一阶逻辑

第 7 章 - 自然数的模型

姚宁远

复旦大学哲学学院

December 6, 2021

目录

皮亚诺公理系统

皮亚诺公理系统

语言 $L_{ar} = \{0, s, +, \times\}$，则皮亚诺公理系统 PA 由下列公式的全称概括组成：

1. $Sx \neq 0$；
2. $Sx = Sy \to x = y$；
3. $x + 0 = x$；
4. $x + Sy = S(x + y)$；
5. $x \times Sy = x \times y + x$；
6. 对每个一阶公式 ϕ，都有 ϕ 的归纳公理：

$$\big(\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \to \phi(Sx))\big) \to \forall x \phi(x)$$

记作 $I(\phi)$。

1. 称 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ 为 *PA* 的标准模型；
2. 称与 $\mathfrak{N}$ 不同构的 *PA* 的其他模型为 *PA* 的非标准模型。

例

存在 PA 的非标准模型

1. 引入一个新常元 c;
2. 令 $\Sigma = \{c > S^n 0 \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3. $PA \cup \Sigma$ 有限可满足;
4. 由紧致性，存在 $\mathfrak{M} \models PA \cup \Sigma$;
5. 设 $h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ 是一个同构;
6. $h(c^{\mathfrak{M}}) =?$.

基数 I

定义

设 A，B 是两个集，如果存在一个双射 $f: A \to B$，则称 A 与 B 等势。

1. 每个集合 A 都与某个基数等式；
2. 最小的无穷基数是自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数，记作 $\aleph_0$；
3. 具有基数 $\aleph_0$ 的集合称为可数（无穷）集合；

基数 II

定理

（康托尔）自然数的幂集 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是不可数的

证明：

- 设 $f:\mathbb{N}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是双射；
- 令 $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x\notin f(x)\}$;
- 设 $x_0\in\mathbb{N}$ 使得 $f(x_0)=A$;
- 如果 $x_0\in A$，则 $x\notin f(x_0)=A$;
- 如果 $x_0\notin A$，则 $x\in f(x_0)=A$.

基数 III

注

以上的方法为“对角线法”

- 把每个 $X \subseteq \mathbb{N}$ 编码为 0-1 序列;
- 则 $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是 0-1 序列的一个可数枚举;
- 则 A 的编码恰好是将该枚举的对角线取反而得到的序列

定理

（基数算术定理）对任何基数 κ 与 λ，如果 $\kappa \leq \lambda$，并且 λ 是无穷的，则 $\kappa + \lambda = \lambda$。此外，如果 $\kappa \neq 0$，则 $k \cdot \lambda = \lambda$.

定理

假设 A 是无穷集合，则 A 上有穷序列的集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ 与 A 等势。

定义

设 $\mathfrak{M} = (M, ...)$ 与 $\mathfrak{N} = (N, ...)$ 均是 L 结构且 $M \subseteq N$。

- 如果对任意不带量词的公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$ 以及 $a_1, ..., a_n \in M$，有
  $$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi(a_1, ..., a_n)$$
  则称 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的子结构；
- $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的子结构当且仅当 $i : M \to N$ 是同态。
- 如果对任意公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$ 以及 $a_1, ..., a_n \in M$，有
  $$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi(a_1, ..., a_n)$$
  则称 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的初等子结构，记作 $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$；
- $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N} \ \Rightarrow \ \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$

定义

设 $\mathfrak{M} = (M, \ldots)$ 是 L 结构，$A \subseteq M$

- 称 A 是子结构是指 A 包含了所有的常元且对函数运算封闭；
- 称 A 是初等子结构指 A 是子结构且

$$\mathcal{A} = (A, Z^{\mathfrak{M}} \upharpoonright A)_{Z \in L}$$

是 $\mathfrak{M}$ 的初等子结构；

例

例

域 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$ 是域 $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \times, 0, 1)$ 的子结构，但不是初等子结构；

- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$;
- $\mathbb{R}$ 包含常元 $0, 1$ 且关于加法和乘法封闭；
- $\mathcal{R} \models \forall x(x^2 \neq -1)$;
- $\mathcal{C} \models \exists x(x^2 = -1)$;

例

例

$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ 是 $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ 的子结构，但不是初等子结构.

- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$;
- 没有常元和函数;
- $\mathcal{Z} \models \exists x, y(x < y \wedge \forall z \neg(x < z < y))$;
- $\mathcal{Q} \models \forall x, y(x < y \to \exists z(x < z < y))$;

例 I

例

$(\mathbb{Q}, <)$ 是 $(\mathbb{R}, <)$ 的初等子结构.

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$;
- 没有常元和函数;
- 初等子结构？

例 II

断言

对任意公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$，对任意的 $r_1 < ... < r_n \in \mathbb{R}$ 以及 $q_1 < ... < q_n \in \mathbb{Q}$ 有

$$(\mathbb{R}, <) \models \phi(r_1, ..., r_n) \iff (\mathbb{Q}, <) \models \phi(q_1, ..., q_n).$$

证明：

- ϕ 不含量词时显然成立；
- 设 ϕ 形如 $\exists y \psi(x_1, ..., x_n, y)$;
- 如果 $(\mathbb{R}, <) \models \phi(r_1, ..., r_n)$，则存在 $r_{n+1} \in \mathbb{R}$ 使得 $(\mathbb{R}, <) \models \psi(r_1, ..., r_n, r_{n+1})$;

例 III

- 由稠密性，存在 $q_{n+1} \in \mathbb{Q}$ 使得 $r_1, ..., r_n, r_{n+1}$ 和 $q_1, ..., q_n, q_{n+1}$ 有相同的序型；
- 由归纳假设，$(\mathbb{Q}, <) \models \psi(q_1, ..., q_n, q_{n+1})$；
- 故 $(\mathbb{Q}, <) \models \exists y \psi(q_1, ..., q_n, y)$；
- 同理可证另外一个方向；

由以上断言可证：对任意公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$，对任意的 $q_1 < ... < q_n \in \mathbb{Q}$ 有

$$(\mathbb{R}, <) \models \phi(q_1, ..., q_n) \iff (\mathbb{Q}, <) \models \phi(q_1, ..., q_n).$$

例

例

$\mathfrak{M}$ 是其超积 $\Pi_{\mathcal{U}}\mathfrak{M}^I$ 的初等子结构.

例

例

标准模型 $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ 是所有非标准模型的子结构，但不一定是初等子结构。

- 设 $\mathfrak{M}$ 是一个非标准模型；
- $0 \mapsto 0^{\mathfrak{M}}, 1 \mapsto S^{\mathfrak{M}}(0^{\mathfrak{M}}), \ldots, n \mapsto {S^{\mathfrak{M}}}^{n}(0^{\mathfrak{M}})$ 是 $\mathfrak{N}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的同态嵌入。

塔斯基定理

设 $\mathfrak{M} = (M, ...)$ 是 L 结构，$A \subseteq M$。则 A 是 $\mathfrak{M}$ 的初等子结构当且仅当对任意的非空 A-可定义集合 X，都有 $X \cap A \neq \emptyset$。

等价地，对任意的 L-公式 $\phi(x, y)$，其中 $x = x_1, ..., x_n$，$y = y_1, ..., y_m$，对任意的 $b = (b_1, ..., b_m) \in A^m$，如果

$$\mathfrak{M} \models \exists x_1 ... \exists x_n \phi(x, b),$$

则存在 $a \in A^n$ 使得 $\mathfrak{M} \models \phi(a, b)$。

证明

$\Rightarrow$:

- 设 A 是初等子结构，即 $\mathbb{A} = (A, Z^{\mathfrak{M}}|A)_{Z \in L}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的初等子结构；
- 设 $\phi(x, y)$ 是公式，其中 $x = x_1, ..., x_n$，$y = y_1, ..., y_m$；
- 设 $b = (b_1, ..., b_m) \in A^m$；
- 设 $\mathfrak{M} \models \exists x_1 ... \exists x_n \phi(x, b)$;
- 则 $\mathbb{A} \models \exists x_1 ... \exists x_n \phi(x, b)$；
- 故存在 $a \in A^n$ 使得 $\mathbb{A} \models \phi(a, b)$;
- $\mathfrak{M} \models \phi(a, b)$

证明

$\Leftarrow$: 首先证明 A 是子结构

- 设 c 是常元，则 $\mathfrak{M} \models \exists x(x = c)$;
- 存在 $a \in A$ 使得 $\mathfrak{M} \models (a = c)$，即 $c^{\mathfrak{M}} \in A$;
- 设 f 是 m-元函数符号，$b = (b_1, ..., b_m) \in A^m$;
- 则 $\mathfrak{M} \models \exists y(y = f(b))$;
- 存在 $a \in A$ 使得 $\mathfrak{M} \models (a = f(b))$, ，即 $f^{\mathfrak{M}}(b) \in A$;
- 故 A 包含所有常元且对函数封闭。

证明

$\Leftarrow$: 接下来证明 $\mathbb{A} = (A, Z^{\mathfrak{M}}|A)_{Z\in L}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的初等子结构。对公式 $\psi(x)$ 归纳证明 ($x = (x_1, .., x_m)$): 对任意 $b \in A^m$

$$\mathfrak{M} \models \psi(b) \iff \mathbb{A} \models \psi(b). \tag{1}$$

- $\psi(x)$ 不含量词，则对 $b \in A^m$，总是有

$$\mathfrak{M} \models \psi(b) \iff \mathbb{A} \models \psi(b);$$

- 设 ψ 是 $\neg\psi_1$ 或 $\psi_1 \wedge \psi_2$，且 ψ_1 与 ψ_2 满足归纳假设，则 ψ 显然满足 (1)；
- 设 $\psi(x)$ 是 $\exists y\phi(x, y)$；

证明

- 如果 $\mathbb{A} \models \exists y \phi(b, y)$，则存在 $a \in A$ 使得

$$\mathbb{A} \models \phi(b, a)$$

由归纳假设

$$\mathfrak{M} \models \phi(b, a);$$

故 $\mathfrak{M} \models \exists y \phi(b, y)$.

- 如果 $\mathfrak{M} \models \exists y \phi(b, y)$，则根据定理条件，存在 $a \in A$ 使得

$$\mathfrak{M} \models \phi(b, a);$$

由归纳假设

$$\mathbb{A} \models \phi(b, a)$$

故 $\mathbb{A} \models \exists y \phi(b, y)$.

设 L 是一个语言，我们定义 L 的基数为 $\max\{|L|, \aleph_0\}$，仍然记作 $|L|$。

下行的勒文海姆-司寇伦定理

设 $\mathfrak{M} = (M, \ldots)$ 是 L 结构，$A \subseteq M$。则存在 $M_0 \subseteq M$ 使得

- $A \subseteq M_0$；
- M_0 是 M 的初等子结构；
- $|M_0| \leq \max\{|A|, |L|\}$

证明概要

构造一个个集合序列

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \ldots$$

使得对任意的自然数 k，对任意的 L-公式 $\phi(x, y)$，以及对任意的 $b \in A_k^m$，如果

$$\mathfrak{M} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \phi(x, b),$$

则存在 $a \in A_{k+1}^n$ 使得 $\mathfrak{M} \models \phi(a, b)$。

证明

1. $A_0 = A$，则至多 $\lambda_0 \leq \max\{|A_0|, |L|\}$ 个 A_0-可定义集合;
2. 设 $\{X_i^0 | \; i < \lambda\}$ 是所有的非空的 A_0-可定义集合;
3. 在每个 X_i^0 中选取一个元素 b_i^0，令

$$A_1 = A_0 \cup \{b_i^0 | \; i < \lambda_0\}.$$

4. 则 $A_0 \subseteq A_1$
5. $|A_1| \leq \max\{|A_0|, |L|\}$
6. 每个非空的 A_0-可定义集合与 A_1 相交非空。

证明

1. 一般地，设 A_n 已经定义好了;
2. 则至多 $\lambda_n \leq \max\{|A_n|, |L|\}$ 个 A_n-可定义集合;
3. 设 $\{X_i^n \mid i < \lambda_n\}$ 是所有的非空的 A_n-可定义集合;
4. 在每个 X_i^n 中选取一个元素 b_i^n，令

$$A_{n+1} = A_n \cup \{b_i^n \mid i < \lambda_n\}.$$

   则 $A_n \subseteq A_{n+1}$，$|A_{n+1}| \leq \max\{|A_n|, |L|\}$;
5. 每个非空的 A_n-可定义集合与 A_{n+1} 相交非空;
6. 最后，令 $M_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$。

证明

1. 设 $X = \phi(M, b_1, ..., b_n) \subseteq M$ 是 M_0-可定义的非空集合；
2. $b_i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \;\Leftarrow\; b_i \in A_{n_i}$；
3. $X \subseteq M$ 是 A_k-可定义的非空集合;
4. X 与 A_{k+1} 相交非空;
5. 最后，对 n 归纳证明每个 A_n 的基数 $\leq \max\{|A|, |L|\}$;
6. 故 M_0 的基数 $\leq \max\{|A|, |L|\}$。

上行的勒文海姆-司寇伦定理

设 $\mathfrak{M} = (M, ...)$ 是无穷的 L-结构，$\lambda \geq \max\{|M|, |L|\}$，则存在一个基数为 λ 的结构 $\mathfrak{N}$ 使得 $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$。

语言和结构的扩张

1. 将 L-结构 $\mathfrak{M} = (M, ...)$ 中的元素作为常元 / 参数引入语言 L;
2. 得到扩张后语言 $L \cup M$，记作 L_M;
3. 构造 L_M-结构 $\mathfrak{M}'$ 如下:
4. $\mathfrak{M}'$ 的论域是 M;
5. L 中的符号在 $\mathfrak{M}'$ 中的解释与在 $\mathfrak{M}$ 中相同;
6. 新的常元 $a \in M$ 在 $\mathfrak{M}'$ 中解释为 a，即 $a^{\mathfrak{M}'} = a$;
7. 对任意的 L-公式 $\phi(x_1, ...x_n)$，$a_1, ..., a_n \in M$ 有

$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{M}' \models \phi(a_1, ..., a_n)$ 此处也可理解为句子

证明

1. 将 M 中的元素作为常元 / 参数引入语言 L，得到 $L_M = L \cup M$;
2. 引入 λ 个新常元，得到 $L^* = L_M \cup \{c_i | \ i < \lambda\}$;
3. 令 Σ_M 为 L_M-句子集

$$\{\phi(a_1, ..., a_n) | \ \mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n), \phi \in L, a_i \in M, n \in \mathbb{N}\},$$

4. 令 $\mathfrak{M}'$ 入上，则 $\Sigma_M = \{\sigma | \ \mathfrak{M}' \models \sigma, \ \sigma\text{是}L_M\text{句子})\}$;

证明

断言

设 $\mathbb{A}$ 是一个 L_M-结构，如果 $\mathbb{A} \models \Sigma_M$，$\mathbb{A}$ 在 L 上的约化 $\mathbb{A}|L$ 在如下意义下是 $\mathfrak{M}$ 的初等膨胀：对任意的 L-公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$ 以及 $a_1, ..., a_n \in M$，有

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathbb{A} \models \phi(a_1, ..., a_n)$$

注意

$$\mathbb{A} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathbb{A} \models \phi({a_1}^{\mathbb{A}}, ..., {a_n}^{\mathbb{A}})$$

证明

1. 令 $\Sigma^* = \Sigma_M \cup \{c_i \neq c_j |\ i < j < \lambda\}$;
2. Σ^* 在 $\mathfrak{M}$ （或 $\mathfrak{M}'$）中有限可满足，从而一致；
3. $|L|, |M| \leq \lambda$，故 $|L^*| = \lambda$;
4. 根据辛钦构造，Σ^* 有一个基数不超过 λ 的模型 $\mathfrak{N}$;
5. 另一方面，Σ^* 的模型基数总是 $\geq \lambda$。

推论

设 L 的基数为 κ，Σ 是一个可满足的 L-公式集，且有一个无穷模型。则对任意的 $\lambda \geq \kappa$，都存在 $\mathfrak{N} \models \Sigma$ 使得 $|\mathfrak{N}| = \lambda$。
特别地，Σ 有一个基数不超过 κ 的模型。

ZFC

集合论的语言 $L=\{\in\}$.

1. 存在公理 $\exists x(x=x)$;
2. 外延公理 $\forall x\forall y(\forall u(u\in x\leftrightarrow u\in y))\to x=y$;
3. 分离公理模式 $\forall x\exists y\forall u(u\in y\leftrightarrow u\in x\wedge\phi(u))$;
4. 并集公理 $\forall x\exists y\forall u(u\in y\leftrightarrow\exists z(z\in x\wedge u\in z))$;
5. 对集公理 $\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\leftrightarrow u=x\vee u=y)$;
6. 幂集公理 $\forall x\exists y\forall u(u\in y\leftrightarrow u\subseteq x)$;
7. 无穷公理 $\exists x(\emptyset\in x\wedge\forall u(u\in x\to S(u)\in x))$;
8. 替换公理模式
   $\forall x\in A\exists!y(\psi(x,y))\to\exists B\forall x\in A\exists y\in B\psi(x,y)$;
9. 基础公理 $\forall x(x\neq\emptyset\to\exists y(y\in x\wedge x\cap y=\emptyset))$;
10. 选择公理;

$$\Big(\emptyset\notin X\wedge\forall x,y\in X(x\cap y=\emptyset)\Big)\to\exists S\forall x\in X\exists!y(S\cap x=\{y\}).$$

司寇伦佯谬

1. 集合论的语言可数；
2. ZFC 有可数模型；
3. $ZFC \models \exists x(x = \omega)$;
4. $ZFC \models \exists x \exists y(x = \omega \wedge y = \mathcal{P}(x))$；
5. 设 $\mathfrak{M}$ 是 ZFC 的可数传递模型，即 $\forall y(y \in M \rightarrow \forall x \in y(x \in M))$；
6. $\mathfrak{M} \models \exists y(y\text{不可数})$；
7. 而 y 的元素都是 M 的元素；
8. 故 M 不可数；

目录

理论

定义

如果闭语句集合 T 满足对任意的闭语句 σ 都满足: $T \models \sigma$ 蕴含着 $\sigma \in T$，则称 T 是一个理论。

1. 设 $\mathcal{U}$ 是一个结构，则 $\mathrm{Th}(\mathcal{U})$ 是一个理论
2. 设 $\mathcal{K}$ 是一类结构，则

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \{\sigma | \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{K}, \mathcal{U} \models \sigma\}$$

是一个理论。

称理论 T 是完备的，如果对每个闭语句 σ，或者 $\sigma \in T$ 或者 $\neg\sigma \in T$。

引理

设 T 是一个一致的理论。则下列命题等价：

1. T 是完备的理论；
2. T 的任何中扩张 T' 都不一致；
3. 对任何 T 的模型 $\mathfrak{A}$，都有 $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$;
4. 对任何 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$，都有 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$;
5. 对任何闭语句 σ，τ，如果 $T \vdash \sigma \vee \tau$，则或者 $T \vdash \sigma$，或者 $T \vdash \tau$

可公理化

定义

我们称理论 T 是可公理化的，如果存在一个可判定的闭语句集 Σ 使得

$$T = \{\sigma \mid \Sigma \models \sigma\}.$$

如果 Σ 是有穷的，则称 T 是有穷公理化的。

1. 域的语言是 $\{+, \times, 0, 1\}$；
2. 域的理论是有穷公理化的，但不是完备的；
3. 代数闭域的理论是有可理化的，但不是有穷公理化的，也不是完备的；
4. 特征为 0 的代数闭域是完备的，可公理化的，但不是有穷公理化的；
5. 特征为 $p(> 0)$ 的代数闭域是完备的，可公理化的，但不是有穷公理化的；

可判定的理论

定义

我们称理论 T 是可判定的，如果存在一个算法，使得对任何闭语句 σ，该算法都能告诉我们 σ 是否在 T 中。

注

我们称理论 T 是可判定的当且仅当其编码的集合

$$\#T = \{\#\sigma | \sigma \in T\}$$

是递归集。

引理

完备的可公理化的理论是可判定的。

证明思路

1. 设 Σ 是 T 的公理集；
2. Σ 可判定；
3. 存在一个算法生成 T;
4. 即存在递归函数 $f : \mathbb{N} \to \#T$
5. 对于一个闭语句 τ，同时检查 $\#\tau$ 和 $\#\neg\tau$ 是否在 $f(\mathbb{N})$ 中。

目录

λ-范畴理论

定义

设 λ 是一个基数。我们称理论 T 是 λ-范畴的，如果对 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$，$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$ 蕴涵 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。即 T 的基数为 λ 的模型都是同构的。

注

1. 莫雷定理：令 T 是可数语言上的一致的理论，λ, κ 是不可数基数，如果 T 是 λ-范畴的，则 T 是 κ-范畴的。
2. 根据紧致性定理（或 L-S-T），一个一阶理论不能决定其模型，“λ-范畴”是最好的可能的结果；

例

如果 $L = \emptyset$，T 是普遍有效的闭语句，则 T 是 λ-范畴的。

定理

（康托尔）任何无端点的可数的稠密线序都同构于 $(\mathbb{Q}, <)$。故 DLO 是 $\aleph_0$-范畴的。

证明 I

1. 设 $\mathbb{A} = (A, <)$，$\mathfrak{B} = (B, <)$ 是两个无端点的可数的稠密线序；
2. 设 $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$，$B = \{b_0, b_1, b_2, ...\}$；
3. 构造一个保序的双射函数 $f \subseteq A \times B$;
4. 令 $f_0 = \{(a_0, b_0)\}$;
5. 设一构造了 $f_0 \subseteq f_1 \subseteq ... \subseteq f_n \subseteq A \times B$ 使得每个 f_i 是保序单射，且
6. 对每个 $i \leq n$，都有

$$\{a_0, ..., a_i\} \subseteq \mathrm{dom}\, f_i, \quad \{b_0, ..., b_i\} \subseteq \mathrm{ran}\, f_i.$$

7. 若 $a_{n+1} \in \mathrm{dom}\, f_n$，则 $f_n^* = f_n$，

证明 II

8. 若 $a_{n+1} \notin \mathrm{dom}\, f_n$，取 $b_j \in B$ 使得
$$f_n \cup \{(a_{n+1}, b_j)\}$$
是保序单射。令 $f_n^* = f_n \cup \{(a_{n+1}, b_j)\}$；
9. 若 $b_{n+1} \in \mathrm{ran}\, f_n^*$，则 $f_{n+1} = f_n^*$，
10. 若 $b_{n+1} \notin \mathrm{ran}\, f_n^*$，取 $a_k \in A$ 使得
$$f_n^* \cup \{(a_k, b_{n+1})\}$$
是保序单射。令 $f_{n+1} = f_n^* \cup \{(a_k, b_{n+1})\}$;
11. 最后，令 $f = \bigcup_n f_n$。

注

对任意不可数的 κ，*DLO* 不是 κ-范畴的。

$$\mathbb{R} + \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} + \mathbb{R}$$

例

特征为 p 的代数闭域的理论 ACF_p 是 κ-范畴的，其中 κ-不可数。ACF_p 不是 $\aleph_0$-范畴的。

例

有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间的理论 κ-范畴的，其中 κ-不可数。（它也不是 $\aleph_0$-范畴的。）

定理

（乌什-沃特判别法）设 T 是可数语言上的理论并且满足：

1. 对某个无穷基数 λ，T 是 λ-范畴的；
2. T 的所有模型都是无穷的，即 T 没有有穷模型；

则 T 是完备的。

证明

- 反设则 T 不是完备的，则存在句子 σ 使得 $T \cup \{\sigma\}$ 与 $T \cup \{\neg\sigma\}$ 都是一致的；
- 令 $\mathfrak{M}_1 \models T \cup \{\sigma\}$，$\mathfrak{M}_2 \models T \cup \{\neg\sigma\}$，则 $\mathfrak{M}_1$ 与 $\mathfrak{M}_2$ 都是无穷模型；
- 根据 L-S-T，存在基数为 λ 的结构 $\mathfrak{M}_1'$ 与 $\mathfrak{M}_2'$ 使得

$$\mathfrak{M}_1' \models T \cup \{\sigma\}, \quad \mathfrak{M}_2' \models T \cup \{\neg\sigma\};$$

- 根据 T 的 λ-范畴性，$\mathfrak{M}_1' \cong \mathfrak{M}_2'$，这是一个矛盾。

推论

理论 $\mathrm{Th}(\mathbb{Q},<)$ 与 ACF_p 都是可判定的。

目录

定义（回忆）

设 $\mathfrak{M} = (M, ...)$ 与 $\mathfrak{N} = (N, ...)$ 均是 L 结构且 $M \subseteq N$。

- 如果对任意不带量词的公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$ 以及 $a_1, ..., a_n \in M$，有
$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi(a_1, ..., a_n)$$
则称 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的子结构，记作 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$；
- 如果对任意公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$ 以及 $a_1, ..., a_n \in M$，有
$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi(a_1, ..., a_n)$$
则称 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的初等子结构，记作 $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$；

定义

设 $\mathfrak{M}=(M,...)$ 与 $\mathfrak{N}=(N,...)$ 均是 L 结构。如果映射 $i:M\to N$ 满足：

- 如果对任意不带量词的公式 $\phi(x_1,...,x_n)$ 以及 $a_1,...,a_n\in M$，有
$$\mathfrak{M}\models\phi(a_1,...,a_n)\iff\mathfrak{N}\models\phi(i(a_1),...,i(a_n))$$
则称 i 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 的嵌入；
- 如果对任意的公式 $\phi(x_1,...,x_n)$ 以及 $a_1,...,a_n\in M$，有
$$\mathfrak{M}\models\phi(a_1,...,a_n)\iff\mathfrak{N}\models\phi(i(a_1),...,i(a_n))$$
则称 i 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 的初等嵌入；

引理

设 $\mathfrak{M} = (M, \ldots)$ 与 $\mathfrak{N} = (N, \ldots)$ 均是 L 结构。如果 i 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 的初等嵌入，则存在 L 结构 $\mathfrak{M}' = (M', \ldots)$ 与 $\mathfrak{N}' = (N', \ldots)$ 使得

- $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$，$\mathfrak{N} \cong \mathfrak{N}'$；
- i 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}'$ 的同构；
- 同构 $j : \mathfrak{N}' \to \mathfrak{N}$ 是 i 的扩张；
- $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$ 且 $\mathfrak{M}' \prec \mathfrak{N}$。

证明

练习。

语言和结构的扩张

1. 将 L-结构 $\mathfrak{M} = (M, ...)$ 中的元素作为常元 / 参数引入语言 L;
2. 得到扩张后语言 $L \cup M$，记作 L_M;
3. 构造 L_M-结构 $\mathfrak{M}'$ 如下:
4. $\mathfrak{M}'$ 的论域是 M;
5. L 中的符号在 $\mathfrak{M}'$ 中的解释与在 $\mathfrak{M}$ 中相同;
6. 新的常元 $a \in M$ 在 $\mathfrak{M}'$ 中解释为 a，即 $a^{\mathfrak{M}'} = a$;
7. 对任意的 L-公式 $\phi(x_1, ...x_n)$，$a_1, ..., a_n \in M$ 有

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{M}' \models \phi(a_1, ..., a_n) \text{ 作为 L 结构}$$

8. $\mathfrak{M}'$ 作为 L_M-结构

$$\mathfrak{M}' \models \phi(\underbrace{a_1, ..., a_n}_{\text{作为元素}}) \iff \mathfrak{M}' \models \phi(\underbrace{a_1, ..., a_n}_{\text{作为常元}})$$

初等膨胀的构造 I

1. 将 M 中的元素作为常元 / 参数引入语言 L，得到 $L_M = L \cup M$;
2.
3. 令 $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M})$ 为 L_M-句子集 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}')$

$$\text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M}) = \{\sigma \mid \mathfrak{M}' \models \sigma,\ \sigma\text{是}L_M\text{句子}\}$$

4. 显然

$$\text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M}) = \{\phi(\bar{a}) \mid \mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}), \phi \in L, \bar{a} \in M^n, n \in \mathbb{N}\},$$

5. 设 $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ 是一个 L_M-结构，且 $\mathbb{A} \models \text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M})$。则对任意的 L-公式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ 以及 $a_1, \ldots, a_n \in M$，有

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathbb{A} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$$

初等膨胀的构造 II

6 令 $\mathbb{A}_0$ 是 $\mathbb{A}$ 在 L 上的约化 $\mathbb{A}|L$。则对任意的 L-公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$ 以及 $b_1, ..., b_n \in A$，有

$$\mathbb{A} \models \phi(b_1, ..., b_n) \iff \mathbb{A}_0 \models \phi(b_1, ..., b_n)$$

7 特别地，取 $a_1, ..., a_n \in M$，令 $b_i = a_i{}^{\mathbb{A}}$

$$\mathbb{A} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathbb{A} \models \phi(b_1, ..., b_n) \iff \mathbb{A}_0 \models \phi(b_1, ..., b_n)$$

8 即

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathbb{A}_0 \models \phi(a_1{}^{\mathbb{A}}, ..., a_n{}^{\mathbb{A}})$$

9 即 $a \mapsto a^{\mathbb{A}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathbb{A}_0$ 的初等嵌入。

性质

如果 L_M 结构 $\mathbb{A} \models \mathrm{Diag}_{\mathrm{el}}(\mathfrak{M})$，令 $\mathbb{A}_0$ 是 $\mathbb{A}$ 在 L 上的约化，则存在存在 L-结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B} \cong \mathbb{A}_0$ 且 $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{B}$。

注

在同构的意义下：

L-结构 $\mathfrak{B} = (B, ...)$ 是 $\mathfrak{M}$ 的初等膨胀当且仅当 $\mathfrak{B}$ 可以扩张为 L_M-结构

$$\mathfrak{B}' = (B, ..., a^{\mathfrak{B}'}, ...)_{a \in M}$$

使得 $\mathfrak{B}' \models \mathrm{Diag}_{\mathrm{el}}(\mathfrak{M})$。

引理

设 $\mathfrak{M}=(M,...)$ 与 $\mathfrak{N}=(N,...)$ 均是 L 结构。如果 i 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 的嵌入，则存在 L 结构 $\mathfrak{M}'=(M',...)$ 与 $\mathfrak{N}'=(N',...)$ 使得

- $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{M}'$，$\mathfrak{N}\cong\mathfrak{N}'$；
- i 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}'$ 的同构；
- 同构 $j:\mathfrak{N}'\to\mathfrak{N}$ 是 i 的扩张；
- $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}'$ 且 $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{N}$。

证明

练习。

膨胀的构造 I

1. 将 M 中的元素作为常元 / 参数引入语言 L，得到 $L_M = L \cup M$;
2.
3. 令 $\mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ 为 L_M-句子集 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}')$

$$\mathrm{Diag}(\mathfrak{M}) = \{\sigma | \ \mathfrak{M}' \models \sigma,\ \sigma\text{是无量词的}L_M\text{句子})\}$$

4. 令 L^{qf} 表示不含量词的 L-公式，显然

$$\mathrm{Diag}(\mathfrak{M}) = \{\phi(\bar{a}) | \ \mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}), \psi \in L^{\mathrm{qf}}, \bar{a} \in M^n, n \in \mathbb{N}\},$$

5. 设 $\mathfrak{B} = (B, ...)$ 是一个 L_M-结构，且 $\mathfrak{B} \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$。则对任意无量词的 L-公式 $\psi(x_1, ..., x_n)$ 以及 $a_1, ..., a_n \in M$，有

$$\mathfrak{M} \models \psi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{B} \models \psi(a_1, ..., a_n)$$

膨胀的构造 II

6 令 $\mathfrak{B}_0$ 是 $\mathfrak{B}$ 在 L 上的约化 $\mathfrak{B}|L$。则对任意 (无量词) 的 L-公式 $\psi(x_1, ..., x_n)$ 以及 $b_1, ..., b_n \in B$，有

$$\mathfrak{B} \models \phi(b_1, ..., b_n) \iff \mathfrak{B}_0 \models \phi(b_1, ..., b_n)$$

7 特别地，取 $a_1, ..., a_n \in M$，令 $b_i = a_i{}^{\mathfrak{B}}$

$$\mathfrak{B} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{B} \models \phi(b_1, ..., b_n) \iff \mathfrak{B}_0 \models \phi(b_1, ..., b_n)$$

8 即

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{B}_0 \models \phi(a_1{}^{\mathfrak{B}}, ..., a_n{}^{\mathfrak{B}})$$

9 即 $a \mapsto a^{\mathfrak{B}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{B}_0$ 的嵌入。

性质

如果 L_M 结构 $\mathfrak{B} \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$，令 $\mathfrak{B}_0$ 是 $\mathfrak{B}$ 在 L 上的约化，则存在存在 L-结构 $\mathfrak{B}'$ 使得 $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}_0$ 且 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}'$。

注

在同构的意义下：

L-结构 $\mathfrak{B} = (B, ...)$ 是 $\mathfrak{M}$ 的膨胀当且仅当 $\mathfrak{B}$ 可以扩张为 L_M-结构

$$\mathfrak{B}' = (B, ..., a^{\mathfrak{B}'}, ...)_{a \in M}$$

使得 $\mathfrak{B}' \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$。

生成子结构 I

回忆：

设 $\mathfrak{M} = (M, \dots)$ 是 L 结构，$A \subseteq M$，称 A 是子结构是指 A 包含了所有的常元且对函数运算封闭。

此时 $\mathbb{A} = (A, Z^{\mathfrak{M}}|A)_{Z \in L}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子结构。

生成子结构

- 任取 $A_0 \subseteq M$;
- 令 $A_1 = A_0 \cup \{c^{\mathfrak{M}} | \ c\text{是常元}\}$；
- ...
- 令 $A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{f\text{是函数符号}} f^{\mathfrak{M}}(A_n)$；
- 令 $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$，则 $\mathbb{A} = (A, \dots)$ 是包含 A_0 的最小的子结构 (? 练习)，称之为 A_0 生成的子结构；

生成子结构 II

- 令 $A = \{t^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) \mid t\text{是一个项}, n \in \mathbb{N}, \bar{a} \in A_0^n\}$ (? 练习)
- 若 $A_0 = \{a_1, ..., a_n\}$, 则 L_A-句子集 $\mathrm{Diag}(\mathbb{A})$ 与 L_{A_0} 句子集

$$\Sigma = \{\phi(a_1, ..., a_n) \mid \phi \in L^{\mathrm{qf}}, \mathbb{A} \models \phi(a_1, ..., a_n)\}$$

逻辑等价，即 $\Sigma \models \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$ 且 $\mathrm{Diag}(\mathbb{A}) \models \Sigma$。

定义

称一个理论 T 接受量词消去。如果对任何公式 ϕ，都存在一个不含量词的公式 ψ 使得

$$T \models \phi \leftrightarrow \psi$$

引理

理论 T 接受量词消去当且仅当对每个具有下列形式的公式 ϕ:

$$\exists x(\alpha_0 \wedge ... \wedge \alpha_n),$$

都接受其中每个 α_i 或者是原子公式，或者是原子公式的否定式，都存在一个不含量词的 ψ 使得

$$T \models \phi \leftrightarrow \psi$$

证明

- 对量词个数归纳证明；
- 设 ϕ 形如 $\exists x\theta$;
- 由归纳假设，θ 可以量词消去；
- 即 θ mod T 等价于一个无量词公式 β；
- β 逻辑等价于原子公式的析取范式；
- 即 $\vdash \beta \leftrightarrow \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_k$;
- 其中每个 β_i 均是原子和其否定的合取
- 显然 $\vdash \exists x(\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_k) \leftrightarrow (\exists x\beta_1) \vee \ldots \vee (\exists x\beta_k)$
- 由条件，每个 $\exists x\beta_i$ 都接受量词消去；
- 故 $\exists x\beta$ 接受量词消去。

引理

设 T 是一个理论，$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个公式。则存在无量词的 $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ 使得

$$T \models \forall \bar{x}(\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$$

当且仅当对 T 的任意的 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$，$\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$ 任意的公共子结构 A，以及任意的 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 都有

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{M}_2 \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$$

证明 I

$\Rightarrow$:

1. 设 $\phi(x_1, ..., x_n)$ 是一个公式，$\psi(x_1, ..., x_n)$ 是一个无量词的公式；
2. 设 $T \models \forall \bar{x}(\phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n))$；
3. 设 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$，$\mathbb{A} = (A, ...)$ 是 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$ 的公共子结构，$a_1, ..., a_n \in A$;
4. 则 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models \forall \bar{x}(\phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n))$
5. 设 $\mathfrak{M}_1 \models \phi(a_1, ..., a_n)$；
6. 则 $\mathfrak{M}_1 \models \psi(a_1, ..., a_n)$；
7. 故 $\mathbb{A} \models \psi(a_1, ..., a_n)$，从而 $\mathfrak{M}_2 \models \psi(a_1, ..., a_n)$；
8. 故 $\mathfrak{M}_2 \models \phi(a_1, ..., a_n)$。

证明 II

$\Leftarrow$:

1. 设 $\phi(x_1, ..., x_n)$ 是一个公式;
2. 我们找到与 ϕ (mod T) 等价的无量词的公式 ψ;
3. 令

$$\Sigma(\bar{x}) = \{\theta(\bar{x}) | \ \theta\text{无量词，且 } T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \to \theta(\bar{x}))\};$$

4. 根据紧致性，只需证明 $T \cup \Sigma(\bar{x}) \models \phi(\bar{x})$;
5. 反设【4】不成立，则 $T \cup \Sigma(\bar{x}) \cup \{\neg\phi(\bar{x})\}$ 一致;
6. 令 $\mathfrak{M} \models T \cup \Sigma(\bar{x}) \cup \{\neg\phi(\bar{x})\}$;
7. 取 $\bar{a} \in M^n$ 使得 $\mathfrak{M} \models \Sigma(\bar{a})$, $\mathfrak{M} \models \neg\phi(\bar{a})$;
8. 令 $A \subseteq M$ 是 $\{a_1, ..., a_n\}$ 生成的子结构 $(\mathbb{A} = (A, ...))$;
9. 我们断言: $T \cup \phi(\bar{a}) \cup \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$ 一致;

证明 III

10 否则，存在 $\theta(\bar{a}) \in \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$（即 $\mathfrak{M} \models \theta(\bar{a})$）使得

$$T \cup \phi(\bar{a}) \models \neg\theta(\bar{a});$$

11 根据【3】，$\neg\theta(\bar{x}) \in \Sigma$;

12 根据【7】，$\mathfrak{M} \models \neg\theta(\bar{a})$，$\neg\theta(\bar{a}) \in \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$ 吗，与【10】矛盾;

13 根据断言，存在 L_A 结构 $\mathfrak{M}_2$ 满足 $T \cup \phi(\bar{a}) \cup \mathrm{Diag}(\mathbb{A})$

14 则 $\mathbb{A}$ 是约化结构 $\mathfrak{M}_2|L$ 的子结构;

15 $\mathbb{A}$ 是 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}_2$ 的公共子结构，且 $\mathfrak{M} \models \neg\phi(\bar{a})$，$\mathfrak{M}_2 \models \phi(\bar{a})$，矛盾;

16 【4】成立，由紧致性，存在 Σ 的有限子集 Σ_0 使得 $T \cup \Sigma_0(\bar{x}) \models \phi(\bar{x})$;

17 令 $\psi(\bar{x}) = \bigwedge \Sigma_0(\bar{x})$，则 $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$。

引理

理论 T 接受量词消去当且仅当对每个具有下列形式的公式 ϕ:

$$\exists x(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_n),$$

其中每个 α_i 或者是原子公式，或者是原子公式的否定式，都存在一个不含量词的 ψ 使得 $T \models \phi \leftrightarrow \psi$

推论

理论 T 接受量词消去当且仅当对任意的 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$，如果 A 同时是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 的子结构，则对任意多个原子公式以及否定式合取而得到的公式 $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$，以及 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 都有

$$\mathfrak{M} \models \exists y \phi(a_1, \ldots, a_n, y) \iff \mathfrak{N} \models \exists y \phi(a_1, \ldots, a_n, y)$$

目录

只含后继的自然数的模型

只含后继的自然数的模型

结构 $\mathfrak{N}_S = (\mathbb{N},\ 0,\ S)$, 语言是 $L_S = \{0, S\}$。公理集为:

1. $0 \neq Sx$;
2. $Sx = Sy \to x = y$;
3. $x \neq 0 \to \exists y(x = s(y))$;
4. $\bigwedge_{i<n}(Sx_i = x_{i+1}) \to x_0 \neq x_n$;

令 T_S 为以上公式的全称概括的逻辑后承的集合。

T_s 的模型

设 $\mathfrak{M} \models T_s$，则

1. $0^{\mathfrak{M}} \in M$;
2. $S(0)^{\mathfrak{M}} \in M$;
3. $S(n)^{\mathfrak{M}} \in M$;
4. 如果 $a \in M$ 且

$$a \notin \{0^{\mathfrak{M}}, S(0)^{\mathfrak{M}}, S(1)^{\mathfrak{M}}, S(2)^{\mathfrak{M}}, \ldots\},$$

   则 a 的前驱和后继均不属于

$$\{0^{\mathfrak{M}}, S(0)^{\mathfrak{M}}, S(1)^{\mathfrak{M}}, S(2)^{\mathfrak{M}}, \ldots\};$$

T_s 的模型

设 $\mathfrak{M} \models T_s$，在 M 上定义一个关系 $\sim$:

$$a \sim b \iff \text{存在自然数 } n \text{ 使得 } {S^{\mathfrak{M}}}^n(a) = b \text{ 或者 } {S^{\mathfrak{M}}}^n(b) = a$$

1. $[0^{\mathfrak{M}}] = \{0^{\mathfrak{M}}, S(0)^{\mathfrak{M}}, S(1)^{\mathfrak{M}}, S(2)^{\mathfrak{M}}, \ldots\}$;
2. 如果 $a \in M$ 且
$$a \notin \{0^{\mathfrak{M}}, S(0)^{\mathfrak{M}}, S(1)^{\mathfrak{M}}, S(2)^{\mathfrak{M}}, \ldots\},$$
则 $([a], S)$ 同构于 $(\mathbb{Z}, S)$.
3. 如果 $a, b \in M$ 非标准，且 $[a] \neq [b]$，则 a 于 b 中间没有 “大小关系”;

引理

T_S 是不可数范畴的理论，从而是完备的。

证明

1. 设 $\mathfrak{M}_1 = (M_1, 0^{\mathfrak{M}_1}, S^{\mathfrak{M}_1})$ 与 $\mathfrak{M}_2 = (M_2, 0^{\mathfrak{M}_2}, S^{\mathfrak{M}_2})$ 与均是 T_S 的模型且 $|M_1| = |M_2| = \lambda > \aleph_0$;
2. 则
$$\bar{M}_1 = M_1/\sim_1 = \{[a]_1 \mid a \in M_1\},\ \bar{M}_2 = M_2/\sim_2 = \{[b]_2 \mid b \in M_2\};$$
3. 且有 $|M_1| \leq |\bar{M}_1| \times \aleph_0$, $|M_2| \leq |\bar{M}_2| \times \aleph_0$;
4. 故 $|\bar{M}_1| = |\bar{M}_2| = \lambda$;
5. 令
$$\bar{M}_1 = \{[a_i]_1 \mid i < \lambda\},\ \bar{M}_2 = \{[b_i]_2 \mid i < \lambda\},\}$$
其中 $a_0 = 0^{\mathfrak{M}_1}$，$a_i \not\sim_1 a_j$，$b_0 = 0^{\mathfrak{M}_2}$，$b_i \not\sim_2 b_j$ $(i \neq j)$；
6. 则 $a_i \mapsto b_i$ 可以唯一地扩张为 $\mathfrak{M}_1$ 到 $\mathfrak{M}_2$ 的同构。

推论

T_S 可判定的。

推论

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_S) = T_S$ 是可判定的。

定理

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_S)$ 接受量词消去。

证明 I

1. 每个原子公式形如 $S^m x = S^n v$，其中 x 与 v 或者是变元;
2. 设 $\phi(x_1, ..., x_n, y)$ 是一个不含量词的公式，则 ϕ 的形如

$$\bigwedge_{i \in E} (S^{m_i} x_i = S^{n_i} y) \ \wedge \ \bigwedge_{j \in D} (S^{m_j} x_j \neq S^{n_j} y)$$

   其中 E, D 是有限集;
3. 设 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$， $A \subseteq M_1, M_2$ 是公共子结构， $a_1, ..., a_n \in A$;
4. 假设

$$\mathfrak{M}_1 \models \exists y \phi(a_1, ..., a_n, y);$$

5. 设 $b_1 \in M_1$ 使得

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi(a_1, ..., a_n, b_1);$$

证明 II

6. 令 $[b_1]_{\mathfrak{M}_1} = \{d|\ S^m d = S^n b_1,\ \ m, n \in \mathbb{N}\}$，记作 $b_1 + \mathbb{Z}$;
7. 如果 $[b_1]_{\mathfrak{M}_1} \cap A = \emptyset$，则

$$\mathfrak{M}_1 \models \bigwedge_{i \in E}(S^{m_i} a_i = S^{n_i} b_1) \ \wedge\ \bigwedge_{j \in D}(S^{m_j} a_j \neq S^{n_j} b_1)$$

蕴含着 $E = \emptyset$;

8. 至多有一个 $b \in M_2$ 使得

$$\mathfrak{M}_2 \models \bigwedge_{j \in D}(S^{m_j} a_j = S^{n_j} b);$$

故存在 $b_2 \in M_2$ 使得

$$\mathfrak{M}_2 \models \bigwedge_{j \in D}(S^{m_j} a_j \neq S^{n_j} b_2);$$

证明 III

9. 如果 $b_1 \in A$，则

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi(a_1, ..., a_n, b_1) \Leftrightarrow A \models \phi(a_1, ..., a_n, b_1)$$

$$A \models \phi(a_1, ..., a_n, b_1) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_2 \models \phi(a_1, ..., a_n, b_1)$$

10. 如果 $[b_1]_{\mathfrak{M}_1} \cap A \neq \emptyset$，则存在自然数 n 使得 ${S^{\mathfrak{M}_1}}^n(b_1) = a \in A$
11. $[a]_{\mathfrak{M}_2} = a + \mathbb{Z} \subseteq M_2$，存在 $b_2 \in M_2$ 使得 ${S^{\mathfrak{M}_2}}^n(b_2) = a$
12. 在 $\mathfrak{M}_1$ 中，$a = b_1 + n$，在 $\mathfrak{M}_2$ 中，$a = b_2 + n$，故

$$\mathfrak{M}_2 \models \phi(a_1, ..., a_n, b_2)$$

目录

包含后继和序的自然数的模型

包含后继和序的自然数的模型

结构 $\mathfrak{N}_< = (\mathbb{N},\ 0,\ S,\ <)$, 语言是 $L_< = \{0, S, <\}$。

设 $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<)$，在 M 上定义一个关系 $\sim$:

$$a \sim b \iff \text{存在自然数 } n \text{ 使得 } S^{\mathfrak{M}^n}(a) = b \text{ 或者 } S^{\mathfrak{M}^n}(b) = a$$

1. $[0^{\mathfrak{M}}] = \{0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}, 2^{\mathfrak{M}}, 3^{\mathfrak{M}}, \ldots\}$;
2. 如果 $a \in M$ 且

$$a \notin \{0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}, 2^{\mathfrak{M}}, 3^{\mathfrak{M}}, \ldots\},$$

   则 $([a], S, <)$ 同构于 $(\mathbb{Z}, S, <)$.

性质

若结构 $\mathfrak{M} = (M,\ 0,\ S,\ <)$ 满足：

1. $\mathfrak{M} \models \forall x(0 \leq x)$;
2. $\mathfrak{M} \models <$ 是线序；
3. $\mathfrak{M} \models \forall y(y \neq 0 \rightarrow \exists x(y = S(x)))$;
4. $\mathfrak{M} \models \forall y(y = 0 \rightarrow \forall x(y \neq S(x)))$;
5. $\mathfrak{M} \models \forall y(y < S(y))$;
6. $\forall x \forall y(x < y \rightarrow S(x) \leq y)$（以上理论记作 $T_<$）；

则：

1. $([0^{\mathfrak{M}}],\ 0,\ S,\ <) \cong (\mathbb{N},\ 0,\ S,\ <)$；
2. $([0^{\mathfrak{M}}],\ 0,\ S,\ <) \prec \mathfrak{M}$，即 $f:\ n \mapsto {S^{\mathfrak{M}}}^n 0$ 是 $\mathfrak{N}_<$ 到 $\mathfrak{M}$ 的初等嵌入。

证明 I

1. $f : n \mapsto {S^{\mathfrak{M}}}^n 0$ 显然是满射；
2. 对 $k \in \mathbb{N}$ 归纳证明 $f(k+1) = S^{\mathfrak{M}}(f(k))$;
3. 对 $k, n \in \mathbb{N}$ 归纳证明 $k < n$ 当且仅当 $f(k) < f(n)$;
4. 从而证明了 $([0^{\mathfrak{M}}],\ 0,\ S,\ <) \cong (\mathbb{N},\ 0,\ S,\ <)$。（练习）

接下来证明：$\mathbb{A} = ([0^{\mathfrak{M}}],\ 0,\ S,\ <) \prec \mathfrak{M}$

1. $T_<$ 接受量词消去 (稍后证明)：
2. 设 $\phi(x)$ 是一个公式，则存在一个无量词公式 $\psi(x)$ 使得

$$T_< \models \forall x_1, ..., x_n(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x));$$

证明 II

3. 设 $a_1, ..., a_n \in [0^{\mathfrak{M}}]$，则

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{M} \models \psi(a_1, ..., a_n)$$

$$\mathfrak{M} \models \psi(a_1, ..., a_n) \iff \mathbb{A} \models \psi(a_1, ..., a_n)$$

4. 显然 $\mathbb{A} \models T_<$；
5. $$\mathbb{A} \models \psi(a_1, ..., a_n) \iff \mathbb{A} \models \phi(a_1, ..., a_n).$$

   故 $\mathbb{A} \prec \mathfrak{M}$。

练习

练习

设理论 T 接受量词消去，$\mathbb{A}, \mathfrak{B} \models T$，且 $\mathbb{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 子结构，则 $\mathbb{A} \prec \mathfrak{B}$。

范畴性

定理

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<)$ 不是范畴的。

证明 I

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<)$ 不是可数范畴

1. $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<) \cup \{c > n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是一致的；
2. $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<) \cup \{c > n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 有可数模型 $\mathfrak{M}$；
3. $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 显然不同构。

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<)$ 不是不可数范畴

1. 稠密线序 $(\mathbb{R}, <) + (\mathbb{Q}, <)$ 与 $(\mathbb{Q}, <) + (\mathbb{R}, <)$ 不同构；
2. 令
$$\mathfrak{M}_1 = [0]_1 \cup \bigcup_{i \in \mathbb{R}} [a_i]_1 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{Q}} [b_j]_1,$$
满足：
3. $([0]_1, <, S, 0) \cong (\mathbb{N}, <, S, 0)$

证明 II

4 $[a_i]_1 \cap [a_{i'}]_1 = \emptyset$，$[b_j]_1 \cap [b_{j'}]_1 = \emptyset$，$[a_i]_1 \cap [b_j]_1 = \emptyset$

5 $a_i < a_{i'}$ 当且仅当 $i < i'$，$b_j < b_{j'}$ 当且仅当 $j < j'$；

6 对任意的 $i \in \mathbb{R}$ 与 $j \in \mathbb{Q}$ 总有 $a_i < b_j$；

7 令

$$\mathfrak{M}_2 = [0]_2 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{Q}} [\alpha_j]_2 \cup \bigcup_{i \in \mathbb{R}} [\beta_i]_2;$$

满足条件【3】-【5】；

8 对任意的 $i \in \mathbb{R}$ 与 $j \in \mathbb{Q}$ 总有 $b_j < a_i$；

9 $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ 蕴含 $(\mathbb{R}, <) + (\mathbb{Q}, <) \cong (\mathbb{Q}, <) + (\mathbb{R}, <)$;

10 $\mathbb{R}$ 和可以替换为其他基数的稠密线序。

量词消去

定理

$T_<$ 接受量词消去。

注

$T_<$ 接受量词消去可推出 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<) = T_<$，即 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<)$ 接受量词消去。

证明 I

1. 每个原子公式形如 $S^m x = S^n v$ 和 $S^m x < S^n v$，其中 x 与 v 或者是变元；
2. 设 $\phi(x_1, ..., x_n, y)$ 是一个不含量词的公式，则 ϕ 的形如

$$\bigwedge_{i \in E}(S^{m_i} x_i = S^{n_i} y) \wedge \bigwedge_{j \in D}(S^{m_j} x_j \neq S^{n_j} y)$$

$$\wedge \bigwedge_{i \in O}(S^{m_i} x_i < S^{n_i} y) \wedge \bigwedge_{j \in G}\neg(S^{m_j} x_j < S^{n_j} y)$$

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T_<$，$A \subseteq M_1, M_2$ 是公共子结构，$a_1, ..., a_n \in A$；

证明 II

3. 假设

$$\mathfrak{M}_1 \models \exists y \phi(a_1, ..., a_n, y)$$

设 $b_1 \in M_1$ 使得

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi(a_1, ..., a_n, b_1)$$

4. 如果 $[b_1] \cap A \neq \emptyset$，则存在自然数 n 使得 $b_1 +_1 n = a \in A$。显然存在 $b_2 \in M_2$ 使得 $b_2 +_2 n = a$，显然

$$\mathfrak{M}_2 \models \phi(a_1, ..., a_n, b_2)$$

证明 III

5. 如果 $[b_1] \cap A = \emptyset$，则 $E = \emptyset$，且 b_1 给出 A 上的一个切割

$$A_{<b_1} = \{a \in A | a < b_1\},\ A_{>b_1} = \{a \in A | a > b_1\}$$

引入新常元 y，令 $\chi(y)$ 为公式集合

$$\chi(y) = \{y > a |\ a \in A_{<b_1}\} \cup \{y < a |\ a \in A_{<b_1}\}$$

即 $\chi(y)$： $A_{<b_1} < y < A_{>b_1}$；

6. $\mathrm{Diag}(A) \cup \chi(y) \models \phi(a_1, ..., a_n, y)$;
7. 存在有穷子集 $\chi_0(y) \subseteq \chi(y)$ 使得 $\mathrm{Diag}(A) \cup \chi_0(y) \models \phi(a_1, ..., a_n, y)$
8. $\chi(y)$ 的有穷子集在 $\mathfrak{M}_2$ 中可满足（?）；
9. 从而存在 $b_2 \in M_2$ 使得 $\mathfrak{M}_2 \models \chi_0(b_2)$
10. 故 $\mathfrak{M}_2 \models \phi(\bar{a}, b_2)$，从而 $\mathfrak{M}_2 \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$.

可判定性

推论

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<)$ 是可判定。

证明

1. 存在一个有穷的子集 $T_< \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<)$ 接受量词消去；
2. 如果 $\mathfrak{M} \models T_<$，则 $\mathfrak{N}_< \subseteq \mathfrak{M}$ 是子结构；
3. 对任意的公式 $\phi(x)$，都存在一个公式 $\psi(x)$ 使得 $T_< \models \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$；
4. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$，有

   $$\mathfrak{M} \models \phi(n) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi(n) \Leftrightarrow \mathfrak{N}_< \models \psi(n) \Leftrightarrow \mathfrak{N}_< \models \phi(n) \Leftrightarrow$$

   故 $\mathfrak{N}_<$ 是 $\mathfrak{M}$ 的初等子结构；
5. $\mathfrak{M} \models T_< \Longrightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}_<$；
6. $T_< = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}_<)$ 是完备的。

可判定性

推论

（练习）$\mathbb{N}$ 的子集 X 是 $\mathfrak{N}_<$ 的可定义子集当且仅当 X 有限或者 $\mathbb{N}\backslash X$ 有限。

目录

普莱斯伯格算术模型

普莱斯伯格算术

结构 $\mathfrak{N}_+ = (\mathbb{N},\ 0,\ S,\ <,\ +)$, 语言是 $L_+ = \{0, S, <, +\}$。称 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_+)$ 为普莱斯伯格算术。

注

设 $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N}_+)$，在 M 上定义一个关系 $\sim$:

$$a \sim b \iff \text{存在自然数 } n \text{ 使得 } a + n = b \text{ 或者 } b + n = a$$

1. $\mathfrak{M}$ 以标准部分 $[0^{\mathfrak{M}}]$ 起头;
2. 标准部分以后跟着若干 $\mathbb{Z}$-链;

注

设 $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N}_+)$，且 $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}_+$，则 $\mathbb{Z}$ 链排成无端点的稠密线序：$\forall a, b([a] < [b] \to \exists c([a] < [c] < [b]))$；

证明

1. 显然 $(M/\sim, <)$ 是线序；
2. 设 $\mathbb{N} < [a] = a + \mathbb{Z} < [b] = b + \mathbb{Z}$，则

$$a + \mathbb{Z} < \frac{a + b + n}{2} + \mathbb{Z} < b + \mathbb{Z}$$

普莱斯伯格算术模型 I

引理

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_+)$ 不接受量词消去。

证明 I

1. $\phi(x) := \exists y(x = y + y)$;
2. 则
$$X = \{a \in \mathbb{N} | \mathfrak{N}_+ \models \phi(a)\}$$
是偶数集;
3. 原子公式形如 $f_1(x) = f_2(x)$ 和 $f_1(x) < f_2(x)$;
4. 其中 $f_i(x)$ 形如
$$\underbrace{x + ... + x}_{n\text{个}x} + \underbrace{1 + ... + 1}_{m\text{个}1}$$
$m, n \in \mathbb{N}$（记作 $nx + m$，解释？）;
5. $\{x \in \mathbb{N} | f_1(x) = f_2(x)\}$ 的基数 ≤ 1;
6. $\{x \in \mathbb{N} | f_1(x) < f_2(x)\}$ 是有限或余有限集（补集有限）;

证明 II

7. 如果 $\psi(x)$ 不含量词，则

$$Y = \{a \in \mathbb{N} | \mathfrak{N}_+ \models \psi(a)\}$$

是有限集与余有限集的布尔组合（$\cap, \cup, \neg$）。
8. Y 只能是有限集或余有限集，故 $X \neq Y$；
9. $\mathfrak{N}_+ \not\models \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$.

普莱斯伯格算术模型

扩张语言

令

$$L_{\equiv} = L_{+} \cup \{\equiv_2, \equiv_3, \equiv_4, \dots\},$$

$$\mathfrak{N}_{\equiv} = (\mathbb{N},\ 0,\ S,\ <,\ +,\ \equiv_2, \equiv_3, \equiv_4, \dots)$$

$$a \equiv_n b \iff \exists c\Big((nc + a = b) \vee (nc + b = a)\Big).$$

注

定义 $T_\equiv$ 满足:

1. $T_\equiv \models T_S$;
2. $T_\equiv \models +$ 有交换性，结合性;
3. $T_\equiv \models$ 其他 $\mathfrak{N}_+$ 中的常见的“定理”;
4. $T_\equiv \models \ \equiv_n$ 是一个等价关系;
5. $T_\equiv \models \forall x (\bigvee_{k=0}^{n-1} (x \equiv_n k))$ （$\equiv_n$ 有 n 个等价类）;
6. $T_\equiv \models \forall x, y (\neg (x < y) \leftrightarrow (y < x) \vee (x = y))$ （$\neg$ 消去);
7. $T_\equiv \models \forall x, y (\neg (x \equiv_n y) \leftrightarrow \bigvee_{0<i<n} (x \equiv_n y + i))$ （$\neg$ 消去);

则:

定理

$T_\equiv$ 接受量词消去。

量词消去

定理 (量词消去)

设 T 是一个理论，$\phi(\bar{x})$ 是一个公式。则 $\phi(\bar{x})$ mod T 等价于一个无量词公式 $\psi(\bar{x})$ 当且仅当对任意的模型论 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$，对任意的子结构 $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1$ 和 $\mathbb{A}_2 \subseteq \mathfrak{M}_2$，如果 $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ 是一个同构，则对任意 $\bar{a} \in A_1^n$，有

$$\mathbb{A}_1 \models \phi(\bar{a}) \iff \mathbb{A}_2 \models \phi(f(\bar{a}))$$

子结构的闭包

可定义闭包

设 $\mathfrak{M} \models T_{\equiv}$，$A \subseteq M$ 是一个子结构。定义

- 令 $A/n = \{c \in M |\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists a \in A(nc = a)\}$;
- 令 $A - A = \{d \in M |\ \exists a, b \in A(a + d = b)\}$;
- 令 $A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A/n \cup (A - A)$;
- ...
- $A_{k+1} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_k/n \cup (A_k - A_k)$;
- $\mathrm{dcl}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$;
- 则 $\mathrm{dcl}(A)$ 是包含 A 的对" 整除" 和减法封闭的最小的集合 (子结构)。
- $\mathrm{dcl}(A)$ 被 A 唯一确定。

扩张引理 I

扩张引理

设 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T_{\equiv}$，$A \subseteq M_1$ 和 $B \subseteq M_2$ 是两个子结构。如果 $j : A \to B$ 是一个同构，则存在唯一的同构 $\bar{j} : \mathrm{dcl}(A) \to \mathrm{dcl}(B)$ 时 j 的扩张。

证明：

- 设 $a \in A$，如果 $A \models a \equiv_n 0$，则 $B \models j(a) \equiv_n 0$
- 则 $\mathfrak{M}_1 \models a \equiv_n 0$ 且 $\mathfrak{M}_2 \models j(a) \equiv_n 0$；
- $\exists c \in M_1$，$\exists d \in M_2$，使得

$$\mathfrak{M}_1 \models nc = a,\ \mathfrak{M}_2 \models nd = j(a);$$

扩张引理 II

- 对任意的 $a_1, ..., a_n \in A_1$ 以及无量词的公式 $\phi(x_1, ..., x_n, y)$,

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi(a_1, ..., a_n, c) \iff \mathfrak{M}_2 \models \phi(j(a_1), ..., j(a_n), d)$$

- 设 $\mathfrak{C}$ 由 $A \cup \{c\}$ 在 $\mathfrak{M}_1$ 中生成的子结构;
- 设 $\mathfrak{D}$ 由 $B \cup \{d\}$ 在 $\mathfrak{M}_2$ 中生成的子结构;
- 则 $\mathfrak{C}$ 与 $\mathfrak{D}$ 有自然的同构: $a \mapsto j(a)$, $c \mapsto d$;
- 如果 $a_1 < a$, $\exists c' \in M_1$, $\exists d' \in M_2$, 使得

$$\mathfrak{M}_1 \models c' + a_1 = a, \ \mathfrak{M}_2 \models d' + j(a_1) = j(a);$$

- 同理, $A \cup \{c'\}$ 和 $B \cup \{d'\}$ 生成的子结构相互同构;
- 故 j 可以扩张为 A_1 到 B_1 的同构。
- 对 k 归纳证明 j 可以扩张为 A_k 到 B_k 的同构;
- 故 j 可以扩张为 $\mathrm{dcl}(A)$ 到 $\mathrm{dcl}(B)$ 的同构。

$T_{\equiv}$ 的量词消去的证明 I

定理

$T_{\equiv}$ 接受量词消去。

证明：

1. 每个原子公式形如 $f(\bar{x}) \equiv_n g(\bar{x})$，$f(\bar{x}) = g(\bar{x})$，$f(\bar{x}) < g(\bar{x})$;
2. 其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是整系数线性函数（$\sum_k n_k x_k + m$）；
3. 设 $\phi(x_1, ..., x_n, y)$ 是一个原子公式及其否定式的合取式；
4. 则 $T_{\equiv}$ 可以证明其等价于以下形式（证明？）：

$$\bigwedge_{i \in E} (k_i y \equiv_n f_i(\bar{x})) \ \wedge \ \bigwedge_{j \in D} (k_j y + g_j(\bar{x}) = f_j(\bar{x})) \ \wedge$$

$$\bigwedge_{l \in O_1} (k_l y + g_l(\bar{x}) < f_l(\bar{x})) \wedge \bigwedge_{m \in O_2} (k_m y + g_m(\bar{x}) > f_m(\bar{x}));$$

$T_{\equiv}$ 的量词消去的证明 II

5. 设 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T_{\equiv}$，$A \subseteq M_1, M_2$ 是公共子结构，满足：
   1. 如果 $A \models a \equiv_n 0$，则 $\frac{a}{n} \in A$（解释？）；
   2. 如果 $A \models a' < a$，则 $a - a' \in A$（解释？）。
6. 即 A 上的线性方程 $n_k x + a_k = b_k$ 的解 $\in A$。
7. 假设 $\phi(a_1, ..., a_n, y)$ 形如

$$\bigwedge_{i\in E}(k_i y + m_i \equiv_{n_i} 0) \wedge \bigwedge_{j\in D}(k_j y + a_j = b_j) \wedge \bigwedge_{l\in O}(k_l y + a_l < b_l)$$

其中 $k_i, k_j, k_l, n_i, m_i \in \mathbb{N}$，$a_j, a_l, b_j, b_l \in A$.

8. 假设

$$\mathfrak{M}_1 \models \exists y \phi(a_1, ..., a_n, y) \Rightarrow \exists d_1 \in M_1 \ s.t. \mathfrak{M}_1 \models \phi(a_1, ..., a_n, d_1)$$

$T_{\equiv}$ 的量词消去的证明 III

9. 如果 D 非空，则 $d_1 \in A$，从而

$$\mathfrak{M}_2 \models \phi(a_1, ..., a_n, d_1);$$

10. 下面假设 $d_1 \notin A$，从而 $\phi(a_1, ..., a_n, y)$ 形如，

$$\bigwedge_{i \in E} (k_i y + m_i \equiv_{n_i} 0) \ \wedge \bigwedge_{l \in O} (k_l y + a_l < b_l)$$

11. d_1 在 $(A, <)$ 上有个切割;
12. 并且同余方程组 $\bigwedge_{i \in E} (k_i y + m_i \equiv_{n_i} 0)$ 有解 $u \in \mathbb{N}$;
13. 令 $N = \prod_{i \in E} n_i$，则 $u + N, u + 2N, u + 3N, ...,$ 均是解；
14. $d_2 \in M_2$ 对应于 d_1 在 A 上的切割;
15. 则 $d_2 + \mathbb{Z}$ 都确定了同样的切割;

$T_{\equiv}$ 的量词消去的证明 IV

16 并且存在 $k < \prod_{i \in E} n_i$ 使得 $d_2 + k$ 是同余方程组

$$\bigwedge_{i \in E} (k_i y + m_i \equiv_{n_i} 0) \text{的解}$$

则 $\mathfrak{M}_2 \models \phi(a_1, ..., a_n, d_2 + k)$。

利用量词消去，有

性质

若结构 $\mathfrak{M} = (M, 0, S, +, <)$ 满足 $T_{\equiv}$，则：

1. $([0^{\mathfrak{M}}], 0, S, +, <) \cong (\mathbb{N}, 0, S, +, <)$；
2. $([0^{\mathfrak{M}}], 0, S, +, <) \prec \mathfrak{M}$，即 $f: n \mapsto {S^{\mathfrak{M}}}^{n} 0$ 是 $\mathfrak{N}_{<}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的初等嵌入。

推论

$T_{\equiv}$ 是完备的。

证明

1. $\mathfrak{M} \models T_{\equiv} \Longrightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}_{\equiv}$;
2. $T_{\equiv}$ 完备，否在存在 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T_{\equiv}$ 且 $\mathfrak{M}_1 \not\equiv \mathfrak{M}_2$.

推论

$T_{\equiv}$ 是可判定的，且 $T_{\equiv} = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}_+)$。

证明

1. $x \equiv_n y$ 表示公式 $\exists z(nz + x = y \vee nz + y = x)$，则 $T_{\equiv}$ 是一个语言 $\{0, S, +, <\}$ 上的可公理化的理论;
2. $T_{\equiv}$ 完备表明 $T_{\equiv}$ 可判定且 $T_{\equiv} = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}_+)$。

总结

1. $\mathfrak{N}_S$, $\mathfrak{N}_<$, $\mathfrak{N}_+$ 的理论都是完备的可公理化的（$T_S, T_<, T_\equiv$）的理论，从而是来判定的；
2. $\mathfrak{N}_S$, $\mathfrak{N}_<$，的理论都是接受量词消去的；
3. $\mathfrak{N}_+$ 不接受量词消去，但是 $\mathfrak{N}_\equiv$ 接受量词消去；
4. $\mathfrak{N}_S$, $\mathfrak{N}_<$, $\mathfrak{N}_+$ 分别可以初等嵌入到 $T_S, T_<, T_\equiv$ 的任意模型中。

总结

定义

设 T 是一个一阶理论，如果模型 $\mathbb{A}=(A,\ldots)\models T$ 满足：对任意的与 $\mathfrak{M}\models T$ 都存在初等嵌入 $f:\mathbb{A}\longrightarrow\mathfrak{M}$，则称 $\mathbb{A}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的素模型。

命题

如果 T 有素模型且接受量词消去，则 T 是完备的。（练习）

问题

问题

$(\mathbb{N}, 0, S, +, \times, <)$ 的理论是否可判定？

Thanks!