中国石油大学（北京）2019-2020-1《数学分析III》期末补考试卷(1)

一、 单选题（共10题，40分）

1、 $\cos x$的麦克劳林级数为（）

A、 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

C、 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

正确答案： A

解析：

2、 设$\lambda>0$，则级数$\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{\lambda}{\ln n})$

A、 条件收敛

B、 绝对收敛

C、 发散

D、 可能收敛，也可能发散

正确答案： A

解析：

3、 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-a)^n}{n}$在$x>0$时发散，在$x=0$处收敛，则常数$a=(\ )$

A、 1

B、 -1

C、 2

D、 -2

正确答案： B

解析：

4、 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n b_n$

A、 绝对收敛

B、 条件收敛

C、 发散

D、 敛散性不能确定

正确答案： A

解析：

5、下列四个级数中发散的是( )

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

C、 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n[3+(-1)^n]^n}{6^n}$

正确答案： A

解析：

6、设$f(x)$是以2为周期的函数，它在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x & 1<x\leq 2 \end{cases}$$，则

$f(x)$的傅立叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$$在

$x=3$处收敛于( )

A、 1

B、 1/2

C、 3/2

D、 0

正确答案： C

解析：

7、如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

A、 同时收敛或同时发散

B、 敛散性不同

C、 都发散

D、 都收敛

正确答案： A

解析：

8、级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2}$的收敛半径为（）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 4

正确答案： A

解析：

9、 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛的

A、 充要条件

B、 充分条件

C、 必要条件

D、 既非充分条件，又非必要条件

正确答案： B

解析：

10、 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases}$，则它的Fourier展开式中（ ）

A、 只有正弦项

B、 只有余弦项

C、 既有正弦项，又有余弦项

D、 以上结果都不正确

正确答案： B

解析：

二、 简答题（共5题，40分）

1、 求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$的收敛区间。

正确答案：

因为$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{5^n+(-2)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n}}=5---4$分,

所以幂级数的收敛半径为$R=\frac{1}{5}---3$分

故，级数的收敛区间为：$|x-1|<\frac{1}{5},\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right).---1$分

解析：

2、 设$u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$,

证明该函数列在$[0,1]$上一致收敛到0。

正确答案：

证明：$|\,u_n(x)-0\,|=\left|\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)-0\right|\le\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n},x\in[0,1]---5$分,

因为$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$,

所以，$u_n(x)\rightrightarrows 0---3$分

解析：

3、 设$f(x)$是以

2π为周期的函数， 它在一个周期上的表达式为：

$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$。求

$f(x)$的傅立叶级数展开式。

正确答案：

计算傅立叶系数:

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots,)$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{(2m+1)\pi}, & n=2m+1\\ 0, & n=2m\end{cases}---5\text{分}$$

,

所以，函数的展开式为:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x,(x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots)---3\text{分}$$

解析：

4、求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$的收敛域。

正确答案：

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=1$,所以级数的收敛半径$R=1---4\text{分}$,

当$x=1$时，级数$\sum\dfrac{1}{n}$发散，当$x=-1$时，级数$\sum\dfrac{(-1)^n}{n}---3\text{分}$收敛,

所以级数的收敛域为：$[-1,1)---1\text{分}$。

解析：

5、证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$在

$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

正确答案：

因为，$\forall x \in (-\infty,+\infty)$,有$\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2} ---4$**分**，由M判别法知，

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。$---4$**分**

解析：

三、 计算题（共2题，20分）

1、 **将函数**$y=\sin x$在

$x_0=\dfrac{\pi}{4}$ 处展开成为幂级数，并指出收敛域。

正确答案：

解：$\sin x=\sin\left[(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}\right]$----2分

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4})\right]$$ --------2分

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}\right]$$ ------5分

$x\in(-\infty,+\infty)$-----1分

解析：

2、 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)(a>1)$.

正确答案：

解：令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n, x\in(-1,1)$--------4分

$=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^n)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$-------5分

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)=\frac{a}{(1-a)^2}$ ------1分

解析：