Scott 拓扑与 D_∞

陈淇奥

2022 年 6 月 29 日

1 Scott 拓扑

定义 1.1. 给定偏序集 $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ 以及集合 $X \subseteq D$，

1. 用 $\perp$ 表示 D 的 **最小元**；
2. 用 $\bigsqcup X$ 表示 X 的最小上界；
3. 若 X 非空且对任意 $a, b \in X$ 都存在 $c \in X$ 使得 $a \sqsubseteq c$ 且 $b \sqsubseteq c$，则称 X 是 **有向集**；
4. 若 D 满足

   (a) D 有最小元；

   (b) 每一个 D 的有向子集 X 都有最小上界。

   则称 D 是 **完全偏序** (*complete partial order*)，记作 *c.p.o.*。

定义 1.2. 给定任意 $\perp \notin \mathbb{N}$，定义 $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$，并且对任意 $a, b \in \mathbb{N}^+$，定义

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow (a = \perp \wedge b \in \mathbb{N}) \vee a = b$$

我们用 $\mathbb{N}^+$ 表示 $\langle \mathbb{N}^+, \sqsubseteq \rangle$。

引理 1.3. $\mathbb{N}^+$ 是完全偏序。

证明. 注意到 $\mathbb{N}^+$ 的有向子集只包括单点集与 $\{\perp, n\}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ □

定义 1.4. 给定完全偏序 D, D'，令 f 是从 D 到 D' 的函数，定义 f 是**单调的**当且仅当

$$a \sqsubseteq b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq' f(b)$$

定义 1.5. 给定完全偏序 $\langle D, \sqsubseteq \rangle$，定义 D 上的 ***Scott* 拓扑**：$O \subseteq D$ 是开集当且仅当

1. $x \in O \wedge x \sqsubseteq y \Rightarrow y \in O$;

2. 若 $X \subseteq D$ 有向且 $\bigsqcup X \in O$，则 $X \cap O \neq \emptyset$。

引理 1.6. 令 $U_x = \{z \in D \mid z \not\sqsubseteq x\}$，则 U_x 是开集

证明. 1. 若 $y \in U_x$ 且 $y \sqsubseteq z$，若 $z \sqsubseteq x$，则 $y \sqsubseteq x$ 矛盾。

2. 若 $X \subseteq D$ 有向且 $\bigsqcup X \in U_x$，若 $X \cap U_x = \emptyset$，则 $\bigsqcup X \sqsubseteq x$，矛盾。

□

推论 1.7. D 是 T_0 空间

证明. 令 $x, y \in D$ 且 $x \neq y$，则 $x \in U_y$ 且 $y \notin U_y$。 □

命题 1.8. 考虑函数 $f : D \to D'$，则

$$f \text{ 连续当且仅当对任意有向集 } X \subseteq D\text{，} f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f(X)$$

其中 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$。

证明. $\Rightarrow$：若 f 连续，假设 $x \sqsubseteq y$ 且 $f(x) \not\sqsubseteq' f(y)$，则 $f(x) \in U_{f(y)}$，$x \in f^{-1}(U_{f(y)})$，由于 $f^{-1}(U_{f(y)})$ 是开集，$y \in f^{-1}(U_{f(y)})$，$f(y) \in U_{f(y)}$，矛盾。因此对于任意 $x \in X$，$f(\bigsqcup X) \sqsupseteq f(x)$，$f(\bigsqcup X) \sqsupseteq \bigsqcup f(X)$。若 $f(\bigsqcup X) \not\sqsubseteq \bigsqcup f(X)$，则 $f(\bigsqcup X) \in U_{\bigsqcup f(X)}$，$\bigsqcup X \in f^{-1}(U_{\bigsqcup f(X)})$，由定义，存在 $a \in X$ 使得 $a \in X \cap f^{-1}(U_{\bigsqcup f(X)})$，因此 $f(a) \in U_{\bigsqcup f(X)}$，$f(a) \not\sqsubseteq \bigcup f(X)$，矛盾。

$\Leftarrow$：若 $x \sqsubseteq y$，则 $y = x \sqcup y$，$f(y) = f(x) \sqcup f(y)$，因此 $f(x) \sqsubseteq f(y)$。因此若 $O \subseteq D'$ 是开集，对于任意有向 $X \subseteq D$ 且 $\bigsqcup X \in f^{-1}(O)$，有 $f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f(X) \in O$，而 $f(X)$ 是有向，于是 $f(X) \cap O \neq \emptyset$，因此 $X \cap f^{-1}(O) \neq \emptyset$。 □

命题 1.9. 给定完全偏序 D, D'，定义 $D \times D'$ 上的偏序为

$$(x, x') \sqsubseteq (y, y') \Leftrightarrow x \sqsubseteq y \wedge x' \sqsubseteq y'$$

则 $D \times D'$ 是完全偏序，给定任意有向集 $X \subseteq D \times D'$，它的最小上界是

$$\bigsqcup X = (\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1)$$

其中

$$X_0 = \{x \in D \mid \exists x' \in D'(x, x') \in X\}$$
$$X_1 = \{x' \in D' \mid \exists x \in D(x, x') \in X\}$$

证明. 首先 $(\perp, \perp')$ 是 $D \times D'$ 的最小元。对于任意有向集合 $X \subseteq D \times D'$，X_0, X_1 也是有向集合，因此 $\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1$ 存在，于是对于任意 X 的上界 (A, B)，A 是 X_0 的上界，B 是 X_1 的上界，因此 $(\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1) \sqsubseteq (A, B)$，因此 $\bigsqcup X = (\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1)$。 □

定义 1.10. 给定完全偏序 D, D'，定义

$$[D \to D'] = \{f : D \to D' \mid f\text{连续}\}$$

并且定义 $[D \to D']$ 上的偏序为

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall x \in D(f(x) \sqsubseteq' g(x))$$

引理 1.11. 令 $\{f_i\}_i \subseteq [D \to D']$ 为有向的函数集合，定义

$$f(x) = \bigsqcup_i f_i(x)$$

则 f 是良定义的并且是连续的。

证明. 应为 $\{f_i\}_i$ 有向，因此对于任意 $x \in D$，$\{f_i(x)\}_i$ 有向，因此 f 存在且 $f(x)$ 唯一。对于任意有向集合 $X \subseteq D$，

$$f(\bigsqcup X) = \bigsqcup_i \bigsqcup_{x \in X} f_i(x) = \bigsqcup_{x \in X} \bigsqcup_i f_i(x) = \bigsqcup f(X)$$

□

下面使用 $\lambda d \in D.\phi(a_1, \dots, a_n, d)$ 来表示函数 $f(d) = \phi(a_1, \dots, a_n, d)$，其中 $d \in D$。

命题 1.12. $[D \to D']$ 是完全偏序，并且对于任意有向 $F \subseteq [D \to D']$，它的最小上界为

$$(\bigsqcup F)(x) = \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\}$$

证明. $\lambda x.\bot'$ 是 $[D \to D']$ 的最小元，由引理1.11，$\lambda x.\bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\}$ 是连续的，因此属于 $[D \to D']$，显然它是最小上界。 □

命题 1.13. 给定完全偏序 D, D', D''，若 $f \in [D \to D']$，$g \in [D' \to D'']$，定义 $g \circ f$ 为对任意 $d \in D$，$(g \circ f)(d) = g(f(d))$，则 $g \circ f \in [D \to D'']$。

证明. 任给有向集合 $X \subseteq D$，$f \in [D \to D']$，$g \in [D' \to D'']$，则

$$g \circ f(\bigsqcup X) = g(f(\bigsqcup X)) = g(\bigsqcup_{x \in X} f(x)) = \bigsqcup_{x \in X} g(f(x)) = \bigsqcup_{x \in X} g \circ f(x)$$

□

引理 1.14. 令 $f : D \times D' \to D''$，则 f 连续当且仅当它在 D 跟 D' 上连续，即对于任意 $x_0 \in D, x'_0 \in D'$，$\lambda x.f(x, x'_0)$ 和 $\lambda x.f(x_0, x)$ 连续。

证明. $\Rightarrow$：令 $g = \lambda x.f(x, x'_0)$，则对于有向集合 $X \subseteq D$

$$\begin{aligned} g(\bigsqcup X) &= f(\bigsqcup X, x'_0) = f(\bigsqcup \{(x, x'_0) \mid x \in X\}) \\ &= \bigsqcup \{f(x, x'_0) \mid x \in X\} \\ &= \bigsqcup g(X) \end{aligned}$$

同理，$\lambda x.f(x_0, x)$ 连续。

$\Leftarrow$：给定有向集合 $X \subseteq D \times D'$，

$$\begin{aligned} f(\bigsqcup X) &= f(\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1) \\ &= \bigsqcup_{x \in X_0} f(x, \bigsqcup X_1) = \bigsqcup_{x \in X_0} \bigsqcup_{x' \in X'_0} f(x, x') \\ &= \bigsqcup_{(x, x') \in X} f(x, x') \\ &= \bigsqcup f(X) \end{aligned}$$

因此 f 连续。 $\square$

命题 1.15. 给定完全偏序 D, D'，令

$$app : [D \to D'] \times D \to D'$$

为 $app(f, x) = f(x)$，则 app 连续。

证明. 给定有向集合 $F \subseteq [D \to D']$，令 $h = \lambda\!\!\lambda f.f(x)$，则

$$\begin{aligned} h(\bigsqcup F) &= (\bigsqcup F)(x) = \bigsqcup\{f(x) \mid f \in F\} \\ &= \bigsqcup\{h(f) \mid f \in F\} = \bigsqcup h(F) \end{aligned}$$

因此 h 连续，同时因为 $\lambda\!\!\lambda x.f(x) = f$ 连续，由命题1.12 app 连续 $\square$

命题 1.16. 给定 $f \in [D \times D' \to D'']$，定义 $\hat{f}(x) = \lambda\!\!\lambda y \in D'(f(x, y))$，则

1. $\hat{f}$ 连续；
2. $\lambda\!\!\lambda f.\hat{f} : [D \times D' \to D''] \to [D \to [D' \to D'']]$ 连续。

证明. 1. 对于任意有向集 $X \subseteq D$，

$$\begin{aligned} \hat{f}(\bigsqcup X) &= \lambda\!\!\lambda y.f(\bigsqcup X, y) = \lambda\!\!\lambda y. \bigsqcup_{x \in X} f(x, y) \\ &= \bigsqcup_{x \in X} (\lambda\!\!\lambda y.f(x, y)) \\ &= \bigsqcup \hat{f}(X) \end{aligned}$$

2. 令 $L = \lambda\!\!\lambda f.\hat{f}$，对于任意有向集 $F \subseteq [D \times D' \to D'']$，

$$\begin{aligned} L(\bigsqcup F) &= \lambda\!\!\lambda x.\lambda\!\!\lambda y.(\bigsqcup F)(x, y) = \lambda\!\!\lambda x \lambda\!\!\lambda y. \bigsqcup_{f \in F} f(x, y) \\ &= \bigsqcup_{f \in F} \lambda\!\!\lambda x.\lambda\!\!\lambda y.f(x, y) = \bigsqcup L(F) \end{aligned}$$

$\square$

定义 1.17. ***CPO*** 是以完全偏序为元素连续映射为态射的范畴。

定理 1.18. ***CPO*** 是笛卡儿闭范畴。

证明. $D \times D'$ 是 **CPO** 中的乘积，同时单元素完全偏序是终对象，而对于任意 $f : D \times D' \to D''$，由命题1.15 和1.16，都存在唯一的 $\hat{f} : D \to [D' \to D'']$ 使得

$$\begin{tikzcd} D \times D' \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\hat{f}\times \mathrm{id}_{D'}"'] & D \\ {[D' \to D''] \times D'} \arrow[ur, "app"'] & \end{tikzcd}$$

交换。 □

定义 1.19. 令 $D_0, D_1, \ldots$ 是可数的完全偏序序列，令 $f_i \in [D_{i+1} \to D_i]$，

1. 序列 (D_i, f_i) 称为完全偏序的 **逆向系统** (*inverse system*)。

2. 系统 (D_i, f_i) 的 **逆向极限** (*inverse limit*) $\varprojlim(D_i, f_i)$ (或记作 $\varprojlim D_i$) 是偏序集 $(D_\infty, \sqsubseteq_\infty)$，其中

$$D_\infty = \{(x_0, x_1, \ldots) \mid \forall i \in \mathbb{N}(x_i \in D_i \land \psi_i(x_{i+1}) = x_i)\}$$

并且

$$(x_0, x_1, \ldots) \sqsubseteq_\infty (y_0, y_1, \ldots) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}(x_i \sqsubseteq y_i)$$

命题 1.20. 给定逆向系统 (D_i, f_i)，则 $\varprojlim(D_i, f_j)$ 是完全偏序且对任意有向 $X \subseteq \varprojlim D_i$，

$$\bigsqcup X = \lambda\!\!\lambda\, i. \bigsqcup\{x(i) \mid x \in X\}$$

证明. 对于任意有向 $X \subseteq D_\infty$，则对任意 $i \in \mathbb{N}$，$\{x(i) \mid x \in X\}$ 有向，令

$$y_i = \bigsqcup\{x(i) \mid x \in X\}$$

则由 ψ_i 的连续性，

$$\psi_i(y_{i+1}) = \bigsqcup f_i(\{x(i+1) \mid x \in X\}) = \bigsqcup\{x(i) \mid x \in X\} = y_i$$

因此 $(y_0, y_1, \ldots) \in \varprojlim D_i$。 □

因此在 **CPO** 中，逆向极限存在。

2 D_∞

定义 2.1. 给定完全偏序 D 和 D'，D 与 D' **同构** 当且仅当存在 $\phi \in [D \to D']$ 与 $\psi \in [D' \to D]$ 使得

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_D, \quad \phi \circ \psi = \mathrm{id}_{D'}$$

定义 2.2. 给定完全偏序 D 和 D'。函数的二元组 $\langle \varphi, \psi \rangle$ 是从 D' 到 D 的 **投射** 如果

1. $\varphi \in [D \to D'], \psi \in [D' \to D]$
2. $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_D$
3. $\varphi \circ \psi \sqsubseteq \mathrm{id}_{D'}$

注意到 D 与 $\varphi\psi(D)$ 同构，因此在同构的意义下 $D \subseteq D'$。

定义 2.3. 定义 $D_0 = \mathbb{N}^+$，$D_{n+1} = [D_n \to D_n]$，记 D_n 的最小元为 $\bot_n$

由1.12，对任意 $n \in \mathbb{N}$，D_n 是完全偏序。

引理 2.4. 给定 D' 到 D 的投射 (φ, ψ)，存在从 $[D' \to D']$ 到 $[D \to D]$ 的投射 (φ^*, ψ^*) 满足：对于任意 $f \in [D \to D]$，$g \in [D' \to D']$ 有

$$\varphi^*(f) = \varphi \circ f \circ \psi, \quad \psi^*(g) = \psi \circ g \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "f"'] & D' \arrow[l, "\psi"'] \arrow[d, dashed, "\varphi^*(f)"] \\ D \arrow[r, "\varphi"'] & D' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\psi^*(g)"'] & D' \arrow[d, "g"] \\ D & D' \arrow[l, "\psi"] \end{tikzcd}$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned} \varphi^*(f) &= \lambda\!\!\lambda x' \in D'.\varphi(f(\psi(x))) \\ &= \lambda\!\!\lambda x' \in D'.\varphi(app(f, \psi(x))) \end{aligned}$$

于是 φ^* 是连续的，类似的 ψ^* 是连续的。同时

$$\psi^*(\varphi^*(f)) = \psi \circ \varphi \circ f \circ \psi \circ \varphi = f$$
$$\varphi^*(\psi^*(f)) = \varphi \circ \psi \circ f \circ \varphi \circ \psi \sqsubseteq f$$

□

引理 2.5. 给定完全偏序 D，定义 $\varphi_0 : D \to [D \to D]$，$\psi_0 : [D \to D] \to D$ 为

$$\varphi_0(x) = \lambda\!\!\lambda y \in D.x$$
$$\psi_0(f) = f(\perp)$$

则 (φ_0, ψ_0) 是从 $[D \to D]$ 到 D 的投射。

证明. 首先证明 φ_0 连续，给定有向集 $X \subseteq D$，

$$\varphi_0(\bigsqcup X) = \lambda\!\!\lambda y \in D.\bigsqcup X = \bigsqcup_{x \in X} \lambda\!\!\lambda y \in D.x$$
$$= \bigsqcup \varphi_0(X)$$

同理，ψ_0 连续。同时

$$\varphi_0(\psi_0(f)) = \varphi_0(f(\perp)) = \lambda\!\!\lambda x.f(\perp)$$
$$\sqsubseteq \lambda\!\!\lambda x.f(x) = f$$
$$\psi_0 \circ \varphi_0(f) = \varphi_0(f)(\perp) = f$$

□

定义 2.6 (构造 D_∞)**.** 给定完全偏序 D 与 (φ_0, ψ_0) 如上，定义

$$D_0 = D$$
$$D_{n+1} = [D_n \to D_n]$$
$$(\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}) = (\varphi_n^*, \psi_n^*)$$

令 $D_\infty = \varprojlim (D_n, \psi_n)$，记 $x \in D_\infty$ 为 $(x_0, x_1, \dots)$。

定义 2.7. *1.* 对于 $n, m \in \mathbb{N}$，定义 $\Phi_{nm} : D_n \to D_m$ 为：

若 $n \leq m, m = n + k$，则递归定义 Φ_{nm} 为

$$\Phi_{nn} = \lambda x \in D_n.x$$
$$\Phi_{n(m+1)} = \varphi_m \circ \Phi_{nm}$$

若 $m \leq n$，$n = m + k$，递归定义 Φ_{nm} 为

$$\Phi_{(n+1)m} = \Phi_{nm} \circ \psi_n$$

2. 定义 $\Phi_{\infty n} : D_\infty \to D_n$ 为 $\Phi_{\infty n}(x) = x_n$。

3. 定义 $\Phi_{n\infty} : D_n \to D_\infty$ 为 $\Phi_{n\infty}(x) = (\Phi_{ni}(x))_{i \in \mathbb{N}}$

引理 2.8. *1.* 对于 $0 \leq n \leq m \leq \infty$，$(\Phi_{nm}, \Phi_{mn})$ 是从 D_m 到 D_n 的投射

2. 对于 $0 \leq n \leq m \leq l \leq \infty$，$\Phi_{ml} \circ \Phi_{nm} = \Phi_{nl}$

证明. 1. 若 $n < m < \infty$，对于任意 $x \in D_m$，

$$\begin{aligned}
\Phi_{nm} \circ \Phi_{mn} &= (\varphi_{m-1} \circ ... \circ \varphi_n \circ \mathrm{id}_{D_n}) \circ (\mathrm{id}_{D_n} \circ \psi_n \circ ... \circ \psi_{m-1}) \\
&\sqsubseteq \mathrm{id}_{D_m} \\
\Phi_{mn} \circ \Phi_{nm} &= (\mathrm{id}_{D_n} \circ \psi_1 \circ ... \circ \psi_{m-1}) \circ (\varphi_{m-1} \circ ... \circ \varphi_1 \circ \mathrm{id}_{D_n}) \\
&= \mathrm{id}_{D_n}
\end{aligned}$$

$n < m = \infty$ 和 $n = m = \infty$ 的情况类似。

2. 根据定义类似可得。

□

注意到在同构的意义下，

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots \subseteq D_\infty$$

又有一个事实是在 **CPO** 中，D_∞ 不仅是逆向极限，也是正向极限

$$D_\infty \cong \varinjlim (D_n, \varphi_n)$$

因此每个元素 $x \in D_n$ 也可被 $\Phi_{n\infty}(x) \in D_\infty$ 刻画。

引理 2.9. *1.* 如果 $x \in D_n$，则 $(\Phi_{n\infty}(x))n = x$。

2. 如果 $x \in D_n$，则 $\Phi_{(n+1)\infty}\varphi_n(x) = \Phi_{n\infty}x$。

3. 如果 $x \in D_{n+1}$，则 $\Phi_{n\infty}\psi_n(x) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}x$。

证明. 1. 在 D_∞ 中，x 为 $\Phi_{n\infty}(x)$，因此 $x_n = x$。

2. $\varphi_n(x)$ 在 D_∞ 中为 $(\dots, \psi_n(\varphi_n(x)), \varphi_n(x), \varphi_{n+1}\varphi_n(x), \dots)$，因为 $\psi_n(\varphi_n(x)) = x$，因此 $\varphi_n(x) = x$。

3. $\varphi_n\psi_n(x) \sqsubseteq x$。

□

引理 2.10. 在 D_∞ 中，若 $x \in D_\infty$，则

1. $(\Phi_{n\infty}x_n)_m = x_{\text{min}(n,m)}$

2. $n \le m \Rightarrow \Phi_{n\infty}(x_n) \sqsubseteq \Phi_{m\infty}(x_m) \sqsubseteq x$

3. $x = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{n\infty}x_n$

4. $\Phi_{n\infty}(\bot_n) = \bot$

证明. 1. 由 2.9 (2).

2. 由2.9 (3)，$\Phi_{m\infty}(x_m) = \Phi_{m\infty}(\psi_m(x_{m+1})) \sqsubseteq \Phi_{(m+1)\infty}(x_{m+1})$，因此 $\Phi_{0\infty}(x_0) \sqsubseteq \Phi_{1\infty}(x_1) \sqsubseteq \cdots$。并且，由于对于任意 $i \in \mathbb{N}$，$(\Phi_{n\infty}x_n)_i = x_{\text{min}(i,n)} \sqsubseteq x_i$，有 $x_n \sqsubseteq x$。

3. 由（2），集合 $X = \{\Phi_{n\infty}(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 有向，因此

$$\begin{aligned}\bigsqcup X &= (\bigsqcup_n (\Phi_{n\infty}(x_n))_i)_{i\in\mathbb{N}} \\ &= (\bigsqcup_n \Phi_{\text{min}(n,i)\infty}(x_{\text{min}(n,i)}))_{i\in\mathbb{N}} \\ &= (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = x\end{aligned}$$

4. 由（2），$\Phi_{n\infty}(\perp_n) \sqsubseteq \perp \sqsubseteq \Phi_{n\infty}\perp_n$。

$\square$

引理 2.11. 若 $x, y \in D_\infty$，则对所有 $n, k \in \mathbb{N}$，$n \leq k$，有

1. $\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{k+1}(y_k))$

2. $\Phi_{(k+1)\infty}((\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_k)) = \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))$

证明. 1. 只需证明 $k = n + 1$ 的情况：

$$\begin{aligned}
\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) &= \Phi_{n\infty}((\psi_{n+1}(x_{n+2}))(\psi_n(y_{n+1}))) \\
&= \Phi_{n\infty}(\psi_n \circ x_{n+2} \circ \varphi_n(\psi_n(y_{n+1}))) \\
&\sqsubseteq \Phi_{n\infty}(\psi_n(x_{n+2}(y_{n+1}))) \\
&\sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))
\end{aligned}$$

2. 对 $k \geq n$ 归纳，考虑 $k+1$ 的情况：

$$\begin{aligned}
\Phi_{(k+1)\infty}((\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+2}(y_{k+1})) &= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_{k+1}(\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_{k+1})) \\
&= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_k \circ (\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1} \circ \psi_k(y_{k+1})) \\
&= \Phi_{(k+1)\infty}(\varphi_k \circ (\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}))_{k+1}(y_k)) \\
&= \Phi_{k\infty}(\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1})_{k+1}(y_k)) \\
&= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))
\end{aligned}$$

$\square$

引理 2.12. 对于任意 $x, y \in D_\infty$，

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

证明. 首先

$$\begin{aligned}
\phi_n(x_{n+1}(y_n)) &= \phi_n(\psi_{n+1}(x_{n+2})(\psi_n(y_{n+1}))) \\
&= \phi_n(\psi_n(x_{n+2}(\phi_n(\psi_n(y_{n+1}))))) \\
&\sqsubseteq \phi_n(\psi_n(x_{n+2}(y_{n+1}))) \\
&\sqsubseteq x_{n+2}(y_{n+1})
\end{aligned}$$

于是

$$\Phi_{(n+1)\infty}(\phi_n(x_{n+1}(y_n))) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

注意到 $\Phi_{(n+1)\infty}\phi_n = \Phi_{(n+1)\infty}\Phi_{n(n+1)} = \Phi_{n\infty}$，因此

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) \sqsubseteq \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+2}(y_{n+1}))$$

□

定义 2.13. 给定 $x, y \in D_\infty$，于是由引理*2.12*，$\{\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) : n \geq 0\}$ 是一个递增序列，因此有最小上界，定义

$$x \cdot y = \bigsqcup_{n \geq 0} \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))$$

即

$$x \cdot y = \bigsqcup_{n} \Phi_{n\infty}(app_n(\Phi_{\infty(n+1)}(x), \Phi_{\infty n}(y)))$$

其中 $app_n : [D_{n+1} \times D_n] \to D_n$。

命题 2.14. D_∞ 上的 $\cdot$ 连续。

命题 2.15. 若 $x \in D_{n+1}, y \in D_n$，则

$$\Phi_{(n+1)\infty}(x) \cdot \Phi_{n\infty}(y) = \Phi_{n\infty}(x(y))$$

证明.

$$\begin{aligned}
\Phi_{(n+1)\infty}(x) \cdot \Phi_{n\infty}(y) &= \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \Phi_{k\infty}(\Phi_{(n+1)(k+1)}(x)(\Phi_{nk}(y))) \\
&= \bigsqcup_{k=0}^{n} \Phi_{k\infty} x_{i+1}(y_i) && \text{(2.10(1))} \\
&= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) && \text{(2.11)}
\end{aligned}$$

□

命题 2.16. 对于任意 $x, y \in D_\infty$ 以及 $n \in \mathbb{N}$

1. $(\Phi_{(n+1)\infty} x_n) \cdot y = \Phi_{(n+1)\infty}(x)_{n+1} \cdot \Phi_{n\infty}(y) = \Phi_{n\infty}((x \cdot \Phi_{n\infty}(y))_n)$

2. $\Phi_{0\infty}(x_0) \cdot y = \Phi_{0\infty}(x_0) = \Phi_{0\infty}((x \cdot \bot)_0)$

证明. 1.

$$\begin{aligned}
\Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}) \cdot y &= \bigsqcup_{i=0}^{\infty} \Phi_{i\infty}((\Phi_{(n+1)\infty} x_{n+1})_{i+1}(y_i)) \\
&= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} \Phi_{i\infty}((\Phi_{(n+1)\infty} x_{n+1})_{i+1}(y_i)) && (2.11(1)) \\
&= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) && (2.11(2)) \\
&= \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n)) && (2.15)
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\Phi_{n\infty}((x \cdot \Phi_{n\infty}(y))_n) &= \Phi_{n\infty}\left(\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} \Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n))_i))\right)_n\right) \\
&= \Phi_{n\infty}\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} \left(\Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n))_i))\right)_n\right) \\
&= \Phi_{n\infty}\left(\bigsqcup_{i=n}^{\infty} \left(\Phi_{i\infty}((x_{i+1}(\Phi_{n\infty}(y_n))_i))\right)_n\right) \\
&= \Phi_{n\infty}\left(\bigsqcup_{i=n}^{\infty} \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))\right) \\
&= \Phi_{(n+1)\infty}(x_{n+1}) \cdot \Phi_{n\infty}(y_n)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Phi_{0\infty}(x_0) \cdot y &= \Phi_{1\infty}((\Phi_{0\infty}(x_0))_1) \cdot y \\
&= \Phi_{0\infty}((\Phi_{0\infty}(x_0))_1((\Phi_{1\infty})(y_0))) && (2.15) \\
&= \Phi_{0\infty}(\varphi_0(x_0)(y_0)) = \Phi_{0\infty}(x_0)
\end{aligned}$$

□

定理 2.17 (外延性). 对于 $x, y \in D_\infty$

1. $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \forall z \in D_\infty (x \cdot z \sqsubseteq y \cdot z)$

2. $x = y \Leftrightarrow \forall z \in D_\infty (x \cdot z = y \cdot z)$

证明. 1. $\Rightarrow$：因为 $\cdot$ 是连续的，因此 $\lambda\!\!\lambda x.x \cdot z$ 是单调的。

$\Leftarrow$：假设 $\forall z \in D_\infty (x \cdot z \sqsubseteq y \cdot z)$，于是 $x \cdot \bot \sqsubseteq y \cdot \bot$，由命题2.16（2）得

$$\Phi_{0\infty}(x_0) = \Phi_{0\infty}((x \cdot \bot)_0) \sqsubseteq \Phi_{0\infty}((y \cdot \bot)_0) = \Phi_{0\infty}(y_0)$$

由于 $x \cdot \Phi_{n\infty}(z_n) \sqsubseteq y \cdot \Phi_{n\infty}(z_n)$，由命题2.15 和2.16 得

$$\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(z_n)) = \Phi_{n\infty}((x \cdot \Phi_{n\infty}(z_n))_n) \sqsubseteq \Phi_{n\infty}((y \cdot \Phi_{n\infty}(z_n))_n) = \Phi_{n\infty}(y_{n+1}(z_n))$$

因此

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in D_n (\Phi_{n\infty}(x_{n+1}(z)) \sqsubseteq \Phi_{n\infty}(y_{n+1}(z)))$$

即 $\Phi_{n+1}(x_{n+1}) \sqsubseteq \Phi_{n+1}(y_{n+1})$，即 $x \sqsubseteq y$。

2. 由（1）。

$\square$

定理 2.18 (完全性)**.** 对于 $f \in [D_\infty \to D_\infty]$，定义

$$\square f = \bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda\!\!\lambda y \in D_n.(f(y))_n)$$

则

$$\forall y \in D_\infty (f(y)) = \square f \cdot y$$

证明.

$$
\begin{aligned}
\Box f\cdot y &= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}((\Box f)_{m+1}(y_m)) = \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}((\Box f\cdot \Phi_{m\infty}(y_m))_m) \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}\left(\left(\left(\bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda\!\!\lambda\, y\in D_n.(f(y))_n)\right)\cdot \Phi_{m\infty}(y_m)\right)_m\right) \\
&= \bigsqcup_{m,n} \Phi_{m\infty}\left(\left(\Phi_{(n+1)\infty}(\lambda\!\!\lambda\, y\in D_n.(f(y))_n)\cdot \Phi_{m\infty}(y_m)\right)_m\right) \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}\left(((\lambda\!\!\lambda\, y\in D_m.(f(y))_m)(y_m))_m\right) \\
&= \bigsqcup_m \Phi_{m\infty}(f(\Phi_{m\infty}(y_m))_m) = \bigsqcup_{k,l} \Phi_{l\infty}((f(\Phi_{k\infty}(y_k)))_l) \\
&= \bigsqcup_k f(\Phi_{k\infty}(y_k)) = f(y)
\end{aligned}
$$

□

定理 2.19. $D_\infty \cong [D_\infty \to D_\infty]$

证明. 对于 $x\in D_\infty$，令 $F(x) = \lambda\!\!\lambda\, y\in D_\infty.x\cdot y$，由定理 2.18 ，$F$ 是满射，由定理 2.17 (2)，F 是单射，由命题 2.14 F 连续，F 的逆是

$$
G = \lambda\!\!\lambda\, f.\bigsqcup_n \Phi_{(n+1)\infty}(\lambda\!\!\lambda\, y\in D_n.\Phi_{\infty n}(f(\Phi_{n\infty}(y))))
$$

□

参考文献

[1] Barendregt, H. P. *The lambda calculus. Its syntax and semantics. Rev. ed.*, vol. 103 of *Stud. Logic Found. Math.* Elsevier, Amsterdam, 1984.

[2] Hindley, J. R., and Seldin, J. P. *Lambda-calculus and Combinators, an Introduction*, vol. 2. Cambridge University Press Cambridge, 2008.