1. 内容综述

1.1导论

1.2 第一章

本章作者主要讲了数理逻辑与数学哲学

在第一节，作者给出了一些数学哲学中的一些基本问题：

1. 纯粹逻辑的本质与它在人类知识中的地位。

2. 数学知识的刻画。

3. 直觉与形式在数学中的地位。

4. 逻辑与数学的关系。

5. 数学的本质以及它跟诸如必要性、分析性、确定性、(the a priori)与(self-evidence)等概念的关系。

6. 数学在人类知识中的地位。

7. 数学活动与实践。

并对各个问题进行了一些基本的讨论。

第二节作者讨论了公理化方法与抽象结构。在发展公理化方法的时候，我们有两条完全不同的途径，一种是为每一个特定的模型构造一套形式化方法，比如算术或者欧几里得几何，另一种则是用一套抽象结构来刻画数学。例如，布尔巴基学派就试图通过抽象结构统一数学，以期在数学内部分析数学。

但是这种结构主义并不能很好地将数学与自然科学联系起来

在第三节，作者从悖论出发，首先介绍了数理逻辑的不同起源。

悖论的发现在数理逻辑发展的历史中很重要，而这也引申出我们对于系统一致性的期望，但哥德尔第二不完全定理告诉足够强的系统无法证明自身的一致性。但仍有一点，一个在不一致系统内不会导出矛盾的证明是否有价值。

1.3 第二章

在本章，作者首先讨论了自然数的概念。自然的，第一个问题就是什么是自然数，我们应该如何刻画自然数的概念。一个原因是，自然数不同于负数或者复数，它不能转化为一些更基本的概念，因而显得更加重要。

首先我们似乎可以说，自然数是1或者是某个自然数的后继，但值得注意的一点是，如果我们任取一个不同于的自然数，那么就都会是自然数，但这不是我们所希望的。一个尝试是要求自然数必需满足数学归纳法，于是这样的集合的交集似乎就是我们想要的自然数了。但是这又会涉及到我们如何刻画任意自然数的集合。

Dedekind改进了Grassmann的方法，提出了皮亚诺公理。对于皮亚诺来说，我们有如下的事实

1. N是数的集合。
2. N的元素之间有某种关系。
3. 不同的元素有不同的后继。
4. 不是每一个元素都是后继。
5. 前面的四个事实并不能唯一确定一个N。

因此Dedekind用P5来摆脱带来的一些问题。

虽然自然数确实满足皮亚诺公理，但另一个问题是这些公理是否刻画了自然数的所有性质，即皮亚诺公理是否是范畴的。

Dedekind的一个问题是它的前提需要一个包含N的集合，但是哥德尔不完全性定理告诉我们我们不存在形式系统可以强迫它的论域包括N。

另外一点是，P5是一条二阶语句，虽然这个二阶系统是范畴与完全的，但我们希望能够工作在一阶系统内。但是，二阶逻辑没有一阶的完全系统，也就是说我们不能通过一阶句子完全地把握P5的表达力。同时，即使我们再为这个一阶系统增加更多符号与公理，新的系统依旧不是完全的，因而不是范畴的。

因此对于自然数来说，我们不能用形式系统把握它全部的性质。那么，一阶逻辑是否是我们想要的逻辑？

在第二节，作者讨论了连续统的问题。连续统与两类问题有关，一类包括芝诺悖论与无穷小，另一类则是连续的定义与不可数集的概念。什么是连续的本质？如果任取一段线段，作者认为，如果任意把线段割成两段，这个割都对应一个点，那么这条线段应该是连续的。接下来的问题则是应该如何对线段进行分割。在数学分析的发展过程中我们发现，分析的算术化可以归结为有理数的有界集存在上确界，进而每一个实数都与一个割集一一对应。为了将它形式化，我们选择为有序域加上连续公理，但需要注意的是连续公理是一条二阶语句，如果将它一阶化，那么系统就不再范畴，另一个问题是最小上界的定义是非直谓的

第三节作者主要回顾了可计算性的一些问题。

用图灵机或者部分递归函数定义可计算性对于数理逻辑意义重大，用哥德尔的话说，“first time succeeded in giving an absolute definition of an interesting epistemological notion”。在第三节，作者讨论了可计算性的一些问题。首先，作者讨论了如何一步一步刻画模糊的直觉以及给出精确定义的好处。

之后作者介绍了哥德尔在机械程序与观念认知上的观点。哥德尔认为，图灵机比部分递归函数更能刻画机械程序。在我们如何认知一个观点的问题上，哥德尔认为概念就在那里，只是我们并未有充分认识它。

在第二小节，作者介绍了通用递归函数的直觉与它发展的过程，通用递归函数能够刻画机械过程很大程度上是因为它跟图灵可计算性等价

为了介绍图灵机，作者首先介绍了一个机械的计算过程应该是怎样的，即确定的与有限的。从这两个原则上出发，作者说明了，图灵机的下一个状态应该是被上一个状态以及扫瞄的数据唯一确定的，同时，它的状态数、符号数和执行操作都应该是有限的，最后作者非形式地介绍了图灵机。

1. 个人评论

P39下面，我并不觉得它矛盾

有意义的一点是，不一致的系统并非没有用，正如作者所说，“The importance of set-theoretical contradictions has been greatly exaggerated in some quarters。”（p. 48）例如，在高中学习集合论时，即便没有给出严格的定义，我们也可以在直观上理解集合并在其上进行工作。如果不学习严格的集合论，我们可能永远认识不到罗素悖论，但我们

在第72页，

P95页，作者总结道“Turing machines, and therewith general recursive functions, provide classically an adequate analysis of mechanical procedures”，我觉得这个总结并不有效，如果它们

1. 问题

数学是否是由逻辑推导统一的

为什么我们要对自然数的概念进行哲学讨论，我们的问题是什么

继续讨论芝诺悖论有什么意义

p. 73 为什么找到所有可能的定义实数的方法是由哲学意义的