

姓名：张鑫 学号：2019011813 课程：《数学分析I》 班级：默认班级 提交时间：2020-06-05 17:31 ip：1.189.6.121 成绩：29.0 分

一、单选题（题数：15，共 60.0 分）

1、

不定积分 $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx = ()$

学生得分：4.0 分)

A、 $\ln(e^x + 1) + C$

B、 $\ln e^x + C$

C、 $(e^x + 1) + C$

D、 $e^x + C$

正确答案：A 张鑫的答案：A

2、

当 $x \rightarrow 0$ 时， $\arcsin x$ 是 $3^x - 1$ 的 ()

学生得分：0.0 分)

A、 高阶无穷小

B、 等价无穷小

C、 同阶但非等价无穷小

D、 低阶无穷小

正确答案：C 张鑫的答案：A

3、

若 $a > 0, b > 0$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{5}{x}} = ()$

学生得分：0.0 分)

A、 e

B、 $(ab)^{5/2}$

C、 $(ab)^{3/2}$

D、 1

正确答案：B 张鑫的答案：A

4、

若 $f(x)$ 为可导函数，则以下选项中正确的是（ ）

学生得分：0.0 分)

- A、 $\int f'(x)dx = f(x)$
- B、 $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x) + C$
- C、 $\int df(x) = f(x)$
- D、 $d \int f(x)dx = f(x)dx$

正确答案：D 张鑫的答案：C

5、

$x = 0$ 是 $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$ 的（ ）

学生得分：0.0 分)

- A、 跳跃间断点
- B、 可去间断点
- C、 震荡间断点
- D、 无穷间断点

正确答案：B 张鑫的答案：C

6、

当 $x \rightarrow 0$ 时，以下无穷小中与 $f(x) = \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}$ 等价的是（ ）

学生得分：4.0 分)

- A、 $1 + \cos x$
- B、 $\arcsin x$
- C、 $\tan x - \sin x$
- D、 \sqrt{x}

正确答案：B 张鑫的答案：B

7、

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有定义是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 ()

学生得分：0.0 分)

- A、 必要而非充分条件
- B、 充分而非必要条件
- C、 充分必要条件
- D、 既非充分也非必要条件

正确答案：D 张鑫的答案：B

8、

若函数 $f(x) = \begin{cases} -3 + \sqrt{x^2 - 1}, & -\infty < x < -1 \\ b, & x = -1 \\ a + \frac{\arccos x}{\pi}, & -1 < x \leq 1 \end{cases}$ 在 $x = -1$ 处连续, 则 $a + b = ()$

学生得分：4.0 分)

- A、 -5
- B、 -6
- C、 -7
- D、 -8

正确答案：C 张鑫的答案：C

9、

设 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为 ()

学生得分：4.0 分)

- A、 $\ln \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$
- B、 $2 \arctan(2x - 3) + C$
- C、 $\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| - 3$
- D、 $\ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| + 2$

正确答案：C 张鑫的答案：C

10、

若 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx} = ()$

学生得分：0.0 分)

- A、 $\frac{1}{2t}$
- B、 $\frac{1+t^2}{4t}$
- C、 $2t$
- D、 $2t(1+t^2)$

正确答案：A 张鑫的答案：B

11、
方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 为 ()

学生得分：0.0 分)

- A、 $\frac{-y}{e^y + x}$
- B、 $\frac{y}{e^y + x}$
- C、 $\frac{-y}{e^y - x}$
- D、 $\frac{y}{e^y - x}$

正确答案：A 张鑫的答案：B

12、
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+500} = ()$

学生得分：4.0 分)

- A、 e
- B、 e^{500}
- C、 e^{501}
- D、 1

正确答案：A 张鑫的答案：A

13、

极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 2}) = ()$

学生得分：0.0 分)

- A、 1
- B、 2
- C、 3
- D、 4

正确答案：B 张鑫的答案：A

14、

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = ()$

学生得分：0.0 分)

- A、 1
- B、 2
- C、 3
- D、 不存在

正确答案：D 张鑫的答案：A

15、

设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} (b_n - a_n) = 0$ ， 则 ()

学生得分：4.0 分)

- A、 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛， 且极限相等
- B、 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛， 但极限未必相等
- C、 $\{a_n\}$ 收敛， 而 $\{b_n\}$ 发散
- D、 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 可能都收敛， 也可能都发散

正确答案：D 张鑫的答案：D

二、论述题 （题数：4，共 40.0 分）

1、

证明 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续。

学生得分：5.0 分)

正确答案

证明：存在 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$,取 $x_n = \frac{1}{n}, x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$,虽然
 $|x_n - x_{n+1}| = \left| \frac{1}{n(n+1)} \right| \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty) \dots\dots 5分$

有：
 $\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right| = |n - (n+1)| = 1 > \epsilon_0 = \frac{1}{2} \dots\dots 5分$
。
所以，函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续。

张鑫的答案

5/11/20 $\delta > 0$

1. 假设 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上一致连续,

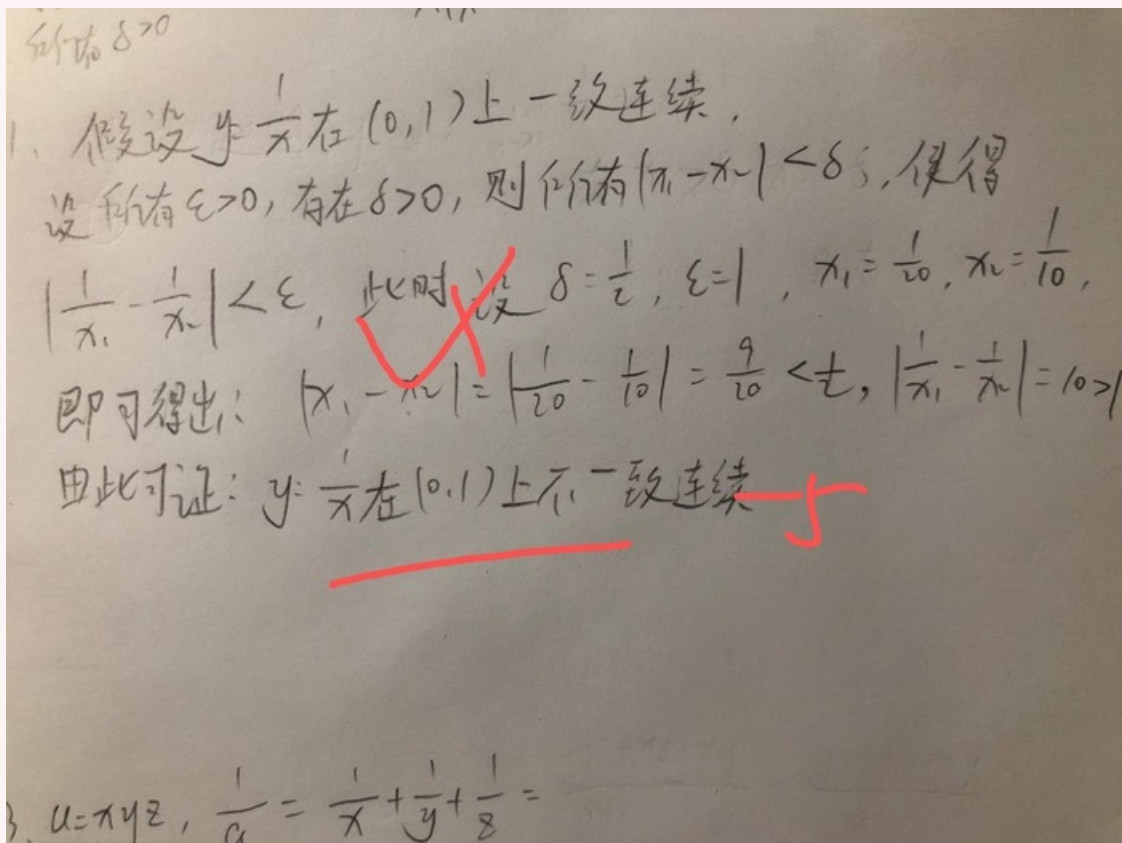
设所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 则所有 $|x_1 - x_2| < \delta$, 使得

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \varepsilon, \text{ 此时设 } \delta = \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon = 1, x_1 = \frac{1}{20}, x_2 = \frac{1}{10},$$

$$\text{即得出: } |x_1 - x_2| = \left| \frac{1}{20} - \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{20} < \frac{1}{10}, \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 10 > 1$$

由此可证: $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续

$$3. u = xyz, \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} =$$



部分正确

2、

采用单调有界原理证明数列: $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \dots, \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}, \dots (x_{n+1} = \sqrt{2+x_n})$ 收敛, 并求其极限。

学生得分: 0.0 分)

正确答案

解: $x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+x_n} - \sqrt{2+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n} + \sqrt{2+x_{n-1}}}$, 所以数列单调, 又因为 $x_2 > x_1$, 所以数列单调递增 -- 4分

因为 $0 < x_1 < 2$, 假设 $x_n < 2$, 则有: $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{4} = 2$, 所以数列有上界2. 根据单调有界原理, 数列收敛. -- 4分

假设数列的极限为A, 则有: $A = \sqrt{2+A}$, 所以有 $A = 2$ -- 2分

张鑫的答案

批语

3、

求函数 $u = xyz$ 在条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$ 约束下的极值。

学生得分: 0.0 分)

正确答案

解：作拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a} \right), \text{---4 分}$$

令,

$$\begin{cases} L_x = yz - \lambda \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0 \\ L_y = xz - \lambda \left(\frac{1}{y^2} \right) = 0 \text{---3 分} \\ L_z = xy - \lambda \left(\frac{1}{z^2} \right) = 0 \end{cases}$$

解之得到

$$xyz = \frac{\lambda}{3a} \rightarrow x = y = z = 3a$$

所以极小值为： $f(3a, 3a, 3a) = 27a^3$ ---3 分

张鑫的答案

$$\begin{aligned}
 3. \{ u = xyz, \quad - \\
 \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \Rightarrow u' = u_x + u_y + u_z = yz + xz + xy = 370 \\
 \text{令 } u' = 0, \text{ 可得} \}
 \end{aligned}$$

批语

$$\begin{aligned}
 & 3. \begin{cases} u = xyz, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow u' = u_x + u_y + u_z = yz + xz + xy = (20)^2 = 270 \\
 & \text{令 } u' = 0, \text{ 可得 } \{
 \end{aligned}$$

回答错误

4、

设 $b > a > 0$, 证明 $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{1}{b}$

学生得分 : 0.0 分)

正确答案

因为 $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi}, \xi \in (a, b)$ --- 7分,

所以有,

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{1}{b} \text{ --- 3分}$$

张鑫的答案

批语