

第三章 布尔代数与型空间

总结一下第一章中布尔代数与逻辑的几个主要结果。

1. 任给一个一致的理论 T ，存在一个由 T 确定的布尔代数 $\mathcal{B}(T)$ ，它的元素是等价关系 \sim 下的等价类，对任意公式 α, β ， $\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ 。这个 $\mathcal{B}(T)$ 称为 Lindenbaum 代数。
2. 在 Lindenbaum 代数 $\mathcal{B}(T)$ 中，每个滤 F 都是 T 的一致扩张。因此每个滤都是一个一致的理论。而每个超滤则是一个完全理论。
3. 如果 T 是完全的，则 $\mathcal{B}(T)$ 是特殊的布尔代数 $\{0, 1\}$ ，其中 $0 = \{\alpha \mid T \vdash \neg\alpha\}$ ， $1 = \{\alpha \mid T \vdash \alpha\}$ 。
4. 从另一个角度看， $\mathcal{B}(T)$ 上的每个超滤 U 都对应着 T 的一个模型 \mathfrak{A}_U ，对任意公式 α ， $\mathfrak{A}_U \models \alpha$ 当且仅当 $[\alpha] \in U$ 。所以超滤存在定理蕴涵着完全性定理。
5. 在 Stone 表示定理的证明中，借助 Stone 映射，我们为每一个 $a \in \mathcal{B}$ 指定一个超滤的集合 $\{U \mid U \in a\}$ 。这实际上是为 $\text{Ult}(\mathcal{B})$ 定义了一个拓扑结构，（参见习题 1.4.6 和 1.4.7）。 $\text{Ult}(\mathcal{B})$ 连同其上的拓扑称为 Stone 空间。

3.1 Stone 空间

Stone 空间是一个非常典型的结构，与逻辑有很多密切的联系。我们接下来讨论一些有关这个空间的性质，并给出模型论中的更为深刻的一个例子。

定义 3.1.1. 对任意集合 X , $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 称为 X 上的一个拓扑, 如果以下条件成立:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;
2. 如果 $O, V \in \mathcal{T}$, 则 $O \cap V \in \mathcal{T}$;
3. 对任意 $A \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup A \in \mathcal{T}$.

(X, \mathcal{T}) 称为拓扑空间, \mathcal{T} 中的 X 的子集称为开集, 开集的补集称为闭集。

例 3.1.2. 令 \mathbb{R} 为全体实数的集合, 对任意实数 $r \in \mathbb{R}$, 开区间

$$N = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - r| < \delta\}$$

称为 r 的邻域, 其中 δ 为任意实数, 称为 N 的半径。 \mathbb{R} 的子集 O 如果满足: 对任意 $r \in O$, 都存在 r 的邻域 N 使得 $N \subseteq O$, 就称 O 为开集。令 \mathcal{T} 为所有开集的族, 则 \mathbb{R} 在 \mathcal{T} 下是一个拓扑空间。

证明. 首先, $\emptyset \in \mathcal{T}$, 并且 $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ 。其次, 如果 O, V 是开集, $r \in O \cap V$, 则根据定义, 存在 N_1, N_2 都是 r 的邻域, 且 $N_1 \subseteq O, N_2 \subseteq V$ 。不妨假设 $\delta_1 < \delta_2$, 则 $N_1 \subseteq O \cap V$ 的子集。最后, 如果 $\{O_i\}_{i \in I}$ 是任意开集的族, $r \in O = \bigcup O_i$, 则存在 i , $r \in O_i$, 所以存在邻域 N , 使得 $r \in N \subseteq O$ 。 \square

以下练习几乎是显然的事实。

练习 3.1.3. 令 \mathbb{R} 为实数, 在 3.1.2 定义的拓扑中, 以下命题等价:

- (1) O 是开集;
- (2) 存在邻域的族 $\{N_i\}_{i \in I}$, $O = \bigcup_{i \in I} N_i$ 。

这使得我们可以做如下定义:

定义 3.1.4. 令 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ 称为这个空间的一个拓扑基, 如果 \mathcal{T} 中的元素都可以表示为 \mathcal{S} 中元素的并。 \mathcal{S} 中的元素称为基本开集。

例 3.1.5. 例3.1.2中, 实数上的拓扑 \mathcal{T} 以所有开区间为拓扑基。事实上, 所有以有理数为端点的开区间也是它的拓扑基, 并且是一个可数的拓扑基。

引理 3.1.6. 令 X 为一集合, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, \mathcal{S} 构成 X 上某一拓扑的拓扑基当且仅当以下条件成立:

- (1) 对任意 $x \in X$, 存在 $S \in \mathcal{S}$, $x \in S$;
- (2) 对任意 $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, 如果 $x \in S_1 \cap S_2$, 则存在 $S_3 \in \mathcal{S}$, $x \in S_3$ 并且 $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$ 。

练习 3.1.7. 令 X 为一集合, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, \mathcal{S} 构成 X 上某一拓扑的拓扑基当且仅当以下条件成立:

- (1) $\bigcup \mathcal{S} = X$;
- (2) 对任意 $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, $S_1 \cap S_2$ 是 \mathcal{S} 中集合的并。

练习 3.1.8. 任给布尔代数 \mathcal{B} , 令 $X = \text{Ult}(\mathcal{B})$ 。对任意 $a \in B$, 定义

$$N_a = \{U \in \text{Ult}(\mathcal{B}) \mid a \in U\},$$

则 $\{N_a \mid a \in B\}$ 构成 X 的一个拓扑基。

练习 3.1.9. 对任意拓扑空间 X 中有穷多个闭集的并还是闭集。

习题 1.4.6 告诉我们, N_a 既是开集也是闭集, 在一个拓扑空间中, 我们称这样的集合为开闭集。显然, 对任意的拓扑空间 X , \emptyset, X 是开闭集。

练习 3.1.10. 对任意拓扑空间 X , X 中的所有开闭集是一个集合代数。

定义 3.1.11. 一个拓扑空间 X 称为零维的, 如果它有一个开闭集构成的拓扑基。

零维空间也称为“完全不连通空间”。 $\text{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个零维空间。

定义 3.1.12. 令 X 为拓扑空间, 如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ 是开集的族, 并且 $\bigcup \mathcal{C} = X$, 就称 \mathcal{C} 是 X 的开覆盖。如果 X 的每个开覆盖 \mathcal{C} 都有一个有穷的子覆盖, 即存在 $\mathcal{C}_0 \subseteq_f \mathcal{C}$, 并且 $\bigcup \mathcal{C}_0 = X$, 则称 X 为紧致空间。

由习题1.4.7知道, $\text{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个紧致空间。

定义 3.1.13. 令 X 为拓扑空间, 如果对任意 $x, y \in X$, 总存在开集 M, N , $x \in M, y \in N$, 使得 $M \cap N = \emptyset$, 就称 X 为 Hausdorff 空间。

由习题1.4.6(2) 可知 $\text{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个 Hausdorff 空间: 如果超滤 $U_0 \neq V_0$, 任取 $a \in U_0$ 且 $a \notin V_0$, 则 $U_0 \in N_a$ 。由于 V_0 是超滤, $-a \in V_0$, 所以 $V_0 \in N_{-a}$, 但 $N_a \cap N_{-a} = \emptyset$ 。

令 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, 称 X 的子集族 \mathcal{Z} 有有穷交性质, 如果对任意有穷的集族 $\{Y_1, \dots, Y_n\} \subseteq \mathcal{Z}$, $Y_1 \cap \dots \cap Y_n \neq \emptyset$ 。

练习 3.1.14. 对任意拓扑空间 X , 以下命题等价:

- (1) X 是紧致空间;
- (2) 如果 \mathcal{Z} 是闭集的族且有有穷交性质, 则 $\bigcap \mathcal{Z} \neq \emptyset$ 。

定理 3.1.15. 对任意布尔代数 \mathcal{B} , $\text{Ult}(\mathcal{B})$ 在以 $\mathcal{S} = \{N_a \mid a \in B\}$ 为拓扑基的拓扑下, 是一个零维的紧致 Hausdorff 空间。这样的空间通常称为 Stone 空间。

也有文献称为布尔空间, 见 Halmos。

例 3.1.16. 给定一阶语言 \mathcal{L} , 令 X 是所有完全理论的族。对任意语句 $\sigma \in \mathcal{L}$, 令 $\langle \sigma \rangle = \{T \in X \mid T \models \sigma\}$, 则 $\mathcal{S} = \{\langle \sigma \rangle \mid \sigma \in \mathcal{L}\}$ 构成 X 的一个拓扑基: 这是因为 $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle = \langle \sigma \wedge \tau \rangle$, 由引理3.1.6可得。

同时, 这个完全理论的空间是一个零维空间: 每个基本开集都是开闭集。(请验证)

X 也是 Hausdorff 空间: 令 T_1, T_2 为两个完全理论, 且 $T_1 \neq T_2$, 则必有 $\sigma \in \mathcal{L}$, $T_1 \models \sigma$ 而 $T_2 \models \neg\sigma$ 。这样, $T_1 \in \langle \sigma \rangle, T_2 \in \langle \neg\sigma \rangle$ 。

在完全理论的空间中, 开集是形如 $\langle \sigma \rangle$ 的基本开集的并, 对偶地, 闭集是这样的基本开集的交。令 Σ 为一致的语句集, $F = \bigcap \{\langle \sigma \rangle \mid \sigma \in \Sigma\}$, 则 F 不空, 并且是闭集。对任意 $T \in F$, $\Sigma \subseteq T$ 。任取语句 τ , $\Sigma \models \tau$ 当且仅当对所有 $T \in F$, $T \models \tau$ 。所以 F 确定了一个以 Σ 为公理集的理论。除非 F 是一个单点集 $\{T\}$, 否则 F 确定的理论是一个不完全的理论。

为了证明这个完全理论的拓扑空间是紧致空间，我们需要几个新的定义。这也是为了充分利用我们所熟悉的超滤工具。

定义 3.1.17. 给定拓扑空间 X ， X 中的滤指的是某一个 X 的子集 Y 上的滤。

例 3.1.18. 对任意 $x \in X$ ，所有包含 x 的开集构成的族

$$\mathcal{N}_x = \{O \mid O \text{ 是开集并且 } x \in O\}$$

是整个空间 X 上的滤。请读者验证。

定义 3.1.19. 给定拓扑空间 X 中的滤 F ， $x \in X$ 称为 F 的极限点，如果对任意包含 x 的开集 O_x ，存在 $A \in F$ ， $A \subseteq O_x$ 。此时称 F 收敛到 x 。如果 F 至少有一个极限点，就称 F 是收敛的。

练习 3.1.20. 一个拓扑空间是 Hausdorff 空间当且仅当它的每个超滤有且只有一个极限点。

定理 3.1.21. 一个拓扑空间 X 是紧致的当且仅当 X 中的每个超滤都是收敛的。

证明. (\Rightarrow) 假设 U 是 X 中的超滤，并且不收敛。对任意 $x \in X$ ，存在一个开集 $O_x \in \mathcal{N}_x$ ，不存在 $u \in U$ 使得 $u \subseteq O_x$ （这实际上等价于 $O_x \notin U$ ）。令 $\{O_x \mid x \in X \text{ 且 } O_x \notin U\}$ 为这样的开集的族。这是整个空间的一个开覆盖。令 $\{O_1, \dots, O_n\}$ 为它的一个有穷子覆盖，并且 $\bigcup_{i=1}^n O_i = X$ 。任取 U 中元素 u ，

$$(u \cap O_1) \cup \dots \cup (u \cap O_n) = u \in U,$$

但 U 是超滤，所以存在 O_i ， $u \cap O_i \in U$ ，矛盾。

(\Leftarrow) 现在假设 X 不是紧致的。令 $\{O_i\}_{i \in I}$ 为 X 的一个开覆盖，并且没有有穷的子覆盖。任取 $\{O_1, \dots, O_n\}$ ， $O_1 \cup \dots \cup O_n \neq X$ ，所以 $(-O_1) \cap \dots \cap (-O_n) \neq \emptyset$ 。这即是说 $\{-O_i\}_{i \in I}$ 有穷交性质。令 U 为这个集族生成的超滤。对任意 $x \in X$ ，存在 O_i ， $x \in O_i$ ，由于 $-O_i \in U$ ，所以 $O_i \notin U$ ，即 U 不是收敛的。□

引理 3.1.22. 一阶语言 \mathcal{L} 中全体完全理论的空间是零维的 Hausdorff 紧致空间。

证明. 我们需要证明这个空间中的任意超滤都是收敛的。给定超滤 U ，对每一完全理论 T ，令 \mathfrak{A}_T 为 T 的一个模型。同时，令 $\mathfrak{A} = \text{Ult}_U \mathfrak{A}_T$ 为相应的超积模型。注意到 $\text{Th}(\mathfrak{A})$ 是一个完全理论。对任意开集 O ，由于 O 是基本开集的并，所以，如果 $\text{Th}(\mathfrak{A}) \in O$ ，则存在 σ ， $\text{Th}(\mathfrak{A}) \in \langle \sigma \rangle$ ，这意味着 $\text{Th}(\mathfrak{A}) \models \sigma$ ，亦即 $\mathfrak{A} \models \sigma$ 。由 Łoś 定理， $\langle \sigma \rangle = \{T \mid \mathfrak{A}_T \models \sigma\} \in U$ 。这就证明了超滤 U 收敛于 U 所确定的超积模型的理论 $\text{Th}(\mathfrak{A})$ 。□

引理 3.1.23. 令 \mathcal{L} 为一阶语言， Σ 为 \mathcal{L} 中的语句集， Σ 是一致的当且仅当 Σ 是有穷一致的。

证明. 考虑 \mathcal{L} 的所有完全理论构成的空间。由引理 3.1.22，它是一个零维的 Hausdorff 紧致空间。对任意 $\sigma \in \Sigma$ ， $\langle \sigma \rangle$ 是这个空间中的闭集。由题设， $\{\langle \sigma \rangle \mid \sigma \in \Sigma\}$ 是一个有穷交性质的闭集族，由练习 3.1.14， $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} \langle \sigma \rangle \neq \emptyset$ 。对任意完全理论 $T \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \langle \sigma \rangle$ ，都有 $\Sigma \subseteq T$ ，所以 Σ 是一致的。□

3.2 型空间

给定一个语言 \mathcal{L} ， \mathcal{L} 的完全理论的空间由句子集的族构成。很自然地，我们是否可以用类似的工具来处理带自由变元的公式呢？这就是型空间。

对任意 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} ，任意 $a \in |\mathfrak{A}|$ ，公式集 $\{\phi(x) \mid \mathfrak{A} \models \phi(a)\}$ 就称为 a 在 \mathfrak{A} 中实现的 1-型，记作 $\text{tp}^{\mathfrak{A}}(a)$ 。（多数不引起误解的情形下，我们省略上标 \mathfrak{A} 。） $\text{tp}(a)$ 中的元素是 \mathcal{L} 中所有那些至多只含一个自由变元的公式，并且“在 a 处为真”。所以完全理论 $\text{Th}(\mathfrak{A})$ 包含在 $\text{tp}(a)$ 中。通常我们也将 $\text{tp}(a)$ 的子集称为 1-型，而 $\text{tp}(a)$ 称为完全 1-型，因为对任意只含一个自由变元的公式 $\phi(x)$ ， $\phi(x) \in \text{tp}(a)$ 或 $\neg\phi(x) \in \text{tp}(a)$ 。

定义 3.2.1. 给定语言 \mathcal{L} ， \mathcal{L} 的公式集 p 称为一个 1-型，如果存在 \mathcal{L} 的结构 \mathfrak{A} ， $a \in |\mathfrak{A}|$ ， $p \subseteq \text{tp}(a)$ 。如果 p 还满足：对任意只含一个自由变元的公式 $\phi(x)$ ， $\phi(x) \in p$ 或 $\neg\phi(x) \in p$ ，就称 p 为完全 1-型。

定义 3.2.2. 给定语言 \mathcal{L} ， $\Sigma(x)$ 为 \mathcal{L} 的只含一个自由变元的公式集。

- (1) 对任意 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} , 任意 $a \in |\mathfrak{A}|$, 如果 $\mathfrak{A} \models \Sigma(a)$, 就称 a 是 $\Sigma(x)$ 的一个实现。
- (2) $\Sigma(x)$ 在 \mathfrak{A} 中可满足, 如果存在 $a \in |\mathfrak{A}|$, a 实现 $\Sigma(x)$;
- (3) $\Sigma(x)$ 在 \mathfrak{A} 中有穷可满足, 如果对任意 $X \subseteq_f \Sigma(x)$, X 都在 \mathfrak{A} 中可满足。

显然, 如果 p 是一个 1-型, 则 a 实现 p 当且仅当 $p \subseteq \text{tp}(a)$ 。

例 3.2.3. 令 $\mathcal{L} = \{<\}$ 为序的语言, 则 $\{x > 1, x > 2, \dots\}$ 在 $(\mathbb{R}, <)$ 中有穷可满足, 但在 \mathbb{R} 中没有实现。

回忆数理逻辑的两个基本概念。

定义 3.2.4. 令 \mathcal{L} 为一阶语言, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 为 \mathcal{L} 结构。

- (1) 如果对所有 \mathcal{L} 语句 σ , 都有 $\mathfrak{A} \models \sigma$ 当且仅当 $\mathfrak{B} \models \sigma$, 就称 \mathfrak{A} 与 \mathfrak{B} 是初等等价的, 通常表示为 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ 。
- (2) 如果 $f : A \rightarrow B$ 是单射, 并且对任意 \mathcal{L} 公式 $\phi(x_1, \dots, x_n)$, 任意 a_1, \dots, a_n , 都有

$$\mathfrak{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi(f(a_1), \dots, f(a_n)),$$

就称 f 是 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的初等嵌入, 我们用 $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ 表示 \mathfrak{A} 是 \mathfrak{B} 的初等子模型, 即 $\text{id} : A \rightarrow B$ 是初等嵌入。此时也称 \mathfrak{B} 是 \mathfrak{A} 的初等扩张。

引理 3.2.5. 给定语言 \mathcal{L} , $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 为 \mathcal{L} 结构。

- (1) 如果 $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, $a \in |\mathfrak{A}|$, 则 $\text{tp}^{\mathfrak{A}}(a) = \text{tp}^{\mathfrak{B}}(a)$;
- (2) 如果公式集 $\Sigma(x)$ 在 \mathfrak{A} 的某一初等扩张 \mathfrak{B} 中可满足, 则 $\Sigma(x)$ 在 \mathfrak{A} 中有穷可满足。
- (3) 如果 $\Sigma(x)$ 在 \mathfrak{A} 中有穷可满足, 则 $\Sigma(x)$ 是一个 1-型。

证明. (1) 是显然的: $\text{tp}^{\mathfrak{A}}(a) = \{\phi \mid \mathfrak{A} \models \phi(a)\} = \{\phi \mid \mathfrak{B} \models \phi(a)\} = \text{tp}^{\mathfrak{B}}(a)$ 。

(2) 任取 $X \subseteq_f \Sigma(x)$, 令 ϕ 为 X 中公式的合取。存在 $b \in |\mathfrak{B}|$, $\mathfrak{B} \models \phi(b)$, 所以 $\mathfrak{B} \models \exists x\phi$, 所以 $\mathfrak{A} \models \exists x\phi$, 所以 X 在 \mathfrak{A} 中可满足。

(3) 令 $X(x) \subseteq_f \Sigma(x)$, 并且 $a \in |\mathfrak{A}|$ 使得 $\mathfrak{A} \models X(a)$ 。给语言 \mathcal{L} 增加一个新的常量符号 c_a , 并且令 $c_a^{\mathfrak{A}} = a$, 则 $\{\sigma \in \mathcal{L} \cup \{c_a\} \mid \mathfrak{A} \models \sigma\} \cup X(c_a)$ 是可满足的 (语句集), 所以由紧致性定理, 存在模型 $\mathfrak{B} \models \Sigma(c_a)$, 令 $c_a^{\mathfrak{B}} = b$, 则 $\Sigma(x) \subseteq \text{tp}^{\mathfrak{B}}(b)$ 。 \square

我们还可以从另一个角度看待型。 $\text{tp}(a)$ 仍可以看做一个完全理论, 只是不是 \mathcal{L} 中的, 而是 $\mathcal{L} \cup \{c\}$ 中的, 其中 c 是一个新的常量符号, 它在 \mathfrak{A} 中的解释是 a 。为了简便, $\mathcal{L} \cup \{c\}$ 有时直接记作 $\mathcal{L}(a)$, 其中 a 是解释 c 的元素。这样, $\text{tp}(a)$ 就恰好是在 \mathfrak{A} 中为真的所有 $\mathcal{L}(a)$ 语句。

引理 3.2.6. \mathcal{L} 中公式集 p 是一个 1-型当且仅当 p 是 $\mathcal{L} \cup \{c\}$ 中的一个理论; p 是一个完全 1-型当且仅当它是 $\mathcal{L} \cup \{c\}$ 中的一个完全理论。

我们将所有 \mathcal{L} 中的完全 1-型构成的空间记作 S_1 : 对任意只含一个自由变元的公式 ϕ , 令 $\langle \phi \rangle = \{p \in S_1(T) \mid \phi \in p\}$, 则所有 $\langle \phi \rangle$ 构成它的一个拓扑基, $S_1(T)$ 在这个拓扑下是一个零维的 Hausdorff 紧致空间。相应地, \mathcal{L} 中的完全理论的空间记作 S_0 。

事实上, 对每个自然数 n , 我们还可以定义完全 n -型: 对任意 \mathcal{L} 模型 \mathfrak{A} , 任意 $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$ 上的一个完全理论称为 a_1, \dots, a_n 实现的完全 n -型。 S_n 表示所有完全 n -型组成的空间。

我们总是对某一类具体的型空间有兴趣。给定理论 T (不一定是完全的), 对任意 n , $S_n(T)$ 表示所有 T 的模型上的完全 n -型构成的空间。事实上, 它是 S_n 中的一个闭集: 对任意 $\sigma \in T$, $\langle \sigma \rangle = \{p \in S_n \mid \sigma \in p\}$ 是 S_n 中的开闭集。而 $S_n(T) = \bigcap_{\sigma \in T} \langle \sigma \rangle$, 它是闭集的交, 所以是闭集。

事实上, $S_n(T)$ 本身也是一个零维的 Hausdorff 紧致空间, 或者说是一个 Stone 空间。接下来我们讨论型空间与 Lindenbaum 代数之间的关系。

对任意理论 T , 任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们令 $\mathcal{B}_n(T)$ 表示

$$\{[\phi]_T \mid \phi \text{ 至多有 } n\text{-个自由变元}\}.$$

容易验证 $\mathcal{B}_n(T)$ 是一个布尔代数。

与第一章类似, 给定 $\mathcal{B}_n(T)$, 令 F 是其上的滤, 令 $\Sigma_F = \{\phi \mid [\phi] \in F\}$ 为 F 确定的公式集, 则以下事实成立:

- (1) Σ_F 是一致的, 并且 $T \subseteq \Sigma_F$;
- (2) 如果 $\phi \in \Sigma_F$, $T \vdash \phi \rightarrow \psi$, 则 $\psi \in \Sigma_F$;
- (3) 如果 $\phi, \psi \in \Sigma_F$, 则 $\phi \wedge \psi \in \Sigma_F$;
- (4) 如果 F 是超滤, 则对任意至多含有 n 个变元的公式 ϕ , $\phi \in \Sigma_F$ 或 $\neg\phi \in \Sigma_F$;
- (5) Σ_F 对推演封闭。

反过来,

引理 3.2.7. 对任意至多包含 n -个自由变元的公式集 Σ , 如果 $T \subseteq \Sigma$ 并且 Σ 对推演封闭, 则存在 $\mathcal{B}_n(T)$ 上的滤 F , $\Sigma = \Sigma_F$ 。

练习 3.2.8. 对任意 n , 令 $\text{Ult}(\mathcal{B}_n(T))$ 为 $\mathcal{B}_n(T)$ 上所有超滤的族, 则 $h(U) = \Sigma_U$ 是到 $S_n(T)$ 上的双射。

回忆一下布尔代数中原子的定义: $a \in B$ 是原子当且仅当 $0 < a$ 并且不存在 $b \in B$ 使得 $0 < b < a$ 。所以如果 $[\alpha]$ 是 $\mathcal{B}_n(T)$ 中的原子, 则不存在公式 ϕ 使得 $T \vdash \phi \rightarrow \alpha$, 但 $T \not\vdash \alpha \rightarrow \phi$ 。另外, 如果 $[\alpha]$ 是原子, 则对任意公式 ϕ , $T \vdash \alpha \rightarrow \phi$ 或 $T \vdash \alpha \rightarrow \neg\phi$ 。

如果 T 是完全理论, 则 $\mathcal{B}_n(T) = \{0, 1\}$, 所以 1 是原子。

练习 3.2.9. 如果 T 有一个模型 \mathfrak{A} , 至少有两个元素, 则对任意 $n > 0$, $\mathcal{B}_n(T)$ 没有原子。

练习 3.2.10. 以下命题等价:

- (1) $[\alpha]$ 是 $\mathcal{B}_n(T)$ 的原子;
- (2) $p = \{\phi \mid T \vdash \alpha \rightarrow \phi\} \in S_n(T)$, 即 p 是一个完全 n -型。

定义 3.2.11. 令 $p \in S_n(T)$ 为 T 的完全 n -型, 如果存在 α , $\{p\} = \langle \alpha \rangle$, 就称 p 是孤立型, 此时称 α 孤立 p 。

练习 3.2.12. α 孤立 p 当且仅当对任意 T 的模型 \mathfrak{A} , 任意 $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, $p = \text{tp}(\bar{a})$ 当且仅当 $\mathfrak{A} \models \alpha(\bar{a})$ 。

引理 3.2.13. 以下命题等价:

- (1) α 孤立 p ;
- (2) $T \cup \{\alpha\}$ 可满足, 并且对任意 $\phi \in p$, $T \models \alpha \rightarrow \phi$;

证明. (1) \Rightarrow (2)。如果 $T \not\models \alpha \rightarrow \phi$, 则 $T \cup \{\alpha, \neg\phi\}$ 可满足, 所以存在 $q \in S_n(T)$, $\{\alpha, \neg\phi\} \subseteq q$, 根据 (1), α 只属于 p , 所以 $p = q$, 所以 $\phi \notin p$ 。

(2) \Rightarrow (1)。假设 (1) 不成立, 令 $q \neq p$, $\alpha \in q$ 。任取 $\psi \in q$ 但 $\psi \notin p$, 则 $\neg\psi \in p$, 由 (2), $T \models \alpha \rightarrow \neg\psi$, 所以 $T \cup \{\alpha, \psi\}$ 不可满足, 但它是 T 的一个型, 矛盾。 \square

引理 3.2.14. 如果 T 是一致的理论, p 是 T 的型。以下命题等价:

- (1) p 不是孤立型;
- (2) 在 $\mathcal{B}_n(T)$ 中, $\prod\{[\phi] \mid \phi \in p\} = 0$ 。

证明. 假设 p 不是孤立型, 即任意 α 都不孤立 p , 所以, 对任意 α , 存在 $\phi \in p$, $T \not\models \alpha \rightarrow \phi$, $[\alpha] \not\leq [\phi]$ 。所以, 对任意 α , 如果 $[\alpha] \leq \prod\{[\phi] \mid \phi \in p\}$, 则 $[\alpha] = 0$, 所以 $\prod\{[\phi] \mid \phi \in p\} = 0$ 。

反之, 假设 (2) 成立。如果 α 孤立 p , 即对任意 $\phi \in p$, $T \models \alpha \rightarrow \phi$, 则 $[\alpha] = 0$, 所以 $T \cup \{\alpha\}$ 不可满足。 \square

引理 3.2.15. 对任意 $n > 0$, 以下命题等价:

- (1) $S_n(T)$ 是有穷的;
- (2) 所有型都是孤立型;

(3) $\mathcal{B}_n(T)$ 是有穷的。

证明. 由练习3.2.8, (1) 与 (3) 等价。我们只需证明 (1) 与 (2) 等价。

(1) \Rightarrow (2)。令 $S_n(T) = \{p_1, \dots, p_m\}$, 任取 p_i , 我们令 $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_{i+1}, \dots, \phi_m$ 为一组公式, 它们都属于 p_i , 但对任意 $j \neq i$, $\phi_j \notin p_j$ 。这样, $p_i \in \langle \phi_j \rangle$, 但 $p_j \notin \langle \phi_j \rangle$ 。令 ϕ 为这些公式的并, 则 $\langle \phi \rangle = \{p_i\}$, 所以 p_i 是孤立型。

(2) \Rightarrow (1)。显然, $\{\{p\} \mid p \in S_n(T)\}$ 是 $S_n(T)$ 的一个开覆盖, 它有一个有穷的子覆盖, 所以 $S_n(T)$ 只能是有穷的。□

引理 3.2.16. 令 T 是完全理论, 如果 $p \in S_n(T)$ 是孤立型, 则 p 在 T 的所有模型中都有一个实现。

证明. 给定任意 T 的模型 \mathfrak{A} 。令 $\{p\} = \langle \phi \rangle$, 并且令 $\mathfrak{B} \models T$ 和 $b \in |\mathfrak{B}|$ 使得 $p = \text{tp}^{\mathfrak{B}}(b)$ 。所以 $\mathfrak{B} \models \phi(b)$, 这蕴涵着 $\mathfrak{B} \models \exists x \phi$ 。由于 T 是完全理论, 所以 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, 所以 $\mathfrak{A} \models \exists x \phi$, 即存在 $a \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \phi(a)$ 。由于 ϕ 孤立 p , 所以 $p = \text{tp}^{\mathfrak{A}}(a)$ 。□

3.3 习题

3.3.1. 令 X 为拓扑空间, $Y \subseteq X$ 。我们如下定义 Y 中的开集: $O \subseteq Y$ 是开集当且仅当存在 X 中的开集 V , $O = V \cap Y$ 。证明: Y 是一个拓扑空间, 称为 X 的子空间, 这个拓扑称为子空间拓扑。

3.3.2. 令 X 是拓扑空间, $Y \subseteq X$ 是子空间, 证明 $F \subseteq Y$ 是空间 Y 的闭集当且仅当存在 X 的闭集 Z , $F = Z \cap Y$ 。

3.3.3. 令 \mathbb{R} 为例3.1.2中定义的拓扑空间, 求 \mathbb{N} 上的子空间拓扑, 即 \mathbb{N} 的哪些子集是开集?

3.3.4. 令 X 为紧致空间, $Z \subseteq X$ 为闭集, 证明 Z 作为子空间也是紧致的。

3.3.5. 令 X 为拓扑空间, Y 是 X 的子集, 我们定义 Y 的闭包为包含 Y 的最小的闭集, 记作 \overline{Y} , 即

$$\overline{Y} = \bigcap \{Z \subseteq X \mid Y \subseteq Z \text{ 且 } Z \text{ 是闭集}\}$$

证明:

- (1) 如果 Z 是闭集, 则 $\overline{Z} = Z$;
- (2) 对任意 $Y \subseteq X$, $x \in \overline{Y}$ 当且仅当任意包含 x 的开集都与 Y 相交不空。
- (3) 对任意 $Y \subseteq X$, $x \in \overline{Y}$ 当且仅当存在 Y 上的滤 F , F 收敛于 x 。