复习题

1. 令 X 为任意集合，以下命题等价：

   (a) X 是有穷的；

   (b) X 上至多有有穷多个超滤；

   (c) X 上的每个超滤都是主超滤。

2. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，U 是 $\mathcal{B}$ 上的超滤，以下命题等价：

   (a) U 是非主滤；

   (b) 对任意 $b \in B$，如果对所有 $a \in U$ 都有 $b \leq a$，则 $b = 0$。

3. 如果 U 是 Lindenbaum 代数 $\mathcal{B}(T)$ 上的超滤，并且 $T \models \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to \psi$，则如果对任意 $i \leq n$，$[\phi_i] \in U$，则 $[\psi] \in U$。

4. 给定一阶语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{L}$ 上的结构组成的集合。如果 $\mathcal{K}$ 是初等类，即存在 $\mathcal{L}$ 的理论 T 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$，则 $\mathcal{K}$ 对超积封闭：对任意 I，任意 $\mathcal{K}$ 中结构的序列 $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$，任意 I 上的超滤 U，超积 $\mathrm{Ult}_U\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ 也属于 $\mathcal{K}$。

5. 令 $\mathcal{K}$ 为某一一阶语言上的结构的集合，$\mathcal{K}$ 对超积封闭，并且 $\mathcal{K}$ 也对初等等价封闭。证明：

   (a) 令 Σ 为在 $\mathcal{K}$ 中的所有模型都真的语句集，任取 $\mathfrak{A} \models \Sigma$，令 $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$，证明对任意 T 的有穷子集，存在 $\mathcal{K}$ 中的模型 $\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B} \models T$。

   (b) 证明 $\mathrm{Mod}(T) = \mathcal{K}$，所以 $\mathcal{K}$ 是一个初等类。

6. 令 I 为无穷集合，$\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ 为语言 $\mathcal{L}$ 的一集结构，$j \in I$，U 为 I 上的由 j 生成的主超滤。证明 U 确定的超积模型与 $\mathfrak{A}_j$ 同构，即 $\mathrm{Ult}_U\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\} \cong \mathfrak{A}_j$。

7. 对任意集合 X，令

$$2^X = \{f \mid f : X \to \{0,1\}\text{是函数}\}.$$

8. 证明：

   (a) $(a \to b) \cdot (b \to c) \le a \to c$；

   (b) $(a \to b) \cdot (c \to d) \le (a \cdot c) \to (b \cdot d)$；

   (c) $(a \leftrightarrow b) \cdot (b \leftrightarrow c) \le a \leftrightarrow c$；

   (d) $(a \leftrightarrow b) \cdot (c \leftrightarrow d) \le (a \cdot c) \leftrightarrow (b \cdot d)$。

9. 令 X 为集合，I 为指标集，$\{Y_i\}_{i \in I}$ 为 X 的子集族。另外，$\{I_j\}_{j \in J}$ 为 I 的子集族，并且 $\bigcup_{j \in J} I_j = I$。证明：

$$\bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I_j} Y_i) = \bigcup_{i \in I} Y_i.$$

10. 令 X 为集合，I, J 为指标集，对任意 $i \in I$，$j \in J$，Y_{ij} 是 X 的子集。最后，令 $J^I = \{f : I \to J \mid f \text{是函数}\}$。证明：

    (a) $\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} Y_{ij} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} Y_{if(i)}$；

    (b) $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} Y_{ij} = \bigcap_{f \in J^I} \bigcup_{i \in I} Y_{if(i)}$

11. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，I, J 为指标集，$I \subseteq J$，$\{b_i\}$ 和 $\{b_j\}$ 是 B 中元素的集合。证明：

    (a) $\sum_{i \in I} b_i \le \sum_{j \in J} b_j$，

    (b) $\prod_{j \in J} b_j \le \prod_{i \in I} b_i$，

12. 令 $\{b_n\}_{n \in S}$ 为 $\mathcal{B}$ 中元素的有穷或无穷序列，即以自然数 $\mathbb{N}$ 的子集 S 为指标集。对任意 $n \in S$，定义 $a_n = b_1 + \cdots + b_n$，证明：

$$\sum_{n \in S} a_n = \sum_{n \in S} b_n.$$

类似地，令 $c_n = b_1 \cdot \cdots \cdot b_n$，则

$$\prod_{n \in S} c_n = \prod_{n \in S} b_n.$$

定义 3.3.6. 在布尔代数 $\mathcal{B}$ 中，我们定义 $a-b$ 为：$a\cdot(-b)$。

13. 令 $\{b_n\}_{n\in S}$ 为 $\mathcal{B}$ 中元素的有穷或无穷序列，$b=\sum b_n$ 存在。令 $\{a_n\}$ 为如下定义的序列：$a_1=b_1$，对任意 $n\geq 2$，$a_n=b_n-(a_1+\cdots+b_{n-1})$。证明：$\sum a_n=b$。

14. 上题中如果 $\{b_n\}$ 还是递增的序列，即对任意 n，$b_n\leq b_{n+1}$。同样类似地定义 $\{a_n\}$ 为：$a_1=b_1$，对任意 $n\geq 2$，$a_n=b_n-b_{n-1}$。证明：对任意 n,m，$m\neq n$，$a_n\cdot a_m=0$ 并且 $\sum a_n=\sum b_n$。

15. 对任意集合 X，我们定义 X 上的**度量**为 X 上的一个二元函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$，并且满足：对任意 x,y,z，

    - $d(x,y)\geq 0$;
    - $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
    - 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$;
    - 三角不等式：$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$。

    同时，对任意 $x\in X$，任意实数 $r\in\mathbb{R}$，集合 $B_x=\{y\mid d(x,y)<r\}$ 称为 x 的半径为 r 的**开球**。证明：X 中的所有开球构成一个拓扑基。这样的拓扑空间称为 X 上的度量空间。

16. 令 X 为任意集合，X 的子集 O 称为开集，如果 $O=\varnothing$ 或 O 是余有穷的。证明：这样定义的开集构成 X 上的一个拓扑。

17. 任给拓扑空间 X，$Y\subseteq X$，我们定义

    - Y 的**闭包**为包含 Y 的最小闭集，记作 $\overline{Y}$，即

    $$\overline{Y}=\bigcap\{F\mid Y\subseteq F\&F\text{是闭集}\}$$

    - Y 的**内部**为 Y 所包含的最大开集，记作 Y°，即

    $$Y^\circ=\bigcup\{O\mid O\subseteq Y\&O\text{是开集}\}.$$

证明：

(a) 在拓扑空间 $\mathbb{R}$ 中（例 3.1.2），求有理数 $\mathbb{Q}$ 的内部和闭包；

(b) 令 $N = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$，求 N 在空间 $\mathbb{R}$ 中的闭包；

(c) $\overline{Y} = X \setminus (X \setminus Y)^\circ$；

(d) $Y^\circ = X \setminus \overline{X \setminus Y}$；

(e) 如果 $Y \subseteq Z$，则 $\overline{Y} \subseteq \overline{Z}$；

(f) $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$；

18. 令 X 为任意拓扑空间，

- 对任意 $D \subseteq X$，如果 $\overline{D} = X$，就称 D 在 X 中是**稠密的**；
- 对偶地，对任意 $E \subseteq X$，如果 $E^\circ = \varnothing$，就称 E 在 X 中是**无处稠密的**。

证明：

(a) D 是稠密的当且仅当对任意开集 O，$D \cap O \neq \varnothing$；

(b) E 是无处稠密的当且仅当对任意非空开集 O，$O \not\subseteq \overline{E}$；

(c) E 是无处稠密的当且仅当 $X \setminus \overline{E}$ 是稠密的。

(d) 如果 X 是无穷的，在 X 的余有穷拓扑中，无处稠密的子集有哪些？