B卷

中国石油大学（北京）2019—2020学年第一学期

《数学分析III》期末试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、 解答题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求级数$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$的和.

2. 讨论级数$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$绝对或条件收敛.

3. 判别级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi}{n^2+a^2}$的敛散性.

4. 求幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$的收敛域.

5. 证明级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

二、解答题（本题 15 分） 求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$的和函数.

三、证明题（本题 15 分）求函数$\frac{1}{x^2+3x+2}$在$x_0=1$处的幂级数展开式，并求出收敛域.

四、解答题（本题 15 分） 将函数$f(x)=x^2$在指定区间$[0,2\pi]$展开成 Fourier 级数.

五、解答题（本小题 10 分）设$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\mathrm{n}} x \, \mathrm{d}x$,

(1) 求$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$；

(2) 试证明对于任意的常数$\lambda > 0$, 级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} a_n$收敛.

六、解答题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 证明函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$在$x\in[-r,r]$上一致收敛.

2. 求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{n}(x+2)^n$的收敛区间.

3. 若函数列$\{f_n(x)\}=\{xn^k e^{-nx}\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛，求$k$的取值范围？