**A 卷**

# 中国石油大学（北京）2017—2018 学年第二学期

# 《数学分析 II》期末考试试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 得分 | | | | | | | |

**（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）**

## 一、 填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right]=$ $\frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}-1\right]$

2. $\int_0^{2\pi}\sin(2x)\sin(3x)\,dx=$ $\underline{0}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=$ $\underline{2}$

4. 设函数$u=\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，它在点$(a,b,c)$的梯度为：$\left(-\frac{2}{a},-\frac{2}{b},\frac{2}{c}\right)$

5. 交换积分$\int_0^2 dx\int_x^{2x}f(x,y)dy$的次序为：$\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)dx$

6. 设$D=\{(x,y)|\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$，则$\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$ $-6\pi^2$

7. 设$L$是半圆周$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases},0\le t\le\pi$。则第一类曲线积分$\int_L x^2+y^2\,ds=$ $\pi a^3$

8. 设$L$是圆周$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases},0\le t\le 2\pi$，方向为逆时针方向。则第二类曲线积分

   $\oint_L xdy-ydx=$ $2\pi a^2$

9. 设 S为平面$x+y+z=1$在第一象限中的部分，则第一类曲面积分

   $\iint_S x+y+z\,dS=$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 设 S为平面$x+y+z=1$在第一象限中的部分，方向为上侧。则第二类曲面积分

    $\iint_S x+y+z\,dxdy=$ $\frac{1}{2}$

## 二、 解答题（每题 6 分，共 30 分）

1. 求$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$，其中$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & x\ge 0,\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0.\end{cases}$

   解：$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$……………………….3

$$=\int_{-1}^0\frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=1+\ln 2-\ln 2+\ln(1+e^{-1})=1+\ln(1+e^{-1})\text{………3}$$

2. 设$f(x,y)$可微，证明：在坐标变换

$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,\ y=u\sin\theta+v\cos\theta$$

   下，$(f_x)^2+(f_y)^2$是一个形式不变量。即若

$$g(u,v)=f(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta)$$

   则必有$(f_x)^2+(f_y)^2=(g_u)^2+(g_v)^2$.

解：$g_u = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta\,, g_v = f_x(-\sin\theta) + f_y \cos\theta$……………………………3

$$(g_u)^2 + (g_v)^2 = \left[f_x \cos\theta + f_y \sin\theta\right]^2 + \left[f_x(-\sin\theta) + f_y \cos\theta\right]^2$$

$$= f_x^2 + f_y^2 \text{……………………………………………3}$$

3. 设$\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$求$u_x, v_x$

解：$\begin{cases} 1 = e^u u_x + u_x \sin v + u\cos v\, v_x \\ 0 = e^u u_x - u_x \cos v + u \sin v\, v_x \end{cases}$ ………3

$$u_x = \frac{\sin v}{e^u \sin v - e^u \cos v + 1}$$

$$v_x = \frac{\cos v - e^u}{e^u \sin v - e^u \cos v + 1}\frac{1}{u} \text{………3}$$

4. 计算积分$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$其中$D$是由$x = 0, y = 0, x + y = 1$所围成的区域。

解：$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$采用坐标变换$\begin{cases} x + y = v \\ x - y = u \end{cases}$，则原式积分为：

$$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du \text{………3}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du = \frac{1}{2}\int_0^1 v(e - e^{-1})dv = \frac{1}{4}(e - e^{-1}) \text{………3}$$

5. 计算积分$\iiint_V \frac{z^2}{c^2}dxdydz$，其中V为$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$

解：$\iiint_V \frac{z^2}{c^2}dxdydz = \int_0^c \frac{z^2}{c^2}dz \iint_{D_z} dxdy$ ………3

$$= \int_0^c \frac{z^2}{c^2}\pi ab\left[1 - \frac{z^2}{c^2}\right]dz = \pi ab\left[\frac{c}{3} - \frac{c}{5}\right] = \frac{2}{15}\pi abc \text{…………3}$$

三、　解答题（本题 10 分）验证积分

$$\int\limits_L (2x + \sin y)dx + (x\cos y)dy$$

与路径无关，并求原函数$u(x,y)$使得$du(x,y) = (2x + \sin y)dx + (x\cos y)dy$

解：$P(x,y) = 2x + \sin y\,, Q(x,y) = x\cos y$，所以有：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y = \frac{\partial P}{\partial y}$$

所以得出积分与路径无关。……………………5

$$(2x + \sin y)dx + (x\cos y)dy = d[x^2 + x\sin y + C]$$

所以，有$u(x,y) = x^2 + x\sin y + C$。…………5

四、　　计算题（本题 10 分）计算积分

$$\oiint_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$$

其中S 为$x=y=z=0, x=y=z=a$六个平面所围成的正方体并取外侧。

解：有高斯公式得到：

$$\oiint_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy = \iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]dxdydz \ldots\ldots 3$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]dxdydz = \iiint_V [y+x]dxdydz \ldots\ldots 2$$

$$= \int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (y+x)dz = a\int_0^a dx\int_0^a (y+x)dy = a^4 \ldots\ldots\ldots 5$$

五、　　解答题（本题 10 分）讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)点的可微性。

解：

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=f_y(0,0)\ldots\ldots\ldots 3$$

又因为：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\ldots 4$$

当$y=kx$时，函数极限为$\frac{1}{1+k^2}$，积分和路径无关，所以函数在(0,0)点不可微……3

六、　　解答题（本题 10 分）已知空间中 n 个点的坐标分别是

$$A_i(x_i,y_i,z_i),\qquad i=1,2,\cdots n$$

试求一点，使得它与这 n 个点距离的平方和最小。

解：设目标函数为：

$$L(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\ldots\ldots\ldots 4$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} 2(x - x_i) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} 2(y - y_i) = 0 \dots \dots \dots 4 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n} 2(z - z_i) = 0 \end{cases}$$

得到解为：

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$
$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$$

………………..2