

中国石油大学(北京)

《数学分析》2017-2018-1  
期中考试题

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

班级\_\_\_\_\_

姓名\_\_\_\_\_

学号\_\_\_\_\_

## I 填空题(每题3分,共15分)

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$  的定义描述为\_\_\_\_\_。
- (2) 设  $f(x)$  在 0 点可导, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h) - f(0)}{h^2} =$ \_\_\_\_\_。
- (3) 函数  $y = \text{sgn}(\sin x)$  的间断点为\_\_\_\_\_。
- (4) 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_。
- (5) 若函数  $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{-x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

## II 选择题(每题3分,共15分)

- (1) 设  $f(x)$  在  $x = a$  处连续,  $\psi(x)$  在  $x = a$  处间断, 又  $f(a) \neq 0$ , 则( )
- (A)  $\psi[f(x)]$  在  $x = a$  处间断. (B)  $f[\psi(x)]$  在  $x = a$  处间断.
- (C)  $\psi^2(x)$  在  $x = a$  处间断. (D)  $\frac{\psi(x)}{f(x)}$  在  $x = a$  处间断.
- (2) 当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$  是  $\frac{1}{n}$  的( )
- (A) 高阶无穷小. (B) 低阶无穷小.
- (C) 等价无穷小. (D) 同阶但非等价无穷小.
- (3) 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n = 0$ , 则下列正确的是( )
- (A) 若  $x_n$  发散, 则  $y_n$  必收敛. (B) 若  $x_n$  无界, 则  $y_n$  必有界.
- (C) 若  $x_n$  有界, 则  $y_n$  必为无穷小. (D) 若  $x_n$  无穷大, 则  $y_n$  必为无穷小.

(4) 设函数 $y = f(x)$ 可微, 且曲线 $f'(x) \neq 0$ , 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{dy} = ( \quad )$

- (A) 0.            (B) 1.            (C) -1.            (D) 不存在.

(5) 设 $f'(a) > 0$ , 则 $\exists \delta > 0$ 有(    )

(A)  $f(x) \geq f(a), \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$ .

(B)  $f(x) \leq f(a), \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$ .

(C)  $f(x) > f(a), \forall x \in (a, a + \delta); f(x) < f(a), \forall x \in (a - \delta, a)$ .

(D)  $f(x) < f(a), \forall x \in (a, a + \delta); f(x) > f(a), \forall x \in (a - \delta, a)$ .

### III 计算题(每题5分,共30分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$

2. 设 $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}, x_1 = \sqrt{2}$ , 证明该数列收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

3. 设  $y = f(x + y)$ , 其中  $f$  具有二阶导数, 且  $f' \neq 1$ , 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$

4. 设  $y = \sin^2 x$ , 求  $y^{(n)}$

5. 设  $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = \arctan(t) \end{cases}$ , 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$

6. 利用微分计算 $\sin 30^\circ 30'$  ( $30' = \frac{\pi}{360} \approx 0.0087$ )的近似值。

#### IV 证明题(本题10分)

设函数 $f(x)$ :

1. 在 $[x_0, x_n]$ 有定义且有连续的 $n - 1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}(x)$ ;
2. 在区间 $(x_0, x_n)$ 内具有 $n$ 阶导数;
3.  $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ .

证明: 在 $(x_0, x_n)$ 内至少有一 $\xi \in (x_0, x_n)$ ,使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$ .

## V 论述题(每小题5分, 共10分)

1. 指出函数  $\frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right]$  的间断点, 并指出其类型。

2. 求函数  $y = \sqrt{1 - \cos x}$  在不可导点处的 左右导数。

## VI 证明题(本题10分)

证明 $\sin \frac{1}{x}$  在 $(0, 1)$  上不一致连续, 但在 $(a, 1)(a > 0)$ 上一致连续。

## VII 计算题(每小题5分, 共10分)

1. 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}) = 2$ , 求 $a, b$ 之值。

2. 已知 $y = a^x + x^a + x^x, a > 0$ , 求 $\frac{dy}{dx}$