一阶逻辑（一）

第四章 - 一阶语言的结构与真值

姚宁远

复旦大学哲学学院

October 11, 2021

目录

对一阶公式的解释

以下公式的“意义”是什么？是否具有真假？

1. $\exists x_1 \ldots \exists x_n (E(x_1, x_2) \wedge \ldots \wedge E(x_{n-1}, x_n))$；
2. $\exists y_1 \ldots \exists y_n \forall x (E(x, y_1) \vee \ldots \vee E(x, y_n))$；
3. $\forall x E(x, x) \bigwedge \forall x \forall y (E(x, y) \leftrightarrow E(y, x))$
   $\bigwedge \forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z))$
4. $\forall x \forall y \exists \epsilon (x < y \wedge y < x + \epsilon)$;
5. $\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \exists y (y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \ldots + x_1 y + x_0 = 0)$

对一阶公式的解释

给定语言 L，我们需要对以下符号做出解释：

1. $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$ 等解释为布尔函数；
2. 谓词解释为 n-元关系；
3. 函数符号解释为函数；
4. 常元符号解释为常量；
5. 给量词 $\forall$ 指定一个其使用的范围。

L-结构 I

设 L 是一个一阶语言，则一个 L-结构 $\mathfrak{A}$ 是一个对于未语言中符号的函数，满足下列条件：

1. 给量词符号 $\forall$ 指定一个非空集，称作 $\mathfrak{A}$ 的论域，记作 $|\mathfrak{A}|$；
2. 对每个 n-元谓词符号 P，$\mathfrak{A}$ 都指定一个 n-元关系 $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$；
3. 对每个 n-元函数符号 f，$\mathfrak{A}$ 都指定一个 n-元函数 $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$；
4. 对每个常 y 元符号 c，$\mathfrak{A}$ 都指定一个元素 $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$。

赋值

1. 给定一个结构 $\mathfrak{U} = (U, P, f, c)$
2. 个含有自由变元的公式 $\phi(x)$ 在 $\mathfrak{U}$ 中是有意义的，但是没有真假；
3. 而对于任意的 $a \in U$，$\phi(a)$ 是关于 a 的一个断言，是有真值的；

定义

令 V 是所有变元的集合，一个赋值是从 V 到 U 的一个映射。

项的解释 I

定义

设 $\mathfrak{U} = (U, ...)$ 是一个 L-结构。$s : V \to U$ 是一个赋值。设 T 是项的集合，递归定义函数 $\bar{s} : T \to U$ 如下：

1. 对每个变元符 x，有 $\bar{s}(x) = s(x)$
2. 对每个常元符 c，有 $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{U}}$；
3. 如果 f 是 n-元函数符号，$t_1, ..., t_n$ 是项，则 $\bar{s}(ft_1...t_n) = f^{\mathfrak{U}}(\bar{s}(t_1), ..., \bar{s}(t_n))$。

项的解释 II

定义

设 $\mathfrak{U}=(U,\dots)$ 是一个 L-结构。$s:V\to U$ 是一个赋值。设 t 是一个项，其变元来自 $\{x_1,\dots,x_n\}$，递归定义函数 $t^{\mathfrak{U}}(x_1,\dots,x_n)$ 如下：对任意的 $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)\in|\mathfrak{U}|^n$，

1. 如果 t 是变元符 x_i，有 $t^{\mathfrak{U}}(\bar{a})=a_i$
2. 如果 t 是常元符 c，有 $t^{\mathfrak{U}}(\bar{a})=c^{\mathfrak{U}}$；
3. 如果 f 是 m-元函数符号，$t_1,\dots,t_m$ 是项，$t=ft_1\dots t_m$，则 $t^{\mathfrak{U}}(\bar{a})=f^{\mathfrak{U}}(t_1^{\mathfrak{U}}(\bar{a}),,\dots,t_m^{\mathfrak{U}}(\bar{a}))$。

注

注

设 $\mathfrak{U} = (U, ...)$ 是一个 L-结构。

1. 对任意的项 t, 映射 $s \mapsto \bar{s}(t)$ 事实上是“复合函数符号” t 在 $\mathfrak{U}$ 中的解释;
2. 设 $t = t(x_1, ..., x_n)$， $a_1, ..., a_n \in U$， 令 $s(x_i) = a_i$， 则

$$t^{\mathfrak{U}}(a_1, ..., a_n) = \bar{s}(t).$$

满足 I

原子公式

设 $\mathfrak{A} = (U, ...)$ 是一个 L-结构，$s : V \to U$ 是一个赋值，ϕ 是一个原子公式。我们称 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足公式 ϕ，记作 $(\mathfrak{A}, s) \models \phi$

1. $(\mathfrak{A}, s) \models (t_1 = t_2)$ 当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$；
2. $(\mathfrak{A}, s) \models P(t_1, ..., t_n)$ 当且仅当 $(\bar{s}(t_1), ..., \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$。

满足 II

递归定义

1. $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\psi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \psi$；
2. $(\mathfrak{A}, s) \models \psi_1 \to \psi_2$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\psi_1$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \psi_2$；
3. $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\psi$ 当且仅当对每个 $d \in U$，都有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \psi$，其中

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y), \text{如果} y \neq x \\ d, \text{如果} y = x \end{cases}$$

注

1. 一个闭公式在一个结构 $\mathfrak{A}$ 中有真值；
2. 一个公式在一个结构 $\mathfrak{A}$ 中的一个赋值下有真值；
3. 以上的真值源于 $\mathfrak{A}$ 的“结构”

语义蕴涵

语义蕴涵

设 Γ 是一个公式集，ϕ 是一个公式，我们称 Γ 语义蕴涵 ϕ，记作 $\Gamma \models \phi$，如果对每个结构 $\mathfrak{A}$，每个赋值 s，都有：如果 $(\mathfrak{A}, s)$ 满足 Γ 中所有的公式，则 $(\mathfrak{A}, s) \models \phi$。

类似地，可以定义：

- 语义等价；
- 普遍有效。

定理

定理

设 $\mathfrak{U} = (U, ...)$ 是一个 L-结构，ϕ 是一个公式，$s_1, s_2 : V \to U$ 是两个赋值，并且它们在 ϕ 的自由变元上取值相同，则

$$(\mathfrak{U}, s_1) \models \phi \iff (\mathfrak{U}, s_2) \models \phi$$

证明

对 ϕ 的长度归纳证明。设 ϕ 的自由变元集为 $\{x_1, ..., x_n\}$。

- 显然，对每个自由变元来自 $x_1, ..., x_n$ 的项，$\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$.
- 设 ϕ 是 $(t_1 = t_2)$，则
  - $(\mathfrak{A}, s_1) \models \phi \Leftrightarrow (\bar{s}_1(t_1) = \bar{s}_1(t_2))$
  - $(\mathfrak{A}, s_2) \models \phi \Leftrightarrow (\bar{s}_2(t_1) = \bar{s}_2(t_2))$
- 设 ϕ 是 $P(t_1, ..., t_m)$，则同理
- $(\mathfrak{A}, s_1) \models P(t_1, ..., t_m) \iff (\mathfrak{A}, s_2) \models P(t_1, ..., t_m)$;
- 由归纳假设，容易证明 ϕ 是 $\psi_1 \vee \psi_2$ 和 $\neg\psi$ 的情形；
- 设 ϕ 是 $\forall y \psi(x_1, ..., x_n, y)$;
- 则 $(\mathfrak{A}, s_1) \models \phi$ 当且仅当对每个 $d \in |\mathfrak{A}|$，$(\mathfrak{A}, s_1{}^y_d) \models \phi$;
- $s_1{}^y_d$ 与 $s_2{}^y_d$ 在 ψ 的自由变元上取值相同；
- 根据归纳假设，对每个 $d \in |\mathfrak{A}|$，$(\mathfrak{A}, s_2{}^y_d) \models \phi$;
- 故 $(\mathfrak{A}, s_2) \models \phi$。同理有 $(\mathfrak{A}, s_2) \models \phi \implies (\mathfrak{A}, s_1) \models \phi$.

注

1. 如果公式 ϕ 中自由出现的变元都来自 $\{x_1, ..., x_n\}$，则对任意的赋值 s_1, s_2，当 $s_1(x_i) = s_2(x_i)$，$i = 1, ..., n$ 的时候，总是有
$$(\mathfrak{A}, s_1) \models \phi \iff (\mathfrak{A}, s_2) \models \phi.$$
2. 基于以上原因，我们一般将 ϕ 记作 $\phi(x_1, ..., x_n)$，而用
$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, ..., a_n]$$
表示存在一个（对任意的）赋值 s 满足 $s(x_i) = a_i$ 使得 $(\mathfrak{A}, s) \models \phi$。

推论

推论

设 $\mathfrak{A} = (U, \ldots)$ 是一个 L-结构，σ 是一个闭语句。则或者

1. 对所有的赋值 s，都有 $(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$，或者
2. 对所有的赋值 s，都有 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$。

作业

P. 94：5.1.1，5.1.2，5.1.3，5.1.4，5.1.5，5.1.7，5.1.8，5.1.9，5.1.11，5.1.12

目录

可定义性

给定语言 L

1. 固定一个公式 σ 或者公式集 Σ，我们可以问什么样的结构可以满足它；
2. 固定一个结构 $\mathfrak{A}$，我们也可以问哪个子集可以被公式 ϕ 描述。

初等类

设 Σ 是 L 上的一个闭语句集合，则

$$\mathrm{Mod}\,\Sigma = \{\mathfrak{A} \models \Sigma \mid \mathfrak{A}\text{是一个}L-\text{结构}\}$$

一般把 $\mathrm{Mod}\ \{\tau\}$ 记作 $\mathrm{Mod}\ \tau$.

初等类

设 $\mathcal{K}$ 是一类结构，

1. 如果存在一个句子 τ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\ \tau$，则称 $\mathcal{K}$ 是一个初等类。
2. 如果存在一个句子集 Σ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\ \Sigma$，则称 $\mathcal{K}$ 是一个广义初等类。

线序

- $L = \{<\}$
- $\forall x \forall y \forall z (x < y \to y < z \to x < z)$;
- $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$;
- $\forall x \forall y (x < y \to \neg (y < x))$;

严格的线序是一个初等类。

群

- $L = \{\cdot, e\}$
- $\forall x \forall y \forall z (x(yz) = (xy)z)$;
- $\forall x (xe = ex = x)$;
- $\forall x \exists y (xy = yx = e))$;

群是一个初等类。无限群是一个广义初等类，但不是初等类。

可定义集合

可定义集合

设 $\mathfrak{A} = (U, ...)$ 是一个 L-结构，$\phi(x_1, ..., x_n)$ 是一个公式。我们称 U 上的 k-元关系

$$\{(a_1, ..., a_k) | \mathfrak{A} \models \phi[a_1, ..., a_k]\}$$

为公式 ϕ 在 $\mathfrak{A}$ 中定义的关系，记作 $\phi(U^k)$。称 U^k 的子集 X 可定义，如果存在公式 ϕ 使得 $X = \phi(U^k)$。

令 $L=\{0,S,+,\cdot\}$，$\mathcal{N}=\{\mathbb{N},0,S,+,\cdot\}$。则

- $\{(m,n)|\ m<n\}\subseteq\mathbb{N}^2$ 是可定义的；
- $\{(m,n)|\ m\equiv n(\mod k)\}\subseteq\mathbb{N}^2$ 是可定义的；
- 素数集合是可定义的；
- $\{n_1,...,n_k\}$ 是可定义的。

注

- 对于可数的语言而言，可定义的集合至多只有可数多个；
- 大多数的集合是不可定义的；
- $(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$ 的子集 $\mathbb{Q}$ 是不可定义的；
- $(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$ 中的函数 $\cos$ 和 $\sin$ 是不可定义的；
- $(\mathbb{C}, +, \times, 0, 1)$ 的子集 $\mathbb{R}$ 是不可定义的。

作业

P. 97： 5.2.1 - 5.2.4

目录

同态

同态

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是两个 L-结构。称一个函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 为 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，如果它满足以下条件：

1. 对每个非等词的 n-元谓词 P 有
$$(a_1, ..., a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \iff (h(a_1), ..., h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$
2. 对每个 n-元函数符号 f 有和每组 $|\mathfrak{A}|$ 中的元素 $a_1, ..., a_n$ 有
$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)).$$
3. 对每个常数符号 c，有 $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

如果以上 h 还是双射，则称 h 是一个同构，并且称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构，记作 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。

同态定理

同态定理

设 h 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，$s: V \to |\mathfrak{A}|$，则:

1. 对每个项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对每个不含量词和等词的公式 α，有 $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \iff (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$.
3. 如果 h 是单射，则【2】中的 α 中可以有等词。
4. 如果 h 是满射，则【2】中的 α 中可以有量词。

证明

对项和公式的长度归纳证明。

初等等价

定义

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是两个 L-结构。称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 初等等价，记作

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B},$$

如果对 L 中的任何闭语句 σ 都有

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \mathfrak{B} \models \sigma$$

注

1. 同构 $\Rightarrow$ 初等等价;
2. 初等等价 $\not\Rightarrow$ 同构;

自同构

称 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的同构为 $\mathfrak{A}$ 上的一个自同构。

推论

令 σ 是 $\mathfrak{A}$ 上的自同构，$R \subseteq |\mathfrak{A}|^n$ 是一个可定义关系。则对任意的 $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, ..., a_n) \in R \iff (h(a_1), ..., h(a_n)) \in R.$$

自同构

1. $h(x) = x^3$ 是 $(\mathbb{R}, <)$ 上的自同构，但是 $h(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$；
2. 对于 $\mathbb{C}$ 中的任何两个超越数 a, b，都存在自同构 $\sigma\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 使得 $\sigma(a) = b$；
3. $(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$ 的任何自同构都固定有理数集 $\mathbb{Q}$，但是 $\mathbb{Q}$ 不可定义；

作业

p. 102: 习题 5.3

Thanks!