一阶逻辑

第一章 - 命题逻辑

姚宁远

复旦大学哲学学院

September 27, 2021

目录

什么是命题？

- 命题是有真假值得语句；
- 命题逻辑研究原子命题与复合命题的关系；
- 命题逻辑研究命题演算系统；
- 命题演算系统一般称作布尔代数；

元逻辑与对象逻辑

- 元逻辑是人脑的逻辑（经验性）；
- 对象逻辑是机器的逻辑（形式化）；
- 自然语言 - 程序设计语言；
- 元逻辑可以用于分析对象逻辑；
- 用数学归纳法证明对象逻辑系统的性质；

数理逻辑中心问题

是否真的命题都是（形式）可证的？

- 真属于语义的范畴；
- 可证属于语法的范畴；
- 逻辑系统的语法与语义的统一性问题称作它的完全性。

目录

命题逻辑的符号系统（字母表）

命题逻辑的符号表包含以下字符

- 可数多个命题符号：$A_0, A_1, A_2, \ldots, A, B, C, \ldots$；
- 逻辑联结词：否定 $\neg$, 析取 $\wedge$, 合取 $\vee$, 蕴涵 $\rightarrow$, 双蕴涵 $\leftrightarrow$；
- 左、右括号：(,)。

合式公式（单词表） I

合式公式的定义

(1) 每个命题符号 A_i 都是合式公式；

(2) 如果 α 和 β 是合式公式，则 $(\neg\alpha)$，$(\alpha \wedge \beta)$，$(\alpha \vee \beta)$，$(\alpha \to \beta)$ 和 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 都是合式公式；

(3) 别无其他。

合式公式（单词表） II

几点说明

- 定义中的中文即是元语言；
- $A, B, C, \ldots$ 均可用来表示命题符号；
- "别无其他"有两种等价的解释：
  - 所有的公式是有限次使用规则 (1) 和 (2) 形成的符号串。因此一个基本的推论是所有的公式都是有限长的符号串；
  - 所有公式所形成的集合是对条件 (1) 和 (2)封闭的最小的（符号串）的集合。

练习

合式公式（单词表） III

任何一个合式公式 α 都对应（至少）一个构造序列

$$\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$$

满足：

- 每个 φ_i 都是一个合式公式；
- 对每个 $0 \leq k \leq n$，φ_k 或者是命题符号，或者存在 $i \leq k$ 使得 φ_k 是 $(\neg\varphi_i)$，或者存在 $i, j < k$ 使得 φ_k 是 $(\varphi_i \star \varphi_j)$；
- φ_n 是 α

归纳原理 I

定理（归纳原理）

令 $P(\alpha)$ 是一个关于合式公式的性质。满足：

- 对每个命题符号 A_i，$P(A_i)$ 都成立；
- 对每个合式公式 α, β，如果 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 都成立，则 $P((\neg\alpha))$ 和 $P((\alpha \star \beta))$ 也都成立；

那么 $P(\alpha)$ 对一切合式公式都成立。

引理

归纳原理 II

- 每个合式公式中的左右括号数相同；
- 每个合式公式的非空真前段中的左括号数多于右括号数；
- 合式公式的真前段不是合式公式。

证明

- 令 $P(\alpha)$ 表示合式公式 α 中的左右括号数相同。显然 $P(A_i)$ 总是成立。如果 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 都成立，则 $P((\neg\alpha))$ 和 $P((\alpha \star \beta))$ 也都成立；

归纳原理 III

- 令 $Q(\alpha)$ 表示合式公式 α 的真前段中的左括号数多于右括号数。显然 $Q(A_i)$ 总是成立。如果 $Q(\alpha)$ 和 $Q(\beta)$ 都成立，则
  - $(\neg\alpha)$ 的非空真前段是

$$s = (+ \neg + \alpha_0,$$

    其中 α_0 是 α 的的前段。因此 α_0 中的左括号数 $\geq$ 右括号数，故 s 中的左括号数多于右括号数。
  - $(\alpha \star \beta)$ 的非空真前段是

$$t = (+ \alpha_0 + \star + \beta_0,$$

    其中 α_0 是 α 的的前段，β_0 是 β 的的前段，因此 α_0 和 β_0 中的左括号数 $\geq$ 右括号数，故 t 中的左括号数多于右括号数。

  故 $Q((\neg\alpha))$ 和 $Q((\alpha \star \beta))$ 也都成立；
- 显然。

目录

真值指派

- 真假值的集合为 $\{T, F\}$；
- T 表示真，F 表示假；

真值指派

设 S 是一个命题符号的集合。S 上的一个真值指派 v 是从 S 到真假值的一个映射

$$v : S \longrightarrow \{T, F\}$$

真值指派的自然扩张 I

S 生成的公式集

$\bar{S}$ 是由以下表达式构成的 (最小的) 集合：

(1) $S \subseteq \bar{S}$;

(2) 如果 α 和 β 属于 $\bar{S}$，则 $(\neg\alpha)$，$(\alpha \wedge \beta)$，$(\alpha \vee \beta)$，$(\alpha \to \beta)$ 和 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 都属于 $\bar{S}$;

(3) 别无其他。

指派扩张

真值指派的自然扩张 II

设 $v : S \longrightarrow \{T, F\}$ 是一个指派，则 v 可以按照以下的规定扩张为 $\bar{S}$ 上的函数

$$\bar{v} : \bar{S} \longrightarrow \{T, F\}$$

(1) 对每个 $A \in S$，有 $\bar{v}(A) = v(A)$

(2) 如果 α 属于 $\bar{S}$，则

$$\bar{v}((\neg\alpha)) == \begin{cases} T, \text{如果} \bar{v}(\alpha) = F \\ F, \text{其他} \end{cases}$$

真值指派的自然扩张 III

(3) 如果 α 和 β 属于 $\bar{S}$，则

$$\bar{v}((\alpha \vee \beta)) == \begin{cases} T, \text{如果} \bar{v}(\alpha) = T \text{或者} \bar{v}(\beta) = T \\ F, \text{其他} \end{cases}$$

(4) 如果 α 和 β 属于 $\bar{S}$，则

$$\bar{v}((\alpha \wedge \beta)) == \begin{cases} T, \text{如果} \bar{v}(\alpha) = T \text{并且} \bar{v}(\beta) = T \\ F, \text{其他} \end{cases}$$

(5) 如果 α 和 β 属于 $\bar{S}$，则

$$\bar{v}((\alpha \to \beta)) == \begin{cases} F, \text{如果} \bar{v}(\alpha) = T \text{并且} \bar{v}(\beta) = F \\ T, \text{其他} \end{cases}$$

真值指派的自然扩张 IV

(6) 如果 α 和 β 属于 $\bar{S}$，则

$$\bar{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) == \begin{cases} T,\text{如果}\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta) \\ F,\text{其他} \end{cases}$$

也可以用真值表来表示 $\bar{v}$。

注

- 在引入真值指派之前，公式是无意义的符号串；
- 由真值指派 v 到扩张 $\bar{v}$ 本质上赋予逻辑联结词语义；
- 逻辑学不关心“原子事实”的真假，也就是说我们不关心一个具体的真值指派；
- 逻辑学关心“原子事实”的真假与“复合事实”的真假之间的关系，即 v 与 $\bar{v}$ 之间的关系。

逻辑蕴涵的真值表

α	β	$(\alpha \to \beta)$
T	T	T
T	F	F
F	T	X
F	F	Y

1. $X = Y = F$，蕴涵真值表和合取真值表相同；
2. $X = F$，$Y = T$ 蕴涵真值表和双蕴涵真值表相同；
3. $X = T$，$Y = F$，$(\alpha \to \beta)$ 的真值与 β 相同；
4. $X = Y = T$。

例

令 α 为下列合式公式：

$$(((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C))).$$

令 $v(A) = v(B) = T$ 且 $v(C) = F$。计算 $\bar{v}(\alpha)$ 的值。

指派扩张的唯一性

定理

对任意 S 上的真值指派 v 都存在唯一的一个扩张 $\bar{v} : \bar{S} \longrightarrow \{T, F\}$ 满足16条件（1）-（6）。

证明

- 存在性；
- 唯一性：对 $\bar{S}$ 中的公式运用归纳原理，证明：对任意的 $\alpha \in \bar{S}$，对满足条件的两个扩张 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$，总有 $\bar{v}_1(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha)$。

指派扩张的唯一性

我们称真值指派 v满足一个公式 φ 如果 $\bar{v}(\varphi) = T$。

定义

我们称公式集 Σ 重言蕴涵公式 τ，记作 $\Sigma \models \tau$，如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 τ。

例

1. 验证：$\{(\alpha \wedge \beta)\} \models \alpha$；
2. 公式集 $\{A, (\neg A)\}$ 重言蕴涵 B 吗？

重言式

1. 称公式 τ 为**重言式**，如果 $\emptyset \models \tau$，记作 $\models \tau$；
2. $\{\sigma\} \models \tau$ 记作 $\sigma \models \tau$；
3. 称公式 σ 与 τ 重言等价，如果 $\sigma \models \tau$ 且 $\tau \models \sigma$。

重言式举例 I

结合律

1. $((A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C))$；
2. $((A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C))$。

交换律

1. $((A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A))$；
2. $((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A))$。

分配律

重言式举例 II

1. $((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$；
2. $((A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$。

双重否定

$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$

重言式举例 III

德摩根律

1. $((\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)))$；
2. $((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)))$。

其他

1. 排中律：$(A \vee (\neg A))$；
2. 矛盾律：$(\neg(A \wedge (\neg A)))$；
3. 逆否命题：$((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)))$。

目录

唯一可读性 I

定理

对任意的公式 α，下列陈述有且仅有一条成立：

1. α 是一个命题符号；
2. α 形如 $(\neg\beta)$，其中 β 是一个公式；
3. α 形如 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$，其中 α_1 和 α_2 是合式公式。

不仅如此，在情形 2 和 3 中，β，α_1 和 α_2 以及联结词 $\star$ 都是唯一的。

证明

唯一可读性 II

令 $P(\alpha)$ 表示以上 α 满足以上三条性质中的一条。

1. 由归纳原理，度任意的公式 α，$P(\alpha)$ 成立；
2. 情形 1 与情形 2、3 不可能重合；
3. 下面证明情形 2 和情形 3 不可能重合：反设 $(\neg\beta)$ 与 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 相同。则 α_1 的第一个符号是 $\neg$，故 $P(\alpha_1)$ 不成立，矛盾。
4. 最后检查唯一性。只需检查情形 3 的唯一性。反设 $(\beta_1 \star \beta_2)$ 与 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 相同。如果 $\beta_1 = \alpha_1$，显然 $\beta_2 = \alpha_2$。故 $\beta_1 \neq \alpha_1$，从而 β_1 是 α_1 的真前段（或者相反），而公式的真前段不可能是公式。矛盾。

公式的简化 I

1. 最外层的括号总是省略；
2. 否定词的“管辖范围”尽可能短。例如 $\neg A \vee B$ 表示 $(\neg A) \vee B$；
3. 同一个联词反复出现时，以右边为先。例如 $A \to B \to C$ 表示 $A \to (B \to C)$。

目录

合式公式的函数特性

1. 在算术系统中：$+$ 和 $\times$ 将简单的表达式复合为复杂的表达式；
2. 逻辑联结词将简单的合式公式复合为复杂的合式公式；
3. 算术表达式 = 实值函数；
4. 合式公式 = 取值为 $\{T, F\}$ 的函数；
5. 简单表达式 = 简单函数；
6. 复杂表达式 = 复合函数；
7. 复杂的合式公式 = 复合的 $\{T, F\}$-值函数。

布尔函数 I

1. $\neg A$ 只含有一个命题符号，是一个一元 2-值函数；
2. $A \star B$ 含有两个命题符号，是一个二-元 2-值函数；
3. 一般地，一个含有 n 个命题符号的合式公式是一个 n-元 2-值函数。

布尔函数

我们称一个从 $\{T, F\}^k$ 到 $\{T, F\}$ 的函数 f 为一个 k-元布尔函数。

布尔函数 II

- 规定两个 0-元联结词：$\perp$，$\top$，分别代表恒真，恒假；
- 任何一个命题符号都是等同函数；
- 一个含有 n 个命题符号的合式公式是一个 n-元布尔函数；

合式公式定义的布尔函数

令 α 是含有 n 个命题符号 $A_1, ..., A_n$ 的合式公式。则 α 定义了一个 n-元布尔函数 B^n_α : 设 $X_1, ..., X_n \in \{T, F\}$，则

$$B^n_\alpha(X_1, ..., X_n) = \text{每个}A_i\text{分别被赋予值}X_i\text{时合式公式}\alpha\text{的值}.$$

思考

一个有多少个 n-元布尔函数？

布尔函数与合式公式的等价性 I

1. 任何合式公式自然地定义了一个布尔函数;
2. 任意一个 n-元布尔函数是否可以被某个合式公式表达(定义)?

例

定义 $M(A, B, C)$ 为的值为 A, B, C 中的多数,例如 $M(T, F, T) = T$, $M(T, F, F) = F$。找出表达 M 的公式。

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

布尔函数与合式公式的等价性 II

定理

任意一个 n-元布尔函数 G 可以被某个合式公式 α 表达。即 $G = B_{\alpha}^{n}$。

证明

1. 如果 G 的值恒为 F，则令 α 为
$$(A_1 \wedge \neg A_1) \wedge \ldots \wedge (A_n \wedge \neg A_n)$$
2. 否则，令 $\bar{X} = \{\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k\}$ 为所有使得 G 取值为 T 的 n-元组，即 $\bar{X} = G^{-1}[\{T\}]$。假设每个 $\bar{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in})$。令
$$\beta_{ij} = \begin{cases} A_j, \text{如果} X_{ij} = T \\ \neg A_j, \text{其他} \end{cases}$$
$$\gamma_i = \beta_{i1} \wedge \ldots \wedge \beta_{in}$$
$$\alpha = \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n$$

则 $G = B^n_\alpha$。

析取范式

析取范式

称一个公式 α 为析取范式，如果 $\alpha = \gamma_1 \vee ... \vee \gamma_n$，其中 $\gamma_i = \beta_{i1} \wedge ... \wedge \beta_{in}$ 并且每个 β_{ij} 或者是命题符号，或者是命题符号的否定。

推论

每个合式公式 ϕ 都重言等价于某个析取范式。

注

重言等价是合式公式集合上的等价关系，其商集与布尔函数集合一一对应；

全功能联词

定义

我们称一个联词的集合 C 是功能完全的，如果任何一个布尔函数都可以用仅仅涉及 C 中联词的公式来表达。$\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是功能完全的。

由德摩根律，显然有：

推论

联词的集合 $\{\neg, \wedge\}$ 和 $\{\neg, \vee, \}$ 是功能完全的。

例

例

$\{\wedge, \to\}$ 不是功能完全的。

推论

归纳证明：如果公式 α 中只含有 A，则 $A \models \alpha$。因此 $\neg A$ 无法被表达。

目录

证明的形式化 I

证明的特点

1. 证明是严格化的推理；
2. 证明是从假设到结论的一根逻辑链条；
3. 证明是有限长的；
4. 证明需要有一个公理集 Λ；
5. 证明需要有一个假设集 Γ；
6. 证明需要有推理规则；
7. 推理规则是简单的、机械的；

证明的形式化 II

内定理与定理

1. Γ 所能推出的结论是 Γ 的**定理集**；
2. 如果 ϕ 是 Γ 的定理，则记录整个推演过程的公式序列就被称为从 Γ 到 ϕ 的一个**证明**；
3. 对象语言（如命题逻辑的语言）-内定理；
4. 元语言-定理。

推演系统 L

推演系统 L 的语言

推演系统 L 的逻辑联词仅有 $\neg$ 和 $\rightarrow$，其他逻辑连词可以看作是缩写。

推演系统 L 的公理集

推演系统 L 的公理集 Λ 为

(A1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;

(A2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;

(A3) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$,

推演系统 L 的推理规则

系统 L 的推理规则只有一条，称为分离规则：从 α 和 $\alpha \rightarrow \beta$ 可以推出 β。

推演 I

定义

从公式集 Γ 到公式 ϕ 的一个**推演**（或者一个**证明**）是一个有限的公式序列

$$(\alpha_0, ..., \alpha_n)$$

满足 $\alpha_n = \phi$ 并且对任意的 $i \leq n$，或者

1. $\alpha_i \in \Gamma \cup \Lambda$；或者
2. 存在 $j, k < i$，α_i 是从 α_j 和 α_k 由分离规则而得到的，即 $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$。

推演 II

定义

称 ϕ 是 Γ 的一个**内定理**（或**定理**），记作 $\Gamma \vdash \phi$，如果存在一个从 Γ 到 ϕ 的推演。

注

1. 如果 $\Gamma \subseteq \Delta$ 且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$；
2. $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在 Γ 的一个有穷子集 Γ_0 使得 $\Gamma_0 \vdash \alpha$。

推演 III

引理

对任意的合式公式 α，有 $\vdash \alpha \to \alpha$。

证明

1. $\left(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)\right) \to \left((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)\right)$;
2. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$;
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$;
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$;
5. $\alpha \to \alpha$。

推演 IV

演绎定理

设 Γ 是一个公式集，α 和 β 是两个公式。则 $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$。特别地，$\{\alpha\} \vdash \beta$ 当且仅当 $\vdash \alpha \to \beta$。

证明：

($\Rightarrow$) 设 $(\beta_1, ..., \beta_n)$ 是 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 到 β 的推演序列，其中 $\beta_n = \beta$。对 $i \leq n$ 归纳证明 $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta_i)$。

1. $i = 1$ 时，$\beta_1 \in \Gamma \cup \Lambda$，或者 $\beta_1 = \alpha$。
    1. 在前一种情形中用公理 $\vdash \beta_1 \to (\alpha \to \beta_1)$ 和分离规则即可得到 $\alpha \to \beta_1$。
    2. 后一直情形用 $\vdash \alpha \to \alpha$ 即可。
2. 假设对一切的 $k < i$，均有 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_k$。

推演 V

1. 若 $\beta_i \in \Gamma \cup \Lambda \cup \{\alpha\}$，则以上论证对 β_i 也成立；
2. 若 β_i 是由 β_j 和 β_k 通过分离规则而得到的，则根据归纳假设有 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_j$，$\Gamma \vdash \alpha \to (\beta_j \to \beta_i)$ （$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$）。由于
$$(\alpha \to (\beta_j \to \beta_i)) \to ((\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i))$$
是公理。两次运用分离规则可得到 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$。

（$\Rightarrow$）直接由分离规则可得到。

推演 VI

推论

1. $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$。
2. $\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta\} \vdash \alpha \to \gamma$。

目录

可靠性定理 I

可靠性定理

令 Σ 是一个公式集合，并且 τ 是一个公式。如果 $\Sigma \vdash \tau$ 则 $\Sigma \models \tau$。特别地，如果 $\vdash \tau$ 则 $\models \tau$，换言之，L 的每个内定理都是重言式。

证明

首先，$(A1)$，$(A2)$ 和 $(A3)$ 中的公理都是重言式。
设 $\Sigma \vdash \tau$，且 $(\tau_1, ..., \tau_n)$ 是其推演序列。设 v 是满足 Σ 的一个真值指派。对 i 实施强归纳来证明：对任意的 $1 \leq i \leq n$，都有 v 满足 τ_i。
假设 v 满足所有的 τ_k （$k < i$），我们来证明 v 满足 τ_i

可靠性定理 II

1. 若 $\tau_i \in \Sigma \cup \Lambda$，则 v 满足 τ_i；
2. 若 τ_i 由 $\tau_j, \tau_k = \tau_j \to \tau_i$ 通过分离规则而得到的，则根据归纳假设，由 $v(\tau_j) = v(\tau_j \to \tau_i) = T$，故 $v(\tau_i) = T$。

根据归纳法，v 满足 τ_n，即 $v(\tau) = T$。

完全性定理

完全性定理

如果 $\Sigma \models \tau$ 则 $\Sigma \vdash \tau$。

1. 我们引入一致性与可满足性；
2. 证明完全性定理的一个等价形式；
3. 相同的思路可以用来证明一阶逻辑的完全性。

一致性 I

定义

我们称公式集 Σ 是不一致的（或矛盾的）如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 并且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$。称 Σ 是一致的，如果它不是不一致的。

注

公式集 Σ 是一致的当且仅当它的每个有限子集都是一致的。

引理

公式集 Σ 是不一致的当且仅当对所有的公式 β，有 $\Sigma \vdash \beta$。

证明

习题。

一致性 II

引理

$\Sigma \vdash \tau$ 当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致。

证明

$\Rightarrow$ 如果 $\Sigma \vdash \tau$，则 $\Sigma \cup \{\neg\tau\} \vdash \tau$ 且 $\Sigma \cup \{\neg\tau\} \vdash \neg\tau$。故 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致。

$\Leftarrow$ 假设 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致。则 $\Sigma \cup \{\neg\tau\} \vdash \tau$，从而 $\Sigma \vdash \neg\tau \to \tau$。根据公理 $(A3)$，有

$$\vdash (\neg\tau \to \neg\tau) \to ((\neg\tau \to \tau) \to \tau)$$

连续运用分离规则，可得到 $\Sigma \vdash \tau$。

可满足性 I

定义

我们称公式集 Σ 是**可满足**的，如果存在某个真值指派 v 满足 Σ 中所有的公式。称 Σ 是**不可满足**的，如果它不是可满足的。

引理

下列命题等价：

1. 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足；
2. 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$。

可满足性 II

证明

1⇒2 假设 1 成立且 $\Sigma \models \tau$。反设 $\Sigma \not\vdash \tau$。则 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 是一致的，从而可满足。故而存在真值指派 v 满足 Σ 且不满足 τ。矛盾

2⇐1 假设 2 成立且 Σ 一致。反设 Σ 不可满足，则对每个 τ 都有 $\Sigma \models \tau$，从而 $\Sigma \vdash \tau$。故 Σ 不一致。矛盾。

极大一致性 I

定义

我们称公式集 Δ 是极大一致的如果 Δ 一致，并且对任意的不在 Δ 中的公式 α，都有 $\Delta \cup \{\alpha\}$ 不一致。

极大一致性 II

引理 (林登鲍姆)

每个一致的公式集 Σ 都可以扩张为一个极大一致的公式集 Δ

证明

设 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ 是全体公式的一个枚举。递归的定义公式集的序列 $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如下：

1. $\Delta_0 = \Sigma;$
2. $$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\alpha_n\}, \text{如果} \Delta_n \cup \{\alpha_n\} \text{一致} \\ \Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\}, \text{如果} \Delta_n \cup \{\alpha_n\} \text{不一致} \end{cases}$$

对 n 归纳可以证明每个 Δ_n 都是一致的。令 Δ 是 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。则 Δ 包含 Σ 并且 Δ 是一致的。显然 Δ 也是极大一致的。

极大一致性 III

引理

每个极大一致的公式集 Δ 都是可满足的。事实上定义一个真值指派 v 使得 $v(A_i) = T$ 当且仅当 $A_i \in \Delta$，则 v 满足 Δ。

证明

练习。

推论

每个一致的公式集 Σ 都是可满足的。

紧致性定理

紧致性定理

公式集 Σ 是可满足的当且仅当 Σ 的每个有限子集都是可满足的。

证明

可满足当且仅当一致。

例

例

证明任何一个集合都可以被线序化。

证明

设 M 是一个集合。命题符号集合 S 为 $\{P_{ab} |\ a, b \in M\}$。S 上的公式集 Γ 为

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{\neg P_{aa} :\ a \in M\} \cup \{P_{ab} \to (P_{bc} \to P_{ac}) :\ a, b, c \in M\} \\ &\cup \{P_{ab} \vee P_{ba} |\ a, b \in M, a \neq b\}\end{aligned}$$

则 Γ 的任何有限子集都是可满足的。根据紧致性定理，Γ 也是可满足的。任何满足 Γ 的真值指派都给出 M 上的一个线序。

注

- 可靠性定理表明系统 L 所能证明的都是重言式，即系统 L 是一致的；
- 命题逻辑的定理集是可判定的，即存在一个算法来判断公式 α 是不是内定理；
- 判定一个公式 α 是否是内定理或者是否可满足，在时间效率上极低。($P = NP$?)

目录

拓扑空间 I

拓扑空间

设 X 是一个集合，$\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$。如果:

- $\in \tau$, $X \in \tau$;
- 若 $A, B \in \tau$，则 $A \cap B \in \tau$;
- 若 $\{A_i | \ i \in I\} \subseteq \tau$，则 $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

则称结构 (X, τ) 是一个拓扑空间，称 τ 中的元素为开集，称开集的补集为闭集。等价地（对偶地），可以通过规定闭集来定义拓扑空间。

注

拓扑空间 II

设 $\tau_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 X 的一族子集，则 τ_0 可以生成一个拓扑 τ:

- $\tau_1 = \tau_0 \cup \{\emptyset, X\}$;
- $\tau_2 = \{B \mid$ 存在有限个 $A_1, ..., A_k \in \tau_1$ 使得$B = \bigcap_{i=1}^{k} A_i\}$
- $\tau = \{B \mid$ 存在一族 $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \tau_1$ 使得$B = \bigcup_{i \in I} A_i\}$

例

- 实数集 $\mathbb{R}$ 上的开区间族 $\{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ 生成了一个拓扑 τ。
- 若 (X, τ) 是一个拓扑空间，$Y \subseteq X$，则 $(Y, \{A \cap Y \mid A \in \tau\})$ 是一个拓扑空间，称为 (X, τ) 的子空间。

紧致空间 I

紧致空间

设 (X,τ) 是一个拓扑空间，$\{U_i|\ i\in I\}\in\tau$。如果 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$，则称 $\{U_i|\ i\in I\}$ 是 X 的一个开覆盖。如果对每个开覆盖 $\{U_i|\ i\in I\}$，都存在有限子集 $I_0\subseteq I$ 使得 $\{U_i|\ i\in I_0\}$ 也是 X 的覆盖（称作 $\{U_i|\ i\in I\}$ 的有限子覆盖），则称 (X,τ) 是一个紧致空间（简称紧空间）。

注

设 (X,τ) 是一个拓扑空间。如果一族闭集 $\{V_i|\ i\in I\}$ 满足：对任意有限子集 $I_0\subseteq I$，有 $\bigcap_{i\in I_0}V_i\neq\emptyset$，则称 $\{V_i|\ i\in I\}$ 有有限交性质。

紧致空间 II

引理

设 (X, τ) 是一个拓扑空间。如果对任意一个满足有限交性质的闭集族 $\{V_i | \ i \in I\}$，都有 $\bigcap_{i \in I} V_i \neq \emptyset$，则 X 是紧致的。

斯通空间

豪斯多夫空间

设 (X, τ) 是一个拓扑空间。如果对任意的 $x, y \in X$, 存在 $U, V \in \tau$ 使得 $x \in U$，$y \in V$，$U \cap V = \emptyset$，则称 X 是一个豪斯多夫空间。

完全不连通空间

设 (X, τ) 是一个拓扑空间。如果对任意的 $x, y \in X$, 存在 $U \in \tau$ 使得 $X \backslash U \in \tau$，（此时称 U 为开闭集）$x \in U$，$y \in X \backslash U$，则称 X 是一个完全不连通的。

斯通空间

如果 (X, τ) 是一个紧致的，完全不连通的空间，则称其为斯通空间。

斯通空间-极大一致集的空间

极大一致集的空间

设 $\{A_i|\ i \in \mathbb{N}\}$ 是一组命题符号，$\mathfrak{B}$ 是其生成的公式集，

$$\mathfrak{X} = \{p|\ p \text{ 是 } \mathfrak{B} \text{ 上的极大一致集。}\}$$

对每个公式 $\phi \in \mathfrak{B}$，令 $<\phi>= \{p \in \mathfrak{X}|\ \phi \in p\}$。令 τ 是由 $\{<\phi>\ |\ \phi \in \mathfrak{B}\}$ 生成的拓扑。

定理

$\mathfrak{X}$ 是一个斯通空间。

证明

1. $<\phi>\cap<\psi>=<\phi\wedge\psi>$,$<\phi>\cup<\psi>=<\phi\vee\psi>$;
2. $\{<\phi>,\phi\in\mathfrak{B}\}$ 关于有限交封闭;
3. $U\subseteq\mathfrak{X}$ 是开集当且仅当 $U=\bigcup_{i\in I}<\phi_i>$;
4. $V\subseteq\mathfrak{X}$ 是闭集当且仅当 $V=\bigcap_{i\in I}<\phi_i>$;
5. $\emptyset=<\phi\wedge\neg\phi>$, $\mathfrak{X}=<\phi\vee\neg\phi>$;
6. $\mathfrak{X}\backslash<\phi>=<\neg\phi>$，故 $<\phi>$ 是开闭集;
7. 设 $p\neq q\in\mathfrak{X}$，则存在 $\phi\in\mathfrak{B}$ 使得 $\phi\in p$，$\phi\notin q$，即 $p\in<\phi>$ 且 $q\notin<\phi>$，故 $\mathfrak{X}$ 完全不连通;
8. 设 $V_{i\in I}$ 是一族具有有限交性质的闭集;
9. 设每个 $V_i=\cap_{j\in J}<\phi_i^j>$，则公式集 $\{\phi_i^j|\ i\in I,j\in J\}$ 是有限一致的;
10. $\{\phi_i^j|\ i\in I,j\in J\}$ 可以扩张为一个极大一致集合 p，故 $p\in\bigcap_{i\in I}V_i$;
11. 故 $\mathfrak{X}$ 是紧致的。（该证明无需“紧致性定理”）

斯通空间-真值指派的空间

真值指派的空间

设 $\{A_i | \ i \in \mathbb{N}\}$ 是一组命题符号，$\mathfrak{B}$ 是其生成的公式集，

$$\mathfrak{X}^* = \{v | \ v \text{ 是 } A_i | \ i \in \mathbb{N} \text{ 上的真值指派。}\}$$

对每个公式 $\phi \in \mathfrak{B}$，令 $[\phi] = \{v \in \mathfrak{X}^* | \ \bar{v}(\phi) = T\}$。令 τ 是由 $\{[\phi] | \ \phi \in \mathfrak{B}\}$ 生成的拓扑。

定理

$\mathfrak{X}^*$ 是一个斯通空间。

证明 I

1. $[\phi] \cap [\psi] = [\phi \wedge \psi]$,$[\phi] \cup [\psi] = [\phi \vee \psi]$;
2. $\{[\phi], \phi \in \mathfrak{B}\}$ 关于有限交封闭；
3. $U \subseteq \mathfrak{X}^*$ 是开集当且仅当 $U = \bigcup_{i \in I} [\phi_i]$;
4. $V \subseteq \mathfrak{X}^*$ 是闭集当且仅当 $V = \bigcap_{i \in I} [\phi_i]$;
5. $\emptyset = [\phi \wedge \neg\phi]$, $\mathfrak{X}^* = [\phi \vee \neg\phi]$;
6. $\mathfrak{X} \backslash [\phi] = [\neg\phi]$，故 $[\phi]$ 是开闭集；
7. 设 $u \neq v \in \mathfrak{X}^*$，则存在 A_i 使得 $\bar{v}(A_i) = T$，$\bar{u}(A_i) = F$，即 $v \in [A_i]$ 且 $u \notin [A_i]$，故 $\mathfrak{X}^*$ 完全不连通;
8. 设 $V_{i \in I}$ 是一族具有有限交性质的闭集；
9. 设每个 $V_i = \cap_{j \in J} [\phi_i^j]$，则公式集 $\{\phi_i^j | \ i \in I, j \in J\}$ 是有限可满足的，显然 $\bigcap_{i \in I} V_i \neq \emptyset$ 当且仅当 $\{\phi_i^j | \ i \in I, j \in J\}$ 可满足；

证明 II

10. 重新将 $\{\phi_i^j | i \in I, j \in J\}$ 枚举为 $\{\psi_n | n \in \mathbb{N}\}$，同时假设 ψ_n 是一个合取范式;
11. 则 $\{[\psi_n] | n \in \mathbb{N}\}$ 具有有限交性质;
12. 令 θ_m 为所有的仅含命题符号 $\{A_0, ..., A_m\}$ 的那些 ψ_n 的公式的合取（在重言等价的意义下）;
13. 显然 $\{\psi_n | n \in \mathbb{N}\}$ 可满足当且仅当 $\{\theta_m | m \in \mathbb{N}\}$ 可满足;
14. 断言： 存在真值指派序列 $\{v_m : \{A_0, ..., A_m\} \to \{T, F\} | m \in \mathbb{N}\}$ 使得:
    1. $\bar{v}_m(\theta_m) = T$;
    2. $v_m \subseteq v_{m+1}$;
    3. 对任意的 $k > m$，存在 $v : \{A_0, ..., A_k\} \to \{T, F\}$ 且 $v(\theta_k) = T$ 且 $v_m \subseteq v$;
15. 证明断言： 对 $m \in \mathbb{N}$ 归纳证明。假设满足条件 1 和 3 的 v_m 已经找到，而满足条件的 v_{m+1} 不存在;

证明 III

16 则对每个 v_m 的扩张 $u:\{A_0,\ldots,A_m,A_{m+1}\}\to\{T,F\}$，如果 u 满足 θ_{m+1}，则存在 $k_u\in\mathbb{N}$，$k_u>m+1$，使得任意 $u':\{A_0,\ldots,A_{k_v}\}\to\{T,F\}$ 都不是 u 的扩张；

17 $A_0,\ldots,A_m,A_{m+1}$ 上的真值指派只有有限多个。设 $u_0,\ldots,u_j$ 是所有的满足 θ_{m+1} 的 v_m 的扩张；

18 令 $k=\max\{k_{u_0,\ldots,u_j}\}$，则根据归纳假设存在 $v:\{A_0,\ldots,A_k\}\to\{T,F\}$ 使得 $v(\theta_k)=T$ 且 $v_m\subseteq v$;

19 显然，对任意的 $i<k$，$\bar{v}(\theta_i)=T$;

20 令 $u=v|_{A_1,\ldots,a_{m+1}}$，则 $'=v|_{A_1,\ldots,a_{k_u}}$ 是 u 的扩张, 与 16 矛盾。断言证毕。

21 令 $v_\omega=\bigcup v_n$，则 $v_\omega:\{A_n|\ n\in\mathbb{N}\}\to\{T,F\}$ 满足所有的 θ_m。

22 故 $\mathfrak{X}^*$ 是一个紧空间。

注

1. 以论述明显然也给出了紧致性定理得一个证明方法；
2. 显然，紧致性定理可以直接推出 $\mathfrak{X}^*$ 是一个紧空间，反之亦然。
3. 完备性定理事实上可以表述为：$\mathfrak{X}^*$ 与 $\mathfrak{X}$ 是同胚的：

$$v \mapsto p_v = \{\phi \in \mathfrak{B} |\ \bar{v}(\phi) = T\}.$$

练习 I

乘积拓扑

设 $\{X_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ 是一族拓扑空间，则 $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}|\ x_n \in X_n}\}$。如果 $U_0 \subseteq X_0, \ldots, U_n \subseteq X_n$，则称 $U_0 \times \ldots \times U_n \times \prod_{m\in\mathbb{N}} X_{n+m+1}$ 为一个基础开集。定义 X 上的拓扑为：U 是开集当且仅当 U 是基础开集之并。则称 X 是 $\{X_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ 的积空间。

练习 1

集合 $\{0,1\}$ 是一个拓扑空间，其每个子集都是开集。令 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots$。证明：$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 同胚于 $\mathfrak{X}^*$；

练习 II

练习 2

考虑实闭区间 $Y_0 = [0,1]$，将 $[0,1]$ 的子区间 $(1/3, 2/3)$ 挖掉，得到 $Y_1 = [0,1/3] \cup [2/3,3/3]$，再将 Y_1 的每个区间段的中间三分之一挖掉，得到集合
$Y_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,9/9]$，...，将此过程重复，得到集合序列

$$Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 ... \supset Y_n \supset ...$$

令 $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$，称之为康托集。证明：$Y$ 同胚于 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$。

目录

布尔代数 I

布尔代数

设 $\mathfrak{B}$ 是一个集合，其中有两个特殊元素 $\{0,1\}$。如果映射 $\neg:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$，$\wedge:\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$，以及 $\vee:\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$ 满足以下条件，则称 $(\mathfrak{B},\neg,\vee,\wedge,0,1)$ 是一个布尔代数。

1. 德摩根律：$\neg(\neg x)=x, \neg(x\wedge y)=\neg x\vee\neg y,$ $\neg(x\vee y)=\neg x\wedge\neg y;$
2. $\wedge$ 结合性：$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z);$
3. $\vee$ 结合性：$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z);$
4. $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律：$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z);$
5. $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律：$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z);$
6. 交换律：$x\wedge y=y\wedge x$，$x\vee y=y\vee x;$

布尔代数 II

7. $x \wedge \neg x = 0$， $x \vee \neg x = 1$;
8. $x \wedge 0 = 0$， $x \vee 0 = x$， $x \wedge 1 = x$， $x \wedge 1 = 1$;
9. $0 \neq 1$， $\neg 0 = 1$， $\neg 1 = 0$.

$\mathfrak{B}$ 上的偏序

定义 $\mathfrak{B}$ 上的偏序 $\leq$ 为： $x \leq y \iff x \vee y = y$。根据对偶性， $x \leq y \iff x \wedge y = x$。

引理

$x \leq y$ 当且仅当 $\neg y \leq \neg x$;

例子 I

- 设 X 是一个集合，则 $(\mathcal{P}(X), \neg, \cup, \cap, \emptyset, X)$ 是一个布尔代数，其上的偏序为 $\subseteq$。
- 若 $E \subseteq (\mathcal{P}(X)$ 关于交并补封闭，则 E 也是一个布尔代数。
- 设 $\mathcal{F}_X$ 是所有形如 $f : X \to \{0, 1\}$ 的函数的集合，记作 $\mathcal{F} = 2^X$。对任意 $f, g \in \mathcal{F}_X$，$x \in X$，定义：
  1. $(\neg f)(x) = 1 \iff f(x) = 0$;
  2. $(f \wedge g)(x) = 1 \iff f(x) = g(x) = 1$;
  3. $(f \wedge g)(x) = 0 \iff f(x) = g(x) = 0$。

  则 $\mathcal{F}_X$ 是一个布尔代数;
- $\mathcal{F}_X$ 与 $\mathcal{P}(X)$ 同构;
- 设 X 是一个命题符号集，B_X 是 X 上的命题公式，$\mathfrak{B}_X$ 是 B_X 在重言等价关系下的等价类，则 $\mathfrak{B}_X$ 是一个布尔代数。
- $\mathcal{F}_X$ 中有极小元，$\mathfrak{B}_X$ 中无极小元（无原子）。

斯通定理 I

滤子

设 $\mathfrak{B}$ 是一个布尔代数，如果 $F \subseteq \mathfrak{B}$ 满足：

1. $0 \notin F, 1 \in F$;
2. $x \in F$ 且 $x \leq y$ 则 $y \in F$;
3. $x \in F$ 且 $y \in F$ 则 $x \wedge y \in F$.

则称 F 是一个滤子。如果进一步地，对每个 $x \in \mathfrak{B}$，有 $x \in F$ 或 $\neg x \in F$，则称 F 是 $\mathfrak{B}$ 上的一个极大（超）滤子。

例子：

- 对每个 $x(\neq 0) \in \mathfrak{B}$，$(x) = \{y \in \mathfrak{B} \mid x \leq y\}$ 是一个滤子，称作 x 生成的滤子；
- 如果 x 还是极小元，则 (x) 是一个超滤；

斯通定理 II

- 如果 $A \subseteq B$ 具有有限交性质，则 A 生成一个滤子，记作 (A)；
- 考虑布尔代数 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$。令 $D_k = \{kn | \ n \in \mathbb{N} \ n \neq 0\}$，则 $D = \{D_k | \ k = 2, 3, 4, ...\}$ 生成一个滤子。
- 任何一个滤子都就可以扩张为超滤子；
- $F \subseteq \mathfrak{B}_X$ 是 (极大) 滤子当且仅当它是（极大）一致的；
- 由完全性定理，$\mathcal{F}_X$ 是 $\mathfrak{B}_X$ 的超滤空间；

斯通定理 III

斯通表示定理

设 $\mathfrak{B}$ 是一个布尔代数，则存在一个斯通空间 $\mathfrak{X}$，使得 $\mathfrak{B}$ 同构于由 $\mathfrak{X}$ 的开闭集构成的布尔代数，且 $\mathfrak{X}$ 在同构意义下唯一。

证明：

目录

模态逻辑 I

- 必然，可能，应该，从前，将来，……
- 模态逻辑/时态逻辑
- 哲学逻辑/知识表达/人工智能……

模态逻辑 II

模态逻辑的符号系统只命题逻辑多一个符号 $\Box$，被称为**模态算子**，是一元逻辑联结词。

- 如果 α 是合式公式，则 $(\Box\alpha)$ 也是合式公式；
- $\Diamond\alpha$ 表示 $\neg\Box\neg\alpha$；
- $\Box$ 和 $\Diamond$ 分别被解释为“必然”和“可能”。
- $\Box$ 和 $\Diamond$ 也可以分别被解释为“已经知道”和“不与目前所知矛盾”；
- $\Box$ 和 $\Diamond$ 也可以分别被解释为“应该”和“有序”；
- 对模态算子 $\Box$ 的不同解释导致不同的模态语义与推理系统。

克里普克模型 I

定义

1. 称一个二元组 $F = (W, R)$ 是一个框架，如果 W 是非空集合，R 是 W 上的二元关系；
2. 称命题符号集合到 $\mathcal{P}(W)$ 的映射 V 为一个赋值；
3. 称一个框架和赋值形成的二元组 $M = (F, V)$ 为一个（克里普克）模型。模型 M 也被记作 $M = (W, R, V)$。

克里普克模型 II

注

1. W 中的元素被称为一个可能世界或世界；
2. 称 xRy 为从 x 可以通达 y或者y 是 x 的一个将来世界；
3. 赋值 V 指派给命题符号 A 的集合 $V(A) \subseteq W$ 是使得 A 在其中成立的可能世界。

克里普克语义 I

定义

1. 称一个二元组 $F = (W, R)$ 是一个框架，如果 W 是非空集合，R 是 W 上的二元关系；
2. 称命题符号集合到 $\mathcal{P}(W)$ 的映射 V 为一个赋值；
3. 称一个框架和赋值形成的二元组 $M = (F, V)$ 为一个**（克里普克）模型**。模型 M 也被记作 $M = (W, R, V)$。

定义

克里普克语义 II

我们归纳地定义一个模态公式 α 在模型 M 中的世界 w 中为真，记作 $(M, w) \models \alpha$，如下：

1. 对每个命题符号 A_i，$(M, w) \models A_i$ 当且仅当 $w \in V(A_i)$；
2. $(M, w) \models \neg\beta$ 当且仅当 $(M, w) \not\models \beta$；
3. $(M, w) \models \beta \to \gamma$ 当且仅当 $(M, w) \not\models \beta$ 或者 $(M, w) \models \gamma$；
4. $(M, w) \models \Box\beta$ 当且仅当对任意的 $w' \in W$，如果 $R(w, w')$，则 $(M, w') \models \beta$。

若 $(M, w) \models \neg\alpha$，则称 α 在模型 M 中的世界 w 中为假。

定义

克里普克语义 III

一个模态公式 α 在模型 $M = (W, R, V)$ 中为真，记作 $M \models \alpha$，如果对所有的 $w \in W$ 都有 $(M, w) \models \alpha$。

例

框架 $F = (W, R)$，其中 $W = \{u, v, w\}$，$R = \{(u, v), (u, w)\}$，定义赋值 $V : \{A, B\} \to (W)$ 为：$V(A) = \{u, v\}$ 且 $V(B) = \{v\}$。则

$$(M, u) \models \Box(A \to B) \text{ 但是 } (M, u) \not\models A \to \Box B.$$

克里普克语义 IV

定义

一个模态公式 α 是**普遍有效**的，记作 $\models \alpha$，如果对所有的模型 M 都有 $M \models \alpha$。

例

证明：$\models \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$。

推理系统 K I

公理

1. (A1)，(A2)，(A2)；
2. K：$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

推理股则

1. 分离规则 MP；
2. 必然化规则 RN：从 α 可以得到 $\Box\alpha$。

推理系统 K II

内定理

1. $\Gamma \vdash_K \alpha$；
2. $\vdash_K \alpha$。

例

证明：$(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_K (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$。

证明：

1. $\alpha \rightarrow \beta$；
2. $\Box(\alpha \rightarrow \beta)$；
3. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$；
4. $\Box\alpha \rightarrow \Box\beta$。

模态重言式 I

模态重言式

- 将每个命题符号和形如$(\Box\alpha)$的模态公式全部列出，记作 $\beta_1, \beta_2, \ldots$;
- 引入新的命题符号，记作 $B_1, B_2, \ldots$;

设 α 是一个模态公式，按照如下方式递归定义 $\hat{\alpha}$

1. 若 α 是 β_i，则 $\hat{\alpha}$ 是 B_i;
2. 若 α 是 $\neg\psi$，则 $\hat{\alpha}$ 是 $\neg\hat{\psi}$;
3. 若 α 是 $\psi_1 \star \psi_2$，则 $\hat{\alpha}$ 是 $\hat{\psi}_1 \star \hat{\psi}_2$;

如果 $\hat{\alpha}$ 是一个命题重言式，则称 α 是是一个模态重言式。

模态重言式 II

引理

如果 α 是模态重言式，则 $\vdash_K \alpha$。

证明

设模态公式的命题符号来自 $\mathcal{A} = \{A_n | \; n = 1, 2, 3, \ldots\}$，设 $\mathfrak{B} = \{B_i | \; i = 1, 2, \ldots\}$ 如上。

- 证明对每个 $\mathfrak{B}$ 上的命题公式 θ 存在 $\mathcal{A}$ 上唯一的模态公式 α 使得 $\theta = \hat{\alpha}$。
  1. 对 $|\theta|$ 的长度归纳证明；
  2. $|\theta| = 1$，则 $\theta = B_i$，即或者 $\theta = A_n$ 或者 $\theta = \widehat{\Box\alpha}$;
  3. 如果 $|\theta| > 1$，则 θ 为 $(\neg\theta_1)$ 或 $(\theta_1 \star \theta_2)$;
  4. 由归纳假设 $\theta_1 = \hat{\alpha}_1$，$\theta_2 = \hat{\alpha}_2$；
  5. 显然 θ 为 $\widehat{(\neg\alpha_1)}$ 或 $\widehat{(\alpha_1 \star \alpha_2)}$;
  6. 归纳原理，可得 $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ 是双射。

模态重言式 III

- 对证明长度归纳证明：如果 $\vdash \hat{\alpha}$，则 $\vdash_K \alpha$。
- 事实上可以证明：如果 $\hat{\alpha_1}, ..., \hat{\alpha_n}$ 是命题逻辑中的一个证明，则 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 是对应的模态逻辑的一个证明。

K-极大一致集 I

引理

如果 $\{\alpha: \Box\alpha \in \Gamma\} \vdash_K \beta$，则 $\Gamma \vdash_K \Box\beta$。

证明

对证明长度归纳证明。

- 设 $(\beta_1, ..., \beta_n)$ 为 $\{\alpha | \Box\alpha \in \Gamma\}$ 的一个证明序列。
- 则 $\beta_1 \in \{\alpha | \Box\alpha \in \Gamma\} \cup \Lambda$，从而 $\vdash_K \Box\beta_1$ 或 $\Box\beta_1 \in \Gamma$，故 $\Gamma \vdash \Box\beta_1$;
- 设$\Gamma \vdash_K \Box\beta_1, ..., \Box\beta_{i-1}$;
- 如果 $\beta_i \in \{\alpha | \Box\alpha \in \Gamma\} \cup \Lambda$，则显然 $\Gamma \vdash_K \Box\beta$;
- 如果 β_i 由分离规则得到，则存在 $j, k < i$ 使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$;
- 由于 $\{\Box(\beta_j \to \beta_i), \Box\beta_j\} \vdash_K \Box\beta_i$;

K-极大一致集 II

- 故 $\Gamma \vdash_K \Box\beta_i$。
- 如果 β_i 由必然化规则得到，则存在 $j < i$ 使得 $\beta_i = \Box\beta_j$;
- 则 $\Gamma \vdash_K \beta_i$，再从使用必然化规则，有 $\Gamma \vdash_K \Box\beta_i$.

定义（K-极大一致集）

称模态公式集 Γ 是一个K-极大一致集，如果 Γ 是 K-一致的，且对任意的模态公式 α，或者 $\alpha \in \Gamma$ 或者 $\neg\alpha \in \Gamma$。

定理

设 Γ 是一个 K-极大一致集。则 $\Box\beta \in \Gamma$ 当且仅当对每个满足 $\{\alpha |\ \Box\alpha \in \Gamma\} \subseteq \Delta$ 的 K-极大一致集 Δ，β 都属于 Δ。

证明:

$\Rightarrow$ 若 $\Box\beta \in \Gamma$，则（由定义）$\beta \in \Delta$。

$\Leftarrow$ 只需证明 $\{\alpha |\ \Box\alpha \in \Gamma\} \vdash_K \beta$。否则，

$$\{\alpha |\ \Box\alpha \in \Gamma\} \cup \{\neg\beta\}$$

是一致的，从而可以扩张为一个极大一致的集合。

系统 K 的可靠性与完全性

模态逻辑 K 的可靠性定理

如果 $\vdash_K \alpha$，则 α 是普遍有效的。

证明

对证明长度归纳证明。

模态逻辑 K 的完全性定理

如果 $\models \alpha$，则 $\vdash_K \alpha$。

证明

只需证明：如果 $\nvdash_K \alpha$，则存在 (M, w) 使得 $(M, w) \not\models \alpha$。

典范模型 I

定义

我们定义模态逻辑 K 的典范模型 $M = (W, R, V)$ 为:

$$W = \{\Gamma \mid \Gamma\text{是一个}K\text{极大一致集}\}$$

$$(\Gamma, \Gamma') \in R \iff \{\alpha \mid \Box\alpha \in \Gamma\} \subseteq \Gamma',$$

$$V(A_i) = \{\Gamma \in W \mid A_i \in \Gamma\}.$$

典范模型 II

引理

设 $M = (W, R, V)$ 是典范模型。则对任意的模态公式 α，对任意的 $\Gamma \in W$，我们有 $(M, \Gamma) \models \alpha$ 当且仅当 $\alpha \in \Gamma$。

证明

对 α 的长度归纳证明。

1. A_i （定义）;
2. $\neg\beta$ （极大一致性）;
3. $\beta \to \gamma$;
4. $\Box\beta$ 定理108。

完全性定理的证明

完全性定理的证明

如果 $\nvdash_K \alpha$，则 $\{\neg\alpha\}$ 是一致的，从而可以扩张为极大一致的 Γ。$(M,\Gamma) \not\models \alpha$。

作业

P. 61: 2.9.1, 2.9.3, 2.9.4, 2.9.5, 2.9.6, 2.9.7

Thanks!