Homework5

陈淇奥
21210160025

2021 年 11 月 1 日

Exercise 1 (2.1.31). 如果 X 是冯 · 诺伊曼基数的集合，则 $\bigcup X$ 也是冯 · 诺伊曼基数

证明. 若 X 是所有有穷冯诺依曼序数的集合，则 X 中有一个最大的元素 n，且 $\bigcup X = n$，于是 $\bigcup X$ 也是冯诺依曼序数。

否则，假设 $\alpha = Card(\bigcup X)$ 且 $\alpha < \bigcup X$。则存在一个双射 $f : \bigcup X \to \alpha$。因为 $\alpha \in \bigcup X$，于是存在一个 X 中的冯诺依曼序数 κ 使得 $\alpha \in \kappa$。因为 $\kappa \subseteq \bigcup X$，于是 $f \upharpoonright \kappa$ 是一个从 κ 到 $f(\kappa) \subseteq \alpha$ 的双射，于是 $Card(\kappa) < \kappa$，矛盾。因此 $\alpha = \bigcup X$，$\bigcup X$ 是冯诺依曼序数。 □

Exercise 2 (2.1.39). 令 X 是一个不可良序化的集合，令 $\lambda = H(X)$。λ 是冯诺依曼基数。证明：$\lambda \not\precsim X$ 并且 $X \not\precsim \lambda$

证明. 若 $X \precsim \lambda$，则存在单射 $f : X \to \lambda$，于是有双射 $g : X \to f(X)$，而 $f(X) \subseteq \lambda$ 是良序集，于是 X 可良序，矛盾。

若 $\lambda \precsim X$，而 λ 是最小的不与 X 的子集等势的序数，矛盾。 □

Exercise 3 (2.1.37). 如果 $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 是严格递增的，并且是连续的，则对任意序数 α，存在 $\epsilon > \alpha$，$F(\epsilon) = \epsilon$。即，F 有任意大的不动点

证明. 首先证明对任意序数 α 都有 $F(\alpha) \geq \alpha$。

若 $\alpha = 0$，则 $F(0) \geq 0$。

若 $\alpha = \beta + 1$，则 $F(\alpha) = F(\beta + 1) > F(\beta) \geq \beta + 1$。

若 $\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\beta$，则 $F(\alpha)=\bigcup\{F(\beta)\mid\beta<\alpha\}\geq\bigcup\{\beta<\alpha\}=\alpha$。

注意到 $F(\alpha)\leq F(\alpha)^{\alpha}$, $F(\alpha)^{F(\alpha)^{\alpha}}\geq F(\alpha)^{\alpha}$, 令 $\epsilon_0=\alpha$, 对于任意 $i\in\omega$, 构造 ϵ_{i+1} 为

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{i+1,0}=F(\epsilon_i)\\
&\epsilon_{i+1,n+1}=F(\epsilon_i)^{\epsilon_{i+1,n}} \quad n\in\omega\\
&\epsilon_{i+1}=\bigcup_{n\in\omega}\epsilon_{i,n}
\end{aligned}
$$

于是 $F(\epsilon_i)^{\epsilon_{i+1}}=\bigcup\{F(\epsilon_i)^{\epsilon_{i+1,n}}\mid n\in\omega\}=\bigcup\{\epsilon_{i+1,n+1}\mid n\in\omega\}=\epsilon_{i+1}$。令 $\epsilon=\bigcup_{i\in\omega}\epsilon_i$，则 $\epsilon=F(\epsilon)^{\epsilon}$。由于 $F(\epsilon)\geq\epsilon$ 且 $F(\epsilon)\leq F(\epsilon)^{\epsilon}=\epsilon$，我们有 $F(\epsilon)=\epsilon$。 $\square$