中国石油大学（北京）2019-2020-1《数学分析I》期末补考试卷(1)

一、 单选题（共15题，60分）

1、不定积分$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx=$（ ）

A、 $\ln(e^x+1)+C$

B、 $\ln e^x+C$

C、 $(e^x+1)+C$

D、 e^x+C

正确答案： A

解析：

2、当$x\to 0$时， $\arcsin x$是3^x-1的（ ）

A、 高阶无穷小

B、 等价无穷小

C、 同阶但非等价无穷小

D、 低阶无穷小

正确答案： C

解析：

3、若$a>0,b>0$,则极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{5}{x}}=$（ ）

A、 e

B、 $(ab)^{5/2}$

C、 $(ab)^{3/2}$

D、 1

正确答案： B

解析：

4、 若 $f(x)$ 为可导函数，则以下选项中正确的是（　　）

A、 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$

B、 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$

C、 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$

D、 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

正确答案： D

解析：

5、 $x = 0$是$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$的（）

A、 跳跃间断点

B、 可去间断点

C、 震荡间断点

D、 无穷间断点

正确答案： B

解析：

6、 当 $x \to 0$时，以下无穷小中与$f(x) = \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}$ 等价的是（）

A、 $1+\cos x$

B、 $\arcsin x$

C、 $\tan x-\sin x$

D、 $\sqrt{x}$

正确答案： B

解析：

7、 $f(x)$在$x=x_0$处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的（ ）

A、 必要而非充分条件

B、 充分而非必要条件

C、 充分必要条件

D、 既非充分也非必要条件

正确答案： D

解析：

8、 若函数 $f(x)=\begin{cases}-3+\sqrt{x^2-1}, & -\infty<x<-1\\ b, & x=-1\\ a+\dfrac{\arccos x}{\pi}, & -1<x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $x=-1$ 处连续，则 $a+b=()$

A、 -5

B、 -6

C、 -7

D、 -8

正确答案： C

解析：

9、 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$，则$f(x)$ 的一个原函数为（ ）

A、 $\ln\frac{1}{x^2+3x+2}$

B、 $2\arctan(2x-3)+C$

C、 $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|-3$

D、 $\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|+2$

正确答案： C

解析：

10、 若
$y=y(x)$ 是由参数方程
$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定的隐函数，则
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=()$

A、 $\frac{1}{2t}$

B、 $\frac{1+t^2}{4t}$

C、 $2t$

D、 $2t(1+t^2)$

正确答案： A

解析：

11、 方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$为（ ）

A、 $\frac{-y}{e^y+x}$

B、 $\frac{y}{e^y+x}$

C、 $\frac{-y}{e^y-x}$

D、 $\frac{y}{e^y-x}$

正确答案：A

解析：

12、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+500}=()$

A、e

B、e^{500}

C、e^{501}

D、1

正确答案：A

解析：

13、极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})=(\ )$

A、1

B、2

C、3

D、4

正确答案：B

解析：

14、极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=(\ )$

A、1

B、2

C、3

D、不存在

正确答案： D

解析：

15、 设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$且$\lim\limits_{x\to x_0}(b_n-a_n)=0$，则（ ）

A、$\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，且极限相等

B、$\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，但极限未必相等

C、$\{a_n\}$收敛，而$\{b_n\}$发散

D、$\{a_n\}$和$\{b_n\}$可能都收敛，也可能都发散

正确答案： D

解析：

二、 论述题（共4题，40分）

1、 证明$y=\frac{1}{x}$在$(0，1)$上不一致连续。

正确答案：

证明：存在$\epsilon_0=\dfrac{1}{2}$,取$x_n=\dfrac{1}{n}$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$,虽然

$$|x_n-x_{n+1}|=\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|\to 0(n\to+\infty)---5分$$

有：

$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\epsilon_0=\frac{1}{2}---5分$$

。

所以，函数$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。

解析：

2、 采用单调有界原理证明数列：$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\cdots(x_{n+1}=\sqrt{2+x_n})$ 收敛，并求其极限。

正确答案：

解：$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}$,所以数列单调，又因为$x_2>x_1$，所以数列单调递增$---$

因为$0<x_1<2$,假设$x_n<2$,则有：$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{4}=2$,所以数列有上界2. 根据单调有界原理，数列收敛。$---4$分
假设数列的极限为A,则有：$A=\sqrt{2+A}$,所以有$A=2---2$分

解析：

3、 求函数$u=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}(x>0,y>0,z>0,a>0)$约束下的极值。

正确答案：

解：作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right),---4\ 分$$

令,

$$\begin{cases}L_x=yz-\lambda\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0\\ L_y=xz-\lambda\left(\dfrac{1}{y^2}\right)=0---3\ 分\\ L_z=xy-\lambda\left(\dfrac{1}{z^2}\right)=0\end{cases}$$

解之得到

$$xyz=\frac{\lambda}{3a}\to x=y=z=3a$$

所以极小值为：$f(3a,3a,3a)=27a^3---3$ 分

解析：

4、 设$b>a>0$,证明$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{1}{b}$

正确答案：

因为 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi},\xi\in(a,b)---7分$，

所以有，

$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}---3分$

解析：