中国石油大学(北京)

《数学分析》2017-2018-1期末考试题参考答案

Gunning Wu

I 填空题(每题3分,共15分)

(1) 函数$y = \sin(\cos x^2)$ 的导函数为：$-\cos(\cos x^2)\sin x^2 2x$

(2) 数列 $\sqrt[n]{n}, n = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 的最大项为：$3^{\frac{1}{3}}$

(3) 函数$\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的渐近线为：$x - \dfrac{1}{3}$

(4) $\displaystyle\int xe^x \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$

(5) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

(6) 函数$y = e^x$在$x_0 = 0$点的带有拉格朗日余项的n阶泰勒展开式为：$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, 0 < \theta < 1.$

(7) 函数$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & x \neq 0; \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在$x = 0$ 处可导，则α的取值范围为:$\alpha > 1$

(8) 极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$的积分表达式为：$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

(9) 设$y = x\sinh x$,则$(x\sinh x)^{(100)} = x\sinh x + 100\cosh x.$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n}a^{m-n}$

II　计算题（本题8分）

计算不定积分

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{2}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln|x-1|-\ln|x+1|+\ln|x+2|+C\end{aligned}$$

III　计算题（本题8分）

极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right] &= x\left[1+\frac{1}{5}\frac{1}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x\left[1-\frac{1}{5}\frac{1}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

IV　(本题6分)

证明不等式：

$$\frac{b-a}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{b-a}{b}(0<b<a)$$

证明：

$$\frac{\ln\frac{a}{b}}{b-a}=\frac{1}{\xi},\xi\in(b,a)$$

所以有：

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b},\xi\in(b,a)$$

V　作图题（本题10分）

作出函数

$$y=\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$$

的图形。

先求函数的一阶导数：

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x+1)-(x+1)^2}{3(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{3(x+1)^2}$$

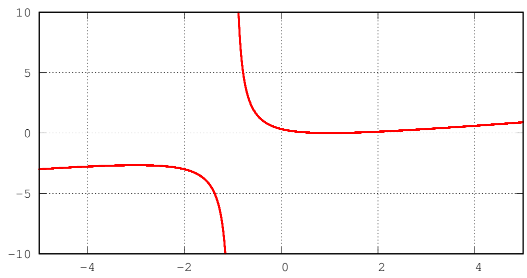

Figure 1: Function of the above.

再求函数的二阶导数:

$$f''(x) = \frac{8}{3(x+1)^3}$$

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	无定义	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	convex upward,increasing	local maximum	convex upward, decreasing	no definition	convex downward,decreasing	local minimum	convex upward, increasing

求函数的渐近线: 由题意知: $x=-1$ 为一条竖直渐近线; 另一条渐近线为: $y = \frac{x}{3} - 1$.

VI 解答题(本题10分

试确定a, b的值,使得:

$$x - (a + b\cos x)\sin x$$

为当$x \to 0$的5阶无穷小量。 解:

$$x - (a + b\cos x)\sin x = x - a\sin x - \frac{1}{2}b\sin 2x \tag{1}$$

利用函数的泰勒展开式:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \circ(x^5)$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \circ x^6$$

$$
\begin{aligned}
& x-(a+b\cos x)\sin x = x - a\sin x - \frac{1}{2}b\sin 2x \\
& = x - ax + a\frac{1}{6}x^3 - a\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{2}b\left[2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5\right] + \circ(x^5)
\end{aligned} \tag{2}
$$

因为展开时为一个5阶无穷小量，所以有：

$$a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}$$

VII 计算题（本题8分

将多项式$P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ 表示为$(x+1)$ 的正整数次幂的多项式。
解：因为

$$
\begin{aligned}
P(-1) &= 5 \\
P'(-1) &= -13 \\
P''(-1) &= 22 \\
P'''(-1) &= -12
\end{aligned}
$$

由泰勒公式知：

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 5+(-13)(x+1)+\frac{22}{2}(x+1)^2+\frac{-12}{6}(x+1)^3 \\
&= 5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^2
\end{aligned}
$$

VIII 证明题（本题10分）

证明：若函数$f(x)$满足：（1） 在区间$[a,b]$ 上可导；（2）$f(x)$为非线性函数。则在区间 (a,b) 内至少存在一点$\xi\in(a,b)$满足：

$$|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

证明：构造辅助函数：

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

根据题意：

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\neq 0, \text{ for some points}$$

因为：

$$F(a)=F(b)=0,$$

假设：

$$\exists\xi\in(a,b),F(\xi)\neq 0$$

不妨假设：

$$F(\xi)>0$$

在区间$[a,\xi]$ 和$[\xi,b]$上分别使用洛尔中值定理，有：

$$\exists\xi_1\in(a,\xi),F'(\xi_1)=\frac{F(\xi)-F(a)}{\xi-a}>0$$

即，

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3}$$

$$\exists\xi_2\in(\xi,b),F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(\xi)}{b-\xi}<0$$

即，

$$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{4}$$

对于公式 3和公式 4，总有一个使得：

$$\exists\eta\in(a,b),|f'(\eta)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

IX　解答题（本题10分）

推出积分$\int\sin^n x\ \mathrm{d}x$ 的递推公式，并利用该公式计算$\int\sin^6 x\ \mathrm{d}x$ 解：

$$\begin{aligned}\int\sin^n x\ \mathrm{d}x&=-\int\sin^{n-1}x\ \mathrm{d}\cos x\\&=-\cos x\sin^{n-1}x+\int(n-1)\cos^2 x\sin^{n-2}x\ \mathrm{d}x\\&=-\cos x\sin^{n-1}x+\int(n-1)(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\ \mathrm{d}x\\&=-\cos x\sin^{n-1}x+\int(n-1)\left(\sin^{n-2}x-\sin^n x\right)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以有:

$$
\begin{aligned}
n \int \sin^n x \ \mathrm{d}x &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \ \mathrm{d}x \\
\int \sin^n x \ \mathrm{d}x &= \frac{-1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\begin{aligned}
\int \sin^6 x \ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x \ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x + \frac{5}{6} \left[-\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \ \mathrm{d}x \right] \\
&= -\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x + \frac{5}{6} \left[-\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x \right) \right] + C
\end{aligned}
$$