中国石油大学(北京)

《数学分析》II-2019-2020-2
期末考试题(闭卷)

题目	一	二	三	四	五	总分
得分						

班级______________

姓名______________

学号______________

1 选择题(每题3分,共30分)

(1) 下列反常积分发散的是(A)

(A) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x.$ (B) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x.$

(C) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$ (D) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \mathrm{d}x.$

(2) 双扭线$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$所围成区域的面积是(A)

(A) $2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \mathrm{d}\theta.$ (B) $4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \mathrm{d}\theta.$

(C) $2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta} \mathrm{d}\theta.$ (D) $\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \mathrm{d}\theta.$

(3) 积分$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$=(B)

(A)0. (B)$\frac{\pi}{4}$. (C)$\frac{\pi}{2}$. (D)π

(4) 设二元函数$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 在$(0,0)$点处(C)

(A) 连续、偏导数存在. (B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在. (D) 不连续、偏导数不存在.

(5) 设函数$u(x,y,z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$, 则$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{(1,2,3)} = (C)$

(A)0. (B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C)$\frac{\sqrt{3}}{3}$. (D)1.

(6) 已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某一函数的全微分，则$a=(C)$

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(7) 设有数量场$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$\mathbf{div}(\mathbf{grad}u)=(D)$

(A)0. (B)$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. (C)$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. (D)$\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

(8) 设$f(x,y)$连续，且$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$,其中$D$是由$y=0,y=x^2,x=1$所围成的区域，则$f(x,y)=(C)$

(A)xy. (B)$2xy$. (C)$xy+\dfrac{1}{8}$. (D)$xy+1$.

(9) 设S_1表示上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2,z\geq 0$的上侧，S_2表示下半球面$x^2+y^2+z^2=R^2,z\leq 0$的下侧。若曲面面积$I_1=\iint\limits_{S_1} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $I_2=\iint\limits_{S_2} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，则必有(C)

(A)$I_1>I_2$. (B)$I_1<I_2$. (C)$I_1=I_2$. (D)$I_1+I_2=0$.

(10) 设$f(x,y)$在区域$x^2+y^2\leq a^2$上连续，则极限$\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ $(C\quad)$

(A)0. (B)∞. (C)$f(0,0)$. (D)1.

2 计算题(每题8分,共40分)

1. 设可微函数$u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$，求du

Proof.

$$du = f_1'(dx+dy+dz)\text{——4分}$$
$$+ f_2'(2xdx+2ydy+2zdz)\text{——4分}$$

□

2. 求函数$f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点$M(1,1)$

沿与Ox轴的正向组成α角的方向l上的方向导数。

在怎样的方向上此方向导数有:

(1)最大值；(2)最小值；(3)等于0.

Proof.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)} = (1,1)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

(a) $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$,方向导数最大，且为$\sqrt{2}$; ——4分

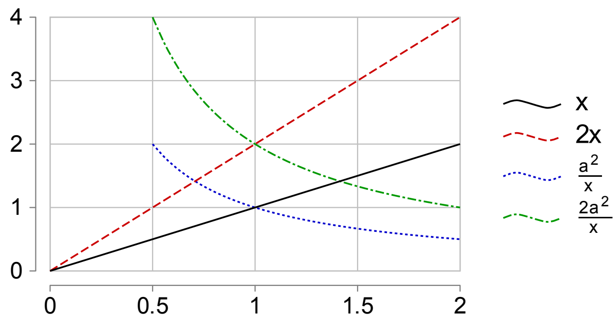
(b) $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$,方向导数最小，且为$-\sqrt{2}$;——2分

(c) $\alpha=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$,方向导数为0. ——2分

$\square$

3. 求由曲线$xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x$

$x>0, y>0$所围成的图形的面积。



Proof.

$$\text{做变量替换} u=\frac{y}{x}, v=xy, \text{则} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{2u}\text{——3分}$$
$$S=\iint\limits_{D} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$=\int_1^2\frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u\int_{a^2}^{2a^2}\,\mathrm{d}v\text{——3分}$$
$$=\frac{1}{2}a^2\ln 2\text{——2分}$$

$\square$

4. 求曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在圆柱面$x^2+y^2=2x$内那部分的面积。

Proof.

$$
\begin{aligned}
S &= \iint\limits_{S} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\text{——3分}\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r\sqrt{2}\,\mathrm{d}r\text{——3分}\\
&= \sqrt{2}\pi\text{——2分}
\end{aligned}
$$

□

5. 计算三重积分$\iiint\limits_{V} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,
其中V是由曲面$x^2+y^2+z^2=z$所围成的几何体。

Proof.

$$
\text{做球坐标变换,}\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}\text{——3分}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{V} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V\\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} r^3\,\mathrm{d}r\text{——3分}\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{\pi}{10}\text{——2分}
\end{aligned}
$$

□

3 Green公式(10分)

计算$\oint\limits_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中$C$为以$(1,0)$点为中心,
半径为$R(R>0, R\neq 1)$，方向为逆时针。

Proof.

$$当(x,y)\neq(0,0)时, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}——3分$$

$$(1)当R<1时, (0,0)\notin D, \oint\limits_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = 0;——3分$$

$$(2)当R>1时, (0,0)\in D, 奇点,做一个小椭圆$$

$$L_1: x = \frac{\epsilon}{2}\cos\theta, y = \epsilon\sin\theta.$$

于是有,

$$\oint\limits_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

$$= \oint\limits_{L_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2}\oint_{L_1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \pi——4分$$

□

4 Gauss公式(10分)

计算$\iint\limits_S -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中S为圆柱面$x^2+y^2=4$被平面$x+z=2$和$z=0$所截出部分的外侧。

Proof.

补充$S_1: z=0$下侧, $S_2: x+z=2$上侧.——3分

$$\iint\limits_{S+S_1+S_2} -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\mathrm{x}+(z+1)\,\mathrm{d}\mathrm{x}\,\mathrm{d}y=0\text{——3分}$$

$$\iint\limits_{S_1} -y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi;\text{——2分}$$

$$\iint\limits_{S_2} -y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{S_2}(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D} 3-x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=12\pi.\text{——2分}$$

所以原式积分 $=-8\pi$.

□

5 Stokes公式(10分)

计算$\oint\limits_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$,其中$C$为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$,

$x+y+z=0$, 若从Ox轴的正向看去,

这个圆周依逆时针方向。

Proof.

$$x+y+z=0\text{向上的单位法向量为：}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\text{——3分}$$

$$\begin{aligned}
&\oint\limits_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z\\
&=\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}S\\
&=\iint\limits_S -\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right)\,\mathrm{d}S,\text{——4分}\\
&=-\sqrt{3}\pi a^2\text{——3分}
\end{aligned}$$

□