第一周作业

陈淇奥
21210160025

2021 年 9 月 25 日

练习 1 (1.3.9)**.** 证明：$(x, y) = (x', y')$ 当且仅当 $x = x' \wedge y = y'$

证明. 1. 若 $(x, y) = (x', y')$

(a) 若 $x \neq y$, 则 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$, $\{x\} \neq \{x, y\}$, $\{x'\} \neq \{x', y'\}$。因此 $\{x\} \in (x', y')$ 且 $\{x, y\} \in (x', y')$。因为 (x', y') 只有两个元素，于是 $\{x\} = \{x'\}$ 或 $\{x\} = \{x', y'\}$。若 $\{x\} = \{x', y'\}$，则 $\{x, y\} = \{x'\}$, 于是 $x \in \{x'\}$ 且 $y \in \{x'\}$, 得到 $x = x' = y$, 与假设矛盾, 因此 $\{x\} = \{x'\}$, $\{x, y\} = \{x', y'\}$, 因此 $x = x'$, $y = y'$。

(b) 若 $x = y$，则 $(x, y) = \{\{x\}\}$ 只有一个元素，于是 $\{x'\} = \{x', y'\}$，因此 $x' = y'$ 且 $x = y$。

2. 若 $x = x' \wedge y = y'$

于是 $(x', y') = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$，于是 $\forall x(x \in (x, y) \leftrightarrow x \in (x', y'))$ 成立，因此 $(x, y) = (x', y')$

$\square$

练习 2 (1.3.17)**.** 如果 $<$ 是良序，则它也是线序

证明. 令 $<$ 是 X 上的良序。对于任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$，考虑集合 $\{x, y\}$，它是 X 的子集，于是存在 $x_0 \in \{x, y\}$ 使得对任意 $y \in \{x, y\}$ 都有 $x_0 = y$ 或 $x_0 < y$。因为 $\{x, y\}$ 只有两个元素，因此 $x_0 = x$ 或 $x_0 = y$。若 $x_0 = x$，则 $x < y$；若 $x_0 = y$，则 $y < x$。因此 $<$ 满足三歧性，因此它是线序 $\square$

练习 3 (1.3.22)**.** 证明：对任意归纳集 X，$\omega \subseteq X$，因此无穷公理保证了它是一个集合，并且是最小的归纳集。

证明. 假设 n 是最小的满足 $n \in \omega$，$n \notin X$ 的后继序数，令 $n = S(m)$，则 $m < n$ 且 $m \in X$。因为 X 是归纳集，于是 $S(m) \in X$，因此矛盾。因此对于任何 $n \in \omega$，$n \in X$，所以 $\omega \subseteq X$。 $\square$

练习 4 (1.4.2)**.** 令 X 和 Y 为任意集合，则 X 和 Y 的 **对称差**定义为

$$X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

证明：

$$\begin{aligned}
&X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - Z \\
&X - Y = \emptyset \text{ 当且仅当} X \subseteq Y \\
&X \triangle X = \emptyset \\
&X \triangle Y = Y \Delta X \\
&(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z)
\end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}
x \in X \cap (Y - Z) &\Leftrightarrow x \in X \land (x \in Y \land x \notin Z) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \land x \in Y) \land x \notin Z \\
&\Leftrightarrow (x \in X \cap Y) \land x \notin Z \\
&\Leftrightarrow x \in (X \cap Y) - Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X - Y = \emptyset &\Leftrightarrow \neg \exists x (x \in X - Y) \\
&\Leftrightarrow \neg \exists x (x \in X \land x \notin Y) \\
&\Leftrightarrow \forall x (x \notin X \lor x \in Y) \\
&\Leftrightarrow \forall x (x \in X \to x \in Y) \\
&\Leftrightarrow X \subseteq Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in X \triangle X &\Leftrightarrow x \in (X - X) \cup (X - X) \\
&\Leftrightarrow x \in (X - X) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin X \\
&\Leftrightarrow x \neq x \\
&\Leftrightarrow x \in \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in X \triangle Y &\Leftrightarrow x \in (X - Y) \cup (Y - X) \\
&\Leftrightarrow x \in (X - Y) \vee x \in (Y - X) \\
&\Leftrightarrow x \in (Y - X) \vee x \in (X - Y) \\
&\Leftrightarrow x \in (Y - X) \cup (X - Y) \\
&\Leftrightarrow x \in Y \triangle X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in (X \triangle Y) \triangle Z &\Leftrightarrow x \in ((X \triangle Y) - Z) \cup (Z - (X \triangle Y)) \\
&\Leftrightarrow (x \in ((X \triangle Y) - Z)) \vee (x \in (Z - (X \triangle Y))) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \triangle Y \wedge x \notin Z) \vee (x \in Z \wedge x \notin (X \triangle Y)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in (X - Y) \cup (Y - X)) \wedge x \notin Z) \\
&\quad \vee (x \in Z \wedge (x \notin X \vee x \in Y) \wedge (x \in X \vee x \notin Y)) \\
&\Leftrightarrow (((x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \notin X \wedge x \in Y)) \wedge x \notin Z) \\
&\quad \vee (x \in Z \wedge ((x \notin X \vee x \in Y) \wedge x \notin Y) \vee ((x \notin X \vee x \in Y) \wedge x \in Y)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in X \wedge x \notin Y \wedge x \notin Z) \vee (x \notin X \wedge x \in Y \wedge x \notin Z)) \\
&\quad \vee (x \in Z \wedge x \notin X \wedge x \notin Y) \vee (x \in Z \wedge x \in X \wedge x \in Y) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \wedge ((x \notin Y \wedge x \notin Z) \vee (x \in Z \wedge x \in Y))) \\
&\quad \vee (x \notin X \wedge ((x \in Y \wedge x \notin Z) \vee (x \in Z \wedge x \notin Y))) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin Y \triangle Z) \vee (x \notin X \wedge x \in Y \triangle Z) \\
&\Leftrightarrow x \in X \triangle (Y \triangle Z)
\end{aligned}$$

$\square$

练习 5 (1.4.6)**.** 如果 X 是集合，定义 $-X = \{x \mid x \notin X\}$，证明 $-X$ 不是集合

证明. 如果 $-X$ 是集合，则 $-\emptyset = \{x \mid x \notin \emptyset\}$ 是集合并且是所有集合的集合。但是所有集合的集合不是集合，因此矛盾，于是 $-X$ 不是集合 $\square$