第三章　布尔代数与型空间

总结一下第一章中布尔代数与逻辑的几个主要结果。

1. 任给一个一致的理论 T，存在一个由 T 确定的布尔代数 $\mathcal{B}(T)$，它的元素是等价关系 $\sim$ 下的等价类，对任意公式 α, β，$\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$。这个 $\mathcal{B}(T)$ 称为 Lindenbaum 代数。

2. 在 Lindenbaum 代数 $\mathcal{B}(T)$ 中，每个滤 F 都是 T 的一致扩张。因此每个滤都是一个一致的理论。而每个超滤则是一个完全理论。

3. 如果 T 是完全的，则 $\mathcal{B}(T)$ 是特殊的布尔代数 $\{0, 1\}$，其中 $0 = \{\alpha \mid T \vdash \neg\alpha\}$，$1 = \{\alpha \mid T \vdash \alpha\}$。

4. 从另一个角度看，$\mathcal{B}(T)$ 上的每个超滤 U 都对应着 T 的一个模型 $\mathfrak{A}_U$，对任意公式 α，$\mathfrak{A}_u \models \alpha$ 当且仅当 $[\alpha] \in U$。所以超滤存在定理蕴涵着完全性定理。

5. 在 Stone 表示定理的证明中，借助 Stone 映射，我们为每一个 $a \in B$ 指定一个超滤的集合 $\{U \mid U \in a\}$。这实际上是为 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 定义了一个拓扑结构，（参见习题1.4.6 和1.4.7）。$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 连同其上的拓扑称为 Stone 空间。

3.1　Stone 空间

Stone 空间是一个非常典型的结构，与逻辑有很多密切的联系。我们接下来讨论一些有关这个空间的性质，并给出模型论中的更为深刻的一个例子。

定义 3.1.1. 对任意集合 X，$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 称为 X 上的一个**拓扑**，如果以下条件成立：

1. $X, \varnothing \in \mathcal{T}$；
2. 如果 $u, v \in \mathcal{T}$，则 $u \cap v \in \mathcal{T}$；
3. 对任意 $A \subseteq \mathcal{T}$，$\bigcup A \in \mathcal{T}$。

$(X, \mathcal{T})$ 称为**拓扑空间**，$\mathcal{T}$ 中的 X 的子集称为**开集**，开集的补集称为**闭集**。

例 3.1.2. 令 $\mathbb{R}$ 为全体实数的集合，对任意实数 $r \in \mathbb{R}$，开区间

$$N = \{x \subseteq \mathbb{R} \mid |x - r| < \epsilon\}$$

称为 r 的**邻域**，其中 ϵ 为任意实数，称为 N 的半径。$\mathbb{R}$ 的子集 U 如果满足：对任意 $r \in U$，都存在 r 的邻域 N 使得 $N \subseteq U$，就称 U 为**开集**。令 $\mathcal{T}$ 为所有开集的族，则 $\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{T}$ 下是一个拓扑空间。

证明. 首先，$\varnothing \in \mathcal{T}$，并且 $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$。其次，如果 U, V 是开集，$r \in U \cap V$，则根据定义，存在 B_1, B_2 分别是包含 r 的开区间，且 $I_1 \subseteq U, I_2 \subseteq V$。显然 $N_1 \cap N_2$ 仍是一个开区间包含 r 的开区间，并且是 $U \cap V$ 的子集。最后，如果 $\{U_i\}$ 是任意开集的族，$r \in U = \bigcup U_i$，则存在 i，$r \in U_i$，所以存在邻域 N，使得 $r \in B \subseteq U$。 □

以下简单的事实使我们可以定义一个拓扑的基。

练习 3.1.3. 在实数 $\mathbb{R}$ 中，以下命题等价：

(1) U 是开集，即对任意实数 $r \in U$，存在 r 的邻域 N，$N \subseteq U$。

(2) U 可以表示为 $\mathbb{R}$ 中开区间的并。

定义 3.1.4. 令 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$S \subseteq \mathcal{T}$ 称为这个空间的一个**拓扑基**，如果 $\mathcal{T}$ 中的元素都可以表示为 S 中元素的并。S 中的元素称为**基本开集**。

例 3.1.5. 以上例子中，实数上的拓扑 $\mathcal{T}$ 以所有开区间为拓扑基。事实上，所有以有理数为端点的开区间也是它的拓扑基，并且是一个可数的拓扑基。

练习 3.1.6. 任给布尔代数 $\mathcal{B}$，令 $X = \mathrm{Ult}(\mathcal{B})$。对任意 $a \in B$，定义

$$N_a = \{U \in \mathrm{Ult}(\mathcal{B}) \mid a \in U\},$$

则 $\{N_a \mid a \in B\}$ 构成 X 的一个拓扑基。即如果 $\mathcal{T}$ 中的元素都可以表示为形如 N_a 的集合的并，则 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑。

练习 3.1.7. 令 X 为拓扑空间，$S \subseteq \mathcal{T}$ 为拓扑基，则

(1) 对任意 $x \in X$，存在 $N \in S$，$x \in N$；

(2) 对任意 $N_1, N_2 \in S$，任意 $x \in N_1 \cap N_2$，存在 $N_3 \subseteq N_1 \cap N_2$，$x \in N_3$。

反之，对任意集合 X，如果 X 的子集族 $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ 满足（1）和（2），则 S 构成 X 的一个拓扑基。

习题1.4.6告诉我们，N_a 既是开集也是闭集，在一个拓扑空间中，我们称这样的集合为**开闭集**。显然，对任意的拓扑空间 X，$\varnothing, X$ 是开闭集。

定义 3.1.8. 一个拓扑空间 X 称为**零维的**，如果它有一个开闭集构成的拓扑基。

零维空间也称为“完全不连通空间”。显然，$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个零维空间。

定义 3.1.9. 令 X 为拓扑空间，如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ 是开集的族，并且 $\bigcup \mathcal{C} = X$，就称 $\mathcal{C}$ 是 X 的**开覆盖**。如果 X 的每个开覆盖 C 都有一个有穷的子覆盖，即 $\mathcal{C}_0 \subseteq_f \mathcal{C}$，并且 $\bigcup C_0 = X$，则称 X 为**紧致空间**。

由习题1.4.7知道，$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个紧致空间。

练习 3.1.10. 令 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，称 X 的子集族 $\mathcal{Z}$ 有有**有穷交性质**，如果对任意有穷的 $\{Y_1, \cdots, Y_n\} \subseteq \mathcal{Z}$，$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \neq \varnothing$。

对任意拓扑空间 X，以下命题等价：

(1) X 是紧致空间；

(2) 如果 $\mathcal{Z}$ 是闭集的族且有有穷交性质，则 $\bigcup \mathcal{Z} \neq \varnothing$。

定义 3.1.11. 令 X 为拓扑空间，如果对任意 $x, y \in X$，总存在开集 M, N，$x \in M, y \in N$，使得 $M \cap N = \varnothing$，就称 X 为 Hausdorff 空间。

由习题1.4.6(2) 可知 $\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 是一个 Hausdorff 空间：如果超滤 U 属于一个开闭集 N，则 $M = X \setminus N$ 也是一个开闭集，$V \in M$ 并且 $M \cap N = \varnothing$。

定理 3.1.12. *对任意布尔代数 $\mathcal{B}$，$\mathrm{Ult}(\mathcal{B})$ 在以 $S = N_a \mid a \in B$ 为拓扑基的拓扑下，是一个零维的紧致 Hausdorff 空间。这样的空间通常称为 Stone 空间。*

也有文献称为布尔空间，见 Halmos。

例 3.1.13. 给定一阶语言 $\mathcal{L}$，令 X 是所有完全理论的族。对任意语句 $\sigma \in \mathcal{L}$，令 $\langle\sigma\rangle = \{T \in X \mid T \models \sigma\}$，则 $S = \{\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in \mathcal{L}\}$ 构成 X 的一个拓扑基：这是因为 $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle = \langle\sigma \wedge \tau\rangle$，由练习3.1.7可得。

同时，这个完全理论的空间是一个零维空间：$\langle\sigma\rangle$ 与 $\langle\neg\rangle$ 互为补集，并且都是基本开集，所以完全理论的空间有一个开闭集构成的基。

X 也是 Haudorff 空间：令 T_1, T_2 为两个完全理论，且 $T_1 \neq T_2$，则必有 $\sigma \in \mathcal{L}$，$T_1 \models \sigma$ 而 $T_2 \models \neg\sigma$。这样，$T_1 \in \langle\sigma\rangle, T_2 \in \langle\neg\sigma\rangle$。

在完全理论的空间中，开集是形如 $\langle\sigma\rangle$ 的基本开集的并，对偶地，闭集是这样的基本开集的交。令 Σ 为一致的语句集，$F = \bigcap\{\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in \Sigma\}$，则 F 不空，并且是闭集。对任意 $T \in F$，$\Sigma \subseteq T$。任取语句 τ，$\Sigma \models \tau$ 当且仅当对所有 $T \in F$，$T \models \tau$。所以 F 确定了一个以 Σ 为公理集的理论。除非 F 是一个单点集 $\{T\}$，否则 F 确定的理论是一个不完全的理论。