Homework10

陈淇奥
21210160025

2021 年 12 月 5 日

Exercise 1 (3.4.6). 令 κ 为不可数正则基数，举出一个例子，使得 $X = \{C_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是 κ 上的无界闭集的族，而 $\bigcap X = \emptyset$，但是 $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \kappa$

证明. 令 $C_\alpha = \{x \in \kappa \mid x > \alpha\}$ $\square$

Exercise 2 (3.4.7). 如果令 $Y_\alpha = \{\xi \in X_\alpha \mid \xi > \alpha\}$，则 $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$

证明. $x \in \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\xi<x} X_\xi \Leftrightarrow \forall \xi < x(x \in X_\xi) \Leftrightarrow \forall \xi < x(x \in Y_\xi) \Leftrightarrow x \in \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$ $\square$

Exercise 3 (3.4.8). $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \cup \{\xi \mid \xi \leq \alpha\})$

证明. 对于任意 $\eta \in \bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \cup \{\xi \mid \xi \leq \alpha\})$, 当 $\beta < \eta$, 有 $\eta \in X_\beta$. 因此 $\eta \in \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha$

另一个方向显然 $\square$

Exercise 4 (3.4.16). 如果 $\alpha > \aleph_0$ 是正则基数，并且 $f : \alpha \to \alpha$ 是函数，则集合 $C = \{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$ 是 α 上的无界闭集

证明. 令 $C_\xi = \{\beta \mid f(\xi) < \beta < \alpha\}$，于是 $C = \triangle_{\xi<\alpha} C_\xi$。因为 C_ξ 是无界闭集，因此 C 是无界闭集 $\square$

Exercise 5 (3.4.21). 如果 κ 是不可达基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是强极限基数}\}$ 是 κ 上的无界闭集

证明. 令 $S = \{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{是强极限基数}\}$

无界：对任意 $\alpha < \kappa$，$\beth_\omega(\alpha) < \kappa$ 并且是强极限基数

闭：对于任意极限序数 $\eta < \kappa$ 并且 $\sup(C \cap \eta) = \eta$，则对任意 $\lambda < \eta$，因为 S 无界，存在 $\xi \in S$ 使得 $\lambda < \xi$，因为 ξ 是强极限基数，因此 $2^\lambda < \xi < \eta$，因此 η 是强极限基数，于是 $\eta \in S$ □

Exercise 6. 一个无穷基数 κ 是 **马洛基数** (Mahlo cardinal) 当且仅当 κ 是不可达基数并且 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{是正则基数}\}$ 是 κ 上的平稳集。如果 κ 是马洛基数，则 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{是不可达基数}\}$ 是 κ 上的平稳集，因此 κ 是第 κ 个不可达基数

证明. 令 $A = \{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{正则}\}$，$B = \{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{不可达}\}$，$C = \{\lambda < \kappa \mid \text{强极限}\}$，$A$ 是平稳集，C 是无界闭集

对于任意 κ 上的无界闭集 D，$B \cap D = A \cap C \cap D$ 非空，因此 B 是平稳集 □