定义 3.2.10. 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，它的子集 $G \subseteq B$ 如果满足：对任意 $n \in \omega$，任意 $g_1, \cdots, g_n \in G$，它们的积不为 0，即，$g_1 \cdot g_2 \cdots g_{n-1} \cdot g_n > 0$，并且 $g_1 \cdot g_2 \cdots g_{n-1} \cdot g_n \in G$，就称 G 有**有穷交**性质。

练习 3.2.11. 如果 $G \subseteq B$ 有有穷交性质，$a \in B$，则 $G \cup \{a\}$ 或 $G \cup \{-a\}$ 有有穷交性质。

引理 3.2.12. *令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$G \subseteq B$ 有有穷交性质，则*

$$F = \{b \in B \mid \exists g \in G (g \leq b)\} \tag{3.2}$$

是 $\mathcal{B}$ 上的滤，称为 G **生成**的滤。

练习 3.2.13. 如果 F 是由 G 生成的滤，则 F 是包含 G 的最小的滤，即，$G \subseteq F$ 并且如果 $F' \supseteq G$ 也是滤，则 $F \subseteq F'$。

注记 3.2.14. 由于 $\{a\}$ 总是有有穷交性质，所以，对任意 $a \in B$，$\{a\}$ 生成 $\mathcal{B}$ 上的一个滤。由单点集生成的滤称为**主滤**。

定义 3.2.15. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$F \subseteq B$ 是滤。如果对任意的 $b \in B$，b 和 $-b$ 有且只有一个属于 F，就称 F 是 $\mathcal{B}$ 上的**超滤**。

由单点集生成的主滤一定是超滤，请尝试以下联系：

练习 3.2.16. 假设 $G \subseteq B$ 为非空子集，F 是由 G 生成的滤，则以下命题等价：

(1) G 是单点集；

(2) F 是超滤；

(3) F 是主超滤。

在偏序集的意义上，超滤也是极大滤。

引理 3.2.17. *令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤。以下命题等价：*

(1) F 是超滤；

(2) F 是极大滤：不存在滤 F' 使得 $F \subsetneq F'$。

(3) F 是素的：对任意 $a, b \in B$，如果 $a + b \in F$，则 $a \in F$ 或者 $b \in F$。

证明. (1)⇒(2). 反设 F 不是极大滤，F' 是 F 的真扩张。令 $b \in F - F'$。由于 $b \notin F$ 而 F 是超滤，所以 $-b \in F \subseteq F'$，这样 $b \cap (-b) = 0 \in F'$，矛盾。

(2)⇒(3). 首先，我们验证，如果 F 是极大滤，而 $a \notin F$，则至少存在一个 $c \in F$，$c \cdot a = 0$：否则，$F \cup \{a\}$ 有有穷交性质，因而生成一个滤 F'，它是 F 的真扩张。

现在假设 a, b 都不属于 F，令 $c_1, c_2 \in F$ 见证这一点，即 $c_1 \cdot a = c_2 \cdot b = 0$。所以 $c_1 \cdot c_2 \cdot (a + b) = 0$。由于 $c_1 \cdot c_2 \in F$，所以 $a + b \notin F$。

(3)⇒(1). 对任意 $b \in B$，如果 $b \notin F$，因为 $b + (-b) = 1 \in F$，所以由（3），$-b \in F$。 □

练习 3.2.18. 如果 $a \neq b$，则存在超滤 U，$a \in U$ 但 $b \notin U$。

练习 3.2.19. 令 F 是 $\mathcal{B}$ 上的滤，令 $(\{0, 1\}, +, \cdot, -, 0, 1)$ 为两个元素的布尔代数。定义 $f : B \to \{0, 1\}$ 为

$$f(b) = \begin{cases} 1, & b \in F; \\ 0, & b \notin F. \end{cases} \tag{3.3}$$

即，f 是 F 的特征函数。证明：F 是超滤当且仅当 f 是布尔代数 $\mathcal{B}$ 到 $\{0, 1\}$ 的同态映射。

定理 3.2.20 (超滤存在定理)**.** 布尔代数 $\mathcal{B}$ 上的任意滤 F，都存在 $\mathcal{B}$ 上的超滤 U 使得 $F \subseteq U$。

证明. 令 $\mathcal{F} = \{U \mid U\text{是 } \mathcal{B} \text{ 上的滤并且} F \subseteq U\}$。$\mathcal{F}$ 在关系 $\subseteq$ 下是一个偏序集，并且它的每个链都有上界。根据佐恩引理，$\mathcal{F}$ 有极大元 U。显然，U 是极大滤，因而是超滤，而且 $F \subseteq U$。 □

定义 3.2.21. 今后我们用 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 表示布尔代数 $\mathcal{B}$ 上所有超滤的集合，以下定义的函数 $f : B \to \mathcal{P}(\mathrm{Ult}(\mathcal{B}))$ 称为**斯通映射**：

$$f(b) = \{U \in \mathrm{Ult}(\mathcal{B}) \mid b \in U\}. \tag{3.4}$$

定理 3.2.22 (斯通表示定理)**.** 对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，存在集合 X，$\mathcal{B}$ 同构于 $\mathcal{P}(X)$ 的一个子代数。

证明. 令 $X = \mathrm{Ult}(\mathcal{B})$，$f : B \to \mathcal{P}(X)$ 为斯通映射。我们证明 f 是嵌入，这样 $f[B]$ 就是 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数，并且与 $\mathcal{B}$ 同构。

由于 0 不属于任何滤而 1 属于任何滤，所以 $f(0) = \emptyset$，$f(1) = \mathcal{P}(X)$。如果 $a \cdot b \in U$，则一定有 $a \in U$ 并且 $b \in U$，反之亦然，所以 $f(a \cdot b) = f(a) \cap f(b)$。另外，任意超滤 U 都是素的，所以 $a + b \in U$ 当且仅当 $a \in U$ 或者 $b \in U$，所以 $f(a + b) = f(a) \cup f(b)$。这就验证了 f 是同态。

最后，假设 $a \neq b$，不妨设 $a \cdot (-b) = c \neq 0$，则 $c \cdot b = 0$。令 U_c 和 U_b 分别为 c 和 b 生成的超滤，则 $c \notin U_b$ 且 $b \notin U_c$。但是 $a \in U_c$，所以 $f(a) \neq f(b)$。所以 f 是一个嵌入。 □

定义 3.2.23. 令 $(P, <)$ 是偏序集，

(1) 如果 $D \subseteq P$ 满足：对任意 $p \in P$，总存在 $d \in D$ 使得 $p \leq d$，就称 D 是 P 的**稠密子集**。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 P 的稠密子集的族，F 是 P 上的超滤，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，如果 $F \cap D \neq \emptyset$，则就称 F 是 **$\mathcal{D}$-脱殊的**。

定义 3.2.24. 令 $\mathcal{B}$ 是布尔代数，U 是 $\mathcal{B}$ 上的超滤：

(1) 令 $D \subseteq B$ 并且 $\sum D$ 存在。我们称 U 是**D-完全的**，或者称 U 保持 $\sum D$，如果 $\sum D \in U$ 蕴涵存在 $d \in D$，$d \in U$。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，对任意 $D \in \mathcal{D}$，$\sum D$ 都存在。我们称 U 是**$\mathcal{D}$-完全的**，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，U 都是 D-完全的。

练习 3.2.25. 定义3.2.24中的 (1) 可以替换为以下条件：$D \subseteq U$ 蕴涵 $\prod D \in U$。

练习 3.2.26. 对于任意偏序集 $(P, \leq)$，我们也可以定义相应的概念：

(1) 如果 $D \subseteq P$ 满足：对任意 $p \in P$，总存在 $d \in D$ 使得 $d \leq p$，就称 D 是 P 的**稠密子集**。

(2) 如果 $\mathcal{D}$ 是 P 的稠密子集的族，U 是 P 上的超滤，如果对任意 $D \in \mathcal{D}$，$U \cap D \neq \emptyset$，就称 U 是 $\mathcal{D}$-**脱殊的**。

证明：如果将 $\mathcal{B}$ 看做偏序集，U 是 $\mathcal{D}$-完全的当且仅当 U 是 $\mathcal{D}$-脱殊的。

引理 3.2.27 (Rasiowa–Sikorski 引理)**.** *令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，$\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，并且 $\mathcal{D}$ 是可数的，则存在 $\mathcal{B}$ 上的滤 U，U 是 $\mathcal{D}$-完全的。*

证明. 令 $\{D_0, D_1, \cdots\}$ 为 $\mathcal{D}$ 的一个枚举。我们如下递归定义 $G = \{g_0, g_1, \cdots\} \subseteq B - \{0\}$：

(1) $g_0 = 1$；

(2) 假设 g_n 已定义，如果 $g_n \cdot \sum D_n = 0$，则令 $g_{n+1} = g_n$；否则，一定存在 $d \in D_n$，$g_n \cdot d > 0$，任取这样的一个 $d_n \in D$，令 $g_{n+1} = g_n \cdot d_n$。

对任意 $g_i \in G$，都有 $g_{i+1} \leq g_i$，所以 G 有有穷交性质。最后，令 U 为 G 生成的超滤。我们以下证明 U 是 $\mathcal{D}$-完全的。

对任意 $D_n \in \mathcal{D}$，如果 $\sum D_n \in U$，则 $g_n \cdot \sum D_n > 0$，所以存在 $d_n \in D$，$g_{n+1} = g_n \cdot d_n$。由于 $g_{n+1} \in U$ 并且 $g_{n+1} \leq d_n$，所以 $d_n \in U$。 □

注记 3.2.28. 引理**??**中，要求 $\mathcal{D}$ 是可数的这一点是必须的。如果 $\mathcal{D}$ 不可数，相应的命题在 ZFC 中不可证明，虽然它与 ZFC 是一致的。

定义 3.2.29. 令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，

(1) $C \subseteq \mathcal{B}$ 称为**反链**，如果对任意 $a, b \in C$，$a \cdot b = 0$。

(2) $\mathcal{B}$ 满足**可数链性质**当且仅当它的反链是至多可数的。

(3) Martin 公理：令 $\mathcal{B}$ 为布尔代数，满足可数链性质。$\mathcal{D}$ 是 B 的子集的族，$|\mathcal{D}| < 2^{\aleph_0}$，并且对任意 $D \in \mathcal{D}$，$\sum D$ 存在，则存在 $\mathcal{B}$ 上的滤超滤 U，U 是 $\mathcal{D}$-完全的。

注记 3.2.30. 显然，由引理3.2.27，ZFC + CH 蕴涵 Martin 公理。Martin 公理在 ZFC 中不可证，但 ZFC + ¬CH + MA 是一致的。如果 CH 不成立，则马丁公理可以统一回答一些有关 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间的那些基数的问题。例如，如果 CH 不成立，我们可以问以下问题：

1. 如果 $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, 是否 $2^\kappa = 2^\omega$?

2. 如果 $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, κ 个零测集的并是否还是零测集?

3. If $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, κ 个第一纲集的并是否还是第一纲集?

假设 Martin 公理，则以上问题的答案都为“是”。

前面已经提到，任何滤都对有穷交封闭，而对偶地，任何理想都对有穷并封闭。但是，也有一些滤（理想）对更大的交（并）封闭，于是我们引入以下概念。

定义 3.2.31. 对任意无穷基数 κ，如果集合 S 上的滤 F 满足：如果 $F' \subseteq F$ 且 $|F'| < \kappa$，则 $\bigcap F' \in F$，就称 F 是κ-完全的。

对任意无穷基数 κ, 如果集合 S 上的理想 I 满足: 如果 $I' \subseteq I$ 且 $|I'| < \kappa$, 则 $\bigcup I' \in I$，就称 I 是κ-完全的。

对任意无穷基数 κ，κ-完全滤和 κ-完全理想是对偶概念。

注记 3.2.32. 任何滤和理想都是 $\aleph_0$-完全的；历史上，$\aleph_1$-完全的滤和理想又称为σ-完全的。这里需要注意：可数完全的滤是对有穷交封闭的，$\aleph_1$-完全的滤才对可数交封闭。

练习 3.2.33. 令 X 为任意集合。

(1) 如果 X 是可数集合，则 $\mathscr{P}(X)$ 上的所有 $\aleph_1$-完全滤都是主滤。

(2) 如果 X 不可数，则 $\{G \subset X \mid |G| \leq \aleph_0\}$ 是 X 上 $\aleph_1$-完全的理想；

(3) 更一般地，如果 $\kappa > \aleph_1$ 是正则的，而 $|X| \geq \kappa$，则 $\{G \subset S \mid |G| < \kappa\}$ 是 κ-完全的理想；

(4) $[0, 1]$ 区间上测度为 1 的集合构成的滤 F 是 $\aleph_1$-完全的，但不是 $(2^{\aleph_0})^+$-完全的。

3.3　无界闭集

本节我们讨论一类特殊的滤，它在现代集合论中扮演着十分重要的角色。

定义 3.3.1. 令 α 为极限序数，α 的子集 $C \subseteq \alpha$ 如果满足：

1. C 在 α 中无界，即 $\sup C = \alpha$，或等价地，对任意 $\beta < \alpha$，存在 $\xi \in C$，$\beta < \xi$；
2. C 在 α 中是闭的，即，对任意极限序数 $\gamma < \alpha$，如果 $\sup(C \cap \gamma) = \gamma$，则 $\gamma \in C$。

就称 C 是 α 的无界闭集。

注记 3.3.2. 假设 C 是极限序数 α 的子集，如果 γ 是 C 某一子集的上确界并且 $\gamma < \alpha$，则称 γ 是 C 的**极限点**。因此，C 在 α 中是闭集当且仅当 C 的极限点都属于 C。

练习 3.3.3. 回忆拓扑的概念。对任意非空的序数集合 X，令

$$B = \{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in X\} \cup \{\xi \cap X \mid \xi \in X\} \cup \{X - (\xi + 1) \mid \xi \in X\} \cup \{X\} \quad (3.5)$$

为拓扑基，则由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑称为 X 上的**序拓扑**。证明：定义中的闭集与 α 上序拓扑中闭集的意义一致。

以下讨论无界闭集的一些基本性质。

引理 3.3.4. 假设 α 是极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，则：

（*1*）α 是 α 上的无界闭集。

（*2*）任取 $\beta < \alpha$，则集合 $\{\delta < \alpha \mid \delta > \beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

（*3*）集合 $X = \{\beta < \alpha \mid \beta \text{ 是极限序数}\}$ 是 α 上的无界闭集。

（*4*）如果 X 在 α 中无界，则 $X' = \{\gamma \in X \mid \gamma < \alpha \wedge \gamma \text{ 是 } X \text{ 的极限点}\}$ 是 α 上的无界闭集。

证明.（1），（2）留给读者。

（3）　X 显然是闭集。为证 X 是无界的，任取 $\xi \in \alpha$，定义序列

$$\xi = \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots \quad (n \in \omega)$$

其中 ξ_{n+1} 是严格大于 ξ_n 并且属于 α 的最小序数。令 η 为以上序列的极限，则 $\eta > \xi$ 并且属于 X。

（4）　X' 是无界的可用类似（3）中的方法证明：任取 $\xi \in \alpha$，定义严格递增的序列 $\langle \xi_n \rangle_{n \in \omega}$，其中每个 $\xi_n \in X$。这个序列的极限 η 是 X 的极限点，所以属于 X' 并且大于 ξ。为证明 X' 是闭集，任取 $\eta < \alpha$ 是 X' 的极限点，即，$\sup(X' \cap \eta) = \eta$，则对任意 $\sigma < \eta$，存在 X 的极限点 $\xi < \eta$ 使得 $\sigma + 1 < \xi$。由极限点的定义，存在 $\mu \in X \cap \xi$，使得 $\sigma < \mu$，所以 $\sup(X \cap \eta) = \eta$，即 η 也是 X 的极限点，故 $\eta \in X'$。

□

引理 3.3.5. *如果 α 是极限序数并且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，而 $f : \alpha \to \alpha$ 是严格递增的，并且是连续的，即对任意极限 $\beta < \alpha$，$f(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} f(\gamma)$，则：*

（1）　f 的值域是 α 的无界闭集；

（2）　反之，如果 α 是还是正则的，则 α 中的每个无界闭集 C 都是这样一个函数的值域。

证明. 对于（1）：f 是严格递增的，所以它的值域在 α 中无界；f 是连续的，所以它的值域是闭集。

对于（2），令 τ 为无界闭集 C 的序型，$f : \tau \to C$ 是关于序数上 $<$ 关系的同构，则 f 显然是严格递增和连续的。由于 C 是无界的，而 α 是正则的，所以 $\tau \geq \mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$。又由于对任意 $\eta < \tau$，$\eta \leq f(\eta)$，所以 $\tau \leq \sup f(\eta) = \alpha$。所以 $\tau = \alpha$。 □

注记 3.3.6. 我们在定义2.1.35中定义了类函数的连续性，如果将 $\mathbb{O}$ 看作一个“极限序数”，则有类似引理3.3.5结果：

> 假设 $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 是严格递增的连续函数，则 F 的“值域”作为子类在 $\mathbb{O}$ 中是闭的，并且是无界的。反之亦然：如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{O}$ 是一个无界的闭的类，则存在 $F : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$，$\mathcal{C}$ 是 F 的“值域”。

命题 3.3.7. 假设 α 是极限序数，且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，则对任意 $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$，如果 $\langle C_\xi \rangle_{\xi<\gamma}$ 是无界闭集的序列，则 $\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$ 也是 α 的无界闭集。

证明. 假设 $\gamma = 2$，只需证明 $C_1 \cap C_2$ 是无界闭集。闭集的交显然是闭集，所以只需证明 $C_1 \cap C_2$ 在 α 中无界。任取 $\delta < \kappa$，则存在 $\xi \in C_1, \eta \in C_2$（不妨设 $\xi < \eta$）使得 $\delta < \xi < \eta$，构造无穷序列：

$$\xi_0 < \eta_0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \cdots$$

其中 $\xi_0 = \xi, \eta_0 = \eta$ 且对任意 $n \in \omega$，$\xi_n \in C_1, \eta_n \in C_2$。令 μ 是这个序列的极限，则 $\sup(C_1 \cap \mu) = \mu$ 且 $\sup(C_2 \cap \mu) = \mu$，因此 $\mu \in C_1 \cap C_2$，并且 $\delta < \mu$。

如果 γ 是后继序数，则凭借归纳假设，用 $\gamma = 2$ 的方法容易证明。

假设 γ 是极限序数，令 $D = \bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$，$D$ 显然是闭集，以下证明它是无界的。注意到，对任意 $\eta < \gamma$，如果 $D_\eta = \bigcap\{C_\xi \mid \xi < \eta\}$，则 D_η 是无界闭集且 $D = \bigcap_{\eta<\gamma} D_\eta$，并且 $\eta < \eta' < \gamma$ 蕴涵 $D_\eta \supset D_{\eta'}$。任取 $\mu < \alpha$，构造序数的序列：

$$\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_\eta < \cdots$$

其中 $\xi_0 > \mu$ 且对每一 $\eta < \gamma$，$\xi_\eta \in D_\eta$ 使得 ξ_η 是大于 $\sup\{\xi_\alpha \mid \alpha < \eta\}$ 的最小序数。因为 α 是正则的，因此以上序列是合理的。取 $\xi = \sup\{\xi_\eta \mid \eta < \gamma\}$。显然对任意 $\eta < \gamma$，$\xi \in D_\eta$，所以 $\xi \in D$ 且 $\mu < \xi$。 □

由此，我们可以定义：

定义 3.3.8. 对任意共尾数大于 ω 的极限序数 α，

$$F_{CB}(\alpha) = \{X \subseteq \alpha \mid \exists C(\, C \text{ 是 } \alpha \text{ 的无界闭子集} \wedge C \subseteq X)\}, \tag{3.6}$$

是一个滤，这个滤称为 α 上的无界闭滤。

推论 3.3.9. 如果 κ 是不可数正则基数，则 κ 上的无界闭滤是 κ-完全的。

证明. 由命题3.3.7立得。 □

虽然不可数正则基数 κ 上的无界闭滤是 κ 完全的，但是可以找到一个长度为 κ 的无界闭集的序列，它的交为空集（见习题 3.4.6）。

定义 3.3.10. 对任意序数 α，$\langle X_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ 是 α 子集的序列，

（1） X_ξ 的对角线交定义为：

$$\triangle_{\xi<\alpha} X_\xi = \{\eta < \alpha \mid \eta \in \bigcap_{\xi<\eta} X_\xi\} \tag{3.7}$$

（2） X_ξ 的对角线并定义为：

$$\bigtriangledown_{\xi<\alpha} X_\xi = \{\eta < \alpha \mid \eta \in \bigcup_{\xi<\eta} X_\xi\} \tag{3.8}$$

注记 3.3.11. 如果令 $Y_\xi = \{\eta \in X_\xi \mid \eta > \xi\}$，则 $\triangle_{\xi<\alpha} X_\xi = \triangle_{\xi<\alpha} Y_\xi$。同时，$\triangle_{\xi<\alpha} X_\xi = \bigcap_{\xi<\alpha}(X_\xi \cup \{\eta \mid \eta \leq \xi\})$（见习题 3.4.7、3.4.8）。另外，在不致引起混淆的情况下，我们常将 $\triangle_{\xi<\alpha} X_\xi$ 简记为 $\triangle X_\xi$。对于 $\bigtriangledown_{\xi<\alpha} X_\xi$，也类似。

命题 3.3.12. 对任意不可数正则基数 κ，以及 κ 上的无界闭集的序列 $\langle X_\gamma \mid \gamma < \kappa\rangle$，$\triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma$ 是无界闭集。即，$F_{CB}(\kappa)$ 关于对角线交封闭。

证明. 令 C_γ 为 $\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$，则 $\triangle X_\gamma = \triangle C_\gamma$。而我们有：

$$C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_\gamma \supset \cdots \quad (\gamma < \kappa).$$

令 $C = \triangle C_\gamma$。为证 C 是闭集，取 η 是 C 的极限点。我们需要证明 $\eta \in C$，即，对任意 $\xi < \eta$，$\eta \in C_\xi$。为此定义 $X = \{\nu \in C \mid \xi < \nu < \eta\}$，则 $X \subset C_\xi$；根据定理3.3.9，C_ξ 是无界闭集，所以 $\eta = \sup X \in C_\xi$，因此 $\eta \in C$。

为证 C 无界，取 $\mu < \kappa$。如下定义序列 $\langle \beta_n \mid n < \omega\rangle$：令 $\beta_0 > \mu$ 且 $\beta_0 \in C_0$，对每一 n，令 $\beta_{n+1} > \beta_n$ 且 $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$。由于 C_{β_n} 是无界的，所以这样的 β_{n+1} 总能找到。同时注意到

$$C_{\beta_0} \supset C_{\beta_1} \supset C_{\beta_2} \supset \ldots$$

所以对任意 $m > n$，$\beta_m \in C_{\beta_n}$。以下证明 $\beta = \sup\{\beta_n \mid n < \omega\} \in C$。为此，只需证明对任意 $\xi < \beta$，都有 $\beta \in C_\xi$。而如果 $\xi < \beta$，则存在 n，$\xi < \beta_n$。而对每一 $m > n$，$\beta_m \in C_{\beta_n} \subset C_\xi$。由于 C_ξ 是闭集，故 $\beta \in C_\xi$。所以 $\beta \in C$，C 是无界的。 □

推论 3.3.13. 对任意不可数正则基数 κ，如果 $f:\kappa\to\kappa$ 是函数，则集合

$$D=\{\alpha<\kappa\mid\forall\beta<\alpha(f(\beta)<\alpha)\}\tag{3.9}$$

是无界闭集。

证明. 对任意 $\alpha<\kappa$，定义 $C_\alpha=\{\beta<\kappa\mid f(\alpha)<\beta\}$，则 C_α 是无界闭集。显然，$D=\triangle C_\alpha$，所以是无界闭集。 □

若 α 是极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha)>\omega$，则 α 上的无界闭滤 $F_{CB}(\alpha)$ 包含了 α 的“大子集”，与其对偶的“小子集”的族是 $I=\{X\subseteq\kappa\mid\kappa-X\in F_{CB}\}$。有时候我们需要刻画“不小的”子集的族，即不属于 I 的那些子集，这等价于说 $\kappa-X$ 不以一个无界闭集为子集，即 X 与任何无界闭集相交不空。

定义 3.3.14. 令 α 为任意极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha)>\omega$，

（1） 如果 $S\subseteq\alpha$ 满足对任意 α 的无界闭集 C 都有 $S\cap C\neq\emptyset$，就称 S 是 α 上的平稳集 [1]。

（2） $I_{NS}(\alpha)=\{X\subseteq\alpha\mid\exists C(C$ 是 α 的无界闭子集 $\wedge X\cap C=\emptyset\}$ 称为 α 上的非平稳理想。

引理 3.3.15. 假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha)>\omega$，

(*1*) α 上的无界闭集都是平稳集，若 S 是平稳集且 $S\subseteq T\subseteq\alpha$，则 T 是平稳集。

(*2*) α 上的平稳集都是无界的。

(*3*) 存在 α 上无界子集 T，但 T 不是平稳集。

证明.　（1） 由命题3.3.7，任意两个无界闭集相交不空。

（2） 假设 S 是平稳集，任取 $\beta<\alpha$，$\{\gamma<\alpha\mid\beta<\gamma\}$ 是 α 上的无界闭集，它与 S 相交非空，这个交集中的任何序数都大于 β。

（3） 令 $T=\{\alpha+1\mid\alpha<\kappa\}$ 是无界的，但不是 κ 上的平稳集，因为 κ 中的所有极限序数构成的无界闭集与它相交为空。

□

[1]Stationary Set 有很多不同的译法，例如“稳定集”、“驻集”，新出的《数学大词典》中译为“荟萃集”。

练习 3.3.16. 假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，

（1） 对任意 $\gamma < \alpha$，如果 $D = \{X_\xi \mid \xi < \gamma\}$ 为非平稳集的族，则 $\bigcup D$ 也是非平稳集。因此，如果 κ 是不可数正则基数，则 κ 上的非平稳理想是 κ-完全的。

（2） S 和 $\alpha - S$ 都是 α 上的平稳集当且仅当 S 不以任何无界闭集为子集。

命题 3.3.17. 假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，而 $\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$ 是正则的，定义

$$E_\lambda^\alpha = \{\beta < \alpha \mid \mathrm{cf}(\beta) = \lambda\}. \tag{3.10}$$

则 E_λ^α 是 α 上的平稳集。

证明. 任取 α 上的无界闭集 C，递归定义 C 上的长度为 λ 的严格递增的序列

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\xi < \ldots < \ldots \qquad (\xi < \lambda). \tag{3.11}$$

λ 是正则的，$\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$，以及 C 在 α 中无界保证我们可以得到这样的序列。令此序列的上确界为 δ，则由于 C 是闭集，$\delta \in C$，又因为 $\mathrm{cf}(\delta) = \lambda$，所以 $\delta \in E_\lambda^\alpha$。 □

注记 3.3.18. 当 $\alpha > \aleph_1$ 时，根据以上命题3.3.17，E_ω^α 和 $E_{\omega_1}^\alpha$ 是不相交的平稳子集，因此，E_ω^α 和 $\kappa - E_\omega^\alpha$ 都不是无界闭集，所以 α 上的无界闭滤不是超滤。如果 $\alpha = \aleph_1$，要证明 α 上的无界闭滤不是超滤就需要选择公理，而且这种对选择公理的依赖是必须的，因为命题“$\aleph_1$ 上的无界闭滤是超滤”与 ZF 是一致的。

命题 3.3.19. 对任意不可数正则基数 κ，如果 $\langle X_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ 是非平稳集的序列，则 $\bigtriangledown_{\xi<\kappa} X_\xi$ 仍是非平稳集。即，$I_{NS}(\kappa)$ 关于对角线并封闭。

证明. 对任意 X_ξ，存在 C_ξ 使得 $X_\xi \cap C_\xi = \emptyset$，令 $C = \bigtriangleup C_\xi$，则 C 是无界闭集（命题3.3.12）。令 $X = \bigtriangledown X_\xi$，显然 $X \cap C = \emptyset$。 □

在本节剩下的部分，我们证明索洛维（Robert Solovay）的一个重要结论。首先证明一个重要的定理——福道尔（Géza Fodor）定理，除了在索洛维定理中需要用到，它还有很多应用。

定义 3.3.20. 定义在序数的集合 S 上的函数 f 如果满足对任意非 0 的 $\alpha \in S$，都有 $f(\alpha) < \alpha$，就称 f 是退缩的。

定理 3.3.21 (福道尔)**.** 任取不可数正则基数 κ，平稳集 $S \subseteq \kappa$，如果 f 是定义在 S 上的退缩函数，则存在平稳集 $T \subseteq S$ 和序数 $\gamma < \kappa$ 使得对任意 $\alpha \in T$，$f(\alpha) = \gamma$。

证明. 反设对任意 $\gamma < \kappa$，集合 $A_\gamma = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$ 都不是平稳集。对每一 $\gamma < \kappa$，存在无界闭集 C_γ，$A_\gamma \cap C_\gamma = \emptyset$，即对任意 $\alpha \in S \cap C_\gamma$，$f(\alpha) \neq \gamma$。令 $C = \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$，即 $\alpha \in C$ 当且仅当对任意 $\gamma < \alpha$，$\alpha \in C_\gamma$，也就是说，对任意 $\gamma < \alpha$，$f(\alpha) \neq \gamma$，这意味着对任意 $\alpha \in C$，$f(\alpha) \geq \alpha$。集合 C 是无界闭集，所以 $S \cap C \neq \emptyset$，但所有属于 S 的 α 都有 $f(\alpha) < \alpha$。矛盾。 □

引理 3.3.22. 令 S 是不可数正则基数 κ 上的平稳集。定义 $T \subseteq S$ 为:

$$T = \{\alpha \in S \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega \vee (\mathrm{cf}(\alpha) > \omega \wedge S \cap \alpha \text{不是}\alpha\text{上的平稳集})\} \tag{3.12}$$

则 T 是 κ 上的平稳集。

证明. 任取 κ 上的无界闭集 C，我们证明 $C \cap T$ 不空。注意到，C 的所有极限点的集合 $C' = \{\xi < \kappa \mid \xi \neq 0 \wedge \sup(C \cap \xi) = \xi\}$ 也是无界闭集（引理3.3.4）。取 $\mu = \min(C' \cap S)$，如果 $\mathrm{cf}(\mu) = \omega$，则 $\mu \in T$。如果 $\mathrm{cf}(\mu)$ 不可数，注意 μ 是 C 的极限点，还是根据引理3.3.4，$C' \cap \mu$ 是 μ 上的无界闭集，由于 μ 是 $C' \cap S$ 的最小元，所以 $(C' \cap \mu) \cap (S \cap \mu) = \emptyset$，即 $(S \cap \mu)$ 不是 μ 上的平稳集，$\mu \in T$。 □

引理 3.3.23. 令 κ 是不可数正则基数，$K = \{\gamma < \kappa \mid \gamma \text{ 是极限序数}\}$，$S \subseteq K$ 是 κ 上的平稳集。如果对任意 $\alpha \in S$，f_α 是 α 中递增的共尾序列，并且是连续的，则以下二者必有一真:

（1）　存在 $\eta < \kappa$，对任意 $\xi < \kappa$

$$S_\xi = \{\alpha \in S \mid \eta \in \mathrm{dom}(f_\alpha) \wedge f_\alpha(\eta) \geq \xi\} \tag{3.13}$$

是 κ 上的平稳集；

（2） 存在 κ 上的无界闭集 C，对任意 $\gamma, \alpha \in C \cap S$，$\gamma < \alpha$ 蕴涵 $\gamma = f_\alpha(\gamma)$。

证明. 假设（1）不成立，即对任意 $\eta < \kappa$，存在 $\xi_\eta < \kappa$ 和无界闭集 C_η 使得 $C_\eta \cap S_{\xi_\eta} = \emptyset$。这实际定义了一个函数 $g : \kappa \to \kappa$ 使得 $g(\eta) = \xi_\eta$。令

$$C = \{\xi \in \bigtriangleup_{\eta<\kappa} C_\eta \mid g[\xi] \subseteq \xi \wedge \xi \text{ 是极限的}\} \tag{3.14}$$

容易看出，如果令 $D = \{\xi < \kappa \mid g[\xi] \subseteq \xi\}$，则 $C = \bigtriangleup_{\eta<\kappa} C_\eta \cap D \cap K$。由习题3.4.16，$D$ 是无界闭集，所以显然 C 是无界闭集。

考虑 $\alpha, \gamma \in C \cap S$，并且 $\gamma < \alpha$。由于 $\alpha \in \bigtriangleup_{\eta<\kappa} C_\eta$，因此对任意 $\eta < \alpha$，$\alpha \in C_\eta$，故 $\alpha \notin S_{\xi_\eta}$ （因为 $C_\eta \cap S_{\xi_\eta} = \emptyset$）。根据 S_{ξ_η} 的定义，对任意 $\eta \in \gamma \cap \mathrm{dom}(f_\alpha)$，$f_\alpha(\eta) < \xi_\eta$。而且，由于 $\gamma \in D$，所以 $g[\gamma] \subseteq \gamma$，所以 $\xi_\eta < \gamma$。如果 $\mathrm{dom}(f_\alpha) \subseteq \gamma$，那 $\mathrm{ran}(f_\alpha) \subseteq \gamma$ 就在 α 中有界，与假设矛盾，所以一定是 $\gamma \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$。

由于 γ 是极限的而 f_α 是连续的，所以 $f_\alpha(\gamma) = \sup\{f_\alpha(\xi) \mid \xi < \gamma\} \leq \gamma$，而 f_α 是递增的蕴涵 $f_\alpha(\gamma) \geq \gamma$。综上，$f_\alpha(\gamma) = \gamma$，（2）成立。 □

定理 3.3.24 (索洛维). 对任意不可数的正则基数 κ，κ 上的任一平稳集都是 κ 个互不相交的平稳集的并。

证明. 假设 S 是 κ 上的平稳集。定义 $T \subseteq S$ 为:

$$T = \{\alpha \in S \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega \vee (\mathrm{cf}(\alpha) > \omega \wedge S \cap \alpha \text{不是} \alpha \text{上的平稳集})\} \tag{3.15}$$

根据引理3.3.22，T 是平稳集。不难看出，我们只需证明 T 可以划分为 κ 个不相交的平稳集。

任取 $\alpha \in T$。如果 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，则由定义，$S \cap \alpha$ 不是 α 上的平稳集。因此，根据引理 3.3.5（2），存在一个连续递增的共尾序列 f_α，其值域 C_α 是 α 中的无界闭集，并且与 $S \cap \alpha$ 相交为空，所以 $C_\alpha \cap T = \emptyset$。如果 $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$，令 $g_\alpha : \omega \to \alpha$ 为严格递增的共尾序列，并且定义 $f_\alpha(n) = g_\alpha(n) + 1$，则 f_α 的值域 C_α 与 T 相交为空。这样，我们证明了对任意 $\alpha \in T$，存在 α 中的连续递增的无界序列 f_α，其值域与 T 相交为空。

令 C 是与 T 相交不空的无界闭集，则 $C \cap T$ 是平稳集，如果存在 $\alpha, \gamma \in C \cap T$，使得 $\gamma < \alpha$ 并且 $f_\alpha(\gamma) = \gamma$，则 $\operatorname{ran} f_\alpha \cap T \neq \emptyset$，矛盾，因此引理3.3.23中的（2）不成立。所以存在 $\eta < \kappa$，使得对任意 $\xi < \kappa$，引理3.3.23（1）中定义的 S_ξ 是平稳集。对任意 $\alpha \in T$，我们定义

$$f(\alpha) = \begin{cases} f_\alpha(\eta), & \text{若 } \eta \in \operatorname{dom}(f_\alpha); \\ 0, & \text{否则。} \end{cases} \tag{3.16}$$

对任意非零的 $\xi \in \kappa$，集合 $T_\xi = \{\alpha \in T \mid f(\alpha) \geq \xi\} = \{\alpha \in T \mid \eta \in \operatorname{dom}(f_\alpha) \wedge f_\alpha(\eta) \geq \xi\}$，所以是平稳集。

这样，我们定义了一个函数 $f : T \to \kappa$，并注意到它是退缩的。对任意 $\xi \in \kappa$，由于 $T_\xi \subseteq T$ 是平稳集，所以根据福道尔定理，存在一个 $\gamma_\xi < \kappa$，使得 $f^{-1}[\{\gamma_\xi\}] \cap T_\xi$ 是平稳集。因为对任意 $\alpha \in T_\xi$，$f(\alpha) \geq \xi$，所以 $\gamma_\xi > \xi$，即 $\{\gamma_\xi \mid \xi < \kappa\}$ 在 κ 中无界又由于对任意 $\gamma_1, \gamma_2 < \kappa$，$f^{-1}[\{\gamma_1\}] \cap f^{-1}[\{\gamma_2\}] = \emptyset$，所以 $\{f^{-1}[\{\gamma_\xi\}] \cap T_\xi \mid \xi < \kappa\}$ 是 κ 个互不相交的平稳集的族。 □

3.4　习题

3.4.1. 如果 $\mathcal{F}$ 是 S 上的滤构成的一个 $\subseteq$-链，则 $\bigcup \mathcal{F}$ 是 S 上的滤。

3.4.2. 如果 F 是非主超滤，则任意 $X \in F$ 都是无穷的。因此任何非主超滤必是弗雷歇滤的扩张。

3.4.3. 如果 F 是 S 上的滤，而 $F' = \{X \subseteq S \mid S - X \notin F\}$，则 $F \subseteq F'$，并且 $F = F'$ 当且仅当 F 是超滤。

3.4.4. 假设 $X \subseteq S$，证明：

（1）　如果 F 是 S 上的滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的滤；

（2）　如果 F 是 S 上的超滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的超滤；

（3）　如果 F 是 X 上的滤，则 F 能扩张为 S 上的超滤。

3.4.5. 假设 S 是无穷的，则

（1）　存在 S 上的超滤 F，对任意 $X \in F$，$|X| = |S|$。这样的滤称为 S 上的**均匀超滤**（uniform ultrafilter）；

（2）　$\{F \mid F$ 是 S 上的均匀超滤$\} = \{F \mid F$ 是 S 上的非主超滤$\}$ 当且仅当 S 是可数的。

3.4.6. 令 κ 为不可数正则基数，举出一个例子，使得 $X = \{C_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是 κ 上的无界闭集的族，而 $\bigcap X = \emptyset$，但是 $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \kappa$。

3.4.7. 如果令 $Y_\alpha = \{\xi \in X_\alpha \mid \xi > \alpha\}$，则 $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$。

3.4.8. $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \cup \{\xi \mid \xi \leq \alpha\})$。

3.4.9. 证明不存在 ω 上非主超滤 F 使得 F 对对角线交封闭。

3.4.10. 如果 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤，则以下命题等价：

（1）　F 是非主滤；

（2）　$\{X \subseteq S \mid S - X$ 是有穷的$\} \subseteq F$；

（3）　F 的元素都是无穷的。

3.4.11. 如果 S 是无穷的，则 S 上的任何非主超滤都不是 $|S|^+$- 完全的。所以 ω 上的任何非主超滤都不是 σ-完全的。

3.4.12. 如果 F 是 S 上的非主超滤，并且是 $|S|$-完全的，则 F 是均匀超滤。

3.4.13. 一个不可数基数 κ 是**可测的**当且仅当 κ 上存在 κ 完全的非主超滤。证明任何可测基数都是不可达基数，即，都是正则和强极限的。

3.4.14. 如果 F 是 S 上的滤，并且令 $\mu = \sup\{\kappa \mid F$ 是 κ 完全的$\}$，则 μ 是正则基数，并且 F 是 μ-完全的。

3.4.15. 假设 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤。证明 F 是 κ-完全的当且仅当对任意 $\tau < \kappa$ 和任意划分 $\langle X_\xi \mid \xi < \tau\rangle$，总存在 $X_\xi \in F$。

3.4.16. 如果 $\alpha > \aleph_0$ 是正则基数，并且 $f : \alpha \to \alpha$ 是函数，则集合 $C = \{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

3.4.17. 假设 α 为极限序数，则：

（1） α 上存在一个序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

（2） 如果 A 是一集极限序数，则用选择公理可以证明：存在序列 $\langle C_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ 满足：C_α 是 α 上的序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

3.4.18. $\{\alpha < \omega_1 \mid \omega^\alpha = \alpha\}$ 是 ω_1 上的无界闭集。

3.4.19. κ 上的无界闭集都是平稳集。

3.4.20. 令 κ 为不可数正则基数，$S \subseteq \kappa$，证明以下命题等价：

（1） S 是平稳集；

（2） 对任意递减函数 $f : S \to \kappa$，存在序数 $\alpha < \kappa$，使得 $f^{-1}[\alpha]$ 在 κ 中无界。

3.4.21. 如果 κ 是不可达基数（它当然是不可数正则的），则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是强极限基数$\}$ 是 κ 上的无界闭集。

3.4.22. 如果 κ 是最小的不可达基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是强极限的奇异基数$\}$ 是 κ 上的无界闭集。

3.4.23. 假设 κ 是第 α 个不可达基数，而 $\alpha < \kappa$，证明 $X = \{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是正则的$\}$ 不是 κ 上的平稳集。

3.4.24. 一个无穷基数 κ 是**马洛基数**（Mahlo cardinal）当且仅当 κ 是不可达的并且 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是正则基数$\}$ 是 κ 上的平稳集。如果 κ 是马洛基数，则 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是不可达基数$\}$ 是 κ 上的平稳集，因此 κ 是第 κ 个不可达基数。

3.4.25. 如果 $\kappa = \min\{\lambda \mid \lambda$ 是第 λ 个不可达基数$\}$，证明 κ 不是马洛基数。

3.4.26. 如果 κ 是马洛基数，则集合 $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ 是第 λ 个不可达基数$\}$ 在 κ 中无界。