Homework 10

陈淇奥
21210160025

2021 年 12 月 13 日

Exercise 1. 对任意 α 上的滤 F，如果 $X \notin F$，则 $\alpha - X$ 有正测度

证明. 如果存在 $Y \in F$ 使得 $(\alpha - X) \cap Y = \emptyset$，于是 $Y \subseteq X$，因此 $X \in F$，矛盾 $\square$

Exercise 2. 令 κ 为不可数正则基数，U 为 κ 上 κ 完全的正则非主超滤，则 κ 的所有无界闭集都属于 U

Exercise 3. 对任意不可数正则基数 κ，任意连续共尾函数 $f : \kappa \to \kappa$，它的不动点集 $\{\epsilon \mid f(\epsilon) = \epsilon\}$ 是 κ 的无界闭集

证明. 令 $S = \{\epsilon \mid f(\epsilon) = \epsilon\}$

无界：对任意 $\alpha \in \kappa$，令 $\epsilon_0 = f(\alpha)$,$\epsilon_{n+1} = f(\epsilon_n)$,$\epsilon = \bigcup_{n\in\omega} \epsilon_n$。于是 ϵ 是不动点且 $\epsilon > \alpha$

闭：对任意 η 使得 $\sup(S \cap \eta) = \eta$，于是 $f(\eta) = \bigcup\{f(\beta) : \beta \in S \cap \eta\} = \bigcup\{\beta : \beta \in S \cap \eta\} = \eta$，因此 $\eta \in S$ $\square$

Exercise 4. κ 是马洛基数当且仅当集合 $S = \{\lambda < \kappa \mid \lambda\text{是不可达基数}\}$ 是 κ 上的平稳集

证明. $\Rightarrow$。对任意无界闭集 C，都存在一个严格递增且连续的函数 $f : \kappa \to \kappa$ 使得 $C = \mathrm{im}(f)$。于是 f 有一个不动点 ϵ 且 ϵ 是不可达基数，因此 $C \cap S \neq \emptyset$

$\Leftarrow$。对于任意 κ 上的连续共尾函数 $f : \kappa \to \kappa$，它的不动点集 $A = \{\epsilon \mid f(\epsilon) = \epsilon\}$ 是无界闭集，因此存在 $\lambda \in A \cap S$ $\square$

Exercise 5. 令 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, 满足对任意 $s \in T$, 任意 $n \in \mathrm{dom}(s)$,$s(n+1) < s(n)$。$(T, \subset)$ 是一棵树，证明 T 没有无穷枝

证明. 若 T 有无穷枝 $(s_i : i \in \omega)$，令 $s = \bigcup_{i\in\omega} s_i$，于是 $\mathrm{dom}(s) = \omega$，而对于任意 $n \in \omega$，$s(n+1) < s(n)$，于是得到一条无穷下降链，矛盾 □

Exercise 6. 3.4.9 中 F 是 $\aleph_1$ 完全的非主超滤

证明. $X_0 = \emptyset$，因为 U 是超滤，$\emptyset \in F$。

$X_\gamma = \bigcup_{\beta\in\gamma} X_\gamma \in U$，因此 $\gamma \in F$。

若 $M \subseteq N$ 且 $M \in F$，于是 $X_M \subseteq X_N$，而 $X_M \in U$，于是 $X_N \in U$，$N \in F$。

若 $M, N \in F$，$X_{M\cap N} = X_M \cap X_N \in U$，于是 $M \cap N \in F$。

对任意 $M \subseteq \gamma$,$X_M \in U$ 或 $X_M^c \in U$，而 $X_M^c = X_{\gamma\setminus M}$，因此 $M \in F$ 或 $\gamma \setminus M \in F$。于是 F 是超滤。

由于每个 $X_\beta \notin U$，所以 $\{\beta\} \notin F$，F 是非主超滤。

对于任意 $\{Y_i : i \in \omega\}$，因为 U 是 $\aleph_1$ 完全的滤，$\bigcap_{i\in\omega} X_{Y_i} \in U$，于是 $\bigcap_{i\in\omega} Y_i \in U$。 □