

第一周作业

陈淇奥

2021 年 9 月 22 日

练习 1 (1.3.9). 证明: $(x, y) = (x', y')$ 当且仅当 $x = x' \wedge y = y'$

证明. 1. 若 $(x, y) = (x', y')$

- (a) 若 $x \neq y$, 则 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$, $\{x\} \neq \{x, y\}$, $\{x'\} \neq \{x', y'\}$. 因此 $\{x\} \in (x', y')$ 且 $\{x, y\} \in (x', y')$. 因为 (x', y') 只有两个元素, 于是 $\{x\} = \{x'\}$ 或 $\{x\} = \{x', y'\}$. 若 $\{x\} = \{x', y'\}$, 则 $\{x, y\} = \{x'\}$, 于是 $x \in \{x'\}$ 且 $y \in \{x'\}$, 得到 $x = x' = y$, 与假设矛盾, 因此 $\{x\} = \{x'\}$, $\{x, y\} = \{x', y'\}$, 因此 $x = x', y = y'$.
- (b) 若 $x = y$, 则 $(x, y) = \{\{x\}\}$ 只有一个元素, 于是 $\{x'\} = \{x', y'\}$, 因此 $x' = y'$ 且 $x = y$.

2. 若 $x = x' \wedge y = y'$

于是 $(x', y') = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, 于是 $\forall x(x \in (x, y) \leftrightarrow x \in (x', y'))$ 成立, 因此 $(x, y) = (x', y')$

□

练习 2 (1.3.17). 如果 $<$ 是良序, 则它也是线序

证明. 令 $<$ 是 X 上的良序. 对于任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 考虑集合 $\{x, y\}$, 它是 X 的子集, 于是存在 $x_0 \in \{x, y\}$ 使得对任意 $y \in \{x, y\}$ 都有 $x_0 = y$ 或 $x_0 < y$. 因为 $\{x, y\}$ 只有两个元素, 因此 $x_0 = x$ 或 $x_0 = y$. 若 $x_0 = x$, 则 $x < y$; 若 $x_0 = y$, 则 $y < x$. 因此 $<$ 满足三歧性, 因此它是线序 □

练习 3 (1.3.17). 证明：对任意归纳集 X , $\omega \subseteq X$, 因此无穷公理保证了它是一个集合, 并且是最小的归纳集。

证明. 假设 n 是最小的满足 $n \in \omega$, $n \notin X$ 的后继序数, 令 $n = S(m)$, 则 $m < n$ 且 $m \in X$ 。因为 X 是归纳集, 于是 $S(m) \in X$, 因此矛盾。因此对于任何 $n \in \omega$, $n \in X$, 所以 $\omega \subseteq X$ 。□

练习 4 (1.4.2). 令 X 和 Y 为任意集合, 则 X 和 Y 的 **对称差** 定义为

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

证明:

$$X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - Z$$

$$X - Y = \emptyset \text{ 当且仅当 } X \subseteq Y$$

$$X \Delta X = \emptyset$$

$$X \Delta Y = Y \Delta X$$

$$(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$$

证明.

$$\begin{aligned} x \in X \cap (Y - Z) &\Leftrightarrow x \in X \wedge (x \in Y \wedge x \notin Z) \\ &\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y) \wedge x \notin Z \\ &\Leftrightarrow (x \in X \cap Y) \wedge x \notin Z \\ &\Leftrightarrow x \in (X \cap Y) - Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X - Y = \emptyset &\Leftrightarrow \neg \exists x (x \in X - Y) \\ &\Leftrightarrow \neg \exists x (x \in X \wedge x \notin Y) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \notin X \vee x \in Y) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in X \rightarrow x \in Y) \\ &\Leftrightarrow X \subseteq Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in X \Delta X &\Leftrightarrow x \in (X - X) \cup (X - X) \\
&\Leftrightarrow x \in (X - X) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin X \\
&\Leftrightarrow x \neq x \\
&\Leftrightarrow x \in \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in X \Delta Y &\Leftrightarrow x \in (X - Y) \cup (Y - X) \\
&\Leftrightarrow x \in (X - Y) \vee x \in (Y - X) \\
&\Leftrightarrow x \in (Y - X) \vee x \in (X - Y) \\
&\Leftrightarrow x \in (Y - X) \cup (X - Y) \\
&\Leftrightarrow x \in Y \Delta X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in (X \Delta Y) \Delta Z &\Leftrightarrow x \in ((X \Delta Y) - Z) \cup (Z - (X \Delta Y)) \\
&\Leftrightarrow (x \in ((X \Delta Y) - Z)) \vee (x \in (Z - (X \Delta Y))) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \Delta Y \wedge x \notin Z) \vee (x \in Z \wedge x \notin (X \Delta Y)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in (X - Y) \cup (Y - X)) \wedge x \notin Z) \\
&\quad \vee (x \in Z \wedge (x \notin X \vee x \in Y) \wedge (x \in X \vee x \notin Y)) \\
&\Leftrightarrow (((x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \notin X \wedge x \in Y)) \wedge x \notin Z) \\
&\quad \vee (x \in Z \wedge ((x \notin X \vee x \in Y) \wedge x \notin Y) \vee ((x \notin X \vee x \in Y) \wedge x \in A)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in X \wedge x \notin Y \wedge x \notin Z) \vee (x \notin X \wedge x \in Y \wedge x \notin Z)) \\
&\quad \vee (x \in Z \wedge x \notin X \wedge x \notin Y) \vee (x \in Z \wedge x \in X \wedge x \in Y) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \wedge ((x \notin Y \wedge x \notin Z) \vee (x \in Z \wedge x \in Y))) \\
&\quad \vee (x \notin X \wedge ((x \in Y \wedge x \notin Z) \vee (x \in Z \wedge x \notin Y))) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin Y \Delta Z) \vee (x \notin X \wedge x \in Y \Delta) \\
&\Leftrightarrow x \in X \Delta (Y \Delta Z)
\end{aligned}$$

□

练习 5 (1.4.6). 如果 X 是集合, 定义 $-X = \{x \mid x \notin X\}$, 证明 $-X$ 不是集合

证明. 如果 $-X$ 是集合, 则 $-\emptyset = \{x \mid x \notin \emptyset\}$ 是集合并且是所有集合的集合。但是所有集合的集合不是集合, 因此矛盾, 于是 $-X$ 不是集合 \square

if $x \in \{x', y'\}$, then $x = x'$ or $x = y'$?

well-founded