $T \vdash \sigma$，则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$，矛盾，故 $T \nvdash \sigma$；

证明 II

8 由可表示性：

$$\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg \mathrm{bew}_T(n, \ulcorner \sigma \urcorner)$$

9 根据 ω-一致性

$$T \nvdash \exists x \mathrm{bew}_T(x, y) \text{ i. e. } T \nvdash \mathrm{bew}_T(y)$$

10 根据不动点性，$T \nvdash \sigma$.

罗瑟的改进

定理（哥德尔-罗瑟）

设 $T \supseteq Q$ 是可公理化的。如果 T 是一致的，则存在一个 Π_1-闭语句 σ，使得 $T \nvdash \sigma$ 并且 $T \nvdash \neg\sigma$

证明 I

1. 设 x 为 α 的编码，则 $\tilde{\neg}x$ 表示 $\neg\alpha$ 的编码；
2. $\sharp\alpha \mapsto \sharp(\neg\alpha)$ 是一个递归函数，被 $\theta(x,y)$ 表示；
3. 定义公式 $\mathrm{prov}_T(x)$ 为（设 x 为 α 的编码）

$$\exists y \left(\mathrm{bew}(y,x) \wedge (\forall z < y) \neg\, \mathrm{bew}(z, \tilde{\neg}x) \right)$$

4. $T \vdash \mathrm{bew}(z, \tilde{\neg}x) \leftrightarrow \exists u(\mathrm{bew}_T(z,u) \wedge \theta(x,u))$.
5. 故 $\mathrm{prov}_T(x)$ 是一个 Σ_1-公式

$$\forall m,n \in \mathbb{N}:\ T \vdash \mathrm{bew}_T(m,n) \iff x\text{是公式}y\text{的证明}$$

6. $\mathrm{bew}_T(x,y)$ 表示一个递归关系，因此是一个 Δ_1-公式；
7. $\Rightarrow$ $\mathrm{prov}_T(x)$ 是 Σ_1，$\neg\mathrm{prov}_T(x)$ 是 Π_1；

证明 II

8. 断言 1：如果 $T \vdash \alpha$，则 $T \vdash \mathrm{prov}_T(\ulcorner\alpha\urcorner)$；
   - 若 $T \vdash \alpha$，则存在证明 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $T \vdash \mathrm{bew}_T(n, \ulcorner\alpha\urcorner)$;
   - 根据 T 的一致性，$T \nvdash \neg\alpha$
   - $\Rightarrow \ \forall m \in \mathbb{N}:\ T \nvdash \mathrm{bew}_T(m, \ulcorner\neg\alpha\urcorner)$;
   - 由 $\mathrm{bew}_T(x, y)$ 的 Δ_1 性（可表示性），有

     $$\forall m \in \mathbb{N}:\ T \vdash \neg\mathrm{bew}_T(m, \ulcorner\neg\alpha\urcorner);$$

     （注：对 Δ_1-公式 $\beta(x)$，总有 $T \vdash \beta(n)$ 或 $T \vdash \neg\beta(n)$ 成立）
   - 故 $T \vdash \mathrm{bew}(n, \ulcorner\alpha\urcorner) \wedge (\forall z < n)\neg\,\mathrm{bew}(z, \tilde{\neg}\ulcorner\alpha\urcorner)$.
   - $\Rightarrow \ T \vdash \mathrm{prov}_T(\ulcorner\alpha\urcorner)$.
9. 断言 2：如果 $T \vdash \neg\alpha$，则 $T \vdash \neg\mathrm{prov}_T(\ulcorner\alpha\urcorner)$；
   - 若 $T \vdash \neg\alpha$，则存在证明 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $T \vdash \mathrm{bew}_T(n, \ulcorner\neg\alpha\urcorner)$;
   - 根据 T 的一致性，$T \nvdash \alpha$
   - $\Rightarrow \ \forall m \in \mathbb{N}:\ T \vdash \neg\mathrm{bew}_T(m, \ulcorner\alpha\urcorner)$;

证明 III

- $\neg\mathrm{prov}_T(x)$ 等价于公式
$$\forall y\Big(\neg\,\mathrm{bew}(y,x)\vee(\exists z<y)\,\mathrm{bew}(z,\tilde{\neg}x)\Big)$$
- 设 $\mathfrak{M}\models T$，我们来证明 $\mathfrak{M}\models\neg\mathrm{prov}_T(\ulcorner\alpha\urcorner)$;
- 取 $a\in\mathfrak{M}$，若 $a\in\mathbb{N}$，则 $\mathfrak{M}\models\neg\mathrm{bew}_T(a,\ulcorner\alpha\urcorner)$;
- 若 $a\in\mathfrak{M}\backslash\mathbb{N}$; 则 $\forall m\in\mathbb{N}:\ T\vdash m<a$;
- $T\vdash\neg\alpha\ \Rightarrow\ \exists m\in\mathbb{N}:T\vdash\mathrm{bew}_T(m,\ulcorner\neg\alpha\urcorner)$;
- $\mathfrak{M}\models(\exists z<a)(\mathrm{bew}_T(m,\ulcorner\neg\alpha\urcorner))$;
- $\Rightarrow\ \mathfrak{M}\models\forall y\Big(\neg\,\mathrm{bew}(y,\ulcorner\alpha\urcorner)\vee(\exists z<y)\,\mathrm{bew}(z,\tilde{\neg}\ulcorner\alpha\urcorner)\Big)$;
- 即 $T\vdash\neg\mathrm{prov}_T(\ulcorner\alpha\urcorner)$.

10 令 σ 是 $\neg\mathrm{prov}_T(x)$ 的不动点，则 σ 可以是 Π_1-公式;

11 若 $T\vdash\sigma$，则断言 1 $\Rightarrow$ $T\vdash\mathrm{prov}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$;

证明 IV

12 不动点 $T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\mathrm{prov}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \;\Rightarrow\; T \vdash \neg\mathrm{prov}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$，矛盾；

13 若 $T \vdash \neg\sigma$，则断言 2 $\Rightarrow\; T \vdash \neg\mathrm{prov}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$;

14 不动点 $T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\mathrm{prov}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \;\Rightarrow\; T \vdash \sigma$，矛盾；

注

1. $\perp$ 表示 $0 \neq 0$；
2. 断言 2 $\Rightarrow$ $T \vdash \neg\mathrm{prov}_T(\perp)$；
3. $\mathrm{bwb}_T(x) := \exists y(\mathrm{bew}_T(y, x))$;
4. con_T 表示 $\mathrm{bwb}_T(\perp)$, 是一致性的形式化;
5. 哥德尔第二不完全性： $T \nvdash \mathrm{con}_T$.

强不可判断性

定理（Q 强不可判定）

任何一个理论 T，如果 $T \cup Q$ 是一致的，则 T 不是递归的。

注

1. T 包含了关于乘法和加法的算术公理；
2. 普莱斯伯格算术只有加法公理，其可判定性与本定理不矛盾；
3. 特别地，$\{\sigma | \ Q \vdash \sigma\}$ 不可判定。

证明 I

1. 令 $T' = T + Q$，若 T 是递归的，则 T' 也递归；
2. 这是因为 $\alpha \in T' \iff \bigwedge Q \to \alpha \in T$;
3. 反设 T 是递归的，则 T' 递归；
4. 即 $\{\sharp\alpha |\ \alpha \in T'\}$ 是递归的；
5. 递归关系是可表示的；
6. 存在一个公式 $\beta(x)$（在 Q 中）表示 T' 的句子;
7. 即 $\forall\alpha$： $\alpha \in T' \;\Rightarrow\; Q \vdash \beta(\ulcorner\alpha\urcorner)$, $\alpha \notin T' \;\Rightarrow\; Q \vdash \neg\beta(\ulcorner\alpha\urcorner)$;
8. 设 σ 是 $\neg\beta(x)$ 的不动点，即 $Q \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\beta(x)$；
9. 若 $\sigma \in T'$，则

$$\underset{\text{可表示}}{\Rightarrow} Q \vdash \beta(\ulcorner\sigma\urcorner) \underset{\text{不动点}}{\Rightarrow} T' \vdash \neg\sigma \;\Rightarrow\; \neg\sigma \in T';$$

证明 II

10 若 $\sigma \notin T'$，则

$$\underset{\text{可表示}}{\Rightarrow} Q \vdash \neg\beta(\ulcorner\sigma\urcorner) \underset{\text{不动点}}{\Rightarrow} T' \vdash \sigma \;\Rightarrow\; \sigma \in T';$$

11 故 T' 不一致。

推论（丘奇）

固定语言 L_{ar}。一阶逻辑的普遍有效性是不可判定的；即，集合

$$\{\sharp\sigma | \vdash \sigma\}$$

不是递归的。

注

该集合是递归可枚举集。

Thanks!