复习题

习题 1.1. 如果 $\mathcal{F}$ 是 S 上的滤构成的一个 $\subseteq$-链，则 $\bigcup\mathcal{F}$ 是 S 上的滤。

习题 1.2. 如果 F 是非主超滤，则任意 $X \in F$ 都是无穷的。因此任何非主超滤必是弗雷歇滤的扩张。

习题 1.3. 如果 F 是 S 上的滤，而 $F' = \{X \subseteq S \mid S - X \notin F\}$，则 $F \subseteq F'$，并且 $F = F'$ 当且仅当 F 是超滤。

习题 1.4. 假设 $X \subseteq S$，证明：

（1） 如果 F 是 S 上的滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的滤；

（2） 如果 F 是 S 上的超滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的超滤；

（3） 如果 F 是 X 上的滤，则 F 能扩张为 S 上的超滤。

习题 1.5. 假设 S 是无穷的，则

（1） 存在 S 上的超滤 F，对任意 $X \in F$，$|X| = |S|$。这样的滤称为 S 上的**均匀超滤**（uniform ultrafilter）；

（2） $\{F \mid F$ 是 S 上的均匀超滤$\} = \{F \mid F$ 是 S 上的非主超滤$\}$ 当且仅当 S 是可数的。

习题 1.6. 如果 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤，则以下命题等价：

（1） F 是非主滤；

（2） $\{X \subseteq S \mid S - X$ 是有穷的$\} \subseteq F$；

（3） F 的元素都是无穷的。

习题 1.7. 如果 S 是无穷的，则 S 上的任何非主超滤都不是 $|S|^+$- 完全的。所以 ω 上的任何非主超滤都不是 σ-完全的。

习题 1.8. 如果 F 是 S 上的非主超滤，并且是 $|S|$-完全的，则 F 是均匀超滤。

习题 1.9. 如果 F 是 S 上的滤，并且令 $\mu = \sup\{\kappa \mid F \text{ 是 } \kappa \text{ 完全的}\}$，则 μ 是正则基数，并且 F 是 μ-完全的。

习题 1.10. 假设 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤。证明 F 是 κ-完全的当且仅当对任意 $\tau < \kappa$ 和任意划分 $\langle X_\xi \mid \xi < \tau \rangle$，总存在 $X_\xi \in F$。

习题 1.11. 如果 $\alpha > \aleph_0$ 是正则基数，并且 $f : \alpha \to \alpha$ 是函数，则集合 $C = \{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

Jech 第三版（第 7 章）

习题 1.12. 如果 U 是 S 上的超滤，令 $X \subseteq S \times S$ 为满足以下性质的集合：

$$\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a, b) \in X\} \in U\} \in U.$$

则所有这样的 X 组成族 F 是 $S \times S$ 上超滤。

习题 1.13. 令 U 是 S 上的超滤，$f : S \to T$ 是函数，证明 $U' = \{X \subseteq T \mid f^{-1}[X] \in U\}$ 是 T 上的超滤。

习题 1.14. 令 A 为自然数 $\mathbb{N}$ 上的线序 $(\mathbb{N}, \leq_s)$ 组成的集合并且满足：如果 $(\mathbb{N}, \leq_s)$ 与 $(\mathbb{N}, \leq_t)$ 都属于 A，则 $(\mathbb{N}, \leq_s)$ 与 $(\mathbb{N}, \leq_t)$ 不同构。证明 A 与 $\mathbb{R}$ 等势。

习题 1.15. 令 X 是一个序数的集合。$X^{<\omega}$ 是 X 中元素的有穷序列的集合。对任意 $s \in X^{<\omega}$，我们用 $|s|$ 表示 s 的长度。定义 $X^{<\omega}$ 上的序 $<_l$ 为：

$$\text{对任意 } s, t \in X\text{，} s <_l t \text{ 当且仅当}$$

(1) 存在 i，$i < |s|$ 并且 $i < |t|$，$s_i < t_i$，并且对任意 $j < i$，$s_j = t_j$；或者

(2) t 是 s 的真扩张，即，$|s| < |t|$，并且对任意 $i < |s|$，$s_i = t_i$，而且存在一个 j，$|s| < j < |t|$，$t_j \neq 0$。证明 $<_l$ 是一个线序。

习题 1.16. 令 λ 为一个无穷基数，记 $D = \lambda^{<\omega}$，定义 D 上的序为：对任意 $s, t \in D$，

$$s \prec t \text{ 当且仅当 } s^\frown\lambda <_l t^\frown\lambda,$$

其中，对任意有穷序列 $s = (s_0, \cdots, s_{n-1})$，任意序数 β，$s^\frown\beta = (s_0, \cdots, s_{n-1}, \beta)$。而 $<_l$ 是当 $X = \lambda \cup \{\lambda\}$ 时，1.15 中定义的 $X^{<\omega}$ 上的序。

(1) 证明：对任意 $s, t \in D$，$s \prec t$，对任意 $\alpha < \lambda$，

(2) 存在 $r \in D$ 使得：$s \prec r^\frown\alpha \prec t$。（2）对任意 $\alpha < \lambda$，任意 D 中的区间 $(s, t) = \{r \in D \mid s \prec r \prec t\}$，证明：存在 $Y \subseteq (s, t)$，使得 $(\alpha, <) \cong (Y, \prec)$。

习题 1.17. 假设 λ 是不可数的正则基数。$S \subseteq \lambda$ 是平稳集。$f : \lambda \to \lambda$ 在 S 上是退缩函数，即，对任意 $\alpha \in S$，$\alpha > 0$，$f(\alpha) < \alpha$。对任意 $\beta < \lambda$，定义 $S_\beta = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \beta\}$。最后，令 $I = \{\beta < \lambda \mid S_\beta\text{是平稳集}\}$。

(1) 证明 I 非空，即至少存在一个 β 使得 S_β 是平稳集。

(2) 如果 $|I| \neq \lambda$，则存在一个无界闭集 C，f 限制在 $C \cap S$ 上是有界的。

Jech 第三版（第 8 章）：

习题 1.18. 令 κ 是不可数正则基数，如果 $X \subseteq \kappa$ 不是平稳集，则存在退缩函数 $f : X \to \kappa$ 使得对任意 $\gamma < \kappa$，集合 $\{\alpha \in X \mid f(\alpha) < \gamma\}$ 是有界的。【提示：取 $C \cap X = \emptyset$，定义 $f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$。】

习题 1.19. 如果 κ 是马洛基数，则 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是不可达基数}\}$ 是 κ 上的平稳集，因此 κ 是第 κ 个不可达基数。

习题 1.20. 如果 $\kappa = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ 是第 } \lambda \text{ 个不可达基数}\}$，证明 κ 不是马洛基数。

习题 1.21. 如果 κ 是马洛基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是第 } \lambda \text{ 个不可达基数}\}$ 在 κ 中无界。

习题 1.22. (1) 令 κ 是极限基数，并且集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{是强极限基数}\}$ 在 κ 中无界，则 κ 是强极限基数。因此，

(2) 令 κ 是弱不可达基数，并且集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$是强极限基数$\}$ 在 κ 中无界，则 κ 是强不可达基数。

(3) 令 κ 是弱马洛基数，并且集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$是强极限基数$\}$ 在 κ 中无界，则 κ 是马洛基数。

习题 1.23. 证明不存在 ω 上的正则的非主超滤。

Schindler

习题 1.24 (4.1)**.** 如果 $\alpha < \omega_1$ 是序数，证明存在 $X \subseteq \mathbb{Q}$，$(\alpha, <) \cong (X, <_{\mathbb{Q}})$。【对 α 归纳。】

习题 1.25 (4.2)**.** 令 κ 为基数，$y = \kappa \cup \{\alpha \mid |\alpha| = \kappa\}$，则 $y = \kappa^+$。