在本章，作者首先讨论了自然数的概念。自然的，第一个问题就是什么是自然数，我们应该如何刻画自然数的概念。一个原因是，自然数不同于负数或者复数，它不能转化为一些更基本的概念，因而显得更加重要。

首先我们似乎可以说，自然数是1或者是某个自然数的后继，但值得注意的一点是，如果我们任取一个不同于的自然数，那么就都会是自然数，但这不是我们所希望的。一个尝试是要求自然数必需满足数学归纳法，于是这样的集合的交集似乎就是我们想要的自然数了。但是这又会涉及到我们如何刻画任意自然数的集合。

Dedekind改进了Grassmann的方法，提出了皮亚诺公理。对于皮亚诺来说，我们有如下的事实

1. N是数的集合。
2. N的元素之间有某种关系。
3. 不同的元素有不同的后继。
4. 不是每一个元素都是后继。
5. 前面的四个事实并不能唯一确定一个N。

因此Dedekind用P5来摆脱带来的一些问题。

虽然自然数确实满足皮亚诺公理，但另一个问题是这些公理是否刻画了自然数的所有性质，即皮亚诺公理是否是范畴的。因为我们知道自然数这是个公理的公理，如果它是范畴的，其它的模型就跟自然数同构了，因此在同构意义下自然数就是这个公理在某个基数下唯一的模型。

Dedekind的一个问题是它的前提需要一个包含N的集合，但是哥德尔不完全性定理告诉我们我们不存在形式系统可以强迫它的论域包括N。

另外一点是，P5是一条二阶语句，虽然这个二阶系统是范畴与完全的，但我们希望能够工作在一阶系统内。但是，二阶逻辑没有一阶的完全系统，也就是说我们不能通过一阶句子完全地把握P5的表达力。同时，即使我们再为这个一阶系统增加更多符号与公理，新的系统依旧不是完全的，因而不是范畴的。

因此对于自然数来说，我们不能用形式系统把握它全部的性质。那么，一阶逻辑是否是我们想要的逻辑？

在第二节，作者讨论了连续统的问题。连续统与两类问题有关，一类包括芝诺悖论与无穷小，另一类则是连续的定义与不可数集的概念。什么是连续的本质？如果任取一段线段，作者认为，如果任意把线段割成两段，这个割都对应一个点，那么这条线段应该是连续的。接下来的问题则是应该如何对线段进行分割。在数学分析的发展过程中我们发现，分析的算术化可以归结为有理数的有界集存在上确界，进而每一个实数的有界集都有一个上确界。对于一个集合，如果任意小于某个该集合的元素的有理数都属于这个集合，那么我们称这个集合exhaustive。我们可以证明，这样的集合和实数一一对应。

进而Dedekind定义了割，即把有理数分成两个集合A和B，其中A的每个元素都小于B的每个元素，于是每一个割跟一个实数一一对应。

为了将它形式化，我们选择为有序域加上连续公理，但需要注意的是连续公理是一条二阶语句，如果将它一阶化，那么系统虽然是完全并且可判定的，但不是范畴的。

如果我们用任意exhaustive有界集来识别实数，那么刻画连续统的问题会转化为刻画任意自然数的子集。Cantor的对角线法说明没有完全明显的刻画能穷尽所有的实数，特别地，没有形式系统能包含所有自然数。

特别地，如果我们想将对角线法推广成一个定理，我们就不得不使用非直谓定义，即用一个包含该对象的全体来定义该对象。在这里，假设有一个对于所有实数的枚举，那么我们能得到一个不在这个枚举中的自然数。

在定义有界实数集的上确界时，我们也用到了非直谓定义：给定一个有界的有理数集，它的上确界是比这个集合的元素大的元素的集合的最小元素。

非直谓定义的复杂性在于我们不知道新的集合是如何构造出来的，为了使用它我们得假设本身就存在一个集合，而通过非直谓定义仅仅只是定义了一个预先存在的性质而不是带来一个新的集合。

为了避免非直谓定义的影响，有没有可能构造一个直谓分析。

在经典数论与分析中，二阶系统事实上更好地刻画了自然数与连续统，这似乎是在建议我们去使用一个二阶的形式系统。

第三节作者主要回顾了可计算性的一些问题。

用图灵机或者部分递归函数定义可计算性对于数理逻辑意义重大，用哥德尔的话说，“first time succeeded in giving an absolute definition of an interesting epistemological notion”。在第三节，作者讨论了可计算性的一些问题。首先，作者讨论了如何一步一步刻画模糊的直觉以及给出精确定义的好处。

之后作者介绍了哥德尔在机械程序与观念认知上的观点。哥德尔认为，图灵机比部分递归函数更能刻画机械程序。在我们如何认知一个观点的问题上，哥德尔认为概念就在那里，只是我们并未有充分认识它。

在第二小节，作者介绍了通用递归函数的直觉与它发展的过程，通用递归函数能够刻画机械过程很大程度上是因为它跟图灵可计算性等价

为了介绍图灵机，作者首先介绍了一个机械的计算过程应该是怎样的，即确定的与有限的。从这两个原则上出发，作者说明了，图灵机的下一个状态应该是被上一个状态以及扫瞄的数据唯一确定的，同时，它的状态数、符号数和执行操作都应该是有限的，最后作者非形式地介绍了图灵机。