Solutions

陈淇奥
21210160025

2022 年 3 月 13 日

1.1.4. 1. $a + a = a + (a \cdot 1) = a$

2. $a \cdot a = a \cdot (a + 0) = a$

3. $\Rightarrow$: $a \cdot b = a \cdot (a + b) = a$

   $\Leftarrow$: $a + b = b + a \cdot b = b$

4. $a + 0 = a + (a \cdot (-a)) = a$, $a + 1 = a + (a + (-a)) = a$

5. $\Rightarrow$: $a + b = b + (-b) = 1$, $a \cdot b = b \cdot (-b) = 0$

   $\Leftarrow$: $-b = -b \cdot 1 = -b \cdot (a + b) = -b \cdot a$

   $a = a \cdot 1 = a \cdot (b + -b) = -b \cdot a$

6. $-a + a = 1$ 且 $-a \cdot a = 0$，由 5 得 $a = --a$

7. $a + b + (-a) \cdot (-b) = a(b + (-b)) + b + (-a)(-b) = 1 + ab = 1$

   $(a + b)(-a)(-b) = b(-a)(-b) = 0$

8. $(-a) + (-b) + (a \cdot b) = ab + (-a) + (-b) \cdot (a + -a) = a(b + -b) + (-a)(1 + -b) = a + (-a) = 1.$

   $(a \cdot b) \cdot (-a + -b) = ab(-a) + ab(-b) = 0 + 0 = 0.$

$\square$

1.1.20. 1. $a+b=b \Rightarrow a \leq b \Leftrightarrow \exists c(a+c=b) \Rightarrow a \cdot b = a \cdot (a+c) = a \Rightarrow a+b=b+a \cdot b = b$

2. $a \leq c \Rightarrow a+c=c, b \leq c \Rightarrow b+c=c,$ 因此 $c=c+c=(a+c)+(b+c)=(a+b)+c,$ 因此 $a+b \leq c$

3. $a \cdot b = a, a \cdot c = a, a \cdot b \cdot c = a$

□

1.1.21. 1. 对于任意 $a, b, c \in \mathcal{B}$

   $a+a=a \Rightarrow a \leq a$

   如果 $a \leq b$ 且 $b \leq a$，则 $b = a \cdot b = a$

   如果 $a \leq b$ 且 $b \leq c$，则 $a+b=b$,$b+c=c$，因此 $c=b+c=a+b+c=a+c$，因此 $a \leq c$

2. 若 $a \leq b$，则 $a \cup b = b$，因此 $a \subseteq b$

   若 $a \subseteq b$，则 $a \cup b = b$，因此 $a \leq b$

3. $a \leq b \Leftrightarrow a+b=b \Leftrightarrow -b = -a \cdot -b \Leftrightarrow -b \leq -a$

4. $a \leq b \Rightarrow a+b=b$，于是 $a \cdot (-b) = a \cdot (-a \cdot -b) = 0$

   若 $a \cdot (-b) = 0$，则 $a+b = a \cdot (b + -b) + b = b + a \cdot b = b$

□

1.2.24. 若有穷布尔代数 $\mathcal{B}$ 不是原子化的，则存在 $a \in \mathcal{B}$ 不是原子化的，于是对于任意 $b < a$，b 不是原子，因此存在 $b' < b < a$，于是我们能构造一个无穷下降链，同时不存在 $b \in \mathcal{B}$ 使得 $b < b$，因此 $\mathcal{B}$ 无穷，矛盾 □