Homework4

陈淇奥
21210160025

2021 年 10 月 23 日

Exercise 1 (2.1.3). 对任意集合 X, Y，定义 $X \sim Y$ 当且仅当 $|X| = |Y|$。证明 $\sim$ 是一个等价关系

证明. 对于任意集合 X，定义 $id : X \to X$ 为对任意 $x \in X$，$id(x) = x$，则 id 是一个双射，于是 $X \sim X$

对任意集合 X, Y，若 $X \sim Y$，则存在双射 $f : X \to Y$，因为双射的逆是双射，有双射 $f^{-1} : Y \to X$，于是 $Y \sim X$

对任意集合 X, Y, Z，若 $X \sim Y$ 与 $Y \sim Z$，则有双射 $f : X \to Y$ 与 $g : Y \to Z$，则 $g \circ f$ 是双射：对任意 $z_1, z_2 \in Z$，如果 $g \circ f(z_1) = g \circ f(z_2)$，因为 g, f 是双射，于是 $f(z_1) = f(z_2)$，$z_1 = z_2$；对于任意 $z \in Z$，都有 $f^{-1} \circ g^{-1}(z) \in X$ 使得 $gf(f^{-1}g^{-1}(z)) = z$。因此 $X \sim Z$。

因此 $\sim$ 是一个等价关系。 □

Exercise 2 (2.1.8). 如果 X 是有穷的，则不存在 X 到它的真子集 $Y \subsetneq X$ 上的双射。

证明. 对 X 的元素个数 n 做归纳。

若 $n = 0$，命题成立。

若 $n = k$ 命题成立，当 $n = k + 1$ 时，假设存在 X 到它的真子集 Y 的双射 f，选择 $a \in X$ 与 $f(a) \in Y$，则 $Y \setminus \{f(a)\}$ 是 $X \setminus \{a\}$ 的真子集，且 $f \upharpoonright X \setminus \{a\}$ 是双射，这与归纳假设矛盾。

因此不存在 X 到它的真子集 $Y \subsetneq X$ 上的双射。 □

Exercise 3 (2.1.16). 证明：如果 X 是无穷序数的集合，则 $|X| \leq |\sup X|$

证明. 因为 $\sup X = \inf\{a \in \mathbb{O} : \forall \beta \in X(\beta < \alpha)\}$，对任意 $\beta \in X$，都有 $\beta \in \sup X$。于是定义 $f : X \to \sup X$ 为 $f(\beta) = \beta$。f 是单射，因此 $|X| \leq |\sup X|$ □

Exercise 4 (2.1.24). 对任意序数 λ , λ 是冯 · 诺伊曼基数当且仅当 $\lambda = Card(\lambda)$

证明. 若 λ 是冯 · 诺伊曼基数，则存在良序集 X 且 $\lambda = Card(X)$，即 $\lambda = \inf\{\alpha \in \mathbb{O} : |\alpha| = |X| = |\lambda|\}$，因此 $\lambda = Card(\lambda)$

若 $\lambda = Card(\lambda)$，因为 λ 是良序集，因此 λ 是冯 · 诺伊曼基数。 □

Exercise 5 (2.1.25). 每个自然数 n 都是冯 · 诺伊曼基数；ω 是冯 · 诺伊曼基数

证明. 对于自然数 n, m，若 $m < n$ 则 $|m| < |n|$，因此 $Card(n) = \inf\{m \in \mathbb{O} : |m| = |n|\} = n$，因此 n 是冯 · 诺伊曼基数

$Card(\omega) = \inf\{\lambda \in \mathbb{O} : |\lambda| = |\omega|\}$，因为 ω 是最小的极限序数，而对于所有 $n \in \omega$，$|n| < |n+1| \leq |\omega|$。因此 $Card(\omega) = \omega$，ω 是冯 · 诺伊曼基数 □