

Scott 拓扑与 D_∞

摘要

本篇文章介绍了 Dana Scott [3] 构造的 lambda 演算的一种模型 D_∞ 。

1 Scott 拓扑

定义 1.1. 给定偏序集 $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ 以及集合 $X \subseteq D$,

1. 用 \perp 表示 D 的最小元;
2. 用 $\bigsqcup X$ 表示 X 的最小上界;
3. 若 X 非空且对任意 $a, b \in X$ 都存在 $c \in X$ 使得 $a \sqsubseteq c$ 且 $b \sqsubseteq c$, 则称 X 是有向集;
4. 若 D 满足
 - (a) D 有最小元;
 - (b) 每一个 D 的有向子集 X 都有最小上界。

则称 D 是完全偏序 (complete partial order), 记作 c.p.o.。

定义 1.2. 给定任意 $\perp \notin \mathbb{N}$, 定义 $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$, 并且对任意 $a, b \in \mathbb{N}^+$, 定义

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow (a = \perp \wedge b \in \mathbb{N}) \vee a = b$$

我们用 \mathbb{N}^+ 表示 $\langle \mathbb{N}^+, \sqsubseteq \rangle$ 。

引理 1.3. \mathbb{N}^+ 是完全偏序。

证明. 注意到 \mathbb{N}^+ 的有向子集只包括单点集与 $\{\perp, n\}$, 其中 $n \in \mathbb{N}$ □

定义 1.4. 给定完全偏序 D, D' , 令 f 是从 D 到 D' 的函数, 定义 f 是单调的当且仅当

$$a \sqsubseteq b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq' f(b)$$

定义 1.5. 给定完全偏序 $\langle D, \sqsubseteq \rangle$, 定义 D 上的 **Scott 拓扑**: $O \subseteq D$ 是开集当且仅当

1. $x \in O \wedge x \sqsubseteq y \Rightarrow y \in O$;
2. 若 $X \subseteq D$ 有向且 $\bigsqcup X \in O$, 则 $X \cap O \neq \emptyset$ 。

引理 1.6. 令 $U_x = \{z \in D \mid z \sqsubset x\}$, 则 U_x 是开集

证明. 1. 若 $y \in U_x$ 且 $y \sqsubseteq z$, 若 $z \sqsubseteq x$, 则 $y \sqsubseteq x$ 矛盾。

2. 若 $X \subseteq D$ 有向且 $\sqcup X \in U_x$, 若 $X \cap U_x = \emptyset$, 则 $\sqcup X \sqsubseteq x$, 矛盾。

□

推论 1.7. D 是 T_0 空间

证明. 令 $x, y \in D$ 且 $x \neq y$, 则 $x \in U_y$ 且 $y \notin U_y$ 。

□

命题 1.8. 考虑函数 $f: D \rightarrow D'$, 则

$$f \text{ 连续当且仅当对任意有向集 } X \subseteq D, f(\sqcup X) = \sqcup f(X)$$

其中 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ 。

证明. \Rightarrow : 若 f 连续, 假设 $x \sqsubseteq y$ 且 $f(x) \not\sqsubseteq f(y)$, 则 $f(x) \in U_{f(y)}$, $x \in f^{-1}(U_{f(y)})$, 由于 $f^{-1}(U_{f(y)})$ 是开集, $y \in f^{-1}(U_{f(y)})$, $f(y) \in U_{f(y)}$, 矛盾。因此对于任意 $x \in X$, $f(\sqcup X) \supseteq f(x)$, $f(\sqcup X) \supseteq \sqcup f(X)$ 。若 $f(\sqcup X) \not\sqsubseteq \sqcup f(X)$, 则 $f(\sqcup X) \in U_{\sqcup f(X)}$, $\sqcup X \in f^{-1}(U_{\sqcup f(X)})$, 由定义, 存在 $a \in X$ 使得 $a \in X \cap f^{-1}(U_{\sqcup f(X)})$, 因此 $f(a) \in U_{\sqcup f(X)}$, $f(a) \not\sqsubseteq \sqcup f(X)$, 矛盾。

\Leftarrow : 若 $x \sqsubseteq y$, 则 $y = x \sqcup y$, $f(y) = f(x) \sqcup f(y)$, 因此 $f(x) \sqsubseteq f(y)$ 。因此若 $O \subseteq D'$ 是开集, 对于任意有向 $X \subseteq D$ 且 $\sqcup X \in f^{-1}(O)$, 有 $f(\sqcup X) = \sqcup f(X) \in O$, 而 $f(X)$ 是有向, 于是 $f(X) \cap O \neq \emptyset$, 因此 $X \cap f^{-1}(O) \neq \emptyset$ 。□

命题 1.9. 给定完全偏序 D, D' , 定义 $D \times D'$ 上的偏序为

$$(x, x') \sqsubseteq (y, y') \Leftrightarrow x \sqsubseteq y \wedge x' \sqsubseteq y'$$

则 $D \times D'$ 是完全偏序, 给定任意有向集 $X \subseteq D \times D'$, 它的最小上界是

$$\sqcup X = (\sqcup X_0, \sqcup X_1)$$

其中

$$X_0 = \{x \in D \mid \exists x' \in D' (x, x') \in X\}$$

$$X_1 = \{x' \in D' \mid \exists x \in D (x, x') \in X\}$$

证明. 首先 (\perp, \perp') 是 $D \times D'$ 的最小元。对于任意有向集合 $X \subseteq D \times D'$, X_0, X_1 也是有向集合, 因此 $\sqcup X_0, \sqcup X_1$ 存在, 于是对于任意 X 的上界 (A, B) , A 是 X_0 的上界, B 是 X_1 的上界, 因此 $(\sqcup X_0, \sqcup X_1) \sqsubseteq (A, B)$, 因此 $\sqcup X = (\sqcup X_0, \sqcup X_1)$ 。 \square

定义 1.10. 给定完全偏序 D, D' , 定义

$$[D \rightarrow D'] = \{f : D \rightarrow D' \mid f \text{ 连续}\}$$

并且定义 $[D \rightarrow D']$ 上的偏序为

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall x \in D (f(x) \sqsubseteq' g(x))$$

引理 1.11. 令 $\{f_i\}_i \subseteq [D \rightarrow D']$ 为有向的函数集合, 定义

$$f(x) = \bigsqcup_i f_i(x)$$

则 f 是良定义的并且是连续的。

证明. 应为 $\{f_i\}_i$ 有向, 因此对于任意 $x \in D$, $\{f_i(x)\}_i$ 有向, 因此 f 存在且 $f(x)$ 唯一。对于任意有向集合 $X \subseteq D$,

$$f(\bigsqcup X) = \bigsqcup_i \bigsqcup_{x \in X} f_i(x) = \bigsqcup_{x \in X} \bigsqcup_i f_i(x) = \bigsqcup f(X)$$

\square

下面使用 $\lambda d \in D. \phi(a_1, \dots, a_n, d)$ 来表示函数 $f(d) = \phi(a_1, \dots, a_n, d)$, 其中 $d \in D$ 。

命题 1.12. $[D \rightarrow D']$ 是完全偏序, 并且对于任意有向 $F \subseteq [D \rightarrow D']$, 它的最小上界为

$$(\bigsqcup F)(x) = \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\}$$

证明. $\lambda x. \perp'$ 是 $[D \rightarrow D']$ 的最小元, 由引理 1.11, $\lambda x. \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\}$ 是连续的, 因此属于 $[D \rightarrow D']$, 显然它是最小上界。 \square

命题 1.13. 给定完全偏序 D, D', D'' , 若 $f \in [D \rightarrow D']$, $g \in [D' \rightarrow D'']$, 定义 $g \circ f$ 为对任意 $d \in D$, $(g \circ f)(d) = g(f(d))$, 则 $g \circ f \in [D \rightarrow D'']$ 。

证明. 任给有向集合 $X \subseteq D$, $f \in [D \rightarrow D']$, $g \in [D' \rightarrow D'']$, 则

$$g \circ f(\bigsqcup X) = g(f(\bigsqcup X)) = g(\bigsqcup_{x \in X} f(x)) = \bigsqcup_{x \in X} g(f(x)) = \bigsqcup_{x \in X} g \circ f(x)$$

□

引理 1.14. 令 $f: D \times D' \rightarrow D''$, 则 f 连续当且仅当它在 D 跟 D' 上连续, 即对于任意 $x_0 \in D, x'_0 \in D'$, $\mathbb{N}x.f(x, x'_0)$ 和 $\mathbb{N}x.f(x_0, x)$ 连续。

证明. \Rightarrow : 令 $g = \mathbb{N}x.f(x, x'_0)$, 则对于有向集合 $X \subseteq D$

$$\begin{aligned} g(\bigsqcup X) &= f(\bigsqcup X, x'_0) = f(\bigsqcup \{(x, x'_0) \mid x \in X\}) \\ &= \bigsqcup \{f(x, x'_0) \mid x \in X\} \\ &= \bigsqcup g(X) \end{aligned}$$

同理, $\mathbb{N}x.f(x_0, x)$ 连续。

\Leftarrow : 给定有向集合 $X \subseteq D \times D'$,

$$\begin{aligned} f(\bigsqcup X) &= f(\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1) \\ &= \bigsqcup_{x \in X_0} f(x, \bigsqcup X_1) = \bigsqcup_{x \in X_0} \bigsqcup_{x' \in X'_0} f(x, x') \\ &= \bigsqcup_{(x, x') \in X} f(x, x') \\ &= \bigsqcup f(X) \end{aligned}$$

因此 f 连续。 □

命题 1.15. 给定完全偏序 D, D' , 令

$$app: [D \rightarrow D'] \times D \rightarrow D'$$

为 $app(f, x) = f(x)$, 则 app 连续。

证明. 给定有向集合 $F \subseteq [D \rightarrow D']$, 令 $h = \mathbb{A} f.f(x)$, 则

$$\begin{aligned} h(\bigsqcup F) &= (\bigsqcup F)(x) = \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\} \\ &= \bigsqcup \{h(f) \mid f \in F\} = \bigsqcup h(F) \end{aligned}$$

因此 h 连续, 同时因为 $\mathbb{A} x.f(x) = f$ 连续, 由命题1.12 *app* 连续 □

命题 1.16. 给定 $f \in [D \times D' \rightarrow D'']$, 定义 $\hat{f}(x) = \mathbb{A} y \in D'(f(x, y))$, 则

1. \hat{f} 连续;
2. $\mathbb{A} f.\hat{f} : [D \times D' \rightarrow D''] \rightarrow [D \rightarrow [D' \rightarrow D'']]$ 连续。

证明. 1. 对于任意有向集 $X \subseteq D$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\bigsqcup X) &= \mathbb{A} y.f(\bigsqcup X, y) = \mathbb{A} y.\bigsqcup_{x \in X} f(x, y) \\ &= \bigsqcup_{x \in X} (\mathbb{A} y.f(x, y)) \\ &= \bigsqcup \hat{f}(X) \end{aligned}$$

2. 令 $L = \mathbb{A} f.\hat{f}$, 对于任意有向集 $F \subseteq [D \times D' \rightarrow D'']$,

$$\begin{aligned} L(\bigsqcup F) &= \mathbb{A} x.\mathbb{A} y.(\bigsqcup F)(x, y) = \mathbb{A} x.\mathbb{A} y.\bigsqcup_{f \in F} f(x, y) \\ &= \bigsqcup_{f \in F} \mathbb{A} x.\mathbb{A} y.f(x, y) = \bigsqcup L(F) \end{aligned}$$

□

定义 1.17. 定义 **CPO** 是以完全偏序为元素连续映射为态射的范畴。

定理 1.18. **CPO** 是笛卡儿闭范畴。

证明. $D \times D'$ 是 **CPO** 中的乘积, 同时单元素完全偏序是终对象, 而对于任意 $f : D \times D' \rightarrow D''$, 由命题1.15和1.16, 都存在唯一的 $\hat{f} : D \rightarrow [D' \rightarrow D'']$ 使得

$$\begin{array}{ccc}
D \times D' & \xrightarrow{f} & D \\
\hat{f} \times \text{id}_{D'} \downarrow & \searrow \text{app} & \\
[D' \rightarrow D''] \times D' & &
\end{array}$$

交换。 □

定义 1.19. 令 D_0, D_1, \dots 是可数的完全偏序序列, 令 $f_i \in [D_{i+1} \rightarrow D_i]$,

1. 序列 (D_i, f_i) 称为完全偏序的 **逆向系统 (inverse system)**。
2. 系统 (D_i, f_i) 的 **逆向极限 (inverse limit)** $\varprojlim (D_i, f_i)$ (或记作 $\varprojlim D_i$) 是偏序集 $(D_\infty, \sqsubseteq_\infty)$, 其中

$$D_\infty = \{(x_0, x_1, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N} (x_i \in D_i \wedge \psi_i(x_{i+1}) = x_i)\}$$

并且

$$(x_0, x_1, \dots) \sqsubseteq_\infty (y_0, y_1, \dots) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} (x_i \sqsubseteq y_i)$$

命题 1.20. 给定逆向系统 (D_i, f_i) , 则 $\varprojlim (D_i, f_i)$ 是完全偏序且对任意有向 $X \subseteq \varprojlim D_i$,

$$\bigsqcup X = \lambda i. \bigsqcup \{x(i) \mid x \in X\}$$

证明. 对于任意有向 $X \subseteq D_\infty$, 则对任意 $i \in \mathbb{N}$, $\{x(i) \mid x \in X\}$ 有向, 令

$$y_i = \bigsqcup \{x(i) \mid x \in X\}$$

则由 ψ_i 的连续性,

$$\psi_i(y_{i+1}) = \bigsqcup f_i(\{x(i+1) \mid x \in X\}) = \bigsqcup \{x(i) \mid x \in X\} = y_i$$

因此 $(y_0, y_1, \dots) \in \varprojlim D_i$. □

因此在 **CPO** 中, 逆向极限存在。

2 D_∞

定义 2.1. 给定完全偏序 D 和 D' , D 与 D' 同构 当且仅当存在 $\phi \in [D \rightarrow D']$ 与 $\psi \in [D' \rightarrow D]$ 使得

$$\psi \circ \phi = \text{id}_D, \quad \phi \circ \psi = \text{id}_{D'}$$

定义 2.2. 给定完全偏序 D 和 D' . 函数的二元组 $\langle \varphi, \psi \rangle$ 是从 D' 到 D 的 投射 如果

1. $\varphi \in [D \rightarrow D'], \psi \in [D' \rightarrow D]$
2. $\psi \circ \varphi = \text{id}_D$
3. $\varphi \circ \psi \sqsubseteq \text{id}_{D'}$

注意到 D 与 $\varphi\psi(D)$ 同构, 因此在同构的意义下 $D \subseteq D'$.

定义 2.3. 定义 $D_0 = \mathbb{N}^+$, $D_{n+1} = [D_n \rightarrow D_n]$, 记 D_n 的最小元为 \perp_n

由1.12, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, D_n 是完全偏序。

引理 2.4. 给定 D' 到 D 的投射 (φ, ψ) , 存在从 $[D' \rightarrow D']$ 到 $[D \rightarrow D]$ 的投射 (φ^*, ψ^*) 满足: 对于任意 $f \in [D \rightarrow D]$, $g \in [D' \rightarrow D']$ 有

$$\varphi^*(f) = \varphi \circ f \circ \psi, \quad \psi^*(g) = \psi \circ g \circ \varphi$$

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{\psi} & D' \\ f \downarrow & & \downarrow \varphi^*(f) \\ D & \xrightarrow{\varphi} & D' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & D' \\ \psi^*(g) \downarrow & & \downarrow g \\ D & \xleftarrow{\psi} & D' \end{array}$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned} \varphi^*(f) &= \lambda x' \in D'. \varphi(f(\psi(x))) \\ &= \lambda x' \in D'. \varphi(\text{app}(f, \psi(x))) \end{aligned}$$

于是 φ^* 是连续的, 类似的 ψ^* 是连续的。同时

$$\begin{aligned}\psi^*(\varphi^*(f)) &= \psi \circ \varphi \circ f \circ \psi \circ \varphi = f \\ \varphi^*(\psi^*(f)) &= \varphi \circ \psi \circ f \circ \varphi \circ \psi \sqsubseteq f\end{aligned}$$

□

引理 2.5. 给定完全偏序 D , 定义 $\varphi_0 : D \rightarrow [D \rightarrow D]$, $\psi_0 : [D \rightarrow D] \rightarrow D$ 为

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \lambda y \in D. x \\ \psi_0(f) &= f(\perp)\end{aligned}$$

则 (φ_0, ψ_0) 是从 $[D \rightarrow D]$ 到 D 的投射。

证明. 首先证明 φ_0 连续, 给定有向集 $X \subseteq D$,

$$\begin{aligned}\varphi_0(\bigsqcup X) &= \lambda y \in D. \bigsqcup X = \bigsqcup_{x \in X} \lambda y \in D. x \\ &= \bigsqcup \varphi_0(X)\end{aligned}$$

同理, ψ_0 连续。同时

$$\begin{aligned}\varphi_0(\psi_0(f)) &= \varphi_0(f(\perp)) = \lambda x. f(\perp) \\ &\sqsubseteq \lambda x. f(x) = f \\ \psi_0 \circ \varphi_0(f) &= \varphi_0(f)(\perp) = f\end{aligned}$$

□

定义 2.6 (构造 D_∞). 给定完全偏序 D 与 (φ_0, ψ_0) 如上, 定义

$$\begin{aligned}D_0 &= D \\ D_{n+1} &= [D_n \rightarrow D_n] \\ (\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}) &= (\varphi_n^*, \psi_n^*)\end{aligned}$$

令 $D_\infty = \varprojlim (D_n, \psi_n)$, 记 $x \in D_\infty$ 为 (x_0, x_1, \dots) 。

定义 2.7. 1. 对于 $n, m \in \mathbb{N}$, 定义 $\Phi_{nm} : D_n \rightarrow D_m$ 为:

若 $n \leq m, m = n + k$, 则递归定义 Φ_{nm} 为

$$\Phi_{nn} = \lambda x \in D_n. x$$

$$\Phi_{n(m+1)} = \varphi_m \circ \Phi_{nm}$$

若 $m \leq n, n = m + k$, 递归定义 Φ_{nm} 为

$$\Phi_{(n+1)m} = \Phi_{nm} \circ \psi_n$$

2. 定义 $\Phi_{\infty n} : D_\infty \rightarrow D_n$ 为 $\Phi_{\infty n}(x) = x_n$.

3. 定义 $\Phi_{n\infty} : D_n \rightarrow D_\infty$ 为 $\Phi_{n\infty}(x) = (\Phi_{ni}(x))_{i \in \mathbb{N}}$

引理 2.8. 1. 对于 $0 \leq n \leq m \leq \infty$, (Φ_{nm}, Φ_{mn}) 是从 D_m 到 D_n 的投射

2. 对于 $0 \leq n \leq m \leq l \leq \infty$, $\Phi_{ml} \circ \Phi_{nm} = \Phi_{nl}$

证明. 1. 若 $n < m < \infty$, 对于任意 $x \in D_m$,

$$\begin{aligned} \Phi_{nm} \circ \Phi_{mn} &= (\varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_n \circ \text{id}_{D_n}) \circ (\text{id}_{D_n} \circ \psi_n \circ \dots \circ \psi_{m-1}) \\ &\subseteq \text{id}_{D_m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{mn} \circ \Phi_{nm} &= (\text{id}_{D_n} \circ \psi_1 \circ \dots \circ \psi_{m-1}) \circ (\varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \text{id}_{D_n}) \\ &= \text{id}_{D_n} \end{aligned}$$

$n < m = \infty$ 和 $n = m = \infty$ 的情况类似。

2. 根据定义类似可得。

□

注意到在同构的意义下,

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D_\infty$$

又有一个事实是在 **CPO** 中, D_∞ 不仅是逆向极限, 也是正向极限

$$D_\infty \cong \varinjlim (D_n, \varphi_n)$$

因此每个元素 $x \in D_n$ 也可被 $\Phi_{n\infty}(x) \in D_\infty$ 刻画。

引理 2.9. 1. 如果 $x \in D_n$, 则 $(\Phi_{n\infty}(x))n = x$ 。

2. 如果 $x \in D_n$, 则 $\Phi_{(n+1)\infty}\varphi_n(x) = \Phi_{n\infty}x$ 。

3. 如果 $x \in D_{n+1}$, 则 $\Phi_{n\infty}\psi_n(x) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}x$ 。

证明. 1. 在 D_∞ 中, x 为 $\Phi_{n\infty}(x)$, 因此 $x_n = x$ 。

2. $\varphi_n(x)$ 在 D_∞ 中为 $(\dots, \psi_n(\varphi_n(x)), \varphi_n(x), \varphi_{n+1}\varphi_n(x), \dots)$, 因为 $\psi_n(\varphi_n(x)) = x$, 因此 $\varphi_n(x) = x$ 。

3. $\varphi_n\psi_n(x) \sqsubseteq x$ 。

□

引理 2.10. 在 D_∞ 中, 若 $x \in D_\infty$, 则

1. $(\Phi_{n\infty}x_n)_m = x_{\min(n,m)}$

2. $n \leq m \Rightarrow \Phi_{n\infty}(x_n) \sqsubseteq \Phi_{m\infty}(x_m) \sqsubseteq x$

3. $x = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_{n\infty}x_n$

4. $\Phi_{n\infty}(\perp_n) = \perp$

证明. 1. 由 2.9 (2).

2. 由 2.9 (3), $\Phi_{m\infty}(x_m) = \Phi_{m\infty}(\psi_m(x_{m+1})) \sqsubseteq \Phi_{(m+1)\infty}(x_{m+1})$, 因此 $\Phi_{0\infty}(x_0) \sqsubseteq \Phi_{1\infty}(x_1) \sqsubseteq \dots$ 。并且, 由于对于任意 $i \in \mathbb{N}$, $(\Phi_{n\infty}x_n)_i = x_{\min(i,n)} \sqsubseteq x_i$, 有 $x_n \sqsubseteq x$ 。

3. 由 (2), 集合 $X = \{\Phi_{n\infty}(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 有向, 因此

$$\begin{aligned} \bigsqcup X &= (\bigsqcup_n (\Phi_{n\infty}(x_n))_i)_{i \in \mathbb{N}} \\ &= (\bigsqcup_n \Phi_{\min(n,i)\infty}(x_{\min(n,i)}))_{i \in \mathbb{N}} \\ &= (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = x \end{aligned}$$

4. 由 (2), $\Phi_{n\infty}(\perp_n) \sqsubseteq \perp \sqsubseteq \Phi_{n\infty}\perp_n$.

□

引理 2.11. 若 $x, y \in D_\infty$, 则对所有 $n, k \in \mathbb{N}$, $n \leq k$, 有

1. $\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{k+1}(y_k))$
2. $\Phi_{(k+1)\infty}((\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_k)) = \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))$

证明. 1. 只需证明 $k = n + 1$ 的情况:

$$\begin{aligned}\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) &= \Phi_{n\infty}((\psi_{n+1}(x_{n+2}))(\psi_n(y_{n+1}))) \\ &= \Phi_{n\infty}(\psi_n \circ x_{n+2} \circ \varphi_n(\psi_n(y_{n+1}))) \\ &\sqsubseteq \Phi_{n\infty}(\psi_n(x_{n+2}(y_{n+1}))) \\ &\sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))\end{aligned}$$

2. 对 $k \geq n$ 归纳, 考虑 $k + 1$ 的情况:

$$\begin{aligned}\Phi_{(k+1)\infty}((\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+2}(y_{k+1})) &= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_{k+1}(\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_{k+1})) \\ &= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_k \circ (\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1} \circ \psi_k(y_{k+1})) \\ &= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_k \circ (\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_k)) \\ &= \Phi_{k\infty}(\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_k) \\ &= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))\end{aligned}$$

□

引理 2.12. 对于任意 $x, y \in D_\infty$,

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

证明. 首先

$$\begin{aligned}\phi_n(x_{n+1}(y_n)) &= \phi_n(\psi_{n+1}(x_{n+2})(\psi_n(y_{n+1}))) \\ &= \phi_n(\psi_n(x_{n+2}(\phi_n(\psi_n(y_{n+1})))))) \\ &\sqsubseteq \phi_n(\psi_n(x_{n+2}(y_{n+1}))) \\ &\sqsubseteq x_{n+2}(y_{n+1})\end{aligned}$$

于是

$$\Phi_{(n+1)\infty}(\phi_n(x_{n+1}(y_n))) \subseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

注意到 $\Phi_{(n+1)\infty}\phi_n = \Phi_{(n+1)\infty}\Phi_{n(n+1)} = \Phi_{n\infty}$, 因此

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \subseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

□

定义 2.13. 给定 $x, y \in D_\infty$, 于是由引理 2.12, $\{\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) : n \geq 0\}$ 是一个递增序列, 因此有最小上界, 定义

$$x \cdot y = \bigsqcup_{n \geq 0} \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))$$

即

$$x \cdot y = \bigsqcup_n \Phi_{n\infty}(app_n(\Phi_{\infty(n+1)}(x), \Phi_{\infty n}(y)))$$

其中 $app_n : [D_{n+1} \times D_n] \rightarrow D_n$.

命题 2.14. D_∞ 上的 \cdot 连续。

命题 2.15. 若 $x \in D_{n+1}, y \in D_n$, 则

$$\Phi_{(n+1)\infty}(x) \cdot \Phi_{n\infty}(y) = \Phi_{n\infty}(x(y))$$

证明.

$$\begin{aligned} \Phi_{(n+1)\infty}(x) \cdot \Phi_{n\infty}(y) &= \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \Phi_{k\infty}(\Phi_{(n+1)(k+1)}(x)(\Phi_{nk}(y))) \\ &= \bigsqcup_{k=0}^n \Phi_{k\infty}x_{i+1}(y_i) \end{aligned} \quad (2.10(1))$$

$$= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \quad (2.11)$$

□

命题 2.16. 对于任意 $x, y \in D_\infty$ 以及 $n \in \mathbb{N}$

1. $(\Phi_{(n+1)\infty}x_n) \cdot y = \Phi_{(n+1)\infty}(x)_{n+1} \cdot \Phi_{n\infty}(y) = \Phi_{n\infty}((x \cdot \Phi_{n\infty}(y))_n)$
2. $\Phi_{0\infty}(x_0) \cdot y = \Phi_{0\infty}(x_0) = \Phi_{0\infty}((x \cdot \perp)_0)$

证明. 1.

$$\begin{aligned} \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}) \cdot y &= \bigsqcup_{i=0}^{\infty} \Phi_{i\infty}((\Phi_{(n+1)\infty}x_{n+1})_{i+1}(y_i)) \\ &= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} \Phi_{i\infty}((\Phi_{(n+1)\infty}x_{n+1})_{i+1}(y_i)) \end{aligned} \quad (2.11(1))$$

$$= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \quad (2.11(2))$$

$$= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \quad (2.15)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \Phi_{n\infty}((x \cdot \Phi_{n\infty}(y))_n) &= \Phi_{n\infty} \left(\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} \Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n)))_i) \right)_n \right) \\ &= \Phi_{n\infty} \left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} \left(\Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n)))_i) \right)_n \right) \\ &= \Phi_{n\infty} \left(\bigsqcup_{i=n}^{\infty} \left(\Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n)))_i) \right)_n \right) \\ &= \Phi_{n\infty} \left(\bigsqcup_{i=n}^{\infty} \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \right) \\ &= \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}) \cdot \Phi_{n\infty}(y_n) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \Phi_{0\infty}(x_0) \cdot y &= \Phi_{1\infty}((\Phi_{0\infty}(x_0))_1) \cdot y \\ &= \Phi_{0\infty}((\Phi_{0\infty}(x_0))_1((\Phi_{1\infty})(y_0))) \\ &= \Phi_{0\infty}(\varphi_0(x_0)(y_0)) = \Phi_{0\infty}(x_0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

□

定理 2.17 (外延性). 对于 $x, y \in D_\infty$

$$1. x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \forall z \in D_\infty (x \cdot z \sqsubseteq y \cdot z)$$

$$2. x = y \Leftrightarrow \forall z \in D_\infty (x \cdot z = y \cdot z)$$

证明. 1. \Rightarrow : 因为 \cdot 是连续的, 因此 $\lambda x.x \cdot z$ 是单调的。

\Leftarrow : 假设 $\forall z \in D_\infty (x \cdot z \sqsubseteq y \cdot z)$, 于是 $x \cdot \perp \sqsubseteq y \cdot \perp$, 由命题2.16 (2)

得

$$\Phi_{0\infty}(x_0) = \Phi_{0\infty}((x \cdot \perp)_0) \sqsubseteq \Phi_{0\infty}((y \cdot \perp)_0) = \Phi_{0\infty}(y_0)$$

由于 $x \cdot \Phi_{n\infty}(z_n) \sqsubseteq y \cdot \Phi_{n\infty}(z_n)$, 由命题2.15 和2.16 得

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(z_n)) = \Phi_{n\infty}((x \cdot \Phi_{n\infty}(z_n))_n) \sqsubseteq \Phi_{n\infty}((y \cdot \Phi_{n\infty}(z_n))_n) = \Phi_{n\infty}(y_{n+1}(z_n))$$

因此

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in D_n (\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(z)) \sqsubseteq \Phi_{n\infty}(y_{n+1}(z)))$$

即 $\Phi_{n+1}(x_{n+1}) \sqsubseteq \Phi_{n+1}(y_{n+1})$, 即 $x \sqsubseteq y$ 。

2. 由 (1)。

□

推论 2.18. D_∞ 是外延的 λ -模型。

定理 2.19 (完全性). 对于 $f \in [D_\infty \rightarrow D_\infty]$, 定义

$$\Box f = \bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda y \in D_n. (f(y))_n)$$

则

$$\forall y \in D_\infty (f(y)) = \Box f \cdot y$$

证明.

$$\begin{aligned}
\Box f \cdot y &= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}((\Box f)_{m+1}(y_m)) = \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}((\Box f \cdot \Phi_{m\infty}(y_m))_m) \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty} \left(\left(\left(\bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda y \in D_n \cdot (f(y))_n) \right) \cdot \Phi_{m\infty}(y_m) \right)_m \right) \\
&= \bigsqcup_{m,n} \Phi_{m\infty} \left(\left(\Phi_{(n+1)\infty}(\lambda y \in D_n \cdot (f(y))_n) \cdot \Phi_{m\infty}(y_m) \right)_m \right) \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}((\lambda y \in D_m \cdot (f(y))_m)(y_m))_m \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}(f(\Phi_{m\infty}(y_m))_m) = \bigsqcup_{k,l} \Phi_{l\infty}((f(\Phi_{k\infty}(y_k)))_l) \\
&= \bigsqcup_k f(\Phi_{k\infty}(y_k)) = f(y)
\end{aligned}$$

□

定理 2.20. $D_\infty \cong [D_\infty \rightarrow D_\infty]$

证明. 对于 $x \in D_\infty$, 令 $F(x) = \lambda y \in D_\infty. x \cdot y$, 由定理 2.19, F 是满射, 由定理 2.17 (2), F 是单射, 由命题 2.14 F 连续, F 的逆是

$$G = \lambda f. \bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda y \in D_n \cdot \Phi_{\infty n}(f(\Phi_{n\infty}(y))))$$

□

参考文献

- [1] BARENDREGT, H. P. *The lambda calculus. Its syntax and semantics. Rev. ed.*, vol. 103 of *Stud. Logic Found. Math.* Elsevier, Amsterdam, 1984.
- [2] HINDLEY, J. R., AND SELDIN, J. P. *Lambda-calculus and Combinators, an Introduction*, vol. 2. Cambridge University Press Cambridge, 2008.
- [3] SCOTT, D. Continuous lattices. In *Toposes, Algebraic Geometry and Logic* (Berlin, Heidelberg, 1972), F. W. Lawvere, Ed., Springer Berlin Heidelberg, pp. 97–136.