第一章　逻辑与代数

1.1　布尔代数

给定任意集合 X，X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 在 $\cap, \cup, -$ 运算下，形成一个代数结构，这个结构是所谓“布尔代数”的最直观最典型的代表。

定义 1.1.1. 令 $\mathscr{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 为一个结构，其中 B 是非空集合，$+, \cdot$ 是二元函数，$-$ 是一元函数，$0, 1$ 为常量。如果 $\mathscr{B}$ 满足以下公理：

(1) 结合律：$a + (b + c) = (a + b) + c$，$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(2) 交换律：$a + b = b + a$，$a \cdot b = b \cdot a$;

(3) 吸收律：$a + (a \cdot b) = a$，$a \cdot (a + b) = a$;

(4) 分配律：$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$，$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$;

(5) $x + (-x) = 1$，$x \cdot (-x) = \emptyset$。

则称 $\mathscr{B}$ 为**布尔代数**。

练习 1.1.2. $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, -, X, \emptyset)$ 是一个布尔代数。

如果 $X = \emptyset$，则 $\mathscr{P}(X)$ 只有一个元素 $\emptyset$，它也是一个布尔代数。只有一个元素的布尔代数是**平凡的**。

一个**非平凡**的布尔代数至少有两个元素 $\{0, 1\}$，例如对任意非空集合 X，$\{X, \emptyset\}$ 是一个布尔代数。

练习 1.1.3. 令 $B = \{T, F\}$ 为命题真值的集合，则 B 在命题逻辑联结词 $\vee$ 、$\wedge$ 和 $\neg$ 下是一个布尔代数。

练习 1.1.4. 令 $\mathscr{B}$ 为任意布尔代数，$a, b \in B$，证明：

(1) $a + a = a$；

(2) $a \cdot a = a$；

(3) $a + b = b$ 当且仅当 $a \cdot b = a$；

(3) $a \cdot 0 = 0$，$a \cdot 1 = a$；

(4) $a + 0 = a$，$a + 1 = 1$；

(5) $a = -b$ 当且仅当 $a + b = 1$ 并且 $a \cdot b = 0$；

(6) $--a = a$；

(7) $-(a + b) = -a \cdot (-b)$；

(8) $-(a \cdot b) = -a + (-b)$。

例 1.1.5. 令 $\mathscr{L}$ 为命题逻辑的语言，T 为 $\mathscr{L}$ 中的理论。

- 对任意公式 α, β，定义一个二元关系：
$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta.$$
- 对任意公式 α，我们令 $[\alpha]_T$ 表示 α 在这一等价关系下的等价类，即集合 $\{\beta \mid \beta \sim \alpha\}$。在不致引起混淆的情形下，我们通常省略掉下标 T。
- 令 $B = \{[\alpha]_T \mid \alpha\text{是一个公式}\}$，定义 B 上的运算：

$$\begin{array}{rcl}
[\alpha] + [\beta] & = & [\alpha \vee \beta] \\
{[\alpha]} \cdot [\beta] & = & [\alpha \wedge \beta] \\
-[\alpha] & = & [\neg\alpha] \\
0 & = & [\alpha \wedge \neg\alpha] \\
1 & = & [\alpha \vee \neg\alpha].
\end{array}$$

在这里，我们需要验证以上定义是合理的：即定义中的 $+, \cdot$ 的确是二元函数；$-$ 的确是一元函数；$0, 1$ 的确是常量，或者说是零元函数。所以，以 $+$ 为例，我们需要验证对任意 $\alpha, \beta, \delta, \gamma$，如果 $[\alpha] = [\beta]$，$[\delta] = [\gamma]$，则 $[\alpha \vee \delta] = [\beta \vee \gamma]$。具体的验证请读者完成。

- $\mathcal{B}(T) = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 是一个布尔代数，称为（命题逻辑的）Lindenbaum 代数。

练习 1.1.6. 令 T 为命题逻辑中的理论，

1. 请验证 $\mathcal{B}(T) = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 是一个布尔代数。
2. T 是一致的当且仅当 $\mathcal{B}(T)$ 是非平凡的。

定义 1.1.7. 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是布尔代数，$f : A \to B$ 映射，如果 f 满足：

(1) $f(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$，$f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$；

(2) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$，$f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$，$f(-a) = -f(a)$。

就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**同态**。

如果同态 f 是单射，就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**嵌入**。

如果 f 还是双射，就称 f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的**同构**。

如果 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，$A \subseteq B$，并且等同映射 $\mathrm{id} : A \to B$ 是一个嵌入（注意，这要求 $0, 1 \in A$ 并且 A 在 $\mathcal{B}$ 的运算下也是一个布尔代数），就称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的**子代数**。

例 1.1.8. 对任意集合 X，$\{X, \emptyset\}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数。

令 $B = \{T, F\}$，则 $f(T) = X$，$f(F) = 0$ 是到 $\mathcal{P}(X)$ 的嵌入，其中 $X \neq \emptyset$ 为任意非空集合。

今后，我们称 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数为**集合代数**，并且，我们会证明，任何布尔代数都同构于一个集合代数。

练习 1.1.9. 令 X 为任意集合，$Y \subseteq X$ 称为在 X 中是**余有穷的**，如果 $X - Y$ 是有穷集合。对任意集合 X，令 $B = \{Y \subseteq X \mid Y\text{是有穷的或余有穷的}\}$，则 $X, \emptyset \in B$。证明 B 对 $\cap, \cup, -$ 封闭，所以 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，是一个集合代数。

练习 1.1.10. 证明不存在基数为 3 的布尔代数。思考一下，一个有穷的布尔代数，其基数需要满足什么条件?

引理 1.1.11. *如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是布尔代数，$f : A \to B$ 映射，则以下命题等价:*

(1) f 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的同态;

(2) 对任意 $a, b \in A$，$f(-a) = -f(a)$，$f(a+b) = f(a) + f(b)$;

(3) 对任意 $a, b \in A$，$f(-a) = -f(a)$，$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$;

(4) $f(0) = 0$，$f(1) = 1$，并且 $f(a+b) = f(a) + f(b)$，并且如果 $a \cdot b = 0$，则 $f(a) \cdot f(b) = 0$。

证明. □

作为简单的推论，请证明以下命题:

练习 1.1.12. 如果 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$A \subseteq B$ 为非空子集，则以下命题等价:

(1) $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的子代数;

(2) A 对 $+, -$ 封闭;

(3) A 对 $\cdot, -$ 封闭。

练习 1.1.13. 如果 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是同态，并且对任意 $a \in \mathcal{A}$，如果 $a \neq 0$，则 $f(a) \neq 0$，那么 f 是一个嵌入。

引理 1.1.14. *如果 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，Γ 是一族 $\mathcal{B}$ 的子代数，$\bigcap \Gamma$ 是 $\mathcal{B}$ 的子代数。*

定义 1.1.15. 假设 $\mathscr{B}$ 是布尔代数，$X \subseteq B$。

$$A = \bigcap \{C \mid X \subseteq C \wedge \mathscr{C} \text{ 是 } \mathscr{B} \text{ 的子代数}\} \tag{1.1}$$

是一个布尔代数，称为由 X 生成的代数。

引理 1.1.16. *令 $\mathscr{B}$ 是布尔代数，$X \subseteq B$，以下命题等价*

(1) $\mathscr{A}$ 是 X 生成的布尔代数；

(2) $A = \bigcup_{n \in \omega} X_n$，其中 $X_0 = X$，

$$X_{n+1} = X \cup \{a + b \mid a, b \in X_n\} \cup \{a \cdot b \mid a, b \in X_n\} \cup \{-a \mid a \in X\}.$$

定义 1.1.17. 令 $\mathscr{B}$ 为任意布尔代数，对任意 $a, b \in B$，我们定义二元关系 $a \leq b$ 为 $\exists c(a + c = b)$。$a < b$ 当且仅当 $a \leq b$ 并且 $a \neq b$。

例 1.1.18. 对任意布尔代数 $\mathscr{B}$，我们显然有以下事实：对任意 $a, b \in B$，

- $a \leq a + b$，$b \leq a + b$；
- $a \cdot b \leq a$，$a \cdot b \leq b$；
- 对任意 $a \in B$，$0 \leq a \leq 1$。

练习 1.1.19. 令 T 为命题逻辑中的理论，对任意公式 α, β，$[\alpha] \leq [\beta]$ 当且仅当 $T \vdash \alpha \to \beta$。

练习 1.1.20. 令 $\mathscr{B}$ 为任意布尔代数，$a, b, c \in B$，证明：

(1) $a \leq b$ 当且仅当 $a + b = b$ 当且仅当 $a \cdot b = a$；

(2) 如果 $a \leq c$ 并且 $b \leq c$，则 $a + b \leq c$；

(3) 如果 $a \leq b$ 并且 $a \leq c$，则 $a \leq b \cdot c$。

练习 1.1.21. 令 $\mathscr{B}$ 为任意布尔代数，

(1) 证明任意布尔代数 $\mathcal{B}$ 在关系 $\leq$ 下是一个偏序集。

(2) 证明如果 $\mathcal{B}$ 是一个集合代数，则 $\leq$ 就是集合上的子集关系 $\subseteq$。

(3) 对任意 $a, b \in B$，$a \leq b$ 当且仅当 $-b \leq -a$，

(4) 对任意 $a, b \in \mathcal{B}$，$a \leq b$ 当且仅当 $a \cdot (-b) = 0$。（当且仅当 $-a + b = 1$）。

定义 1.1.22. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$, 如果一个非零元素 $a \in B$ 满足: 不存在 $b \in B$ 使得 $0 < b < a$，就称 a 是 $\mathcal{B}$ 的**原子**。

一个布尔代数 $\mathcal{B}$ 如果没有原子，就称 $\mathcal{B}$ 是**无原子的**。

如果对任意 $b \in \mathcal{B}$，都存在一个原子 $a \in \mathcal{B}$ 使得 $a \leq b$，就称 $\mathcal{B}$ 是**原子化的**。

例 1.1.23. 对任意集合 X，X 的有穷子集和余有穷子集构成的布尔代数是原子化的，每个单点集 $\{x\}$ 都是一个原子。

练习 1.1.24. 任何有穷的布尔代数都是原子化的。

引理 1.1.25. *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$a \in B$，则以下命题等价:*

(1) a 是原子。

(2) 对任意 $b \in B$，$b \neq 0$，$a \leq b$ 或 $a \leq -b$，但不能同时成立。

(3) $0 < a$，并且如果 $a \leq b + c$，则 $a \leq b$ 或 $a \leq c$。

证明. (1)⇒(2). 如果 $a \cdot b = c \neq 0$，则 $a = c \leq b$，否则 $c < a$，与 a 是原子矛盾。如果 $a \cdot b = 0$，则 $a \cdot (-b) \neq 0$，同理 $a \leq -b$。如果 $a \leq b$ 且 $a \leq (-b)$，令 $c_1, c_2 \in B$ 为见证 $\leq$ 的元素。我们有 $a + c_1 = -(a + c_2)$，所以 $a \cdot (a + c_1) = 0$，这蕴涵着 $a = 0$，矛盾。

(2)⇒(3). $0 < a$ 是显然的。假设 $a \leq b + c$ 并且 $a \nleq b$，则根据（2），$a \leq -b$，所以 $a \leq (-b) \cdot (b + c) \leq (-b) \cdot c \leq c$，所以 $a \leq c$。

(3)⇒(1). 反设 a 不是原子，令 $0 < b < a$，并且令 $c \neq 0$ 为见证这一点的元素，则 $a = b + c$。由于 b 也不为 0，所以 $c < a$。这样，$a \nleq b$ 并且 $a \nleq c$，与（3）矛盾。 □

定理 1.1.26. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，令 $A \subseteq B$ 为 $\mathcal{B}$ 中全体原子的集合。定义 $f : B \to \mathcal{P}(A)$ 为：对任意 $b \in B$，

$$f(b) = \{a \in A \mid a \leq b\}, \tag{1.2}$$

则 f 是一个同态映射。如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则 f 是一个嵌入。

证明. 检查 f 是一个同态映射并不困难，我们留作练习。

练习 1.1.27. 证明 f 是同态映射。

下面我们证明：如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则 f 是一一映射。注意到，如果 $\mathcal{B}$ 是原子化的，则对任意 $b \in \mathcal{B}$，如果 $b \neq 0$，则 $f(b) \neq \emptyset$。现在假设 $b_1 \neq b_2$，则 $b_1 \cdot (-b_2) \neq 0$ 或者 $(-b_1) \cdot b_2 \neq 0$。不妨设前者为 $c \neq 0$，则 $f(c) = f(b_1) \cap f(-b_2) = f(b_1) \cap (A - f(b_2)) \neq \emptyset$，所以 $f(b_1) \neq f(b_2)$。 □

推论 1.1.28. 任何原子化的布尔代数都同构于一个集合代数。特别地，如果 $\mathcal{B}$ 是一个有穷的布尔代数，并且有 m 个原子，则 $\mathcal{B}$ 同构于集合代数 $\mathcal{P}(m)$。

注记 1.1.29. 这是斯通表示定理的一个特殊版本。

推论 1.1.30. 对任意自然数 n，以下命题等价：

(1) 存在一个布尔代数 $\mathcal{B}$，$|B| = n$；

(2) n 是一个平方数。

推论 1.1.31. 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是有穷的布尔代数，则 $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ 当且仅当 $|A| = |B|$。

定义 1.1.32. 对任意的布尔代数 $\mathcal{B}$，令 $\leq$ 为 B 上的标准偏序，$X \subseteq B$ 是 B 的非空子集。

(1) 如果存在 $u \in \mathcal{B}$ 满足：

  (a) 对任意 $x \in X$，$x \leq u$，

  (b) 如果有 $b \in B$ 满足对任意 $x \in X$ 都有 $x \leq b$，则 $u \leq b$。

就称 u 是 X 的上确界，一般记作 $\sum X$。