A卷

中国石油大学（北京）2018—2019学年第一学期

《数学分析》I 期末考试试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、 填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 函数$y=x^x$的导函数为__________

2. 函数$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$在$x=0$处连续，则α的取值范围为：__________

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_\alpha x}{x^\alpha}(\alpha>0,\neq 1)=$__________

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=$__________

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-n^2}}\right]=$__________

6. 函数$\frac{x^3}{x^2+2x-3}$的渐近线为：__________

7. $\int x\sin x\,dx=$ __________

8. $\int\frac{1}{x(1+x)}dx=$ __________

9. 函数$y=\ln(1+x)$在$x_0=0$点带有拉格朗日余项的n阶泰勒展式为：__________

10. 设$y=x\cosh x$, 其中$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, 则$(x\cosh x)^{(100)}=$ __________

二、 证明题（本题 10 分）利用单调有界原理证明数列

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\cdots$$

或者表示为：$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, n=1,2,\cdots$

收敛，并求其极限。

三、**解答题（每小题 5 分，共 20 分）**

1. 指出函数$f(x)=\frac{1}{x}-\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$, 的间断点及其类型。(其中$\lfloor x\rfloor$表示下取整，例如：$\lfloor 2.5\rfloor=2$，$\lfloor -2.1\rfloor=-3$).

2. 求极限$\lim\limits_{x\to 0+}\left[\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right]$($x\to 0+$,表示$x$从大于 0 的一方趋于 0).

3. 设$\begin{cases}x=\ e^t\sin t\\ y\ =e^t\cos t\end{cases}$, 求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. 求$\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos 3x\,dx$

四、 证明题（本题 10 分）证明$\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

五、 解答题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 利用拉格朗日中值定理证明:$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$,其中 $0 < a < b$.

2. 利用函数的单调性证明：$\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 利用泰勒展开式求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

4. 利用凸函数的定义证明对于任何非负实数a, b, 有：$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b$

六、 解答题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 计算定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

2. 计算极限$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$