Homework3

陈淇奥
21210160025

2021 年 10 月 19 日

Exercise 1 (1.5.26). 证明任何序数都可表示为 $\alpha + n$，其中 α 是 0 或极限序数，而 $n \in \omega$。并且这种表示唯一。

证明. 由定理 1.4.12，任何非 0 序数 β 都可唯一表示为

$$\beta = \omega^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}$$

其中 $k \in \omega$，δ_i 和 γ_i 都是序数，$\gamma_i \in \omega$，并且 $\gamma_0 > \cdots > \gamma_{k-1}$。若 $\gamma_{k-1} \neq 0$，由练习 1.5.31，β 是极限序数且 $\beta = \beta + 0$。若 $\gamma_{k-1} = 0$，令 $\alpha = \omega^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \omega^{\gamma_{k-2}} \cdot \delta_{k-2}$，由练习 1.5.31，$\alpha$ 是极限序数，$\beta = \alpha + \delta_{k-1}$ □

Exercise 2 (1.5.30). 如果 $\alpha < \beta$，则

1. $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$
2. $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$

而 $\leq$ 不能替换为 $<$

证明. 1. 对 γ 应用超穷归纳证明：若 $\gamma = 0$，由条件可知 $\alpha \leq \beta$；若 $\gamma = \delta + 1$，由归纳假设，$\alpha + \delta \leq \beta + \delta$。若 $\alpha + \delta = \beta + \delta$，则 $(\alpha+\delta)+1 = (\beta+\delta)+1 = \alpha+(\delta+1) = \beta+(\delta+1)$；若 $\alpha+\delta < \beta+\delta$，于是 $(\alpha+\delta)+1 \leq \beta+\delta < (\beta+\delta)+1$，而 $(\alpha+\delta)+1 = \alpha+(\delta+1)$，$(\beta+\delta)+1 = \beta+(\delta+1)$，因此 $\alpha+(\delta+1) < \beta+(\delta+1)$。综上，$\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$。

若，对于任意 $\alpha+\theta \in \bigcup\{\alpha+\delta \mid \delta < \gamma\}$，由归纳假设，有 $\alpha+\theta \leq \beta+\theta$。于是 $\bigcup\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\} \subseteq \bigcup\{\beta+\delta \mid \delta<\gamma\}$ ，于是 $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$。

若 $\alpha, \beta \in \omega$ 且 $\gamma = \omega$，则 $\alpha+\omega = \beta+\omega$。

2. 对 γ 应用超穷归纳证明：若 $\gamma = 0$，则 $\alpha \cdot \gamma = 0 = \beta \cdot \gamma$；若 $\gamma = \delta+1$，$\alpha\cdot\gamma = \alpha\cdot(\delta+1) = \alpha\cdot\delta+\delta \leq \beta\cdot\delta+\delta = \beta\cdot(\delta+1) = \beta\cdot\gamma$；若 γ 是极限序数，对于任意 $\alpha\cdot\theta \in \bigcup\{\alpha\cdot\theta \mid \theta<\gamma\}$，都有 $\alpha\cdot\theta \leq \beta\cdot\theta$，于是 $\alpha\cdot\gamma \subseteq \beta\cdot\gamma$，因此 $\alpha\cdot\gamma \leq \beta\cdot\gamma$

   若 $\alpha, \beta \in \omega$，则 $\alpha\cdot\omega = \beta\cdot\omega$

□

Exercise 3 (1.5.31). 一个序数 α 是极限序数当且仅当存在 β ，$\alpha = \omega\cdot\beta$

证明. 若 $\alpha = \omega\cdot\beta$，对于任意 $\omega \leq \gamma < \alpha$，由定理 1.4.12，$\gamma = \omega\cdot\delta_0+\delta_1$，其中 $\delta_0 < \beta$。于是

$$\gamma+1 = (\omega\cdot\delta_0+\delta_1)+1 = \omega\cdot\delta_0+(\delta_1+1) < \omega\cdot\delta_0+\omega = \omega\cdot(\delta_0+1) \leq \omega\cdot\beta$$

对于任意 $\gamma < \omega$，$\gamma+1 < \omega < \alpha$。因此 α 不是后继序数，于是它是极限序数

若 α 是极限序数，由定理 1.4.12 可知

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\cdot\delta_0+\cdots+\omega^{\gamma_{k-1}}\cdot\delta_{k-1}$$

其中 $k\in\omega$,δ_i 和 γ_i 都是序数且 $\gamma_0 > \cdots > \gamma_{k-1}$。若 $\gamma_{k-1} = 0$, 则因为 $\delta_{k-1} \in \omega$ 是后继序数，所以 $\delta_{k-1} = \delta'_{k-1}+1'$，于是

$$\alpha = (\omega^{\gamma_0}\cdot\delta_0+\cdots+\omega^{\gamma_{k-2}}\cdot\delta_{k-2}+\delta'_{k-1})+1$$

是后继序数，矛盾。因此 $\gamma_{k-1} \neq 0$，于是

$$\alpha = \omega\cdot(\omega^{\gamma_0-1}\cdot\delta_0+\cdots+\omega^{\gamma_{k-1}-1}\cdot\delta_{k-1})$$

□

Exercise 4 (1.5.33). 找到函数 $f:\omega\to\omega+\omega$ 和 $g:\omega+\omega\to\omega+\omega+\omega$ 满足

1. $\sup(f[\omega]) = \omega + \omega$

2. $\sup(g[\omega + \omega]) = \omega + \omega + \omega$

3. 如果 $h = g \circ f$，有 $\sup(h[\omega]) < \omega + \omega + \omega$

证明. 对于任意 $x \in \omega$

$$f(x) = \begin{cases} \omega + x & x\text{是偶数} \\ 0 & x\text{是奇数} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x\text{是偶数} \\ \omega + x & x\text{是奇数} \end{cases} \qquad g(\omega + x) = \begin{cases} 0 & x\text{是偶数} \\ \omega + \omega + x & x\text{是奇数} \end{cases}$$

□

Exercise 5 (1.5.38). 对任意集合 X，存在一个序数 $H(X)$，$H(X)$ 不与 X 的任意子集等势，并且是具有如此性质的最小序数。令 $W = \{w \subseteq X \mid w\text{上存在良序}\}$，

$$H(X) = \{\alpha \mid \text{存在} w \in W, \alpha\text{是与 } w \text{ 同构的唯一序数}\}$$

证明 W 是集合，$H(X)$ 是序数。

证明. 令

$$\begin{aligned} \varphi(w) = \exists R(R \subseteq X \times X \wedge \forall x \forall y((x, x) \notin R \wedge ((x, y) \in R \to \neg(y, x) \notin R)) \\ \wedge \forall Y(Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \wedge \exists y_0(y_0 \in Y \wedge \forall y(y \in Y \to y_0 = y \vee y_0 < y)))) \end{aligned}$$

于是 $\varphi(w)$ 表达了 w 上存在良序，于是 $W = \{w \in \mathcal{P}(X) \mid \varphi(w)\}$ 是集合。

由替换公理，$H(X)$ 是集合。由引理 1.3.28，$\in$ 在 $H(X)$ 是良序。对于任意非空 $y \in H(X)$ 与 $x \in y$，y 与某个 $w \in W$ 同构，记为 $f : y \to w$，则 $f|x$ 依然是同构。因为 x 是序数，f 保序，于是 $f(x)$ 是良序集，因此 $f(x) \in W$，所以 $x \in H(X)$。从而 $H(X)$ 是传递的，于是 $H(X)$ 是序数。 □