冪級數

武國寧

1 冪級數

本章將討論由冪函數序列$\{a_n(x-x_0)^n\}$所產生的函數級數：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{1}$$

它稱為冪級數，是一種最簡單的函數項級數。它可以看成是多項式的延伸。

下面討論$x_0=0$，則(1)為：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2}$$

1.1 冪級數的收斂區間

首先討論冪級數(2)的收斂問題。

定理1.1. (Abel 定理) 若冪級數(2)在$x=\bar{x}\neq 0$處收斂，則對於滿足不等式：$|x|<|\bar{x}|$的任何x，冪級數(2)收斂且絕對收斂；若冪級數(2) 在$x=\bar{x}\neq 0$處發散，則對於滿足不等式：$|x|>|\bar{x}|$的任何x，冪級數(2)發散。

注1.1. 冪級數(2)的收斂域是以原點為中心的區間。若以$2R$表示區間的長度，則R為冪級數的收斂半徑。實際上，冪級數的收斂半徑為收斂點的絕對值的上確界。

稱$(-R,R)$為冪級數(2)的收斂區間。

定理1.2. 對於冪級數(2)，若

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \tag{3}$$

則當

(1) $0 < \rho < +\infty$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = \dfrac{1}{\rho}$;

(2) $\rho = 0$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = +\infty$;

(3) $\rho = +\infty$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = 0$.

例子1.1. 討論級數$\sum \dfrac{x^n}{n^2}$的收斂域。

例子1.2. 討論級數$\sum \dfrac{x^n}{n}$的收斂域。

例子1.3. 討論級數$\sum \dfrac{x^n}{n!}, \sum n!x^n$的收斂域。

定理1.3. (柯西-阿達馬定理) 對於冪級數(2)，設

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

則當：

(1) $0 < \rho < +\infty$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = \dfrac{1}{\rho}$;

(2) $\rho = 0$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = +\infty$;

(3) $\rho = +\infty$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = 0$.

例子1.4. 討論級數

$$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} + \cdots$$

的收斂域。

例子1.5. 討論級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$$

的收斂域。

定理1.4. 若冪級數(2)的收斂半徑為$R(R>0)$，則冪級數(2)在它的收斂區間$(-R,R)$內的任一閉區間$[a,b]$上都一致收斂。

定理1.5. 若冪級數(2)的收斂半徑為$R(R>0)$，且在$x=R$或$x=-R$ 時收斂，則冪級數(2)在$[0,R]$或$[-R,0]$上一致收斂。

例子1.6. 討論級數$\sum \dfrac{(x-1)^n}{2^n n}$的收斂域。

1.2 冪級數的性質

定理1.6. (i) 冪級數(2)的和函數為$(-R,R)$上的連續函數；

(ii) 若冪級數(2)在左（右)端點上收斂，則其和函數在這一端點上右(左)連續。

(2)逐項求導，積分為：

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}\cdots+\cdots \tag{4}$$

$$a_0+2a_2x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \tag{5}$$

定理1.7. 冪級數(2)與冪級數(4),(5)具有相同的收斂區間。

定理1.8. 設冪級數(2)在收斂區間$(-R,R)$上的和函數為f，若$x\in(-R,R)$則有：

(1) f在點x可導，且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

(2) f在0與x之間的區間上可積，且

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

推論1.1. 記f 為冪級數(2)在收斂區間$(-R, R)$上的和函數，則在$(-R, R)$上f具有任意階導數，且可以逐項求導數任意次：

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x$$

推論1.2. 記f 為冪級數(2)在點$x = 0$ 某鄰域上的和函數，則冪級數(2)的係屬與f在$x = 0$處的各階導數有如下關係：

$$a_0 = f(0), \cdots a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n = 1, 2 \cdots$$

1.3 冪級數的運算

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_nx^n \tag{7}$$

定義1.1. 若冪級數(6)與冪級數(7)在$x = 0$點的某鄰域内有相同的和函數，則稱這兩個冪級數在該鄰域内相等。

定理1.9. 若冪級數(6)與(7)在$x = 0$的某鄰域内相等，則它們同次冪的係屬相等。

定理1.10. 若冪級數(6)與(7)的收斂半徑分別是R_a, R_b，則有

$$\lambda\sum a_n x^n = \sum \lambda a_n x^n, |x| < R_a$$

$$\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R$$

$$\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum c_n x^n, |x| < R$$

這裡$R = \min\{R_a, R_b\}, c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-1}$

例子1.7. 討論幾何級數在收斂域*(-1, 1)*上的可導，可積分性質。

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

例子1.8. 求級數$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$的和函數。

例子1.9. 證明$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$滿足方程$y^{(4)} = y$

例子1.10. 求級數$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$的和。

2 函數的冪級數展開

2.1 泰勒級數

若函數$f(x)$在x_0的某鄰域上存在直到$n+1$階的連續導數，則有：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{8}$$

這裡$R_n(x)$為拉格朗日型余項：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{9}$$

如果函數在x_0處具有任意階導數，這時稱級數：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (10)$$

為函數在x_0處的**泰勒級數**。對於級數(10)在x_0點的附近能否確切的表達f，是本節所要討論的問題。

例子2.1. 討論函數

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$處的泰勒展開式。

定理2.1. 設$f(x)$在點x_0具有任意階導數，那麼$f(x)$在區間(x_0-r,x_0+r)上等於它的泰勒級數的和函數的充分必要條件是：對於一切滿足不等式$|x-x_0|<r$ 的x，有：

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

這裡$R_n(x)$是$f(x)$在x_0點的泰勒公式的余項。

如果f能在點x_0的某鄰域上等於其泰勒級數的和函數，則稱函數f 在點x_0的這一鄰域上可以展開成為泰勒級數，並稱等式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (11)$$

的右邊為f在x_0處的**泰勒級數展開式，**或稱為**冪級數展開式**。

注2.1. 函數的泰勒級數展開式是唯一的。

在實際應用上，主要討論函數在$x_0=0$處的泰勒展開式，這時級數可以寫作：

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

稱為**麥克勞林級數**。

定理2.2. (Cauchy型余項) 設$f(x)$在(x_0-r,x_0+R)上任意階可導，則有：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),x\in(x_0-r,x_0+r)$$

其中，

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

Proof. 由表達式

$$r_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

出發，逐次對兩段求導數，可得到：

$$r_n'(x)=f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$$

$$r_n''(x)=f''(x)-\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}$$

$$\cdots$$

$$r_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)$$

$$r_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$$

令$x=x_0$, 有

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=r_n''(x_0)=\cdots=r_n^{(n)}(x_0)=0$$

逐次積分，有

$$
\begin{aligned}
r_n(x) = r_n(x) - r_n(x_0) &= \int_{x_0}^{x} r'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} r'(t)\,\mathrm{d}(t-x) \\
&= \int_{x_0}^{x} r''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&\cdots \\
&= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} r_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

□

注2.2. (1) 為拉格朗日型余項可以有柯西型余項的到，需要利用積分第一中值定理。

(2) 若果將函數$f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$看成一個函數，利用積分第一中值定理，則有：

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}t(\xi \in (x_0, x)) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, 0 \le \theta \le 1.
\end{aligned} \tag{13}
$$

2.2 初等函數的冪級數展開式

例子2.2. 求k次多項式函數

$$
f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k
$$

的展開式。

例子2.3. 求函數$f(x) = e^x$的展開式。

例子2.4. 求函數$f(x) = \sin x$的展開式。

例子2.5. 求函數$f(x)=\ln(1+x)$的展開式。提示：

(1) 當$0\le x\le 1$時使用**拉格朗日型余項**，有

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\frac{1}{(n+1)!}(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{(1+\xi)}\right)^{n+1}\right| \\ &\le \frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

(2) 當$-1<x<0$的情形，拉格朗日型余項不易估計，改用柯西型余項，有

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n |x|^{n+1}, 0\le x\le 1.\end{aligned}$$

因為$-1<x<0$，所以有$1-\theta\le 1+\theta x$. 即有$0\le\dfrac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\to 0(n\to\infty)$.

例子2.6. 討論二項式函數$f(x)=(1+x)^\alpha$的展開式。關於收斂區間的討論*(*其推導過程參見菲赫金哥爾茨著《微積分教程》第二卷第二份冊*)*：

(1) 當$\alpha\le -1$時，收斂域為$(-1,1)$*;*

(2) 當$-1<\alpha<0$時，收斂域為$(-1,1]$*;*

(3) 當$\alpha>0$時，收斂域為$[-1,1]$*;*

例子2.7. 利用$f(x)=(1+x)^\alpha$的展開式，得到

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,(-1,1). \tag{14}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots,(-1,1) \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
\arctan x &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, [-1,1]
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, [-1,1]
\end{aligned} \tag{17}
$$

例子2.8. 求函數$f(x) = (1-x)\ln(1-x)$在$x = 0$點的展開式。

例子2.9. 用間接方法求非初等函數

$$
F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t
$$

的冪級數展開式。