中国石油大学（北京）2019-2020-1《数学分析I》期末补考试卷(1)

姓名：庞羽航　学号：2019011819　课程：《数学分析I》　班级：默认班级　提交时间：2020-06-05 17:31　ip：111.196.143.159　成绩：70.0 分

一、 单选题 （题数：15，共 60.0 分）

1、

不定积分$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = $ ( )

学生得分：4.0 分）

A、 $\ln(e^x+1)+C$

B、 $\ln e^x + C$

C、 $(e^x+1)+C$

D、 $e^x + C$

正确答案： A　　　庞羽航的答案：A

2、

当$x \to 0$时， $\arcsin x$是3^x-1的（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 高阶无穷小

B、 等价无穷小

C、 同阶但非等价无穷小

D、 低阶无穷小

正确答案： C　　　庞羽航的答案：A

3、

若$a>0, b>0$,则极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{5}{x}} = $ ( )

学生得分：4.0 分）

A、 e

B、 $(ab)^{5/2}$

C、 $(ab)^{3/2}$

D、 1

正确答案： B　　　　庞羽航的答案：B

4、

若 $f(x)$ 为可导函数，则以下选项中正确的是（　　）

学生得分：4.0 分）

A、 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$

B、 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$

C、 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$

D、 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

正确答案： D　　　　庞羽航的答案：D

5、

$x = 0$是$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$的（）

学生得分：4.0 分）

A、 跳跃间断点

B、 可去间断点

C、 震荡间断点

D、 无穷间断点

正确答案： B　　　　庞羽航的答案：B

6、

当 $x \to 0$时，以下无穷小中与$f(x) = \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}$ 等价的是（）

学生得分：4.0 分）

A、 $1 + \cos x$

B、 $\arcsin x$

C、 $\tan x - \sin x$

D、 $\sqrt{x}$

正确答案： B　　　　庞羽航的答案：B

7、

$f(x)$在$x = x_0$ 处有定义是$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在的（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 必要而非充分条件

B、 充分而非必要条件

C、 充分必要条件

D、 既非充分也非必要条件

正确答案： D　　　　庞羽航的答案：D

8、

若函数 $f(x) = \begin{cases} -3 + \sqrt{x^2 - 1}, & -\infty < x < -1 \\ b, & x = -1 \\ a + \dfrac{\arccos x}{\pi}, & -1 < x \leqslant 1 \end{cases}$ 在 $x = -1$ 处连续，则 $a + b = ()$

学生得分：0.0 分）

A、 -5

B、 -6

C、 -7

D、 -8

正确答案： C　　　　庞羽航的答案：D

9、

设 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$,则$f(x)$ 的一个原函数为（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 $\ln \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$

B、 $2\arctan(2x - 3) + C$

C、 $\ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right| - 3$

D、 $\ln\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right| + 2$

正确答案： C　　　　庞羽航的答案：B

10、

若

$y = y(x)$ 是由参数方程

$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定的隐函数，则

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ()$

学生得分：0.0 分)

A、 $\frac{1}{2t}$

B、 $\frac{1+t^2}{4t}$

C、 $2t$

D、 $2t(1+t^2)$

正确答案： A　　　庞羽航的答案：C

11、

方程$e^y + xy - e = 0$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$为（ ）

学生得分：4.0 分)

A、 $\frac{-y}{e^y + x}$

B、 $\frac{y}{e^y + x}$

C、 $\frac{-y}{e^y - x}$

D、 $\frac{y}{e^y - x}$

正确答案： A　　　庞羽航的答案：A

12、

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+500} = ()$

学生得分：0.0 分)

A、 e

B、 e^{500}

C、 e^{501}

D、 1

正确答案： A　　　　庞羽航的答案：B

13、

极限 $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}) =$ ( )

学生得分：0.0 分）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 4

正确答案： B　　　　庞羽航的答案：D

14、

极限$\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} =$ ( )

学生得分：4.0 分）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 不存在

正确答案： D　　　　庞羽航的答案：D

15、

设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$且$\lim_{x\to x_0}(b_n-a_n)=0$，则（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 $\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，且极限相等

B、 $\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，但极限未必相等

C、 $\{a_n\}$收敛，而$\{b_n\}$发散

D、 $\{a_n\}$和$\{b_n\}$可能都收敛，也可能都发散

正确答案： D　　　　庞羽航的答案：D

二、 论述题 （题数：4，共 40.0 分）

1、

证明$y=\frac{1}{x}$在$(0，1)$上不一致连续。

学生得分：6.0 分）

正确答案

证明：存在$\epsilon_0=\frac{1}{2}$,取$x_n=\frac{1}{n}$, $x_{n+1}=\frac{1}{n+1}$,显然

$|x_n-x_{n+1}|=\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|\to 0(n\to+\infty)---5$分

有：

$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\epsilon_0=\frac{1}{2}---5$分

。

所以，函数$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。

庞羽航的答案

数 学 作 业 纸

班级： 姓名： 编号：

1.解：

1、证明：

设 $y=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$一致连续.

则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 有

$\forall x\in(0,1)$, $x'\in(0,1)$,

$|x-x'|<\delta$.

则有 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right|<\delta$.

若取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则有 $\exists\, n_1, n_2$

有 $\left|\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right|<\delta$,

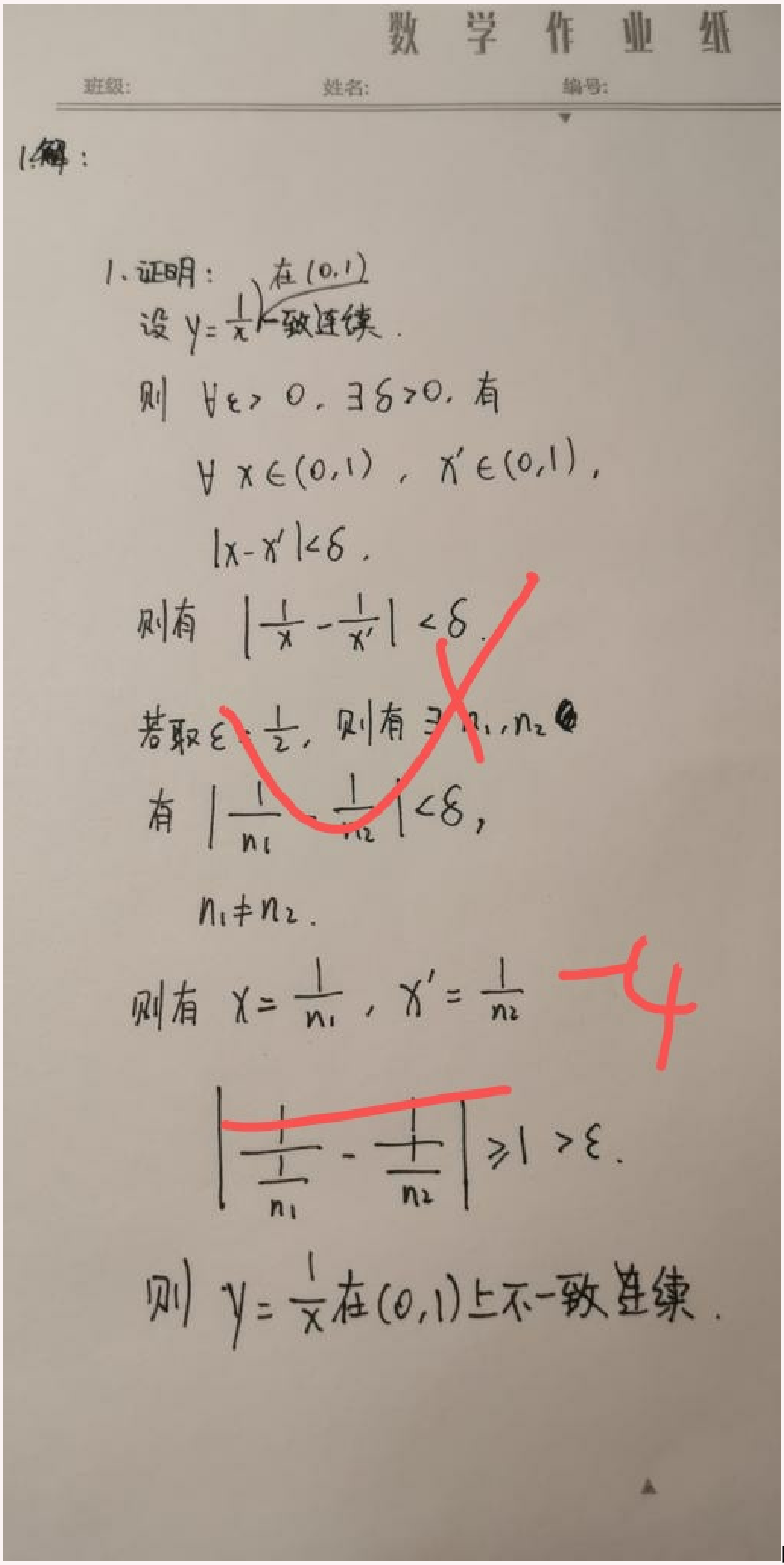
$n_1\neq n_2$.

则有 $x=\frac{1}{n_1}$, $x'=\frac{1}{n_2}$

$$\left|\frac{1}{\frac{1}{n_1}}-\frac{1}{\frac{1}{n_2}}\right|\geq 1>\varepsilon.$$

则 $y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续.

批语


数学作业纸

班级: 姓名: 编号:

1.解:

1、证明:

设 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 一致连续.

则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 有

$\forall x\in(0,1)$, $x'\in(0,1)$,

$|x-x'|<\delta$.

则有 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right|<\delta$.

若取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则有 $\exists n_1, n_2$

有 $\left|\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right|<\delta$,

$n_1\neq n_2$.

则有 $x=\frac{1}{n_1}$, $x'=\frac{1}{n_2}$ -4

$$\left|\frac{1}{\frac{1}{n_1}}-\frac{1}{\frac{1}{n_2}}\right|\geqslant 1>\varepsilon.$$

则 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

回答基本正确

2、

采用单调有界原理证明数列: $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}, \cdots (x_{n+1}=\sqrt{2+x_n})$ 收敛，并求其极限。

学生得分：8.0 分）

正确答案

解：$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}$,所以数列单调，又因为$x_2>x_1$，所以数列单调递增$---4$分

因为$0<x_1<2$,假设$x_n<2$,则有：$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{4}=2$,所以数列有上界2. 根据单调有界原理，数列收敛。$---4$分

假设数列的极限为A,则有：$A=\sqrt{2+A}$,所以有$A=2---2$分

庞羽航的答案

2.解：$x_1=\sqrt{2}<2$.

$x_2=\sqrt{2+x_1}<2$

$x_3=\sqrt{2+x_2}<2$.

$\vdots$

$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<2$.

则可得 x_n 有界.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

则 $x_{n+1}=\sqrt{2+a}=a$.

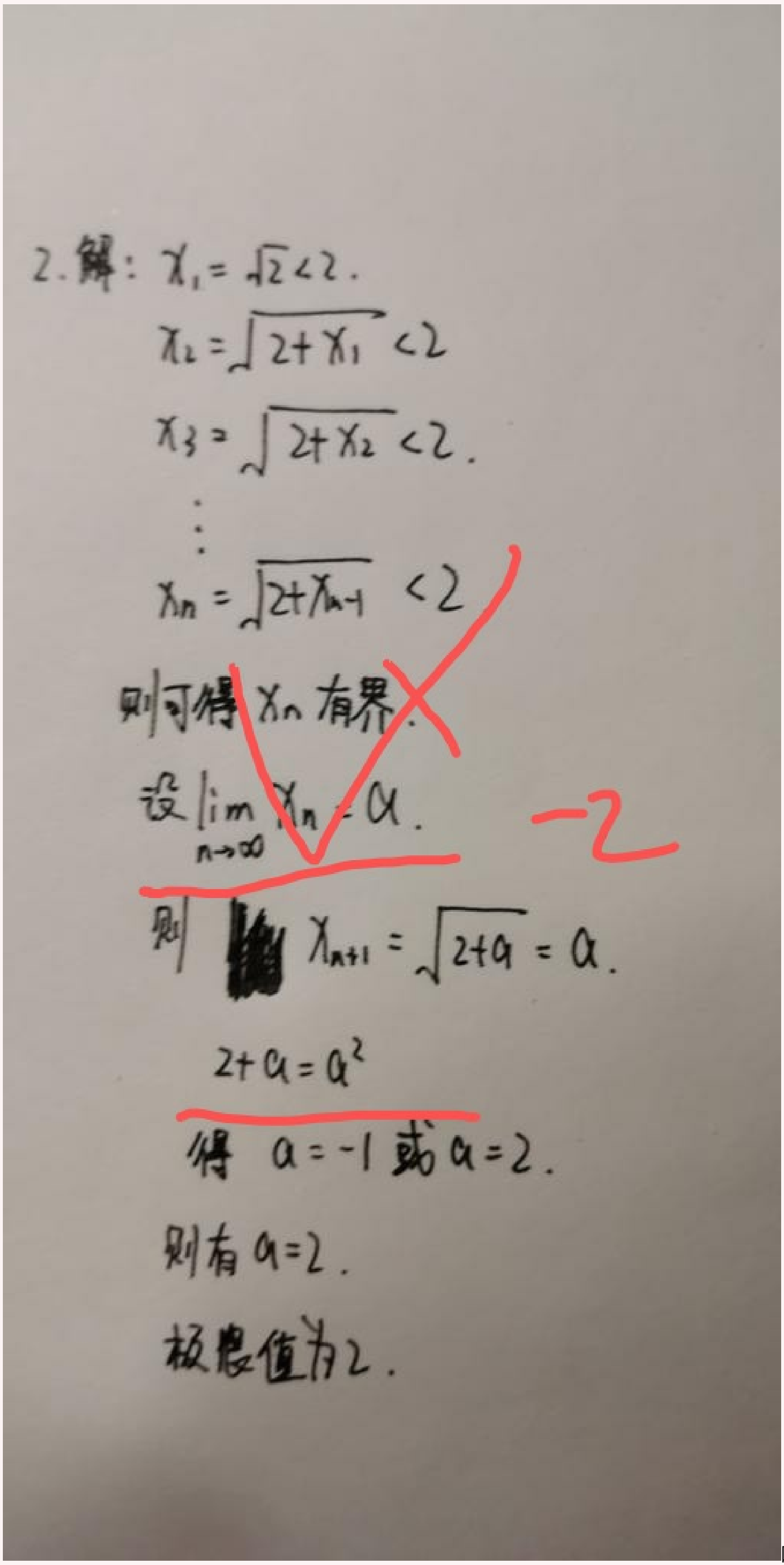
$2+a=a^2$

得 $a=-1$ 或 $a=2$.

则有 $a=2$.

极限值为2.

批语



2.解：$x_1=\sqrt{2}<2$.

$x_2=\sqrt{2+x_1}<2$

$x_3=\sqrt{2+x_2}<2$.

$\vdots$

$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<2$

则可得 x_n 有界.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.　　-2

则 $x_{n+1}=\sqrt{2+a}=a$.

$2+a=a^2$

得 $a=-1$ 或 $a=2$.

则有 $a=2$.

极限值为2.

回答基本正确

3、

求函数$u=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}(x>0,y>0,z>0,a>0)$约束下的极值。

学生得分：10.0 分）

正确答案

解：作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right), ---4 \text{ 分}$$

令，

$$\begin{cases} L_x = yz - \lambda\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \\ L_y = xz - \lambda\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0 --- 3 \text{ 分} \\ L_z = xy - \lambda\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0 \end{cases}$$

解之得到

$$xyz = \frac{\lambda}{3a} \to x = y = z = 3a$$

所以极小值为：$f(3a,3a,3a) = 27a^3 --- 3$ 分

庞羽航的答案

班级: 姓名: 编号:

3.解：

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right),\ \lambda\in R$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz-\frac{\lambda}{x^2}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=xz-\frac{\lambda}{y^2}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=xy-\frac{\lambda}{z^2}=0.$$

则可得 $yzx^2=xz^2y=xzy^2=\lambda$.

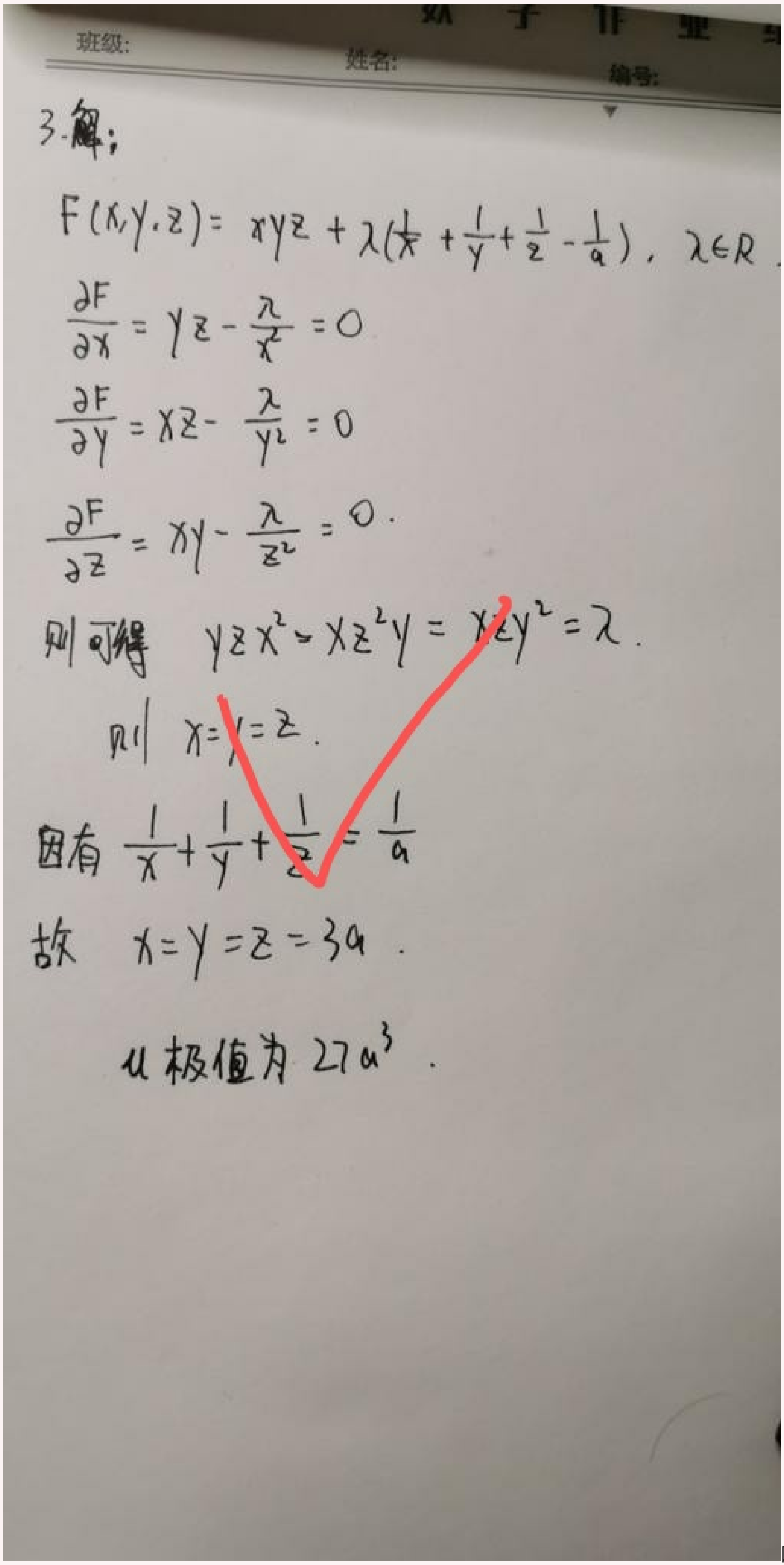
则 $x=y=z$.

因有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$

故 $x=y=z=3a$.

u 极值为 $27a^3$.

批语



班级: 姓名: 编号:

3.解:

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right),\ \lambda\in R.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz-\frac{\lambda}{x^2}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=xz-\frac{\lambda}{y^2}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=xy-\frac{\lambda}{z^2}=0.$$

则可得 $yzx^2=xz^2y=xzy^2=\lambda.$

则 $x=y=z.$

因有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$

故 $x=y=z=3a.$

u 极值为 $27a^3.$

回答正确

4、

设$b>a>0$,证明$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{1}{b}$

学生得分：10.0 分）

正确答案

因为 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=\dfrac{1}{\xi},\xi\in(a,b)---7$分,

所以有,

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}---3\text{分}$$

庞羽航的答案

数学作业纸

班级: 姓名: 编号:

解:

4.证明: 设 $y=\frac{1}{x}$, 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

则 $\int_a^b \frac{1}{x}dx=[\ln x]_a^b=\ln b-\ln a$.

令 $c\in(a,b)$.

则有 $\int_a^b \frac{1}{x}dx=\frac{1}{c}(b-a)$.

$$\frac{1}{c}>\frac{1}{b}.$$

可得 $\ln b-\ln a=\frac{1}{c}(b-a)>\frac{1}{b}(b-a)$

得 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{1}{b}$.

批语

数学作业纸

班级: 姓名: 编号:

解:

~~5.解:~~

4.证明: 设 $y=\frac{1}{x}$, 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

则 $\int_a^b \frac{1}{x}dx=[\ln x]_a^b=\ln b-\ln a$.

令 $c\in(a,b)$.

则有 $\int_a^b \frac{1}{x}dx=\frac{1}{c}(b-a)$.

$\frac{1}{c}>\frac{1}{b}$.

可得 $\ln b-\ln a=\frac{1}{c}(b-a)>\frac{1}{b}(b-a)$

得 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}$.

回答正确