1.4 习题

1.4.1. 令 $\mathcal{B}$ 为任意布尔代数，$a, b, c \in B$，证明：

$$-(-a + (-b) + c) + (-(-a + b)) + (-a) + c = 1.$$

1.4.2. 在 Lingdenbaum 代数中 $\mathcal{B}(\emptyset)$ 中，如果 $[\alpha]$ 是原子，则对任意公式 β，$\vdash \alpha \to \beta$ 或者 $\vdash \alpha \to \neg\beta$。

1.4.3. 对任意布尔代数 $\mathcal{A}, \mathcal{D}$，定义它们的积 $\mathcal{C}$ 为：

1. $C = A \times B$;
2. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$;
3. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$;
4. $-(a, b) = (-a, -b)$;
5. $0 = (0, 0)$，$1 = (1, 1)$。

证明 $\mathcal{C}$ 是一个布尔代数。

1.4.4. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，任意 $a \in B$ 且 $a > 0$，令 $B \restriction a = \{b \in B \mid b \leq a\}$。令 $\mathcal{B} \restriction a$ 中的运算 $+, \cdot, 0$ 保持与 $\mathcal{B}$ 中一致，而 1 和 $-b$ 分别为 a 和 $a \cdot (-b)$。

1. 证明 $\mathcal{B} \restriction a$ 是一个布尔代数；
2. 对任意 $a \in B$，$\mathcal{B} \cong (\mathcal{B} \restriction a) \times (\mathcal{B} \restriction -a)$。

1.4.5. 令 $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为同态，$D \subseteq B$ 且 $\sum D$ 存在，称 h **保持** $\sum D$，如果 $\sum f[D]$（在 $\mathcal{B}$ 中）存在，并且 $f(\sum D) = \sum f[D]$。类似地可以定义保持 $\prod D$。证明：$\mathcal{B}$ 上的超滤 U 保持 $\sum D$ 当且仅当 U 所确定的同态 $f : \mathcal{B} \to \{0, 1\}$ 保持 $\sum D$。

1.4.6. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$h : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(\mathrm{Ult}(\mathcal{B}))$ 为 Stone 映射。对任意 $b \in B$，称 $h(b)$ 为 $S(\mathcal{B})$ 的**基本开集**，如果集合 $X \subseteq \mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 能表示成基本开集的并集，就称 X 为**开集**，开集的补集称为**闭集**。

1. 证明 $h(d)$ 既是开集也是闭集，称为**开闭集**。

2. 对任意 $U, V \in \mathrm{Ult}(\mathcal{B})$，如果 $U \neq V$，则存在一个开闭集包含 U，但不包含 V。（或者相反，包含 U，不包含 V。）

1.4.7. 如果 $C \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{Ult}(\mathcal{B}))$ 是开集的族，且 $\bigcup C = \mathrm{Ult}(\mathcal{B})$，就称 X 是**开覆盖**。证明：如果 C 是开覆盖，则存在有穷的 $C_0 \subseteq C$，$\bigcup C_0 = \mathrm{Ult}(\mathcal{B})$。

1.4.8. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，$D \subseteq B$ 并且 $\sum D$ 存在。证明：Stone 映射保持 $\sum D$ 当且仅当存在有穷的 $D_0 \subseteq D$，$\sum D = \sum D_0$。