Valuation Field

wu

2022 年 6 月 13 日

目录

1 环与理想

1.1 介绍

Definition 1.1. 称 A 为 **局部环**，如果 A 只有一个极大理想 I，称 $k = A/I$ 为 A 的 **剩余域**（residue field）

Proposition 1.2.

1. *设 A 为环，$I \subsetneq A$ 为理想，若每个 $x \in A \setminus I$ 均是单位元则 A 是局部环，I 是极大理想*

2. *若 A 为环，$I \subseteq A$ 为极大理想，若 $\forall a \in I$，有 $1 + a$ 均是单位元，则 A 是局部环*

1.2 分式化

Definition 1.3. 设 A 是一个整环，令 $A^\times = A \setminus \{0\}$，在 $A \times A^\times$ 上定义关系 $\sim$ 为

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow at - bs = 0$$

Definition 1.4. 称 $S \subseteq A$ 为 **乘法子集**，如果 $1 \in S$ 且 $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$

Definition 1.5. 设 $S \subseteq A$ 是乘法子集，定义 $A \times S$ 上的等价关系 $\sim$ 为

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S(u(at - bs) = 0)$$

将 (a, s) 的等价类记作 $\frac{a}{s}$，定义

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

则 $A \times S / \sim$ 是一个环，记作 $S^{-1}A$

Remark.

- $\forall x \in A$，$\frac{xa}{xs} = \frac{a}{s}$
- 若 S 有零因子，则 $S^{-1}A = 0$ 平凡
- $A \to S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$ 是同态
- 若 A 是整环，$S = A^\times$，则 $S^{-1} = \mathrm{Frac}(A)$

Example 1.1. 若 $\mathfrak{p}$ 是素理想，$S = A \setminus \mathfrak{p}$ 是乘法子集

- 令 $A_\mathfrak{p} = S^{-1}A$
- 令 $\mathfrak{m} = \{\frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\} = pA_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}S^{-1}$，则 $A_\mathfrak{p}$ 是局部环，$\mathfrak{m}$ 是 $A_\mathfrak{p}$ 的极大理想

1.3 多项式环

设 A 是一个环，则多项式环 $A[X]$ 的元素都形如

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in A, i \in \mathbb{N}$$

Definition 1.6. 设 A 是环，$a \in A$ **不可约**如果 $a \neq 0$ 不是单位元且 $\forall b, c \in A(a = bc \Rightarrow) b$ 或 c 为单位元

一个整环 A 是**唯一因子分解环**，如果 $\forall a \in A$，存在不可约元 $b_1, \dots, b_n \in A$ 使得 $a = b_1 \cdots_n$ 并且若存在不可约元 $c_1, \dots, c_m$ 使得 $a = c_1 \dots c_m$ 则 $m = n$，则 $\forall i < n \exists j < n (b_i = u_{ij} c_j)$，其中 u_{ij} 是单位元

Proposition 1.7. *若 A 是唯一因子分解环，则 $A[X]$ 也是*

Corollary 1.8. *若 k 是域，则 $k[X_1, \dots, X_n]$ 是唯一因子分解环*

Corollary 1.9. *k 是域，$f \in k[X_1, \dots, X_n]$，则 (f) 是素理想 $\Leftrightarrow f$ 不可约*

证明. $\Rightarrow$：$k[X_1, \dots, X_n]/(f)$ 是整环，如果 f 可约，则 $f = gh$，其中 $g, h \in k[X_1, \dots, X_n]$ 且不是单位元，于是 $g+(f), h+(f)$ 非零，而 $(g+(f))(h+(f)) = 0 + (f)$，矛盾

$\Leftarrow$：对于任意 $g, h, p \in k[X_1, \dots, X_n]$，若 $gh = fp$，因为 $k[X_1, \dots, X_n]$ 是唯一因子分解环，于是 f 整除 g 或者 f 整除 h □

2 局部环

一个环是局部环当且仅当所有非单位元构成一个理想。等价地，一个环是局部环当且仅当所有非单位元构成一个理想。

在环的语言 $\mathcal{L}_{ring} = \{+, \times, 0, 1\}$ 中局部环可以公理为

1. R 是环。
2. 所有的非单位元构成一个集合 $\mathfrak{m}$ 是理想，即 $\mathfrak{m}$ 关于 "+" 封闭，关于 "×" 吸收。

但是非单位元关于 "×" 总是吸收的，故而（2）可以改为

2. 所有非单位元关于"+"封闭，即 $\mathfrak{m}$ 是一个群。

Remark.
- $0 \in \mathbb{R}$ 出解析函数的函数芽的环 A 是局部环
- 一个函数 f 在 $0 \in \mathbb{R}$ 处解析 $\Leftrightarrow$ 存在开邻域 $U \ni 0$ 使得 f 在 U 上是个幂级数，即 $f \restriction_U = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，其中 $a_n \in \mathbb{R}$。

- 显然，$\sum a_n x^n \sim \sum b_n x^n \Leftrightarrow \forall n(a_n = b_n)$，故而

$$A = \{f \mid f\text{是幂级数且收敛半径} > 0\}$$

- $\mathfrak{m} = xA = \{xf \mid f \in A\}$ 是唯一的极大理想，其中极大是因为 $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{R}$。

Example 2.1. 设 R 是一个环，称 $\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ $(r_n \in R)$ 的元素为 R 上的形式幂级数，令 $R[[x]]$ 为 R 上所有形式幂级数构成的集合，定义

1. $\sum r_n x^n + \sum s_n x^n = \sum (r_n + s_n) x^n$
2. $\sum r_n x^n \sum s_n x^n = \sum_n (\sum_{i+j=n} r_i s_j) x^n$

则 $(R[[x]], +, \times, 0_R, 1_R)$ 是一个环。

Definition 2.1. 设 R 是一个环，称 $R[[x]]$ 为 R 的 **形式幂级数环**，若 $g = \sum r_n x^n \in R[[x]]$，则 g 的 **度数**记作 $\deg(g)$，定义为

$$\deg(g) = \min(n \in \mathbb{N} \mid r_n \neq 0)$$

定义 $\deg(0) = \infty$。（因此 $\deg(g) \geq 0$）

Lemma 2.2. *假设 R*

1. *若 $f \in R[[x]]$，且 $\deg(f) = n$，则*

$$f = x^n (\sum r_k x^k)$$

其中 $r_0 \neq 0$，即 $f = x^n g$ 其中 $\deg(g) = 0$

2. *若 $f, g \in R[[x]]$，则 $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$*
3. *若 $f = \sum r_n x^n$, $g = \sum s_n x^n$，则 $fg = 1 \Rightarrow r_0 s_0 = 1$*
4. *若 $f = \sum r_n x^n$，则 f 是单位 $\Rightarrow r_0$ 是单位 $(r_0 \neq 0)$*

证明. 1. 由定义，若 $f = \sum s_k x^k$ 且 $\deg(f) = n$，则 $s_0 = \cdots = s_{n-1} = 0$ 且 $s_n \neq 0$，因此 $f = x^n (\sum_{k=n}^{\infty} s_k x^k)$，对任意 $i \in \mathbb{N}$，令 $r_i = s_{i+n}$，则 $f = x^n (\sum r_k x^k)$，其中 $r_0 \neq 0$。

2. 假设 $\deg(f) = n$，$\deg(g) = m$，则由（1），$f = x^n(\sum r_k x^k)$，$g = x^m(\sum s_k x^k)$，其中 $r_0, s_0 \neq 0$，因此 $fg = x^{n+m}\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n} r_i s_j)x^n$，因为 $r_0, s_0 \neq 0$，R 是整环，因此 $r_0 s_0 \neq 0$，因此 $\deg(fg) = n + m = \deg(f) + \deg(g)$。

3. 由定义，$fg = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n} r_i s_j)x^n = 1$，因此 $r_0 s_0 = 1$

4. 如果 f 是单位，则存在 $g \in R[[x]]$ 使得 $fg = 1$，由（3），r_0 是单位。

□

Proposition 2.3. *若 R 是局部环，则 $R[[x]]$ 也是局部环。*

证明.

- 只需验证非单位元关于加法封闭。
- 设 $f \in R[[x]]$ 是单位元，则 $f = r_0 + g$，其中 r_0 是 R 的单位，$\deg(g) \geq 1$。
- 令一方面，若 $f = r_0 + g$ 且 $r_0 \in R$ 是单位，$\deg(g) \geq 1$，取 $s_0 \in R$ 使得 $s_0 r_0 = 1_R$，则 $s_0 f = 1 + s_0 g$，令 $h = -s_0 g$。

Claim: $h + h^2 + h^3 + \cdots \in R[[x]]$

证明. 设 $h = \sum s_k x^k$，其中 $s_0 = 0$，令 $g = \sum_{n=1}^{\infty} h^n = \sum r_k x^k$，于是 $r_0 \in R$，若 $r_0, \ldots, r_n \in R$，则 $r_{n+1} = s_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} s_i r_{n-i} \in R$，因此对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$r_k \in R$，因此 $g \in R[[x]]$。 □

- 考虑等式 $(1-h)(1+h+h^2+\ldots) = 1$，则 $s_0 f(1+h+h^2+\ldots) = 1$，故 f 是单位，因此
- $f \in R[[x]]$ 是单位 $\Leftrightarrow f = r_0 + g$，其中 r_0 是单位且 $\deg(g) \geq 1$。
- $f \in R[[x]]$ 不是单位 $\Leftrightarrow \deg(f) \geq 1$ 或 $f = r + g$，其中 r 不是单位且 $\deg(g) \geq 1$。
- f 不是单位 $\Leftrightarrow f \in \mathfrak{m}_0 + xR[[x]] = \{r + g \mid r \in \mathfrak{m}_0, g \in xR[x]\}$，其中 $\mathfrak{m}_0$ 是 R 的极大理想。
- 显然 $\mathfrak{m}_0 + xR[[x]]$ 是“+”封闭的，故 $R[[x]]$ 是局部环。

$\square$

Corollary 2.4. *若 R 是局部环，$\mathfrak{m}_0$ 为 R 的极大理想，则*

1. *$R[[x]]$ 是局部环，其极大理想为*

$$\mathfrak{m}_0 + (x)$$

2. *若 k 是域，则 $k[[x]]$ 中的理想排成一个降链*

$$I_0 = \mathfrak{m}_0 + (x) \supseteq I_1 = (x) \supseteq \cdots \supseteq I_n = (x^n) \supseteq \dots$$

证明. 1. 已证。

2. 设 J 是 $k[[x]]$ 的理想，令 $n = \min\{\deg(f) \mid f \in J\}$，若 $n = \infty$，则 $J = (0)$。

   若 $n < \infty$ 且 $f = x^n g \in J$ 其中 $\deg(g) = 0$，由于 g 的首项是单位，因此 g 是单位，令 $h \in R[[x]]$ 使得 $hg = 1$，则 $x^n = hf = hgx^n \in J$，因此 $(x^n) \subseteq J$，又由 n 的定义，$J \subseteq (x^n)$，所以 $J = (x^n)$。

$\square$

Corollary 2.5. *若 k 是域，则 $k[[x]]$ 是局部环，其极大理想为 $(x) = xk[[x]]$，剩余域为 k。*

Corollary 2.6. *定义 $k[[X_1, \dots, X_{n+1}]] = k[[X_1, \dots, X_n]][[X_{n+1}]]$，则 $k[[X_1, \dots, X_{n+1}]]$ 为局部环，其极大理想 $\mathfrak{m}$ 为 $(X_1, \dots, X_{n+1})$，剩余域为 k。*

Example 2.2. 令 $p \in \mathbb{Z}$ 是一个素数，

1. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是一个域，这是因为若 $0 < r < p$，则 $(r, p) = 1$，故存在 m, n 使得

$$mr + np = 1 \Rightarrow mr \equiv_p 1$$

   故 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是一个局部环

2. 对每个 $n \in \mathbb{N}^+$，$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 是局部环

- $\mathbb{Z}$ 中包含 (p^n) 的理想与 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 中的理想一一对应
- $\mathbb{Z}$ 中的理想均形如 (k)
- $(p^n) \subseteq (k) \Leftrightarrow k \mid p^n \Rightarrow k = p^m$，其中 $m \leq n$
- 故 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 中的理想为

$$p^n\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = (0) \subseteq p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \subseteq \cdots \subseteq p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

- 故 $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 为 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 的唯一极大理想，显然 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 中有 p^n 个元素。
- $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 的元素可唯一表示为

$$a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1}$$

其中 $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$。

3. 若 $m > n$，则 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 诱导了

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \arrow[dl] \\
\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

- $\forall m > n$，令 π_{mn} 为 $\mathbb{Z}/(p^m)$ 到 $\mathbb{Z}/(p^n)$ 的自然同态，即

$$\pi_{mn}(a_0 + a_1 p + \cdots + a_{m-1} p^{m-1}) = a_0 + \cdots + a_{n-1} p^{n-1}$$

- 令 $\mathbb{Z}^* = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p^n) = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{Z}/(p^n)\}$，
- 将 x_n 看作 $a_0 + \cdots + a_{n-1} p^{n-1}$ 或序列 $(a_0, \dots, a_{n-1})$
- 定义 $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}^*$ 为

$$\{(x_1, x_2, \dots,) \mid \pi_{mn}(x_m) = x_n, m > n\}$$

- 将 $(x_1, x_2, \dots)$ 中的每个 x_n 看作 $a_0+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}$,则 $(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow \forall m > n, x_m$ 是 x_n 的延长
- 故而 $(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{Z}_p$ 唯一对应一个幂级数 $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$

- 定义 $\mathbb{Z}^*$ 中的 $+$ 为

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$

- 定义 $\mathbb{Z}^*$ 中的 "$\times$" 为

$$(x_1, x_2, \dots) \cdot (y_1, y_2, \dots) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots)$$

- 定义零为 $(0, 0, \dots,)$，幺为 $(1, 1, \dots)$，则 $\mathbb{Z}^*$ 为环。
- 由于每个 π_{mn} 是同态，故 $\mathbb{Z}_p$ 对"+"与"$\times$"封闭：对任意 $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{Z}_p$，对任意 $m > n$，因为 π_{mn} 是同态，有 $\pi_{mn}(x_m + y_m) = \pi_{mn}(x_m) + \pi_{mn}(y_m) = x_n + y_n$，$\pi_{mn}(x_m \cdot y_m) = \pi_{mn}(x_m) \cdot \pi_{mn}(y_m) = x_n \cdot y_n$，故 $(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots), (x_1, x_2, \dots) \cdot (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{Z}_p$。
- 故 $\mathbb{Z}_p$ 是一个环，称其为 **p-进整数环**。
- $\mathbb{Z}_p$ 也称为 $\mathbb{Z}/(p^n)$ 的逆极限，即 $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/(p^n)$

Remark. 设 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{Z}_p$，则 x 可以记作 $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$，其中每个 $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$，因此 $x_1 = a_0, x_2 = a_0 + a_1 p$，…，$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k$。

设 $y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{Z}_p$，设它可写作 $b_0 + b_1 p + \dots$，令 $z = x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$，将 z 写作 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k p^k$，则

$$z_n = x_n + y_n = (\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k p^k) (\mod p^k)$$

即 z_n 是 $x_n + y_n$ 的 p-进制展开的前 n 项。

同理若 $z = xy$，则 z_n 是 $x_n y_n$ 的 p-进制展开的前 n 项。

故 $\mathbb{Z}_p$ 中的运算是"p-进制"运算。

Lemma 2.7. *label:6 若 A, B 是局部环，则 $f : A \to B$ 是满同态，则 $a \in A$ 是单位 $\Leftrightarrow f(a) \in B$ 是单位*

证明.

- 令 $\mathfrak{m}$ 是 B 的极大理想，
- 则 $\bar{f} : A/f^{-1}(\mathfrak{m}) \to B/\mathfrak{m}$ 是同构，

- 而 $B/\mathfrak{m}$ 是域，故 $A/f^{-1}(\mathfrak{m})$ 是域，故 $f^{-1}(\mathfrak{m})$ 是极大理想，
- 故 $a \in A$ 是单位 $\Leftrightarrow a \notin f^{-1}(\mathfrak{m}) \Leftrightarrow f(a) \notin \mathfrak{m}$ 是 B 的单位。

$\square$

Proposition 2.8. *1.* $\mathbb{Z}_p$ 是局部环

2. $\mathbb{Z}_p$ 的理想排成降链
$$p\mathbb{Z}_p \supseteq p^2\mathbb{Z}_p \supseteq \dots$$

3. $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

证明. 1. 设 $x = (x_1, x_2, \dots) = a_0 + a_1 p + \dots \in \mathbb{Z}_p$，即 $x_1 = a_0$，$x_2 = a_0 + a_1 p$，$\dots$。

Claim: x 是单位 $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

证明. $\Leftarrow$:

- 若 $a_0 \neq 0$，则 $a_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是单位，
- 故存在 $b_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 使得 $a_0 b_0 \equiv 1 \mod p$。
- 由于 π_{21} 是同态，而 $a_0 = \pi_{21}(a_0 + a_1 p)$ 是单位，由引理**??**，$a_0 + a_1 p \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 也是单位，
- 同理，$\forall b_1 \in \{0, \dots, p-1\}$，$b_0 + b_1 p \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 是单位，
- 令 $c_0 + c_1 p \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 使得
$$(a_0 + a_1 p)(c_0 + c_1 p) = 1 \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$$
- 则 $\pi_{21}((a_0 + a_1 p)(c_0 + c_1 p)) = a_0 c_0 = 1 = a_0 b_0$。
- 故 $a_0 c_0 - a_0 b_0 \equiv 0 \mod p$，因此 $c_0 \equiv b_0 \mod p$，所以 $c_0 = b_0$。
- 一般地，设 $b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{Z}/(p^n)$ 使得 $(a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1})(b_0 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}) = 1 \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$，
- 则存在 $b_n \in \{0, \dots, p-1\}$ 使得在 $\mathbb{Z}/(p^{n+1})$ 中有 $(a_0 + \dots + a_n x^n)(b_0 + \dots + b_n x^n) = 1$。

- 令 $y = b_0 + b_1 + \cdots = (y_1, y_2, \dots)$，则 $xy = 1$，故 x 是单位。

$\Rightarrow$：若 $a_0 = 0$，则 $x = (0, x_2, \dots)$ 显然不是单位。 $\square$

以上断言表明，所有非单位元形如 $x = (0, x_2, x_3, \dots)$ 是一个加法群，故而是极大理想，恰好是 $p\mathbb{Z}_p$

2. 设 $J \subseteq \mathbb{Z}_p$ 是一个非平凡理想

- 令 $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid p^n \in J\}$，显然 $k > 0$，$p^k\mathbb{Z}_p \subseteq J$
- 断言 $p^k\mathbb{Z}_p = J$。
- 设 $x = a_0 + a_1 p + \cdots \in J$，令 a_m 是第一个非零系数
- 则 $x = p^m(a_m + a_{m+1}p + \dots)$，
- 因为 $a_m \neq 0$，$a_m + a_{m+1}p + \dots$ 是单位，故存在 $y \in \mathbb{Z}_p$ 使得 $xy = p^m \in J$
- 由定义，$k \leq m \Rightarrow p^m \in p^k\mathbb{Z}_p \Rightarrow x \in p^k\mathbb{Z}_p$，
- 即 $\mathbb{Z}_p$ 的每个非平反理想都形如 $p^k\mathbb{Z}_p$。

3. 投射函数诱导了一个同态

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^* \arrow[r, "\pi_n"] & \mathbb{Z}/(p^n) \\
\mathbb{Z}_p \arrow[u] \arrow[ur, "\pi_n"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 $\pi_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/(p^n)$，$x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto x_n$，于是

$$\begin{aligned}
x \in \ker(\pi_n) &\Leftrightarrow x_n = 0 \\
&\Leftrightarrow x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots) \\
&\Leftrightarrow x = a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} \dots \\
&\Leftrightarrow x \in p^n\mathbb{Z}_p
\end{aligned}$$

$\square$

Remark. 证明 $\mathbb{Z}_p$ 是局部环的关键是验证

$$x = a_0 + a_1 p + \dots \text{是单位} \Leftrightarrow a_0 \neq 0$$

以下证明更简洁:

- 设 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{Z}_p \subseteq \prod \mathbb{Z}/(p^n)$, $x_1 = a_0, \dots, x_n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1}, \dots$
- 由于每个 $\mathbb{Z}/(p^n)$ 都是局部环且 $p\mathbb{Z}/(p^n)$ 是其极大理想,
- 故每个 x_n 在 $\mathbb{Z}/(p^n)$ 中可逆，令 y_n 是 x_n 在 $\mathbb{Z}/(p^n)$ 的逆
- $\pi_{mn}(x_m y_m) = \pi_{mn}(x_m)\pi_{mn}(y_m) = x_n \pi_{mn}(y_m) = 1$,
- 故 $\forall n < m$，$\pi_{mn}(y_m)$ 都是 x_n 的逆
- 断言：$\pi_{mn}(y_m) = y_n$
- $x_n(y_n - \pi_{mn}(y_m)) = 0 \Rightarrow y_n x_n (y_n - \pi_{mn}(y_m)) = 0$,
- 故 $y = (y_1, y_2, \dots)$ 是 x 的逆

更加简洁的方法:

- 取 $b \in \{0, \dots, p-1\}$ 使得 $a_0 \cdot b \equiv 1 \mod p$,
- 则 $bx = 1 + p(b_0 + b_1 p + \dots) = 1 - py$,
- 令 $c = 1 + py + p^2 y^2 + \cdots \in \mathbb{Z}_p$,
- 则 $bxc = (1 - py)(1 + py + (py)^2 + \dots) = 1$

Remark.

- $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_p$, $x \mapsto x$ 的 p-进制展开是一个单同态。
- $\mathbb{Z}$ 中不能被 p 整除的元素都是 $\mathbb{Z}_p$ 的单位。
- 令 $S = \mathbb{Z} - (p)$，则 S 是乘法集，$\mathbb{Z}$ 关于 (p) 的局部化 $\mathbb{Z}_{(p)} = S^{-1}\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ 是局部环，且 $pS^{-1}\mathbb{Z}$ 是极大理想

- $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \nmid b\} \subseteq \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}_p$ 的嵌入自然地扩张为 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 到 $\mathbb{Z}_p$ 的嵌入

$$
\begin{gathered}
f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \\
\Big\downarrow \\
\tilde{f} : S^{-1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \\
\frac{a}{b} \mapsto (f(b))^{-1} a
\end{gathered}
$$

- $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$
- 在形式上,$\mathbb{Z}_p$ 与 $\mathbb{F}_p[[X]]$ 有相似之处,然而 $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_p) = 0$,而 $\mathrm{Char}(\mathbb{F}_p[[X]]) = p$