1.3.3　布尔代数与一阶逻辑的完全性

定义 1.3.7. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，U 是 $\mathcal{B}$ 上的超滤：

(1) 令 $D \subseteq B$ 并且 $\sum D$ 存在。我们称 U 是**D-完全的**，或者称 U **保持** $\sum D$，如果 $\sum D \in U$ 蕴涵存在 $d \in D$，$d \in U$。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，对任意 $D \in \mathcal{D}$，$\sum D$ 都存在。我们称 U 是**$\mathcal{D}$-完全的**，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，U 都是 D-完全的。

练习 1.3.8. 定义1.3.7中的（1）可以替换为以下条件：$D \subseteq U$ 蕴涵 $\prod D \in U$。

练习 1.3.9. 对于任意偏序集 $(P, \leq)$，我们也可以定义相应的概念：

(1) 如果 $D \subseteq P$ 满足：对任意 $p \in P$，总存在 $d \in D$ 使得 $d \leq p$，就称 D 是 P 的**稠密子集**。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 P 的稠密子集的族，U 是 P 上的超滤，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，$U \cap D \neq \emptyset$，就称 U 是 **$\mathcal{D}$-脱殊的**。

证明：如果将 $\mathcal{B}$ 看做偏序集，U 是 $\mathcal{D}$-完全的当且仅当 U 是 $\mathcal{D}$-脱殊的。

引理 1.3.10 (Rasiowa–Sikorski 引理)**.** *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，并且 $\mathcal{D}$ 是可数的，则存在 $\mathcal{B}$ 上的滤 U，U 是 $\mathcal{D}$-完全的。*

证明. 令 $\{D_0, D_1, \cdots\}$ 为 $\mathcal{D}$ 的一个枚举。我们如下递归定义 $G = \{g_0, g_1, \cdots\} \subseteq B - \{0\}$：

(1) $g_0 = 1$；

(2) 假设 g_n 已定义，如果 $g_n \cdot \sum D_n = 0$，则令 $g_{n+1} = g_n$；否则，一定存在 $d \in D_n$，$g_n \cdot d > 0$，任取这样的一个 $d_n \in D$，令 $g_{n+1} = g_n \cdot d_n$。

对任意 $g_i \in G$，都有 $g_{i+1} \leq g_i$，所以 G 有有穷交性质。最后，令 U 为 G 生成的超滤。我们以下证明 U 是 $\mathcal{D}$-完全的。

对任意 $D_n \in \mathcal{D}$，如果 $\sum D_n \in U$，则 $g_n \cdot \sum D_n > 0$，所以存在 $d_n \in D$，$g_{n+1} = g_n \cdot d_n$。由于 $g_{n+1} \in U$ 并且 $g_{n+1} \leq d_n$，所以 $d_n \in U$。 □

注记 1.3.11. 引理1.3.10中，要求 $\mathscr{D}$ 是可数的这一点是必须的。如果 $\mathscr{D}$ 不可数，相应的命题在 ZFC 中不可证明，虽然它与 ZFC 是一致的。

为了证明一阶逻辑的完全性，我们给出以下定义，它是 $\mathscr{D}$-完全的逻辑版本。

定义 1.3.12. $\mathscr{B}(T)$ 上的超滤 U 是 Henkin 的，如果对任意存在公式 $\exists x\psi$，$[\exists x\psi] \in U$ 蕴含存在变元 y，$[\psi^x_y] \in U$。

引理 1.3.13. *如果 T 是一阶逻辑的一致的理论，$\mathscr{B}(T)$ 是 Lindenbaum 代数。如果 U 是 $\mathscr{B}(T)$ 上的 Henken 超滤，则存在一个模型 $\mathfrak{A}_U$，和赋值函数 s，$(\mathfrak{A}_U, s) \models T$。*

证明. 首先，定义所有项上的等价关系：$t_1 \sim t_2$ 当且仅当 $[t_1 = t_2] \in U$。令 $|\mathfrak{A}_U| = \{[t] \mid t\text{是项}\}$。接下来定义非逻辑符号的解释：

- 对任意 n-元谓词符号 P，任意项 $t_1, \cdots, t_n$，$([t_1], \cdots, [t_n]) \in P^{\mathfrak{A}_U}$ 当且仅当 $[Pt_1, \cdots t_n] \in U$。
- 对任意函数符号 f，任意项 $t_1, \cdots, t_n$，$f^{\mathfrak{A}_U}([t_1], \cdots, [t_n]) = [t]$ 当且仅当 $[ft_1, \cdots t_n = t] \in U$。
- 对任意常量符号 c，$c^{\mathfrak{A}_U} = [c]$。

最后，我们还需定义赋值函数 $s : V \to |\mathfrak{A}_U|$ 为：$s(x) = [x]$。

断言 1.3.14. 对任意公式 ϕ，$(\mathfrak{A}_U, s) \models \phi$ 当且仅当 $[\phi] \in U$。所以，$(\mathfrak{A}_U, s) \models T$.

断言的证明. 首先，验证对任意项 t，$\bar{s}(t) = [t]$。这需要对项做归纳，我们留给读者作为练习。

然后我们对公式做归纳证明断言。

如果 ϕ 是原子公式 $t_1 = t_2$，则 $(\mathfrak{A}_U, s) \models t_1 = t_2$ 当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$，当且仅当 $[t_1] = [t_2]$，当且仅当 $[t_1 = t_2] \in U$。

如果 ϕ 是 $Pt_1 \cdots t_n$，$(\mathfrak{A}_U, s) \models Pt_1 \cdots t_n$ 当且仅当 $([t_1], \cdots, [t_n]) \in P^{\mathfrak{A}_U}$ 当且仅当 $[Pt_1, \cdots t_n] \in U$。

关于命题连接词 $\neg, \to$ 的验证留给读者。

如果 ϕ 是存在公式 $\exists x\psi$。$(\mathfrak{A}_U, s) \models \phi$ 当且仅当存在 $[t], (\mathfrak{A}_U, s^x_{[t]}) \models \psi$，当且仅当存在 $[t], (\mathfrak{A}_U, s) \models \psi^x_t$，当且仅当存在 $[t], [\psi^x_t] \in U$。由于 $[\psi^x_t] \leq [\exists x\psi]$，所以 $[\exists x\psi] \in U$。另一方面，由于 U 是 Henkin 的，所以 $[\exists x\psi] \in U$ 蕴含存在 y，$[\psi^x_y] \in U$，后者蕴含 $(\mathfrak{A}_U, s) \models \psi^x_y$，这又蕴含 $(\mathfrak{A}_U, s^x_{[y]}) \models \psi$，所以 $(\mathfrak{A}_U, s) \models \exists x\psi$。

□

□

定理 1.3.15 (一阶逻辑完全性定理)**.** 如果一阶逻辑的公式集 Σ 是一致的，则 Σ 是可满足的。

1.3.4　超积与一阶逻辑的紧致性

令 S 为一集合，考虑语言 $\mathcal{L}$ 的模型族 $\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$。如果 U 是 S 上的超滤，则可以定义 $\prod_{x\in S} A_x$ 上的等价关系：

$$f =_U g \quad \{x \in S \mid f(x) = g(x)\} \in U.$$

令 $A = \prod_{x\in S} A_x / =_U$ 为相应的等价类，我们可以定义语言 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathfrak{A}$ 如下：

1. 如果 $P(x_1, \ldots, x_n)$ 为谓词，则对任意 $[f_1], \ldots, [f_n] \in A$，

   $$P^{\mathfrak{A}}([f_1], \ldots, [f_n]) \text{ 当且仅当 } \{x \in S \mid P^{\mathfrak{A}_x}(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U.$$

2. 如果 $F(x_1, \ldots, x_n)$ 是函数，$[f_1], \ldots, [f_n] \in A$，则令：

   $$F^{\mathfrak{A}}([f_1], \ldots, [f_n]) = [f],$$

   其中 f 是如下定义的函数：对任意 $x \in S$，$f(x) = F^{\mathfrak{A}_x}(f_1(x), \ldots, f_n(x))$。

3. 如果 c 是常量，则令

   $$c^{\mathfrak{A}} = [f],$$

   而 f 则是如下定义的函数：对任意 $x \in S$，$f(x) = c^{\mathfrak{A}_x}$。

如上定义的模型 $\mathfrak{A}$ 称为U 生成的 $\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$ 的超积，记为 $\mathrm{Ult}_U\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$。以下重要定理表明，对任意公式 φ，超积 $\mathrm{Ult}_U\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$ 满足 φ 当且仅当"几乎所有的 $\mathfrak{A}_x$"满足 φ。

定理 1.3.16 (Łoś)**.** 令 U 为集合 S 上的超滤，并且 $\mathfrak{A} = \mathrm{Ult}_U\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$ 为超积，则

(*1*) 对任意公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$，任意 $f_1, \dots, f_n \in \prod_{x \in S} A_x$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[[f_1], \dots, [f_n]] \text{ 当且仅当 } \{x \in S \mid \mathfrak{A}_x \models \varphi[f_1(x), \dots, f_n(x)]\} \in U.$$

(*2*) 如果 σ 是句子，则

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ 当且仅当 } \{x \in S \mid \mathfrak{A}_x \models \sigma\} \in U.$$

定理 1.3.17 (一阶逻辑紧致性)**.** 对任意语句集 Σ，如果 Σ 是有穷可满足的，则 Σ 可满足。

证明. 令 I 为 Σ 的所有有有穷子集的族。对任意 $i \in I$，令 $\mathfrak{A}_i$ 为 i 的一个模型。对任意公式 $\sigma \in \Sigma$，令 $Y_\sigma = \{i \in I \mid \sigma \in i\}$，则 $\{Y_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ 有有穷交性质。令 U 为由它生成的超滤，Ult_U 为超积。对任意 $\sigma \in \Sigma$，$X_\sigma = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \sigma\} \subseteq Y_\sigma$，所以 $X_\sigma \in U$，由 Łoś 定理，$\mathrm{Ult}_U \models \Sigma$。

□

如果对任意 $x \in S$，$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}$ 都相等，则超积称为$\mathfrak{A}$ **的超幂**，记为 $\mathrm{Ult}_U\,\mathfrak{A}$。根据 Łoś 定理，模型 $\mathfrak{A}$ 和它的超幂是初等等价的。不仅如此，我们还有以下结果：

推论 1.3.18. 对任意模型 $\mathfrak{A}$，存在 $\mathfrak{A}$ 到其超幂上的初等嵌入 $j : \mathfrak{A} \to \mathrm{Ult}_U\,\mathfrak{A}$。

证明. 对任意 $a \in A$，定义 $c_a : S \to A$ 为常值函数：

$$\forall x \in S(c_a(x) = a).$$

由此，定义 $j : \mathfrak{A} \to \mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A})$ 为：

$$j(a) = [c_a].$$