第二章 格

在布尔代数中，我们用 + 定义 $\leq$：$a \leq b$ 当且仅当存在 c，$a + c = b$。同时，我们也看到偏序集与布尔代数以及逻辑的平行关系：同一个结果，例如引理1.3.9，可以有代数和偏序集的两种版本。（也有逻辑的版本。）

这一章我们尝试以序为基本概念。

2.1 序与格

我们已经熟悉了偏序集的概念，对任意一个偏续集 $(P, \leq)$，如果 $X \subseteq P$，$\sup X$ 和 $\inf X$ 分别为 X 的上确界和下确界。

定义 2.1.1. 对任意非空的偏序集 $(L, \leq)$，如果任意 $a, b \in L$，$\sup\{a, b\}$，$\inf\{a, b\}$ 都存在并属于 L，就称 L 是一个格。

注记 2.1.2. 如果只有 $\inf\{a, b\}$ 或只有 $\sup\{a, b\}$ 存在，就称为下半格和上半格。

例 2.1.3. 例如 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是一个格。事实上，任意线序集都是格。同时，所有布尔代数作为偏序集都是格。

引理 2.1.4. *令 $(L, \leq)$ 为格，定义 $a \vee b = \sup\{a, b\}$，$a \wedge b = \inf\{a, b\}$，则*

(1) 幂等律：$a \vee a = a$，$a \wedge a = a$；

(1) 结合律：$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$，$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;

(2) 交换律：$a \vee b = b \vee a$，$a \wedge b = b \wedge a$;

(3) 吸收律：$a \vee (a \wedge b) = a$，$a \wedge (a \vee b) = a$;

练习 2.1.5. 反之，如果一个结构 $(L, \vee, \wedge)$ 满足引理中的 (1) - (4)，定义 $a \leq b$ 为：$a \vee b = b$，$\inf\{a, b\} = a \wedge b$，$\sup\{a, b\} = a \vee b$，则 $(L, \leq)$ 是一个格。

注记 2.1.6. 今后，我们将 $\vee$ 称为**联**；将 $\wedge$ 称为**会**。

例 2.1.7. 令 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，$S = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的所有子代数的集合，则 S 在 $\subseteq$ 下是一个格。对任意 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$，$\inf\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} = \bigcap\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$。但是 $\sup\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \neq \bigcup\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$，因为后者不一定是 $\mathcal{B}$ 的子代数。$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 的上确界是 $A_1 \cup A_2$ 生成的子代数。

格的定义中只要求两个元素的集合有上确界和下确界，这当然等价于任意有穷子集有上确界和下确界。

练习 2.1.8. 偏序集 L 是一个格当且仅当对任意非空的 $X \subseteq_f L$，$\sup X$ 和 $\inf X$ 存在。

定义 2.1.9. 令 L 为格，如果对任意 $X \subseteq L$，$\inf X$ 和 $\sup X$ 存在，就称 L 是**完全的**。为了符号一致性，我们将它们分别记作 $\bigwedge X$ 和 $\bigvee X$。

作为偏序集，并非所有的格有极大和极小元，有极大极小元的格称为**有界的**。如果 L 有极大极小元，则分别记作 1 和 0。

如果 L 是完全的，它一定是有界的。$\bigwedge L$ 和 $\bigvee L$ 分别是 L 的极小元和极大元。

练习 2.1.10. 如果 L 是完全的，$\bigwedge \varnothing$ 和 $\bigvee \varnothing$ 分别是什么？

练习 2.1.11. 在偏序集 $(L, \leq)$ 中，如果对任意非空的 $X \subseteq L$，$\bigwedge X$ 都存在，则对任意 $X \subseteq L$，如果 X 有上界，则 $\bigvee X$ 也存在。

引理 2.1.12. 令 L 为一个格，则以下命题等价：

(1) L 是完全的；

(2) 对任意 $X \subseteq L$，$\bigwedge X \in L$；

(3) L 有最大元 1 并且对任意非空 $X \subseteq L, \bigwedge X \in L$。

推论 2.1.13. 令 A 为集合，$L \subseteq \mathcal{P}(A)$，假设 $A \in L$ 并且 L 对任意交封闭，则 L 是一个完全格，其中对任意 $X \subseteq L$，$\bigwedge X = \bigcap X$，而

$$\bigvee X = \bigcap \{B \in L \mid \bigcup X \subseteq B\}.$$

练习 2.1.14. 对任意格 L，$\vee$ 关于 $\wedge$ 的分配律成立当且仅当 $\wedge$ 关于 $\vee$ 的分配律成立。

练习 2.1.15. 令 $M_3 = \{0, a, b, c, 1\}$，a, b, c 不可比。求证：$\vee$ 关于 $\wedge$ 的分配律和 $\wedge$ 关于 $\vee$ 的分配律在 L 中都不成立。

所以，与布尔代数不同，分配律在格中不一定成立。关于 $\vee, \wedge$ 的两个分配律成立的格称为**分配格**。

前面提到每个布尔代数在 $\vee, \wedge$，但即使是有界的分配格也不一定是布尔代数。

练习 2.1.16. 任意多于 3 个元素的有端点的线序都是一个分配格，但不是布尔代数。

定义 2.1.17. 令 L 为一个有界格，

(1) 对任意 $a \in L$，如果存在 $b \in L$，$a \vee b = 1$ 并且 $a \wedge b = 0$，就称 b 是 a 的补。

(2) 如果对任意 $a \in L$，a 的补都存在，就称 L 是**补封闭的**。

显然，如果 a 是 b 的补，则 b 也是 a 的补。0 的补是 1。

练习 2.1.18. 证明：如果 L 是分配格，则对任意 $a \in L$，如果 a 的补存在，则是唯一的。

定理 2.1.19. 一个补封闭的分配格是一个布尔代数。

与布尔代数类似，我们可以讨论关于格的以下概念：子格，格之间的同态、同构、嵌入等等。同样，也可以讨论格上的滤和理想。由于不是所有格都有 0 和 1，即不都是有界的，所以格上的滤和理想的定义略有不同。

定义 2.1.20. 令 L 是一个格，L 上的理想 I 是满足以下条件的子集：

(1) 如果 $x, y \in I$，则 $x \vee y \in I$；

(2) 对任意 $x \in I$，$a \in L$，$x \wedge a \in I$。

L 上的滤 F 是满足以下条件的子集：

(3) 如果 $x, y \in F$，$x \wedge y \in F$；

(4) 对任意 $x \in F$，$a \in L$，$x \vee a \in F$。

这样，在有界格的情形下，以上定义与我们的定义是一致的，除了：L 上的理想可以包含 1，滤可以包含 0。不过，此时它们都等于 L 本身。今后将不等于 L 本身的滤和理想称为真滤和真理想。

2.2　理想格

令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，我们考虑 $\mathcal{B}$ 的全体理想的族：

$$\mathcal{I} = \{I \mid I\text{是 } \mathcal{B} \text{ 的理想}\},$$

我们证明在集合的 $\subseteq$ 关系下，$\mathcal{I}$ 是一个完全的分配格。

理想与滤是对偶的概念，以上的结论对

$$\mathcal{F} = \{F \mid F\text{是 } \mathcal{B} \text{ 的滤}\}$$

也同样成立：$\mathcal{B}$ 的全体滤的族也构成一个完全的分配格。

显然，$(\mathcal{I}, \subseteq)$ 是偏序集。对任意 $I, J \in \mathcal{I}$，$I \cap J$ 还是理想，所以 $\inf\{I, J\}$ 存在。但是 $I \cup J$ 通常不是理想，所以 $\sup\{I, J\}$ 只能定义为 $I \cup J$ 生成的理想，即包含 I, J 的最小的理想。自然，我们用 $I \vee J$ 和 $I \wedge J$ 表示它们的上确界和下确界。

我们在前面讨论过 $\mathcal{B}$ 的子集 G 可以生成滤的条件：G 有有穷交性质。从这里关于滤和理想的定义看，这个条件等价于 G 生成的滤是真滤，即不等于 B 本身。以下引理则是刻画 G 生成的理想中元素的性质。

引理 2.2.1. 假设 I 是 G 生成的理想，$a \in I$ 当且仅当存在有穷的 $X \subseteq G$，$a \leq \bigvee X$。

证明. 令 $J = \{a \in B \mid \exists X \subseteq_f G(a \leq \bigvee X)\}$。我们首先证明 J 是一个理想。如果 $a,b \in J$，$a \vee b \in J$ 是显然的。$0 \leq \bigvee \varnothing$，所以 $0 \in J$。最后，假设 $x \in J$，$a \in B$，令 $x \leq \bigvee X$，其中 $X \subseteq_f G$。显然 $x \wedge a \leq a \leq \bigvee X$。

另外，注意到 $G \subseteq J$，所以 $I \subseteq J$。我们只需再证明 $J \subseteq I$。但是，G 的任意有穷子集 X，$\bigvee X \in I$，所以如果 $a \leq \bigvee X$，则 $a \wedge \bigvee X = a \in I$。 □

虽然前面已经研究过关于滤的结果，但我们顺带讨论以上定理的一些推论。

练习 2.2.2. 如果一个理想是有穷生成的，则它是主理想。

推论 2.2.3. 如果 I 是 $\mathcal{B}$ 的全体原子生成的理想，则 I 是真理想当且仅当 $\mathcal{B}$ 是无穷的布尔代数。

证明. 如果 $\mathcal{B}$ 是有穷的，则 $\mathcal{B}$ 是原子化的。令 $A \subseteq B$ 为它的全体原子，A 是有穷的。不难看出，$1 \leq \bigvee A$。这是因为对任意 $b \in B$，都有 $b = \bigvee\{a \in A \mid a \leq b\}$，所以 $b \leq \bigvee A$。这样，$1 \in I$，所以 I 不是真理想。

如果 I 不是真理想，即 $1 \in I$。存在 $X \subseteq_f A$，$1 \leq \bigvee X$，这蕴含 $1 = \bigvee X$。这又蕴含 $\mathcal{B}$ 是原子化的并且 $X = A$。所以 $\mathcal{B}$ 是有穷的布尔代数。 □

引理 2.2.4. 令 I 为 $\mathcal{B}$ 上的理想，$a \in B \setminus I$，如果 J 是 $I \cup \{a\}$ 生成的滤，则

$$J = \{b \vee c \mid b \leq a \text{并且} c \in I\}$$

证明. 根据引理，$x \in J$ 当且仅当存在 $X \subseteq_f I \cup \{a\}$，$x \leq \bigvee X$。由于 X 有穷且 I 是理想，所以这等价于存在 $y \in I$，$x \leq y \vee a$。后者等价于 $x \wedge (y \vee a) = x \wedge y \vee x \wedge a = x$。令 $b = x \wedge y \in I$ 而 $c = x \wedge a \leq a$，则 $x = b \vee c$。 □

推论 2.2.5. 令 I 为 $\mathcal{B}$ 上的真理想，$a \in I$。如果 J 是 $I \cup \{a\}$ 生成的理想，则 J 是真理想当且仅当 $-a \notin I$。

证明. 如果 J 不是真理想，则 $-a \in J$，我们只需证明 $-a \in I$。由前面的引理，存在 $b \leq a, c \in I$，$-a = b \vee c$。简单的计算可以验证 $-a \wedge c = -a$，所以 $-a \leq c$，$-a \in I$。 □

引理 2.2.6 (Stone)**.** 假设 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{B}$ 的所有理想的族，对任意 $I, J \in \mathcal{I}$，

$$\begin{aligned} I \vee J &= \{a \vee b \mid a \in I \text{并且} b \in J\} \\ I \wedge J &= \{a \wedge b \mid a \in I \text{并且} b \in J\}. \end{aligned}$$

证明. 先证第一个关于 $\vee$ 的等式。假设 $a \in I, b \in J$，则 $a \vee b \in I \vee J$ 是显然的，所以等式右边是左边的子集。现在假设 $c \in I \vee J$，存在 $X \subseteq_f I \vee J$，$c \leq \bigvee X$。令 $x = \bigvee(X \cap I), y = \bigvee(Y \cap J)$，则 $c \leq x \vee y$。令 $a = c \wedge x$，$b = c \wedge y$，显然，$c = c \wedge (x \vee y) = c \wedge x \vee c \wedge y = a \vee b$。但是，$a \in I, b \in J$，所以左边也是右边的子集。

对于 $I \wedge J$，注意到它就是 $I \cap J$。对任意 $a \in I, b \in J$，$a \wedge b \in I$ 并且 $a \wedge b \in J$，即 $a \wedge b \in I \wedge J$。反过来，对任意 $a \in I \cap J$，$a = a \wedge a$。 □

引理 2.2.7. 布尔代数 $\mathcal{B}$ 的所有理想的族 $\mathcal{I}$ 是一个完全的分配格。

证明. 令 $X \subseteq \mathcal{I}$ 为任意一组理想，显然，$\bigcap X$ 是理想，并且是 X 的下确界。而 $\bigcup X$ 不是理想，但它生成一个理想，是 X 的上确界。需要注意的是，我们此处将 B 本身看作理想，所以 $\bigcup X$ 生成的理想总是存在的。这样，$\mathcal{I}$ 是完全的格。

对任意 $I, J, K \in \mathcal{I}$，我们需要验证

$$I \vee (J \wedge K) = (I \vee J) \wedge (I \vee K).$$

根据前面的引理，等式左边可表示为:

$$\{a \vee (b \wedge c) \mid a \in I \text{并且} b \in J \text{并且} c \in K\},$$

而这又等于

$$\{(a \vee b) \wedge (a \vee c)) \mid a \in I \text{并且} b \in J \text{并且} c \in K\}.$$

再次运用引理，它们属于右边，即

$$I \vee (J \wedge K) \subseteq (I \vee J) \wedge (I \vee K).$$

反过来，等式右边可表示为:

$$\{(a \vee b) \wedge (c \vee d)) \mid a, c \in I \text{并且} b \in J \text{并且} d \in K\}.$$

任取其中一个元素，作如下简单计算:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (c \vee d)) &= (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d) \\ &\leq a \vee a \vee c \vee (b \wedge d) \\ &= (a \vee c) \vee (b \wedge d).\end{aligned}$$

$a \vee c \in I$，$b \in J$，$d \in K$，所以它属于左边，即

$$(I \vee J) \wedge (I \vee K) \subseteq I \vee (J \wedge K).$$

类似地可以证明

$$I \wedge (J \vee K) = (I \wedge J) \vee (I \wedge K).$$

□

虽然很接近，但理想格不一定是布尔代数，因为不是所有的理想都有补。

注记 2.2.8. 当我们讨论素理想或超滤时，总指的是非平凡的滤或理想。另外，超滤和素理想也都是极大滤和极大理想。

引理 2.2.9. 如果布尔代数 $\mathcal{B}$ 有一个极大的非主理想 I_0，则 I_0 在 $\mathcal{I}$ 中没有补，所以 $\mathcal{I}$ 不是布尔代数。

证明. 假设 J 是 I_0 的补，则 $I_0 \wedge J = \{0\}$，$I_0 \vee J = B$。任取 $x \in J$，对任意 $a \in I_0$，$a \wedge x = 0$。所以 $a \leq -x$，所以，如果 $(-x)$ 是 $-x$ 生成的主滤，则 $I_0 \subseteq (-x)$。由于 I_0 不是主滤，所以它不能等于 $(-x)$。所以 $(-x) = B$，也就是说 $-x = 1$，$x = 0$。这证明了 $J = \{0\}$。但这样一来，依据 $I_0 \vee J = B$，立刻有 $I_0 = B$，与 I_0 是非主理想矛盾。 □

理想的对偶概念是滤，以上关于理想的结果对于滤也都成立。具体说：如果 $\mathscr{F}$ 是布尔代数 $\mathscr{B}$ 上的所有滤的族，$\mathscr{F}$ 是一个完全的分配格。

引理 2.2.10. 令 $\mathscr{B}$ 为布尔代数，$\mathscr{I}, \mathscr{F}$ 为其上理想和滤。定义 $h : \mathscr{I} \to \mathscr{F}$ 为 $h(I) = -I$，即 I 的对偶滤，则 h 是格同构。

证明. 令 $f : \mathscr{F} \to \mathscr{I}$ 为如此定义的映射：$f(F) = -F$。对任意 $F \in \mathscr{F}$，我们有

$$h(f(F)) = h(\{-a \mid a \in F\}) = \{-(-a) \mid a \in F\} = F,$$

反之，对任意 $I \in \mathscr{I}$，

$$f(h(I)) = f(\{-a \mid a \in I\}) = \{-(-a) \mid a \in I\} = I,$$

所以 h 是双射。

对任意 $I, J \in \mathscr{I}$，如果 $I \subseteq J$，则显然有 $-I \subseteq -J$，这就意味着 $h(I) \subseteq h(J)$，反之依然。所以 h 保持格上的偏序，因此是一个格同构。 □

练习 2.2.11. 假设 $h : X \to Y$ 和 $f : Y \to X$ 是两个函数，并且满足 $f \circ h = \mathrm{id}_X$，$h \circ f = \mathrm{id}_Y$，证明 h 是双射，并且 $f = h^{-1}$。

2.3　形式概念

令 S, P 为两个集合，其中 S 中的元素为“对象”，P 中的元素为“性质”。如果 $s \in S, p \in P$，则 $p(s)$ 表示：a 有性质 p。对任意 $X \subseteq S$，$Y \subseteq P$，我们令

$$\begin{aligned} X' &= \{p \in P \mid \forall s \in X[p(s)]\} \\ Y' &= \{s \in S \mid \forall p \in Y[p(s)]\} \end{aligned}$$

显然，$X \subseteq Y$ 当且仅当 $Y' \subseteq X'$。这就是传统上所说的一个概念内涵越多，外延越小。

给定 S, P，如果 $E \subseteq S, D \subseteq P$ 满足：$E = D', D = E'$，就称 $C = (E, D)$ 为语境 (S, P) 下的一个**概念**。其中 E 称为 C 的**外延**，D 称为**内涵**。今后记 $\mathbb{C}(S, P)$ 为语境 (S, P) 下所有概念的集合。在语境清晰时，我们省去 S, P。

练习 2.3.1. 给定语境 (S,P)，令 $E\subseteq S, D\subseteq P$，

(1) $E\subseteq E''$，$D\subseteq D''$；

(2) $E'''=E'$，$D'''=D'$；

(3) $E\subseteq D'$ 当且仅当 $D\subseteq E'$；

(4) (E,D) 是概念当且仅当 $E''=E, D''=D$；

(5) $(\bigcup_{i\in I}E_i)'=\bigcap_{i\in I}E_i'$，$(\bigcup_{i\in I}D_i)'=\bigcap_{i\in I}D_i'$。

给定 $\mathbb{C}(S,P)$，$C_1=(E_1,D_1), C_2=(E_2,D_2)\in\mathbb{C}$，我们定义其上的偏序关系为：

$$C_1\leq C_2\quad\text{当且仅当}\quad E_1\subseteq E_2\quad\text{当且仅当}\quad D_2\subseteq D_1.$$

同时，对任意 $C_1,C_2\in\mathbb{C}(S,P)$，不难验证它们在 $\leq$ 下的上确界和下确界分别是：

$$\begin{aligned}\sup\{C_1,C_2\} &= ((E_1\cup E_2)'',D_1\cap D_2),\\ \inf\{C_1,C_2\} &= (E_1\cap E_2,(D_1\cup D_2)'').\end{aligned}$$

以上确界为例，根据练习 2.3.1(2)，$(E_1\cup E_2)'''=(E_1\cup E_2)'=D_1\cap D_2$。而根据（5），$(D_1\cap D_2)'=(E_1\cup E_2)''$。所以 $((E_1\cup E_2)'',D_1\cap D_2)$ 是概念。它是 C_1,C_2 的最小上界是显然的：由于 $D_1\cap D_2\subseteq D_1$ 且 $D_1\cap D_2\subseteq D_2$，所以它是上界。如果 $C=(E,D)$ 也是上界，则 $D\subseteq D_1, D\subseteq D_2$，所以 $D\subseteq D_1\cap D_2$，$((E_1\cup E_2)'',D_1\cap D_2)\leq(E,D)$。

这样我们验证了 $\mathbb{C}(S,P)$ 在 $\leq$ 下是一个格，并且

$$\begin{aligned}C_1\vee C_2 &= ((E_1\cup E_2)'',D_1\cap D_2),\\ C_1\wedge C_2 &= (E_1\cap E_2,(D_1\cup D_2)'').\end{aligned}$$

事实上，它还是一个完全格。

引理 2.3.2. *在以上定义的 $\leq$ 下，$\mathbb{C}(S,P)$ 是一个完全格。*

证明. 我们只需验证：对任意 $\{C_i\}_{i\in I}$，

$$\begin{aligned}\bigvee_{i\in I} C_i &= ((\bigcup_{i\in I} E_i)'', \bigcap_{i\in I} D_i)\\ \bigwedge_{i\in I} C_i &= (\bigcap_{i\in I} E_i, (\bigcup_{i\in I} D_i)'')\end{aligned}$$

是语境 (S,P) 下的概念，并且分别是 $\{C_i\}_{i\in I}$ 的上确界和下确界。证明与以上讨论的 $\{C_1,C_2\}$ 的情况类似。例如，关于 $\bigwedge C_i$，首先 $(\bigcup D_i)''' = (\bigcup D_i)' = \bigcap E_i$。同时，$(\bigcap E_i)' = (\bigcup D_i)''$，所以 $\bigwedge C_i$ 是概念。不难证明它也是最大下界。 □

接下来我们讨论关于形式概念的一些性质。

注记 2.3.3. 由练习2.3.1(4)，我们可以分别定义如下概念：任给 (S,P)，令 $\mathbb{C}(S) = \{E\subseteq S \mid E'' = E\}$，$\mathbb{C}(P) = \{D\subseteq S \mid D'' = D\}$。对任意概念 $(E,D)\in\mathbb{C}(S,P)$，$(E,D)\mapsto E$ 是一个严格保序的一一射，因此是一个格同构。$\mathbb{C}(S)$ 在 $\subseteq$ 下也是一个完全格。对任意 $\mathbb{C}(S)$ 中的 $\{E_i\}_{i\in I}$，$\bigwedge_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} E_i$，$\bigvee_{i\in I} = (\bigcup_{i\in I} E_i)''$。

类似地，$(\mathbb{C}(P),\supseteq)$ 也是一个完全格，$(E,D)\mapsto D$ 是一个格同构。

给定语境 (S,P)。S 中的对象代表“实体”，P 中的对象表示“属性”。任给一个实体 $s\in S$，$\{s\}'$ 表示 s 的所有属性。理想的情况下，每个实体可以由它所有的属性唯一地刻画，即 $\{s\}'' = \{s\}$。不过，无论如何，$(\{s\}'',\{s\}')$ 是一个概念。类似地，对任意 $p\in P$，$\{p\}'$ 是具有属性 p 的所有实体的类。在理想的（外延主义成立的）情形下，所有这些实体的类也可以唯一刻画属性 p，即 $\{p\}'' = \{p\}$。但 $(\{p\}',\{p\}'')$ 也是总是一个概念。今后，我们将 $\{p\}',\{s\}'$ 分别记作 p', s'。

根据以上分析，存在 S,P 分别到 $\mathbb{C}(S,P)$ 的两个自然的映射：$h_S(s) = (s'',s')$ 和 $h_P(p) = (p',p'')$。以下练习是一个有趣的观察。

练习 2.3.4. 令 (S,P) 为语境而 h_P, h_S 为以上定义的映射，

(1) 对任意 $s\in S, p\in P$，$p(s)$ 当且仅当 $h_S(s)\le h_P(p)$。

(2) 对任意 $E\subseteq S$，$p\in P$，$p\in E'$ 当且仅当 $\bigvee h_S(E)\le h_P(p)$。

(3) 对任意 $D \subseteq P$，$s \in S$，$s \in D'$ 当且仅当 $h_S(s) \le \bigwedge h_P(D)$。

定义 2.3.5. 令 $(L, \le)$ 为任意偏序集，$X \subseteq L$：

(1) X 称为**联稠密的**，如果对任意 $a \in L$，存在 $Y \subseteq X$，使得 $a = \bigvee Y$。

(2) X 称为**会稠密的**，如果对任意 $a \in L$，存在 $Y \subseteq X$，使得 $a = \bigwedge Y$。

引理 2.3.6. 给定语境 (S, P) 以及映射 $h_S : S \to \mathbb{C}(S, P)$ 和 $h_P : P \to \mathbb{C}(S, P)$。$h_S(S)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是联稠密的，$h_P(P)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是会稠密的。

证明. 任意给定 $(E, D) \in \mathbb{C}(S, P)$，

$$
\begin{aligned}
\bigvee h_S(E) &= \bigvee_{s \in E} h_S(\{s\}) \\
&= \bigvee_{s \in E} (s'', s') \\
&= (\bigcup_{s \in E} s'')'', \bigcap_{s \in E} s').
\end{aligned}
$$

又根据练习2.3.1，$\bigcap_{s \in E} s' = (\bigcup_{s \in E} \{s\})' = E' = D$。所以 $\bigvee h_S(E) = (E, D)$。

类似地，$\bigwedge h_P(D) = (\bigcap_{p \in D} p', (\bigcup_{p \in D} p'')'')$，而 $\bigcap_{p \in D} p' = (\bigcup_{p \in D} \{p\})' = D' = E$。 □

联稠密和会稠密映射的有趣之处更在于这样一个事实：对任意完全格 L，如果存在 S, P 以及 h_S, h_P 使得它们在 L 中的像分别是联稠密和会稠密的，则 L 同构于 $\mathbb{C}(S, P)$。所以，从一定意义上说，任何完备格都同构于某个概念格。

定理 2.3.7. 令 $(L, \le)$ 为完备格，S, P 为集合，$h_S : S \to L$ 和 $h_P : P \to L$ 为函数，并且 $h_S(S)$ 在 L 中是联稠密的，$h_P(P)$ 在 L 中是会稠密的，则 $L \cong \mathbb{C}(S, P)$。

证明. 对任意 $a \in L$ 定义

$$
\begin{aligned}
E_a &= \{s \in S \mid h_S(s) \le a\} \\
D_a &= \{p \in P \mid a \le h_P(p)\}.
\end{aligned}
$$