JOURNAL OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 00, Number 0, Pages 000–000
S 0894-0347(XX)0000-0

SCOTT 拓扑与 D_∞

陈淇奥

1. Scott 拓扑

定义 1.1. 给定偏序集 $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ 以及集合 $X \subseteq D$，

(1) 用 $\perp$ 表示 D 的 **最小元**；
(2) 用 $\bigsqcup X$ 表示 X 的最小上界;
(3) 若 X 非空且对任意 $a, b \in X$ 都存在 $c \in X$ 使得 $a \sqsubseteq c$ 且 $b \sqsubseteq c$，则称 X 是 **有向集**；
(4) 若 D 满足
  (a) D 有最小元;
  (b) 每一个 D 的有向子集 X 都有最小上界。
  则称 D 是 **完全偏序** (*complete partial order*)，记作 *c.p.o.*。

定义 1.2. 给定任意 $\perp \notin \mathbb{N}$，定义 $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$，并且对任意 $a, b \in \mathbb{N}^+$，定义

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow (a = \perp \wedge b \in \mathbb{N}) \vee a = b$$

我们用 $\mathbb{N}^+$ 表示 $\langle \mathbb{N}^+, \sqsubseteq\rangle$。

引理 1.3. $\mathbb{N}^+$ 是完全偏序。

证明. 注意到 $\mathbb{N}^+$ 的有向子集只包括单点集与 $\{\perp, n\}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ □

定义 1.4. 给定完全偏序 D, D'，令 f 是从 D 到 D' 的函数，定义 f 是 **单调的** 当且仅当

$$a \sqsubseteq b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq' f(b)$$

定义 1.5. 给定完全偏序 $\langle D, \sqsubseteq\rangle$，定义 D 上的 ***Scott* 拓扑**：$O \subseteq D$ 是开集当且仅当

(1) $x \in O \wedge x \sqsubseteq y \Rightarrow y \in O$;
(2) 若 $X \subseteq D$ 有向且 $\bigsqcup X \in O$，则 $X \cap O \neq \emptyset$。

Received by the editors 2022 年 6 月.

引理 1.6. 令 $U_x = \{z \in D \mid z \not\sqsubseteq x\}$，则 U_x 是开集

证明. (1) 若 $y \in U_x$ 且 $y \sqsubseteq z$，若 $z \sqsubseteq x$，则 $y \sqsubseteq x$ 矛盾。

(2) 若 $X \subseteq D$ 有向且 $\bigsqcup X \in U_x$，若 $X \cap U_x = \emptyset$，则 $\bigsqcup X \sqsubseteq x$，矛盾。

□

推论 1.7. D 是 T_0 空间

证明. 令 $x, y \in D$ 且 $x \neq y$，则 $x \in U_y$ 且 $y \notin U_y$。 □

命题 1.8. 考虑函数 $f : D \to D'$，则

f 连续当且仅当对任意有向集 $X \subseteq D$，$f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f(X)$

其中 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$。

证明. $\Rightarrow$:若 f 连续,假设 $x \sqsubseteq y$ 且 $f(x) \not\sqsubseteq' f(y)$,则 $f(x) \in U_{f(y)}$, $x \in f^{-1}(U_{f(y)})$,由于 $f^{-1}(U_{f(y)})$ 是开集,$y \in f^{-1}(U_{f(y)})$, $f(y) \in U_{f(y)}$,矛盾。因此对于任意 $x \in X$, $f(\bigsqcup X) \sqsupseteq f(x)$, $f(\bigsqcup X) \sqsupseteq \bigsqcup f(X)$。若 $f(\bigsqcup X) \not\sqsubseteq \bigsqcup f(X)$, 则 $f(\bigsqcup X) \in U_{\bigsqcup f(X)}$, $\bigsqcup X \in f^{-1}(U_{\bigsqcup f(X)})$，由定义，存在 $a \in X$ 使得 $a \in X \cap f^{-1}(U_{\bigsqcup f(X)})$，因此 $f(a) \in U_{\bigsqcup f(X)}$，$f(a) \not\sqsubseteq \bigcup f(X)$，矛盾。

$\Leftarrow$: 若 $x \sqsubseteq y$，则 $y = x \sqcup y$，$f(y) = f(x) \sqcup f(y)$，因此 $f(x) \sqsubseteq f(y)$。因此若 $O \subseteq D'$ 是开集，对于任意有向 $X \subseteq D$ 且 $\bigsqcup X \in f^{-1}(O)$，有 $f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f(X) \in O$，而 $f(X)$ 是有向，于是 $f(X) \cap O \neq \emptyset$，因此 $X \cap f^{-1}(O) \neq \emptyset$。 □

命题 1.9. 给定完全偏序 D, D'，定义 $D \times D'$ 上的偏序为

$$(x, x') \sqsubseteq (y, y') \Leftrightarrow x \sqsubseteq y \wedge x' \sqsubseteq y'$$

则 $D \times D'$ 是完全偏序，给定任意有向集 $X \subseteq D \times D'$，它的最小上界是

$$\bigsqcup X = (\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1)$$

其中

$$X_0 = \{x \in D \mid \exists x' \in D' (x, x') \in X\}$$
$$X_1 = \{x' \in D' \mid \exists x \in D (x, x') \in X\}$$

证明. 首先 $(\bot, \bot')$ 是 $D \times D'$ 的最小元。对于任意有向集合 $X \subseteq D \times D'$，X_0, X_1 也是有向集合，因此 $\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1$ 存在，于是对于任意 X 的上界 (A, B)，A 是 X_0 的上界，B 是 X_1 的上界，因此 $(\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1) \sqsubseteq (A, B)$，因此 $\bigsqcup X = (\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1)$。 □

定义 1.10. 给定完全偏序 D, D'，定义

$$[D \to D'] = \{f : D \to D' \mid f\text{连续}\}$$

并且定义 $[D \to D']$ 上的偏序为

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall x \in D(f(x) \sqsubseteq' g(x))$$

引理 1.11. 令 $\{f_i\}_i \subseteq [D \to D']$ 为有向的函数集合，定义

$$f(x) = \bigsqcup_i f_i(x)$$

则 f 是良定义的并且是连续的。

证明. 应为 $\{f_i\}_i$ 有向，因此对于任意 $x \in D$，$\{f_i(x)\}_i$ 有向，因此 f 存在且 $f(x)$ 唯一。对于任意有向集合 $X \subseteq D$，

$$f(\bigsqcup X) = \bigsqcup_i \bigsqcup_{x \in X} f_i(x) = \bigsqcup_{x \in X} \bigsqcup_i f_i(x) = \bigsqcup f(X)$$

$\square$

下面使用 $\lambda d \in D.\phi(a_1, \dots, a_n, d)$ 来表示函数 $f(d) = \phi(a_1, \dots, a_n, d)$，其中 $d \in D$。

命题 1.12. $[D \to D']$ 是完全偏序，并且对于任意有向 $F \subseteq [D \to D']$，它的最小上界为

$$(\bigsqcup F)(x) = \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\}$$

证明. $\lambda x.\bot'$ 是 $[D \to D']$ 的最小元，由引理1.11，$\lambda x.\bigsqcup\{f(x) \mid f \in F\}$ 是连续的，因此属于 $[D \to D']$，显然它是最小上界。 $\square$

命题 1.13. 给定完全偏序 D, D', D''，若 $f \in [D \to D']$，$g \in [D' \to D'']$，定义 $g \circ f$ 为对任意 $d \in D$，$(g \circ f)(d) = g(f(d))$，则 $g \circ f \in [D \to D'']$。

证明. 任给有向集合 $X \subseteq D$，$f \in [D \to D']$，$g \in [D' \to D'']$，则

$$g \circ f(\bigsqcup X) = g(f(\bigsqcup X)) = g(\bigsqcup_{x \in X} f(x)) = \bigsqcup_{x \in X} g(f(x)) = \bigsqcup_{x \in X} g \circ f(x)$$

$\square$

引理 1.14. 令 $f : D \times D' \to D''$，则 f 连续当且仅当它在 D 跟 D' 上连续，即对于任意 $x_0 \in D, x_0' \in D'$，$\lambda x.f(x, x_0')$ 和 $\lambda x.f(x_0, x)$ 连续。

证明. $\Rightarrow$：令 $g = \lambda x.f(x, x_0')$，则对于有向集合 $X \subseteq D$

$$
\begin{aligned}
g(\bigsqcup X) &= f(\bigsqcup X, x_0') = f(\bigsqcup\{(x, x_0') \mid x \in X\}) \\
&= \bigsqcup\{f(x, x_0') \mid x \in X\} \\
&= \bigsqcup g(X)
\end{aligned}
$$

同理，$\lambda x.f(x_0, x)$ 连续。

$\Leftarrow$：给定有向集合 $X \subseteq D \times D'$，

$$
\begin{aligned}
f(\bigsqcup X) &= f(\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1) \\
&= \bigsqcup_{x \in X_0} f(x, \bigsqcup X_1) = \bigsqcup_{x \in X_0} \bigsqcup_{x' \in X_0'} f(x, x') \\
&= \bigsqcup_{(x, x') \in X} f(x, x') \\
&= \bigsqcup f(X)
\end{aligned}
$$

因此 f 连续。 □

命题 1.15. 给定完全偏序 D, D'，令

$$app : [D \to D'] \times D \to D'$$

为 $app(f, x) = f(x)$，则 app 连续。

证明. 给定有向集合 $F \subseteq [D \to D']$，令 $h = \lambda f.f(x)$，则

$$
\begin{aligned}
h(\bigsqcup F) &= (\bigsqcup F)(x) = \bigsqcup\{f(x) \mid f \in F\} \\
&= \bigsqcup\{h(f) \mid f \in F\} = \bigsqcup h(F)
\end{aligned}
$$

因此 h 连续，同时因为 $\lambda x.f(x) = f$ 连续，由命题1.12 app 连续 □

命题 1.16. 给定 $f \in [D \times D' \to D'']$，定义 $\hat{f}(x) = \lambda y \in D'(f(x, y))$，则

(1) $\hat{f}$ 连续；

(2) $\lambda f.\hat{f} : [D \times D' \to D''] \to [D \to [D' \to D'']]$ 连续。

证明. (1) 对于任意有向集 $X \subseteq D$，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\bigsqcup X) &= \lambda y.f(\bigsqcup X, y) = \lambda y.\bigsqcup_{x \in X} f(x, y) \\
&= \bigsqcup_{x \in X} (\lambda y.f(x, y)) \\
&= \bigsqcup \hat{f}(X)
\end{aligned}
$$

(2) 令 $L = \lambda f.\hat{f}$，对于任意有向集 $F \subseteq [D \times D' \to D'']$，

$$L(\bigsqcup F) = \lambda x.\lambda y.(\bigsqcup F)(x,y) = \lambda x\lambda y.\bigsqcup_{f\in F} f(x,y)$$
$$= \bigsqcup_{f\in F}\lambda x.\lambda y.f(x,y) = \bigsqcup L(F)$$

□

定义 1.17. ***CPO*** 是以完全偏序为元素连续映射为态射的范畴。

定理 1.18. ***CPO*** 是笛卡儿闭范畴。

证明. $D \times D'$ 是 **CPO** 中的乘积，同时单元素完全偏序是终对象，而对于任意 $f : D \times D' \to D''$，由命题1.15 和1.16 ，都存在唯一的 $\hat{f} : D \to [D' \to D'']$ 使得

$$\begin{tikzcd} D \times D' \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\hat{f}\times \mathrm{id}_{D'}"'] & D \\ {[D' \to D''] \times D'} \arrow[ur, "app"] \end{tikzcd}$$

交换。 □

定义 1.19. 令 $D_0, D_1, \dots$ 是可数的完全偏序序列，令 $f_i \in [D_{i+1} \to D_i]$，

(1) 序列 (D_i, f_i) 称为完全偏序的 **逆向系统** (*inverse system*)。

(2) 系统 (D_i, f_i) 的 **逆向极限** (*inverse limit*) $\varprojlim(D_i, f_i)$（或记作 $\varprojlim D_i$）是偏序集 $(D_\infty, \sqsubseteq_\infty)$，其中

$$D_\infty = \{(x_0, x_1, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N}(x_i \in D_i \wedge \psi_i(x_{i+1}) = x_i)\}$$

并且

$$(x_0, x_1, \dots) \sqsubseteq_\infty (y_0, y_1, \dots) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}(x_i \sqsubseteq y_i)$$

命题 1.20. 给定逆向系统 (D_i, f_i)，则 $\varprojlim(D_i, f_j)$ 是完全偏序且对任意有向 $X \subseteq \varprojlim D_i$，

$$\bigsqcup X = \lambda i.\bigsqcup\{x(i) \mid x \in X\}$$

证明. 对于任意有向 $X \subseteq D_\infty$，则对任意 $i \in \mathbb{N}$，$\{x(i) \mid x \in X\}$ 有向，令

$$y_i = \bigsqcup\{x(i) \mid x \in X\}$$

则由 ψ_i 的连续性，

$$\psi_i(y_{i+1}) = \bigsqcup f_i(\{x(i+1) \mid x \in X\}) = \bigsqcup\{x(i) \mid x \in X\} = y_i$$

因此 $(y_0, y_1, \dots) \in \varprojlim D_i$。 □

因此在 **CPO** 中，逆向极限存在。

2. D_∞

定义 2.1. 给定完全偏序 D 和 D'，D 与 D' **同构** 当且仅当存在 $\phi \in [D \to D']$ 与 $\psi \in [D' \to D]$ 使得

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_D, \quad \phi \circ \psi = \mathrm{id}_{D'}$$

定义 2.2. 给定完全偏序 D 和 D'。函数的二元组 $\langle \varphi, \psi \rangle$ 是从 D' 到 D 的 **投射** 如果

(1) $\varphi \in [D \to D'], \psi \in [D' \to D]$
(2) $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_D$
(3) $\varphi \circ \psi \sqsubseteq \mathrm{id}_{D'}$

注意到 D 与 $\varphi\psi(D)$ 同构，因此在同构的意义下 $D \subseteq D'$。

定义 2.3. 定义 $D_0 = \mathbb{N}^+$，$D_{n+1} = [D_n \to D_n]$，记 D_n 的最小元为 $\bot_n$

由1.12，对任意 $n \in \mathbb{N}$，D_n 是完全偏序。

引理 2.4. 给定 D' 到 D 的投射 (φ, ψ)，存在从 $[D' \to D']$ 到 $[D \to D]$ 的投射 (φ^*, ψ^*) 满足：对于任意 $f \in [D \to D]$，$g \in [D' \to D']$ 有

$$\varphi^*(f) = \varphi \circ f \circ \psi, \quad \psi^*(g) = \psi \circ g \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "f"'] & D' \arrow[l, "\psi"'] \arrow[d, dashed, "\varphi^*(f)"] \\
D \arrow[r, "\varphi"'] & D'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\psi^*(g)"'] & D' \arrow[d, "g"] \\
D & D' \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}
\varphi^*(f) &= \lambda x' \in D'.\varphi(f(\psi(x))) \\
&= \lambda x' \in D'.\varphi(app(f, \psi(x)))
\end{aligned}$$

于是 φ^* 是连续的，类似的 ψ^* 是连续的。同时

$$\psi^*(\varphi^*(f)) = \psi \circ \varphi \circ f \circ \psi \circ \varphi = f$$
$$\varphi^*(\psi^*(f)) = \varphi \circ \psi \circ f \circ \varphi \circ \psi \sqsubseteq f$$

□

引理 2.5. 给定完全偏序 D，定义 $\varphi_0 : D \to [D \to D]$，$\psi_0 : [D \to D] \to D$ 为

$$\varphi_0(x) = \lambda y \in D.x$$
$$\psi_0(f) = f(\bot)$$

则 (φ_0, ψ_0) 是从 $[D \to D]$ 到 D 的投射。

证明. 首先证明 φ_0 连续，给定有向集 $X \subseteq D$，

$$\begin{aligned}\varphi_0(\bigsqcup X) &= \lambda\!\!\lambda y \in D. \bigsqcup X = \bigsqcup_{x\in X} \lambda\!\!\lambda y \in D.x \\ &= \bigsqcup \varphi_0(X)\end{aligned}$$

同理，ψ_0 连续。同时

$$\begin{aligned}\varphi_0(\psi_0(f)) &= \varphi_0(f(\bot)) = \lambda\!\!\lambda x.f(\bot) \\ &\sqsubseteq \lambda\!\!\lambda x.f(x) = f \\ \psi_0 \circ \varphi_0(f) &= \varphi_0(f)(\bot) = f\end{aligned}$$

□

定义 2.6 (构造 D_∞)**.** 给定完全偏序 D 与 (φ_0, ψ_0) 如上，定义

$$\begin{aligned}&D_0 = D \\ &D_{n+1} = [D_n \to D_n] \\ &(\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}) = (\varphi_n^*, \psi_n^*)\end{aligned}$$

令 $D_\infty = \varprojlim(D_n, \psi_n)$，记 $x \in D_\infty$ 为 $(x_0, x_1, \dots)$。

定义 2.7. (1) 对于 $n, m \in \mathbb{N}$，定义 $\Phi_{nm} : D_n \to D_m$ 为：

若 $n \leq m, m = n + k$，则递归定义 Φ_{nm} 为

$$\begin{aligned}&\Phi_{nn} = \lambda x \in D_n.x \\ &\Phi_{n(m+1)} = \varphi_m \circ \Phi_{nm}\end{aligned}$$

若 $m \leq n$，$n = m + k$，递归定义 Φ_{nm} 为

$$\Phi_{(n+1)m} = \Phi_{nm} \circ \psi_n$$

(2) 定义 $\Phi_{\infty n} : D_\infty \to D_n$ 为 $\Phi_{\infty n}(x) = x_n$。

(3) 定义 $\Phi_{n\infty} : D_n \to D_\infty$ 为 $\Phi_{n\infty}(x) = (\Phi_{ni}(x))_{i\in\mathbb{N}}$

引理 2.8. (1) 对于 $0 \leq n \leq m \leq \infty$，$(\Phi_{nm}, \Phi_{mn})$ 是从 D_m 到 D_n 的投射

(2) 对于 $0 \leq n \leq m \leq l \leq \infty$，$\Phi_{ml} \circ \Phi_{nm} = \Phi_{nl}$

证明. (1) 若 $n < m < \infty$，对于任意 $x \in D_m$，

$$\begin{aligned}\Phi_{nm} \circ \Phi_{mn} &= (\varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_n \circ \mathrm{id}_{D_n}) \circ (\mathrm{id}_{D_n} \circ \psi_n \circ \dots \circ \psi_{m-1}) \\ &\sqsubseteq \mathrm{id}_{D_m} \\ \Phi_{mn} \circ \Phi_{nm} &= (\mathrm{id}_{D_n} \circ \psi_1 \circ \dots \circ \psi_{m-1}) \circ (\varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \mathrm{id}_{D_n}) \\ &= \mathrm{id}_{D_n}\end{aligned}$$

$n < m = \infty$ 和 $n = m = \infty$ 的情况类似。

(2) 根据定义类似可得。

□

注意到在同构的意义下，

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots \subseteq D_\infty$$

又有一个事实是在 **CPO** 中，D_∞ 不仅是逆向极限，也是正向极限

$$D_\infty \cong \varinjlim(D_n, \varphi_n)$$

因此每个元素 $x \in D_n$ 也可被 $\Phi_{n\infty}(x) \in D_\infty$ 刻画。

引理 2.9. (1) 如果 $x \in D_n$，则 $(\Phi_{n\infty}(x))n = x$。

(2) 如果 $x \in D_n$，则 $\Phi_{(n+1)\infty}\varphi_n(x) = \Phi_{n\infty}x$。

(3) 如果 $x \in D_{n+1}$，则 $\Phi_{n\infty}\psi_n(x) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}x$。

证明. (1) 在 D_∞ 中，x 为 $\Phi_{n\infty}(x)$，因此 $x_n = x$。

(2) $\varphi_n(x)$ 在 D_∞ 中为 $(\dots, \psi_n(\varphi_n(x)), \varphi_n(x), \varphi_{n+1}\varphi_n(x), \dots)$，因为 $\psi_n(\varphi_n(x)) = x$，因此 $\varphi_n(x) = x$。

(3) $\varphi_n\psi_n(x) \sqsubseteq x$。

□

引理 2.10. 在 D_∞ 中，若 $x \in D_\infty$，则

(1) $(\Phi_{n\infty}x_n)_m = x_{\min(n,m)}$

(2) $n \le m \Rightarrow \Phi_{n\infty}(x_n) \sqsubseteq \Phi_{m\infty}(x_m) \sqsubseteq x$

(3) $x = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{n\infty}x_n$

(4) $\Phi_{n\infty}(\perp_n) = \perp$

证明. (1) 由 2.9 (2).

(2) 由2.9 (3)，$\Phi_{m\infty}(x_m) = \Phi_{m\infty}(\psi_m(x_{m+1})) \sqsubseteq \Phi_{(m+1)\infty}(x_{m+1})$，因此 $\Phi_{0\infty}(x_0) \sqsubseteq \Phi_{1\infty}(x_1) \sqsubseteq \cdots$。并且，由于对于任意 $i \in \mathbb{N}$，$(\Phi_{n\infty}x_n)_i = x_{\min(i,n)} \sqsubseteq x_i$，有 $x_n \sqsubseteq x$。

(3) 由（2），集合 $X = \{\Phi_{n\infty}(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 有向，因此

$$\begin{aligned}\bigsqcup X &= (\bigsqcup_n (\Phi_{n\infty}(x_n))_i)_{i\in\mathbb{N}} \\ &= (\bigsqcup_n \Phi_{\min(n,i)\infty}(x_{\min(n,i)}))_{i\in\mathbb{N}} \\ &= (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = x\end{aligned}$$

(4) 由（2），$\Phi_{n\infty}(\perp_n) \sqsubseteq \perp \sqsubseteq \Phi_{n\infty}\perp_n$。

□

引理 2.11. 若 $x, y \in D_\infty$，则对所有 $n, k \in \mathbb{N}$，$n \leq k$，有

(1) $\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{k+1}(y_k))$

(2) $\Phi_{(k+1)\infty}((\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_k)) = \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))$

证明. (1) 只需证明 $k = n+1$ 的情况：

$$\begin{aligned}
\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) &= \Phi_{n\infty}((\psi_{n+1}(x_{n+2}))(\psi_n(y_{n+1}))) \\
&= \Phi_{n\infty}(\psi_n \circ x_{n+2} \circ \varphi_n(\psi_n(y_{n+1}))) \\
&\sqsubseteq \Phi_{n\infty}(\psi_n(x_{n+2}(y_{n+1}))) \\
&\sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))
\end{aligned}$$

(2) 对 $k \geq n$ 归纳，考虑 $k+1$ 的情况：

$$\begin{aligned}
\Phi_{(k+1)\infty}((\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+2}(y_{k+1})) &= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_{k+1}(\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_{k+1})) \\
&= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_k \circ (\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1} \circ \psi_k(y_{k+1})) \\
&= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_k \circ (\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_k)) \\
&= \Phi_{k\infty}(\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1})_{k+1}(y_k)) \\
&= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))
\end{aligned}$$

□

引理 2.12. 对于任意 $x, y \in D_\infty$，

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

证明. 首先

$$\begin{aligned}
\phi_n(x_{n+1}(y_n)) &= \phi_n(\psi_{n+1}(x_{n+2})(\psi_n(y_{n+1}))) \\
&= \phi_n(\psi_n(x_{n+2}(\phi_n(\psi_n(y_{n+1}))))) \\
&\sqsubseteq \phi_n(\psi_n(x_{n+2}(y_{n+1}))) \\
&\sqsubseteq x_{n+2}(y_{n+1})
\end{aligned}$$

于是

$$\Phi_{(n+1)\infty}(\phi_n(x_{n+1}(y_n))) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

注意到 $\Phi_{(n+1)\infty}\phi_n = \Phi_{(n+1)\infty}\Phi_{n(n+1)} = \Phi_{n\infty}$，因此

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

□

定义 2.13. 给定 $x, y \in D_\infty$，于是由引理*2.12*，$\{\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) : n \geq 0\}$ 是一个递增序列，因此有最小上界，定义

$$x \cdot y = \bigsqcup_{n\geq 0} \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))$$

即

$$x \cdot y = \bigsqcup_{n} \Phi_{n\infty}(app_n(\Phi_{\infty(n+1)}(x), \Phi_{\infty n}(y)))$$

其中 $app_n : [D_{n+1} \times D_n] \to D_n$。

命题 2.14. D_∞ 上的 $\cdot$ 连续。

命题 2.15. 若 $x \in D_{n+1}, y \in D_n$，则

$$\Phi_{(n+1)\infty}(x) \cdot \Phi_{n\infty}(y) = \Phi_{n\infty}(x(y))$$

证明.

$$\begin{aligned}
\Phi_{(n+1)\infty}(x) \cdot \Phi_{n\infty}(y) &= \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \Phi_{k\infty}(\Phi_{(n+1)(k+1)}(x)(\Phi_{nk}(y))) \\
(2.10(1)) \qquad &= \bigsqcup_{k=0}^{n} \Phi_{k\infty} x_{i+1}(y_i) \\
(2.11) \qquad &= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))
\end{aligned}$$

□

命题 2.16. 对于任意 $x, y \in D_\infty$ 以及 $n \in \mathbb{N}$

(*1*) $(\Phi_{(n+1)\infty} x_n) \cdot y = \Phi_{(n+1)\infty}(x)_{n+1} \cdot \Phi_{n\infty}(y) = \Phi_{n\infty}((x \cdot \Phi_{n\infty}(y))_n)$

(2) $\Phi_{0\infty}(x_0) \cdot y = \Phi_{0\infty}(x_0) = \Phi_{0\infty}((x \cdot \bot)_0)$

证明. (1)

$$\begin{aligned}
\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}) \cdot y &= \bigsqcup_{i=0}^{\infty} \Phi_{i\infty}((\Phi_{(n+1)\infty} x_{n+1})_{i+1}(y_i)) \\
(2.11(1)) \qquad &= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} \Phi_{i\infty}((\Phi_{(n+1)\infty} x_{n+1})_{i+1}(y_i)) \\
(2.11(2)) \qquad &= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \\
(2.15) \qquad &= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\Phi_{n\infty}((x\cdot\Phi_{n\infty}(y))_n) &= \Phi_{n\infty}\left(\left(\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty}\Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n))_i))\right)_n\right)\right.\\ &= \Phi_{n\infty}\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty}\left(\Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n))_i))\right)_n\right)\\ &= \Phi_{n\infty}\left(\bigsqcup_{i=n}^{\infty}\left(\Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n))_i))\right)_n\right)\\ &= \Phi_{n\infty}\left(\bigsqcup_{i=n}^{\infty}\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))\right)\\ &= \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1})\cdot\Phi_{n\infty}(y_n)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\Phi_{0\infty}(x_0)\cdot y &= \Phi_{1\infty}((\Phi_{0\infty}(x_0))_1)\cdot y\\ &= \Phi_{0\infty}((\Phi_{0\infty}(x_0))_1((\Phi_{1\infty})(y_0)))\\ &= \Phi_{0\infty}(\varphi_0(x_0)(y_0)) = \Phi_{0\infty}(x_0)\end{aligned} \tag{2.15}$$

□

定理 2.17 (外延性)**.** 对于 $x,y\in D_\infty$

(1) $x\sqsubseteq y\Leftrightarrow\forall z\in D_\infty(x\cdot z\sqsubseteq y\cdot z)$

(2) $x=y\Leftrightarrow\forall z\in D_\infty(x\cdot z=y\cdot z)$

证明. (1) $\Rightarrow$：因为 $\cdot$ 是连续的，因此 $\lambda\!\!\lambda x.x\cdot z$ 是单调的。

$\Leftarrow$：假设 $\forall z\in D_\infty(x\cdot z\sqsubseteq y\cdot z)$，于是 $x\cdot\perp\sqsubseteq y\cdot\perp$，由命题2.16（2）得

$$\Phi_{0\infty}(x_0)=\Phi_{0\infty}((x\cdot\perp)_0)\sqsubseteq\Phi_{0\infty}((y\cdot\perp)_0)=\Phi_{0\infty}(y_0)$$

由于 $x\cdot\Phi_{n\infty}(z_n)\sqsubseteq y\cdot\Phi_{n\infty}(z_n)$，由命题2.15 和2.16 得

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(z_n))=\Phi_{n\infty}((x\cdot\Phi_{n\infty}(z_n))_n)\sqsubseteq\Phi_{n\infty}((y\cdot\Phi_{n\infty}(z_n))_n)=\Phi_{n\infty}(y_{n+1}(z_n))$$

因此

$$\forall n\in\mathbb{N}\forall z\in D_n(\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(z))\sqsubseteq\Phi_{n\infty}(y_{n+1}(z)))$$

即 $\Phi_{n+1}(x_{n+1})\sqsubseteq\Phi_{n+1}(y_{n+1})$，即 $x\sqsubseteq y$。

(2) 由（1）。

□

推论 2.18. D_∞ 是外延的 λ-模型。

定理 2.19 (完全性)**.** 对于 $f \in [D_\infty \to D_\infty]$，定义

$$\Box f = \bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda\!\!\lambda y \in D_n.(f(y))_n)$$

则

$$\forall y \in D_\infty (f(y)) = \Box f \cdot y$$

证明.

$$\begin{aligned}
\Box f \cdot y &= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}((\Box f)_{m+1}(y_m)) = \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}((\Box f \cdot \Phi_{m\infty}(y_m))_m) \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}\left(\left(\left(\bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda\!\!\lambda y \in D_n.(f(y))_n)\right) \cdot \Phi_{m\infty}(y_m)\right)_m\right) \\
&= \bigsqcup_{m,n} \Phi_{m\infty}\left(\left(\Phi_{(n+1)\infty}(\lambda\!\!\lambda y \in D_n.(f(y))_n) \cdot \Phi_{m\infty}(y_m)\right)_m\right) \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}\left(((\lambda\!\!\lambda y \in D_m.(f(y))_m)(y_m))_m\right) \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}(f(\Phi_{m\infty}(y_m))_m) = \bigsqcup_{k,l} \Phi_{l\infty}((f(\Phi_{k\infty}(y_k)))_l) \\
&= \bigsqcup_k f(\Phi_{k\infty}(y_k)) = f(y)
\end{aligned}$$

□

定理 2.20. $D_\infty \cong [D_\infty \to D_\infty]$

证明. 对于 $x \in D_\infty$，令 $F(x) = \lambda\!\!\lambda y \in D_\infty.x \cdot y$，由定理 2.19，$F$ 是满射，由定理 2.17 (2)，F 是单射，由命题 2.14 F 连续，F 的逆是

$$G = \lambda\!\!\lambda f.\bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda\!\!\lambda y \in D_n.\Phi_{\infty n}(f(\Phi_{n\infty}(y))))$$

□

由此可以看到

摘要. 本篇文章介绍了 Dana Scott 构造的 lambda 演算的一种模型 D_∞。