

B 卷参考答案

中国石油大学（北京）2017—2018 学年第二学期

《数学分析 II》期末考试试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：_____

姓名：_____

学号：_____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、 填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $\int_0^{2\pi} \sin(2x) \sin(3x) dx = 0$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right] = \frac{2}{3} [2\sqrt{2} - 1]$

3. 设函数 $u = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, 它在点 (a, b, c) 的梯度为: $\left(-\frac{2}{a}, -\frac{2}{b}, \frac{2}{c}\right)$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1} = 2$

5. 交换积分 $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$ 的次序为: $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$

6. 设 $D = \{(x, y) | \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$, 则 $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = -6\pi^2$

7. 设 L 是圆周 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, 方向为逆时针方向。则第二类曲线积分

$$\oint_L x dy - y dx = 2\pi a^2$$

8. 设 L 是半圆周 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$ 。则第一类曲线积分 $\int_L x^2 + y^2 ds = \pi a^3$

9. 设 S 为平面 $x + y + z = 1$ 在第一象限中的部分, 方向为上侧。则第二类曲面积分

$$\iint_S x + y + z dx dy = \frac{1}{2}$$

10. 设 S 为平面 $x + y + z = 1$ 在第一象限中的部分, 则第一类曲面积分

$$\iint_S x + y + z dS = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

二、 解答题（每题 6 分，共 30 分）

1. 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$

解: $\int_0^2 f(x-1) dx = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \dots\dots\dots 3$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 \frac{1+e^t - e^t}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \\ &= 1 + \ln 2 - \ln 2 + \ln(1+e^{-1}) = 1 + \ln(1+e^{-1}) \dots\dots\dots 3 \end{aligned}$$

2. 设 $f(x, y)$ 可微, 证明: 在坐标变换

$$x = u \cos \theta - v \sin \theta, y = u \sin \theta + v \cos \theta$$

下, $(f_x)^2 + (f_y)^2$ 是一个形式不变量。即若

$$g(u, v) = f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta)$$

则必有 $(f_x)^2 + (f_y)^2 = (g_u)^2 + (g_v)^2$.

解: $g_u = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta, g_v = f_x(-\sin \theta) + f_y \cos \theta \dots\dots\dots 3$

$$(g_u)^2 + (g_v)^2 = [f_x \cos \theta + f_y \sin \theta]^2 + [f_x(-\sin \theta) + f_y \cos \theta]^2$$

$$= f_x^2 + f_y^2 \dots\dots\dots 3$$

3. 设 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v \\ y = e^u - u \cos v \end{cases}$ 求 u_x, v_x

解: $\begin{cases} 1 = e^u u_x + u_x \sin v + u \cos v v_x \\ 0 = e^u u_x - u_x \cos v + u \sin v v_x \end{cases} \dots\dots\dots 3$

$$u_x = \frac{\sin v}{e^u \sin v - e^u \cos v + 1}$$

$$v_x = \frac{\cos v - e^u}{e^u \sin v - e^u \cos v + 1} \frac{1}{u} \dots\dots\dots 3$$

4. 计算积分 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ 其中 D 是由 $x = 0, y = 0, x + y = 1$ 所围成的区域。

解: $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ 采用坐标变换 $\begin{cases} x + y = v \\ x - y = u \end{cases}$, 则原式积分为:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \dots\dots\dots 3$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du = \frac{1}{2} \int_0^1 v(e - e^{-1}) dv = \frac{1}{4}(e - e^{-1}) \dots\dots\dots 3$$

5. 计算积分 $\iiint_V \frac{z^2}{c^2} dx dy dz$, 其中 V 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

$$\text{解: } \iiint_V \frac{z^2}{c^2} dx dy dz = 2 \int_0^c \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{D_z} dx dy \dots\dots\dots 3$$

$$= 2 \int_0^c \frac{z^2}{c^2} \pi ab \left[1 - \frac{z^2}{c^2} \right] dz = 2\pi ab \left[\frac{c}{3} - \frac{c}{5} \right] = \frac{4}{15} \pi abc \dots\dots\dots 3$$

三、解答题 (本题 10 分) 验证积分

$$\int_L (2x + \sin y) dx + (x \cos y) dy$$

与路径无关, 并求原函数 $u(x, y)$ 使得 $du(x, y) = (2x + \sin y) dx + (x \cos y) dy$

解: $P(x, y) = 2x + \sin y, Q(x, y) = x \cos y$, 所以有:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y = \frac{\partial P}{\partial y}$$

所以得出积分与路径无关。.....5

$$(2x + \sin y) dx + (x \cos y) dy = d[x^2 + x \sin y + C]$$

所以, 有 $u(x, y) = x^2 + x \sin y + C$ 。.....5

四、 计算题（本题 10 分）计算积分

$$\oint_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$$

其中S 为 $x = y = z = 0, x = y = z = a$ 六个平面所围成的正方体并取外侧。

解：有高斯公式得到：

$$\begin{aligned} \oint_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy &= \iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dxdydz \dots\dots 3 \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dxdydz = \iiint_V [y+x]dxdydz \dots\dots 2 \\ &= \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (y+x)dz = a \int_0^a dx \int_0^a (y+x)dy = a^4 \dots\dots\dots 5 \end{aligned}$$

五、 解答题（本题 10 分）讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在(0,0)点的可微性。

解：

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 = f_y(0,0) \dots\dots\dots 3$$

又因为：

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \dots\dots 4$$

当 $y = kx$ 时，函数极限为 $\frac{1}{1+k^2}$ ，积分和路径无关，所以函数在(0,0)点不可微.....3

六、 解答题（本题 10 分）已知空间中 n 个点的坐标分别是

$$A_i(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

试求一点，使得它与这 n 个点距离的平方和最小。

解：设目标函数为：

$$L(x,y,z) = \sum_{i=1}^n (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 \dots\dots\dots 4$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{i=1}^n 2(x - x_i) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \sum_{i=1}^n 2(y - y_i) = 0 \dots \dots \dots 4 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \sum_{i=1}^n 2(z - z_i) = 0 \end{cases}$$

得到解为：

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}$$

.....2