Set Theory2

Yao

2022 年 2 月 24 日

目录

1 集合的宇宙

1.1 数理逻辑

在 ZFC 下证明 ZFC $\vdash$ CH，希望将 "ZFC $\vdash$ CH" 表述为一阶句子

一般而言，给定一个 $\mathcal{L}$-理论 T 和一个 $\mathcal{L}$-句子 δ，"$T \vdash \sigma$" 不能用一个 $\mathcal{L}$-句子表示，只能用元语言表述

我们需要在 ZFC 中编码"元语言"

在 ZFC 中可以定义 $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$

即存在集合论语言 $\mathcal{L} = \{\in\}$ 中的 **公式**，在 ZFC 的任意模型中可以定义 $\mathbb{N}, +, \times, 0, 1$，以上公式与模型无关

用 $\ulcorner 0 \urcorner$，$\ulcorner 1 \urcorner$，$\ulcorner 2 \urcorner$... 表示 ZFC 中的"自然数"，以区别元语言中的自然数

Theorem 1.1. *如果 $R \subseteq \mathbb{N}^n$ 是一个递归关系。$T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ 是包含数论的适*

当丰富的理论，则存在公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 使得对任意自然数 $m_1, \dots, m_n$ 有

$$\text{如果}(m_1, \dots, m_n) \in R \text{则} T \vdash \varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$$
$$\text{如果}(m_1, \dots, m_n) \notin R \text{则} T \vdash \neg\varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$$

Remark. 1. $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \mathrm{ZFC}$

2. φ 是语言 $\{+, \times, 0, 1\}$ 上的公式

3. φ 可以还原为一个 $\{\in\}$ 上的公式

4. $\varphi(\ulcorner m_1 \urcorner, \dots, \ulcorner m_n \urcorner)$ 是一个闭语句

编码

编码函数 $f : X \to \mathbb{N}$

存在解码函数 g, h，对 $a = a_0, \dots, a_n \in X$, $h(f(a)) = n + 1$, $g(f(a), k) = a_k$ (分量)

性质：以上三种函数 f, g, h 均是递归函数 $\Rightarrow$ 都是可表示的

性质:“公式集”的编码集是递归的

性质：如果 $T \subseteq \mathrm{ZFC}$ 是可公理化的，则 T 的证明集的编码集是递归的

Corollary 1.2. 存在一个公式 ψ 和 θ 使得

$$\mathrm{ZFC} \vdash \psi(n) \Leftrightarrow n \textit{ is a formula}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \neg\psi(n) \Leftrightarrow n \textit{ is not a formula}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \theta(n) \Leftrightarrow n \textit{ is a proof in } \mathrm{ZFC}$$
$$\mathrm{ZFC} \vdash \neg\theta(n) \Leftrightarrow n \textit{ is not a proof in } \mathrm{ZFC}$$

称 ψ 定义了公式集，θ 定义了证明集

$\mathrm{FORM} = \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \text{ formula}\} \subseteq \mathbb{N}$

如果 $T \subseteq \mathrm{ZFC}$ 是可公理化的，则“T 是一致的”是一个一阶表述式“不存在一个有穷的证明序列 $D = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 使得 φ_n 形如 $\varphi \wedge \neg\varphi$，记作 $\mathrm{Con}(T)$

Theorem 1.3 (第二不完全)**.** 如果 T 是包含 ZFC 的一个递归公理集，且 T 一致，则

$$T \nvdash Con(T)$$

特别地，ZFC $\nvdash Con(\text{ZFC})$

Theorem 1.4. 对任意可公理化的理论 T，ZFC $\vdash Con(T)$ 当且仅当存在 $M \vDash T$

即不能在 ZFC 里证明 ZFC 有一个模型

需要可公理化来写出 $\text{Con}(T)$，因此因为 ZFC $\nvDash \text{Con}(T)$，我们只能假设这么一个模型

集合论的模型跟集合论没什么关系，就是一个集合带一个二元关系，是关于集合论语言的结构

Definition 1.5. 设 (M, E) 是集合论模型

1. 对任意公式 $\varphi(\bar{x}, y)$，定义 M^n 上的函数

$$h_\varphi : M^n \to M$$

满足条件

$$M \vDash \exists y \varphi(\bar{a}, y) \Rightarrow M \vDash \varphi(\bar{a}, h_\varphi(\bar{a}))$$

称 h_φ 为 φ 的 Skolem 函数（依赖于选择公理，不同的变量选择有不同的函数）

2. 令 $\mathcal{H} = \{h_\varphi \mid \varphi \text{ formula}\}$ 为 Skolem 函数集合，设 S 是 M 的任意子集，则 $\mathcal{H}(S)$ 表示包含 S 且对 $\mathcal{H}$ 封闭的最小集合，称之为 S 的 Skolem 壳

Lemma 1.6. 令 N 是集合论模型，$S \subseteq N$，如果 $M = \mathcal{H}(S)$，则 $M \prec N$

证明. Induction

对任意 $\bar{a} \in M^n$，有 $M \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \varphi(\bar{a})$

1. 不含量词，显然成立

2. φ 形如 $\exists y\psi(\bar{x}, y)$, $N \vDash \exists y\psi(\bar{a}, y) \Rightarrow N \vDash \psi(\bar{a}, h_\psi(\bar{a}))$，by IH, $M \vDash \psi(\bar{a}, h_\varphi(\bar{a})) \Rightarrow M \vDash \exists y\psi(\bar{a}, y)$

$\square$

Theorem 1.7 (Löwenheim–Skolem Theorem).

1.2 层垒的谱系

工作于 ZF^-：ZF − 基础公理

$\alpha \mapsto V_\alpha$ 是 On 到 WF 的 1-1 映射，而 On 是真类

Lemma 1.8. *For any ordinal* α

1. V_α *is transitive*
2. $\xi \leq \alpha \Rightarrow V_\xi \subseteq V_\alpha$
3. *if* κ *is inaccessible, then* $|V_\kappa| = \kappa$

Definition 1.9. For any $x \in \mathrm{WF}$, **rank** of x is

$$\mathrm{rank}(x) = \min\{\beta \mid x \in V_{\beta+1}\}$$

$\mathrm{rank}(x) = \alpha \Rightarrow x \in V_{\alpha+1} \wedge x \notin V_\alpha$

Lemma 1.10. 1. $V_\alpha = \{x \in \mathrm{WF} \mid \mathit{rank}(x) < \alpha\}$

2. WF *is transitive*
3. $\forall x, y \in \mathrm{WF}$, $x \in y \Rightarrow \mathit{rank}(x) < \mathit{rank}(y)$
4. $\forall y \in \mathrm{WF}$, $\mathit{rank}(y) = \sup\{\mathit{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

1.3 Exercise

Exercise 1.3.1. 1. $V_\alpha = \{x \in \text{WF} \mid \text{rank}(x) < \alpha\}$

2. WF is transitive

3. $\forall x, y \in \text{WF}$, $x \in y \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$

4. $\forall y \in \text{WF}$, $\text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

证明. 1. by definition, $x \in V_{\text{rank}(x)+1} \setminus V_{\text{rank}(x)}$, $\text{rank}(x) < \alpha \Rightarrow x \in V_{\text{rank}(x)+1} \subseteq V_\alpha$

$\text{rank}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \notin V_\alpha$

2. WF is the "union" of transitive sets

3. $y \in V_{\text{rank}(y)+1} \setminus V_{\text{rank}(y)}$, $y \subseteq V_{\text{rank}(y)}$, $x \in y \Rightarrow x \in V_{\text{rank}(y)} \Rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y)$

4. by 3, $\sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \leq \text{rank}(y)$.

induction on $\text{rank}(y) \leq \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$

- $\text{rank}(y) = 0$
- $\text{rank}(y) = \beta + 1$, $y \in V_{\beta+2} \setminus V_{\beta+1}$

  $y \in V_{\beta+2} \Rightarrow y \subseteq V_{\beta+1}$. $y \notin V_{\beta+1} \Rightarrow y \nsubseteq V_\beta \Rightarrow y \setminus V_\beta$ nonempty. Let $x \in y \setminus V_\beta$, $\text{rank}(x) \geq \beta$, $\sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \beta + 1 = \text{rank}(y)$
- $\text{rank}(y) = \gamma$ for some limit, then $y \subseteq V_\gamma$ and for any $\xi < \gamma$, $y \nsubseteq V_\xi$, let $X_\xi \in y \setminus V_\xi$, then $\text{rank}(X_\xi) \geq \xi$, $\sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \geq \sup\{\xi + 1 \mid \xi < \text{rank}(y)\} \geq \text{rank}(y)$

□