第二章　基数与选择公理

无穷！从未有其他问题能如此震撼人类的精神；从未有其他观念能如此激励人类的理智，让它结出丰硕的果实；也从未有其他概念比无穷更需要澄清……

大卫·希尔伯特

2.1　ZF 中基数概念

我们用自然数计数时，在回答“多少”的同时，也给被计数对象排出了一个次序。所以，在有穷的情况下，表示“多少”的基数与表示“次序”的序数是同一的。自然数既是序数也是基数。

在无穷的情况下它们并不同一。我们已经看到，良序集 $\{0 < 1 < 2 < \cdots < \omega\}$ 的序型是 $\omega + 1$（事实上它就是序数 $\omega + 1$），但是这同样的集合，如果我们将 ω 排在最前面，即，$\{\omega < 0 < 1 \cdots\}$，这个良序集的序型却是 ω。也就是说序型为 $\omega + 1$ 的集合，却只有“ω”个元素。所以并不是所有无穷序数都表示基数。

另一个更重要的问题是，我们只能保证每个良序集被一个唯一的序数“计数”（定理1.4.19），除非我们相信任意集合都可以被良序化，不是每个集合都能有一个序数与其对应。而每个集合都可良序化的信念等价于一个新的公理，即选择公理。现有的公理不保证这一点。

在没有选择公理的情形下，我们首先讨论一些有关集合基数的概念，看看能走多远。

2.1.1 等势

定义 2.1.1. 如果存在一个以集合 X 为定义域，以集合 Y 为值域的双射，就称集合 X 和 Y 是等势的，用符号表示为 $|X| = |Y|$。

如果存在集合 X 到集合 Y 内的单射，就称X 的势小于等于 Y 的势。表示为 $|X| \leq |Y|$。$|X| \leq |Y|$ 意味着存在 Y 的子集 Z 使得 $|X| = |Z|$。

$|X| < |Y|$ 表示 $|X| \leq |Y|$ 但是并非 $|X| = |Y|$。

练习 2.1.2. $|X| < |Y|$ 并不等价于存在 Y 的真子集 Z 使得 $|X| = |Z|$。

练习 2.1.3. 对任意集合 X, Y，定义 $X \sim Y$ 当且仅当 $|X| = |Y|$。证明 $\sim$ 是一个"等价关系"。

直观上，$<$ 应该是一个偏序，传递性是显然的。但反对称性却并不是平凡的结果。

定理 2.1.4 (康托-伯恩斯坦定理)**.** 如果 $|X| \leq |Y|$ 并且 $|Y| \leq |X|$, 则 $|X| = |Y|$。

证明. 因为 $|X| \leq |Y|$，故存在由 X 到 Y 的单射：$f : X \to Y$；又 $|Y| \leq |X|$, 所以存在由 Y 到 X 的单射：$g : Y \to X$。我们归纳定义两个集合的 X_n 和 Y_n 如下：

$$\begin{aligned} X_0 &= X & Y_0 &= Y; \\ X_{n+1} &= g[Y_n] & Y_{n+1} &= f[X_n]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

注意到，对任意 $n \in \omega$，$X_{n+1} \subseteq X_n$，$Y_{n+1} \subseteq Y_n$。所以，我们可以做如下定义：对任意 $n \in \omega$,

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &= X_n - X_{n+1} & \overline{Y}_n &= Y_n - Y_{n+1}; \\ X' &= \textstyle\bigcap_{n\in\omega} X_n & Y' &= \textstyle\bigcap_{n\in\omega} Y_n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

(1) 首先，$\overline{X}_n$，X' 是 X 的一个划分。即，$\overline{X}_n$，X' 两两互不相交，并且 $X = X' \cup \bigcup_{n\in\omega} \overline{X}_n$。同样 $\overline{Y}_n$，Y' 也 Y 的划分。

(i) 如果 $x \in X'$，则对任意 $n \in \omega$，$x \in X_n$，所以 $x \notin \overline{X}_n$。如果 $n < m$，则 $X_m \subseteq X_{n+1}$，所以 $X_m \cap \overline{X}_n = \emptyset$。
(ii) 如果 $x \notin X'$, 则存在 n, $x \notin X_n$, 令 n_0 为最小的这样的 n, 则由于 $X' \subseteq X$, 所以 $n_0 > 0$，所以 $x \in X_{n_0} - X_{n_0+1} = \overline{X}_{n_0}$。

(2) 对任意 $n \in \omega$，$f[\overline{X}_n] = \overline{Y}_{n+1}$，$g[\overline{Y}_n] = \overline{X}_{n+1}$。并且 $f[X'] = Y'$。
(i) $f[\overline{X}_n] = f[X_n - X_{n+1}]$，由于 f 是单射，所以这又等于 $f[X_n] - f[X_{n+1}]$，后者就是 $\overline{Y}_{n+1}$。
(ii)

$$
\begin{aligned}
f[X'] &= f[X_0 - \bigcup_{n\in\omega} \overline{X}_n] \\
&= Y_1 - \bigcup_{n\in\omega} \overline{Y}_{n+1} \\
&= (Y_1 \cup (Y_0 - Y_1)) - ((Y_0 - Y_1) \cup \bigcup_{n\in\omega} \overline{Y}_{n+1}) \\
&= (Y_0 \cup Y_1) - (\overline{Y}_0 \cup \bigcup_{n\in\omega} \overline{Y}_{n+1}) \\
&= Y_0 - \bigcup_{n\in\omega} \overline{Y}_n \\
&= Y'.
\end{aligned}
$$

(3) 定义 $h : X \to Y$ 为

$$
h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X'; \\ f(x) & x \in \overline{X}_{2n}; \\ g^{-1}(x) & x \in \overline{X}_{2n+1}. \end{cases} \tag{2.3}
$$

由（1），$\mathrm{dom}(h) = X$；由（1）和（2），$\mathrm{ran}(h) = Y$；由于 f, g 都是单射，所以 h 是单射。总结起来，h 是 X 到 Y 的双射。 □

练习 2.1.5. 如果 $|X| \leq |Y|$,

(1) 容易定义一个满射 $f : Y \to X$。所以如果 $|Y| \geq |X|$，则存在 Y 到 X 满射。

(2) 以上命题的逆命题是否成立呢？即，如果存在满射 $f : Y \to X$，是否一定有 $|Y| \geq |X|$ 呢？事实上，现有的公理不能证明这一点，这需要选择公理。

定理 2.1.6. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$。

定义 2.1.7. 对任意集合 X，

(1) 如果存在 $n \in \omega$，使得 $|X| = |n|$，就称 X 为有穷的；

(2) 如果对任意 $n \in \omega$ 都有 $|X| \geq |n|$，称 X 为无穷的；

(3) 如果 $|X| = |\omega|$，就称 X 是可数的或可数无穷的；

(4) 有穷的或可数的集合称为至多可数的；

(5) 不是可数的无穷集合称为不可数的。

练习 2.1.8 (鸽笼原理). [1] 如果 X 是有穷的，则不存在 X 到它的真子集 $Y \subsetneq X$ 上的双射。

注记 2.1.9. 根据鸽笼原理（练习2.1.8），如果 X 是有穷集合，则对 X 的任意真子集 Y，$|Y| \neq |X|$。那这个命题的逆命题，即，如果对 X 的任意真子集 Y，$|Y| \neq |X|$，则 X 是有穷集合，是否成立？现有的公理不能证明这一点，这需要选择公理。条件“不与自己的真子集等势”也被称为**戴德金有穷**。在 ZF 下，每个有穷集都是戴德金有穷的，而要证明每个戴德金有穷的集合都是有穷的，则需要选择公理。

我们定义有穷用到了自然数的概念。以下介绍几种有穷的定义，可以避免使用自然数。

命题 2.1.10. 以下命题等价：

(1) 集合 X 是有穷的。

(2) 存在 X 上的线序 $\leq$ 满足 X 的每一非空子集在 $\leq$ 下有最大元和最小元。

(3) X 的每一非空子集族都有 $\subseteq$ 关系下的极大元。

[1] 通常也会称为“抽屉原理”或“鸟巢原理”。

证明. （1）⇔（2）。如果 X 有穷，则 $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，$0, 1, \ldots n$ 是自然数。定义 X 上的关系为: $x_m \leq x_n$ 当且仅当 $m \leq n$，则 $\leq$ 是线序，并且 X 的每个子集都有最大最小元。反之，如果 X 满足条件，则 X 有最小元，令 X 的最小元为 x_0，而 $X - \{x_0\}$ 也有最小元，令其为 x_1，如此，令 x_{n+1} 为 $X - \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 的最小元。由于 X 有最大元，故总存在 m，使得 $X - \{x_0, x_1, \cdots, x_m\} = \emptyset$，即 $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$。

（1）⇔（3）。如果 X 有穷，则存在 m，$|X| = m$。如果 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 X 的子集族，则对任意 $Y \in \mathcal{F}$，$|Y| \leq m$。因此，存在一个 $Y \in \mathcal{F}$，对任意 $X \in \mathcal{F}$，都有 $|X| \leq |Y|$，令 $|Y| = n$，则满足 $|Y| = n$ 的 Y 是 $\mathcal{F}$ 的极大元。反过来，如果 X 无穷，则 $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid Y \text{是有穷的}\}$ 没有极大元。 □

练习 2.1.11. 如果 X, Y 都是可数的，则 $X \cup Y$ 是可数的。【不妨假设 $X \cap Y \neq \emptyset$，定义函数 $f : X \cup Y \to \omega$ 为 $f(x_n) = 2n$，$f(y_n) = 2n + 1$，这是 $X \cup Y$ 到 ω 的单射。】

定理 2.1.12. *有理数 $\mathbb{Q}$ 是可数的，实数 $\mathbb{R}$ 是不可数的。*

引理 2.1.13. *如果 α 是一个可数极限序数，则存在函数 $f : \omega \to \alpha$ 满足:*

(1) 如果 $n < m$，则 $f(n) < f(m)$;

(2) $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$。

证明. 令 $h : \omega \to \alpha$ 是双射。我们递归定义 f 如下：$f(0) = h(0)$；如果 $f(n)$ 已经定义，令 k 为最小的自然数使得 $h(k) > f(n)$。这样的 k 一定存在：因为 ω 是无穷的，而 $f(0) < \cdots < f(n)$ 只有穷个元素。令 $f(n + 1) = h(k)$。

f 显然是保序的。我们只需证明对任意 $\beta < \alpha$，存在 $n \in \omega$，$f(n) > \beta$。假设 $\beta = h(k)$，由 f 的构造可以看出，对任意 $k \in \omega$，$f(k) \geq h(k)$。如果 $f(k) = h(k)$，则令 $n = k + 1$，$f(n) > h(k) = \beta$。 □

注记 2.1.14. 注意到（2）不意味着 f 是满射，但它等价于 f 的值域在 α 中是无界的。这样的映射称为“共尾映射”。

定理 2.1.15. *一个序数是 α 是至多可数的，当且仅当存在 $\mathbb{R}$ 的子集 A，$\mathrm{ot}(A) = \alpha$。*

证明. 首先，假设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 并且 $\mathrm{ot}(A) = \alpha$，即 $A = \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$，并且 $a_\beta < a_\gamma$ 当且仅当 $\beta < \gamma$。对任意 $\beta < \alpha$，令 $I_\beta = (a_\beta, a_{\beta+1})$ 为实数的区间。如果 $\alpha = \eta + 1$ 是后继序数，则令 $I_\eta = (a_\eta, a_\eta + 1)$。这样的区间只有可数多，但 $\beta \mapsto I_\beta$ 是 α 到这些区间的双射，所以 α 是可数的。

反过来，假设 α 至多可数。我们对 α 施归纳证明。如果 $\alpha = \eta + 1$，$Y \subseteq \mathbb{R}$ 并且 $\mathrm{ot}(Y) = \eta$。由于 $(\mathbb{R}, <)$ 与区间 $(0,1)$ 同构，我们不妨假设 $Y \subseteq (0,1)$，这样的话 $Y \cup \{1\}$ 的序型就是 α。

如果 α 是极限序数。根据引理2.1.13，令 $f : \omega \to \alpha$ 为保序函数，并且 $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$。对任意 $n \in \omega$，考虑 α 中的区间 $J_n = (f(n), f(n+1))$ 以及 $\mathbb{R}$ 中的区间 $I_n = (n, n+1)$。根据归纳假设，对任意 n，存在 $X_n \subseteq I_n$，$\mathrm{ot}(X_n) = \mathrm{ot}(J_n)$。于是，$X = \bigcup_{n\in\omega} X_n \subseteq \mathbb{R}$，并且 $\mathrm{ot}(X) = \alpha$。 □

练习 2.1.16. 证明：如果 X 是无穷序数的集合，则 $|X| \leq |\sup X|$。

2.1.2　基数

我们定义了任意集合 X, Y 之间的一个等价关系 $|X| = |Y|$，以及它们之间的偏序关系：$|X| \leq |Y|$。但是，我们并没有定义 $|X|$ 是什么。早期的数学家，例如弗雷格，曾尝试将 $|X|$ 定义为一个等价类：

$$|X| = [X]_\sim = \{Y \mid |Y| = |X|\}, \tag{2.4}$$

并将 $|X|$ 称为"X 的基数"。但这个定义有一个问题，那就是如果 $X \neq \emptyset$，$[X]_\sim$ 是一个真类。为了避免这样的问题，以下定义使用了所谓的"司各特技巧"（Scott's trick）。

定义 2.1.17. 对任意集合 X，

(1) X **的基数**是以下集合：

$$\{Y \mid |Y| = |X| \wedge \forall Z(|Z| = |X| \to \mathrm{rank}(Y) \leq \mathrm{rank}(Z))\}. \tag{2.5}$$

X 的基数记作 $|X|$。

(2) 一个集合 $\mathfrak{a}$ 是**基数**，如果存在集合 X，$\mathfrak{a}$ 是 X 的基数。

(3) 令 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 为基数,则 $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ 当且仅当存在集合 X, Y ,$|X| = \mathfrak{a}, |Y| = \mathfrak{b}$,并且 $|X| < |Y|$,或者,等价地,存在单射 $f : X \to Y$,但不存在单射 $f : Y \to X$。

注记 2.1.18. • 对比定义2.1.1，在那里 $|X| = |Y|$，以及 $|X| \leq |Y|$ 是集合 X, Y 之间的一个关系，$|X|, |Y|$ 本身没有定义。

• 而在目前定义中，$|X|$ 被定义为另一个集合，是一个具体的对象。更具体地说，$|X|$ 是与 X 等势的集合中秩最小的那些集合组成的类，这个类显然是一个集合。注意到，对每个集合 X，X 的基数是唯一的。

• 如果 $\mathfrak{a}$ 是 X 的基数，并且如果 Y 与 X 等势，则 $\mathfrak{a}$ 也是 Y 的基数，所以基数的定义与 X 的选取无关。

• 这里定义的 $<$ 关系是集合 $\mathfrak{a}$ 与集合 $\mathfrak{b}$ 之间的关系，当然，这个关系是利用定义2.1.1中的 $|X| < |Y|$ 来定义的。

康托的以下定理证明不存在最大的基数。

定理 2.1.19. 对任意集合 X，$|X| < |\mathcal{P}(X)|$。

证明. 显然，$|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$，因为函数 $f(x) = \{x\}$ 是 X 到 $\mathcal{P}(X)$ 的单射。以下用反证法证明 $|X \neq |\mathcal{P}(X)$。反设存在双射 $f : X \to \mathcal{P}(X)$，令

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \tag{2.6}$$

则 $Y \in \mathcal{P}(X)$，因此存在 $z \in X$，$f(z) = Y$。但是，$z \in Y$ 当且仅当 $z \in \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ 当且仅当 $z \notin f(z)$ 当且仅当 $z \notin Y$，矛盾。 □

引理 2.1.20. 令 C 是基数的集合，则 C 在基数大小的偏序关系 $<$ 下有一个上界：存在基数 $\mathfrak{a}$，对任意 $\mathfrak{b} \in C$，$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$。

证明. 对任意 $\mathfrak{b} \in C$，令

$$f(\mathfrak{b}) = \min\{\mathrm{rank}(X) \mid |X| = \mathfrak{b}\}, \tag{2.7}$$

则 f 是定义在 C 上的函数，其值域是序数的子集。令 $\delta = \bigcup \mathrm{ran}(f)$。对任意这样的集合 X：$|X| = \mathfrak{b}$，$\mathrm{rank}(X) = f(\mathfrak{b})$，都有 $X \subseteq V_\delta$。令 $\mathfrak{a} = |V_\delta|$，则对任意 $\mathfrak{b} \in C$，$\mathfrak{b} \leq \alpha$。 □

推论 2.1.21. 全体基数的类是一个真类。

证明. 如果全体基数是一个集合，则根据引理2.1.20，存在最大的基数。这与定理2.1.19矛盾。 □

注记 2.1.22. 定义2.1.17有几个明显的问题。

- $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ 是一个偏序，但不是线序。我们无法证明任意两个基数都是可比的。
- $|\emptyset| = \{\emptyset\}$，即，空集的基数是 1，而不是 0。

2.1.3　冯 · 诺伊曼基数

在上一章，我们证明了每个良序集 X 都与唯一的一个序数 α 同构，此时，$|X| = |\alpha|$，即，每个良序集都与一个序数等势。另一方面，在本章一开的讨论中，我们又看到，对于无穷的良序集，与其等势的序数往往不止一个。但序数上的良序告诉我们，这些序数中有最小的，这就引出了以下定义：

定义 2.1.23. 令 X 为任意可良序化的集合。

(1) 我们定义X 的**冯 · 诺伊曼基数**为与 X 等势的最小的序数 λ，记作 $\mathsf{Card}(X) = \lambda$。

(2) 一个序数 λ 是**冯 · 诺伊曼基数**当且仅当存在良序集 X，$\lambda = \mathsf{Card}(X)$。

练习 2.1.24. 对任意序数 λ，λ 是冯 · 诺伊曼基数当且仅当 $\lambda = \mathsf{Card}(\lambda)$。满足等值式右边性质的序数称为**前段序数**。

练习 2.1.25. 每个自然数 n 都是冯 · 诺伊曼基数；ω 是冯 · 诺伊曼基数。

今后，我们一般用希腊字母 $\kappa, \lambda, \ldots$ 表示冯 · 诺伊曼基数。

练习 2.1.26. 如果 κ 是冯 · 诺伊曼基数，且 $\kappa \geq \omega$，则 κ 是极限序数。

引理 2.1.27. 如果 λ, κ 是冯 · 诺伊曼基数，则 $|\lambda| < |\kappa|$ 当且仅当 $\lambda < \kappa$。即，对于冯 · 诺伊曼基数 λ, κ，作为集合，它们基数上的偏序关系，与作为序数，它们的大小 $\leq$ 关系是一致的。

证明. 如果 $\lambda < \kappa$，则 λ 是 κ 的真前段，所以 $\mathrm{id}: \lambda \to \kappa$ 是单射，并且不可能是双射。

反过来，如果 $|\lambda| < |gk|$，而 $\lambda \not< \kappa$，则必有 $\kappa \leq \lambda$。但这是不可能的：如果 $\kappa = \lambda$，则 $|\kappa| = |\lambda|$。如果 $\kappa < \lambda$，则前面已证 $|\kappa| < |\lambda|$。 □

康托定理2.1.19保证了没有最大的基数，而习题1.5.38则保证不存在最大的冯 · 诺伊曼基数。

引理 2.1.28. 对任意集合 X，X 的 *Hartogs* 是一个冯 · 诺伊曼基数。

引理 2.1.29. 如果 K 是冯 · 诺伊曼基数的集合，则 $\alpha = \bigcup K$ 是冯 · 诺伊曼基数。

证明. 如果 $\beta < \alpha$，即 $\beta \in \alpha$，则存在 $\kappa \in X$，$\beta < \kappa \leq \alpha$，所以 $\beta < \kappa = |\kappa \leq |\alpha$，根据命题 **??**（3），$\alpha$ 是基数。 □

根据定理2.1.28，我们可以定义：

定义 2.1.30. 对任何基数 κ，κ^+ 是大于 κ 的最小基数 λ。如果 $\lambda = \kappa^+$，则 λ 称为**后继基数**。如果 $\lambda \geq \omega$ 并且不是后继基数，则称为**极限基数**。

练习 2.1.31. 假设 α 是序数，则

（1） $|\alpha| \leq \alpha < |\alpha|^+$；

（2） 如果 κ 是基数，则 $\alpha < \kappa^+$ 当且仅当 $|\alpha| < \kappa^+$。

定义 2.1.32. 我们递归定义类函数 $\aleph: \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 为：

（1）$\aleph(0) = \omega$；

（2）$\aleph(\alpha + 1) = \aleph(\alpha)^+$（注意，此处为基数的后继）；

（3）对极限序数 γ，$\aleph(\gamma) = \bigcup\{\aleph(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}$。

通常我们将 $\aleph(\alpha)$ 记作 $\aleph_\alpha$，例如 $\omega = \aleph_0$，第一个不可数基数是 $\aleph_1$，接下来是 $\aleph_2$ 等等。同时，$\aleph_\alpha$ 也经常写作 ω_α，例如，$\omega = \omega_0$，ω_1，$\omega_2 \cdots\cdots$。它们之间没有区别。

以下引理表明，$\aleph_\alpha$ 恰好是"第 α 个无穷基数"。

引理 2.1.33. （*1*）*对任意* α，$\aleph_\alpha$ *是无穷基数*；
（*2*）*对任意无穷基数* κ，*存在* α，*使得* $\kappa = \aleph_\alpha$。

证明.（1）对 α 用超穷归纳可得。

（2）显然，对任意 β，$\beta \leq \aleph_\beta$。因此，对任意基数 κ，存在 β，例如 $\beta = \kappa + 1$，使得 $\kappa < \aleph_\beta$。这样，我们就只需证明

$$\text{对任意}\kappa < \aleph_\beta\text{，存在}\alpha\text{，使得}\kappa = \aleph_\alpha.$$

而这可以对 β 应用归超穷纳得到：$\beta = 0$ 时显然；若 $\beta = \gamma + 1$ 为后继序数，则此时 $\kappa \leq \aleph_\gamma$。如果 $\kappa = \aleph_\gamma$，则命题已得证；如果 $\kappa < \aleph_\gamma$，则根据归纳假设，有 α，$\kappa = \aleph_\alpha$；若 β 为极限序数，则有 $\gamma < \beta$，$\kappa < \aleph_\gamma$，根据归纳假设，亦有 α，$\kappa = \aleph_\alpha$。 □

定义 2.1.34. 如果类函数 $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 满足：

(1) $\alpha \leq \beta$ 蕴涵 $F(\alpha) \leq F(\beta)$；

(2) 对任意极限序数 ξ，$F(\xi) = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta < \xi\}$，

就称 F 是**连续的**。

例 2.1.35. 给定 α，$F(\gamma) = \alpha + \gamma$，$F(\gamma) = \alpha \cdot \gamma$，$F(\gamma) = \alpha^\gamma$ 都是连续的。

定理 2.1.36. *如果* $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ *是严格递增的，并且是连续的，则对任意序数* α，*存在* $\epsilon > \alpha$，$F(\epsilon) = \epsilon$。*即*，F *有任意大的不动点*。

证明. 留作练习。 □

例 2.1.37. $\aleph : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 是连续且严格递增的。所以对任意序数 α，有一个序数 $\epsilon > \alpha$，$\aleph_\epsilon = \epsilon$。

2.1.4　选择公理

我们对任意集合 X, Y 定义了等势，或者说“基数相等”：$|X| = |Y|$，但只对可良序化的集合 X 定义了它的“基数”，即与 X“基数相等“的前段序数 λ。对