中国石油大学（北京）

2019 — 2020 学年第 I 学期

《数学分析 I》结课考试试卷-参考答案

（A 卷）

考试方式：闭卷考试

班级：

姓名：

学号：

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

注：1. 试卷共 8 页，请勿漏答。

2. 试卷（及所附草稿纸）不得拆开，所有答案均写在题后空白

一、 填空题（15 分，每小题 3 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{2n}=\boldsymbol{e^2}$

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}D(x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$。若函数$f(x)$在$x=0$点连续，则$\alpha$的取值范围为：$\underline{\boldsymbol{\alpha>0}}$.

3. $\lfloor x\rfloor$表示向下取整函数，则极限$\lim\limits_{x\to 0}x\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor$=$\underline{2.}$

4. 设常数$k>0$,函数$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$在$(0,+\infty)$内的零点的个数为：$\underline{2.}$

5. $x=1$为函数$y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$ <u>跳跃型</u> 间断点（填：可去型，跳跃型，无穷型）。

二、 选择题（15 分，每小题 3 分）

1. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则（B）

   （A）$F(x)$是奇函数的**充分条件**为$f(x)$为偶函数

   （B）$F(x)$是偶函数的**充分条件**为$f(x)$为奇函数

   （C）$F(x)$是周期为 T 的函数的**充分条件**为$f(x)$为周期为 T 的函数

   （D）$F(x)$是严格单调函数的**充分条件**为$f(x)$严格单调函数

2. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=2$(其中$a,b$为常数)，则（B）

   （A）$a=0,b\in R$　　　　（B）$a=0,b=2$

（C）$a \in R, b = 0$ （D）$a \in R, b \in R$

3. 若函数$f(x)$与$g(x)$在$(-\infty, +\infty)$上皆可导，且$f(x) < g(x)$，则必有（C）

（A）$f(-x) > g(-x)$ （B）$f'(x) < g'(x)$

（C）$\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$ （D）$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t < \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$

4. 设$f(t) = \begin{cases} \sin\frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$，$F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则$F(x)$在$x = 0$处（B）

（A）不连续 （B）连续但不可导

（C）可导且$F'(0) \neq 0$ （D）可导且$F'(0) = 0$

5. 若函数$f(x)$的一个原函数是$(x-2)e^x$，则$f'(x) =$（C）

（A）xe^x （B）xe^{x+1}

（C）$(x+1)e^{x+1}$ （D）$(x+1)e^x$

三、 解答题（30 分，每小题 6 分）

1. 计算积分$\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}\mathrm{d}x$

解：$\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\tan^2 x + 3^2}\mathrm{d}\tan x$ ---3 分

$= \int \frac{1}{\tan^2 x + 3^2}\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{3}\arctan[\frac{\tan x}{3}] + C$ ---3 分

2. 设曲线为$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$，求该曲线在对应$t = 1$处的切线和法线方程。

解：因为$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$----2 分，

所以曲线在对应于$t = 1$处的切线的斜率为 1，法线的斜率为-1----2

所以，切线的方程为：$y-\ln\sqrt{2}=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)---1$ 分

法线方程为：$y-\ln\sqrt{2}=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)---1$ 分

3. 若$y=|(x-1)(x-2)^2|$，求$y'(x)(x\neq 1,2),y'(2)$，进一步讨论$y'(1)$的存在性。

解:$y'(x)(x\neq 1,2)=\frac{|(x-1)(x-2)^2|}{(x-1)(x-2)^2}((x-2)^2+2(x-1)(x-2))$---3 分

$y'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{y(x)-y(2)}{(x-2)}=0$ ---1 分

$y'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{y(x)-y(1)}{(x-1)}=1$ ---1 分

$y'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{y(x)-y(1)}{(x-1)}=-1$ ---1 分

所以，函数在$x=1$处不可导。

4. 设$y=x^2e^x$, 求$y^{20}(x)$

解：$y^{20}(x)=[x^2e^x]^{20}=x^2e^x+40e^x$ ---6 分

5. 利用定积分的定义计算极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right]$

解：$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$ ---3 分

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}$ ---3 分

四、解答题（8 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+\sin^3 x)}$

解：　$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$ ---2 分

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^5)$ ---2 分

$-\cos x+e^{\frac{x^2}{2}}=\frac{x^4}{12}+o(x^5)$ ---2 分

$(e^x-1)\ln(1+\sin^3 x)=x^4+o(x^5)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+\sin^3 x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{12}+o(x^5)}{x^4+o(x^5)}=\frac{1}{12}$ ---2 分

五、 解答题（15 分）设$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中$a_i$为确定的正整数且 $a_i>0,a_i\neq 1(i=1,2,\cdots,n,n\geq 2)$，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$；（3）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解:（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, 设$M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ ，则有：

$$\frac{M^x}{n}<\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}<\frac{nM^x}{n}=M^x$$

由夹逼准则，知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=M$； ---3 分

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，设$m=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ ，则有：

$$\frac{m^x}{n}<\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}<\frac{n\,m^x}{n}=m^x$$

由夹逼准则，知$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=m$； ---3 分

（3）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\frac{1}{x}\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\to\frac{1}{n}\ln a_1a_2\cdots a_n$$

由夹逼准则，知$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$； ---3 分

六、 证明题（15 分，每小题 5 分）

（1） 证明对于任意的正整数n, 有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$成立；

解：$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}$, $\xi\in(0,1)$ ---4 分

所以有：$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ ---1 分

（2） 证明$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y)$

解：$f(x)=e^x$，$f''(x)=e^x>0$, 所以$f(x)$为严格下凸函数，根据凸函数性质，有： ---4 分

$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ ---1 分

（3） 证明$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续

证明： $\forall\epsilon>0, |\sin x_1-\sin x_2|\le|x_1-x_2|$, ---3 分

令$\delta=\epsilon$,当$|x_1-x_2|<\delta$, 有：$|\sin x_1-\sin x_2|\le|x_1-x_2|<\epsilon$.

所以，$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。 ---3 分

七、 计算题（8 分，每小题 4 分）

（1）$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$

（2）解：$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

---2 分

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$ ---2 分

（3）在什么条件下（a,b,c满足什么条件），积分$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\mathrm{d}x$ 为有理函数？（注：有理函数为$\frac{P(x)}{Q(x)}$,其中$P(x),Q(x)$为两个关于x的多项式）

解：

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}$$

---2 分

通分有：

ax^2+bx+c

$$= Ax^2(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + C(x-1)^2 + Dx^3(x-1) + Ex^3$$

比较同次幂的系数，得到：

$$\begin{cases} A = a+2b+3c \\ B = b+2c \\ C = c \\ D = -(a+2b+3c) \\ E = a+b+c \end{cases}$$

当$A=D=0$, 即$a+2b+3c=0$时，积分$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\mathrm{d}x$为有理函数。---2 分