Homework7

陈淇奥
21210160025

2021 年 11 月 21 日

Lemma 1. *1.* $-0 = 1$

2. $-1 = 0$

3. $a \cdot 1 = a$

4. $a + 0 = a$

5. $a + a = a$

6. $a \cdot a = a$

7. $1 + a = 1$

8. $0 \cdot a = 0$

9. $a + b = 1 \wedge a \cdot b = 0 \Rightarrow b = -a$

证明. 1. $1 = 0 + (-0) = (0 \cdot (-0)) + (-0) = -0$

2. $0 = 1 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = -1$

3. $a \cdot 1 = a \cdot (a + (-a)) = a$

5. $a + a = a + (a \cdot 1) = a$

7. $1 + a = (a + 1) \cdot 1 = (a + 1) \cdot (a + -a) = a \cdot a + 0 + a + -a = a + -a = 1$

8. $0 \cdot a = (a \cdot (-a)) \cdot a = a \cdot a \cdot (-a) = a \cdot (-a) = 0$

9. $-a = (-a) \cdot 1 = (-a) \cdot (a + b) = (-a) \cdot a + (-a) \cdot b = (-a) \cdot b.$

   $ab + (-a)b = -a.\ b(a + (-a)) = b = -a$

□

Exercise 1. 证明不存在基数为 3 的布尔代数

证明. 若存在基数为 3 的布尔代数 $\mathcal{B}$，则令 $B = \{0, 1, a\}$。

如果 $-a = 0$, 那么 $a + (-a) = a + 0 = a + (a \cdot (-a)) = a \neq 1$，矛盾。如果 $-a = 1$，那么 $a \cdot (-a) = a \cdot 1 = a \cdot (a + (-a)) = a \neq 0$，矛盾。如果 $-a = a$，那么 $a = a \cdot 1 = a \cdot (a + a) = a \cdot a + a \cdot a = 0 + 0 = 0$，矛盾。

因此不存在基数为 3 的布尔代数。 □

Exercise 2 (3.1.10). 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数

1. 证明任意布尔代数 $\mathcal{B}$ 在关系 $\leq$ 下是偏序

4. 对任意 $a, b \in \mathcal{B}$，$a \cdot (-b) = 0$ 当且仅当 $a \leq b$

证明. 1. 因为 $x = x$，因此 $x = x$

   若 $x \leq y \wedge y \leq x$ 则存在 c, d 使得 $c \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge x + c = y \wedge y + d = x$，于是 $x = y + d = y + y + d = x + y = x + x + c = x + c = y$。

若 $x \leq y \wedge y \leq z$，则存在 c, d 使得 $c \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge x + c = y \wedge y + d = z$，因此 $x + c + d = z$。

4. $a \cdot (-b) = 0 \Rightarrow a = ab \Rightarrow b = (a + 1)b = a + b$

□

Exercise 3 (3.1.7). 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$，则以下命题等价

1. F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤

2. F 满足以下条件

   (a) $0 \notin F, F \neq \emptyset$

证明. $\Rightarrow$: □