中国石油大学（北京）2019-2020-1《数学分析I》期末补考试卷(1)

姓名：余佳涵　学号：2019011816　课程：《数学分析I》　班级：默认班级　提交时间：2020-06-05 17:22　ip：27.187.79.234　成绩：60.0分

一、单选题（题数：15，共 60.0 分）

1、

不定积分 $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx =$ ( )

学生得分：4.0 分）

A、 $\ln(e^x+1)+C$

B、 $\ln e^x + C$

C、 $(e^x+1)+C$

D、 $e^x + C$

正确答案： A　　余佳涵的答案：A

2、

当 $x\to 0$ 时， $\arcsin x$ 是 3^x-1 的（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 高阶无穷小

B、 等价无穷小

C、 同阶但非等价无穷小

D、 低阶无穷小

正确答案： C　　余佳涵的答案：C

3、

若 $a>0, b>0$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{5}{x}} =$ ( )

学生得分：0.0 分）

A、 e

B、 $(ab)^{5/2}$

C、 $(ab)^{3/2}$

D、 1

正确答案： B　　　余佳涵的答案：D

4、

若 $f(x)$ 为可导函数，则以下选项中正确的是（　　）

学生得分：0.0 分）

A、 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$

B、 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$

C、 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$

D、 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

正确答案： D　　　余佳涵的答案：C

5、

$x = 0$是$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$的（）

学生得分：0.0 分）

A、 跳跃间断点

B、 可去间断点

C、 震荡间断点

D、 无穷间断点

正确答案： B　　　余佳涵的答案：D

6、

当 $x \to 0$时，以下无穷小中与$f(x) = \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}$ 等价的是（）

学生得分：4.0 分）

A、 $1 + \cos x$

B、 $\arcsin x$

C、 $\tan x - \sin x$

D、 $\sqrt{x}$

正确答案： B　　余佳涵的答案：B

7、

$f(x)$在$x = x_0$ 处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 必要而非充分条件

B、 充分而非必要条件

C、 充分必要条件

D、 既非充分也非必要条件

正确答案： D　　余佳涵的答案：A

8、

若函数 $f(x)=\begin{cases} -3+\sqrt{x^2-1}, & -\infty < x < -1 \\ b, & x=-1 \\ a+\dfrac{\arccos x}{\pi}, & -1 < x \leqslant 1 \end{cases}$ 在 $x=-1$ 处连续，则 $a+b=()$

学生得分：0.0 分）

A、 -5

B、 -6

C、 -7

D、 -8

正确答案： C　　余佳涵的答案：B

9、

设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$，则$f(x)$ 的一个原函数为（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 $\ln\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

B、 $2\arctan(2x-3)+C$

C、 $\ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|-3$

D、 $\ln\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|+2$

正确答案： C　　余佳涵的答案：C

10、

若

$y=y(x)$ 是由参数方程

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定的隐函数，则

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=()$

学生得分：0.0 分）

A、 $\frac{1}{2t}$

B、 $\frac{1+t^2}{4t}$

C、 $2t$

D、 $2t(1+t^2)$

正确答案： A 余佳涵的答案：D

11、

方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$为（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 $\frac{-y}{e^y+x}$

B、 $\frac{y}{e^y+x}$

C、 $\frac{-y}{e^y-x}$

D、 $\frac{y}{e^y-x}$

正确答案： A 余佳涵的答案：B

12、

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+500}=()$

学生得分：4.0 分）

A、 e

B、 e^{500}

C、 e^{501}

D、 1

正确答案： A　　　余佳涵的答案：A

13、

极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})=(\ )$

学生得分：0.0 分）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 4

正确答案： B　　　余佳涵的答案：A

14、

极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=(\ )$

学生得分：4.0 分）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 不存在

正确答案： D　　　余佳涵的答案：D

15、

设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$且$\lim\limits_{x\to x_0}(b_n-a_n)=0$，则（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 $\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，且极限相等

B、 $\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，但极限未必相等

C、 $\{a_n\}$收敛，而$\{b_n\}$发散

D、 $\{a_n\}$和$\{b_n\}$可能都收敛，也可能都发散

正确答案： D　　　余佳涵的答案：B

二、 **论述题 （题数：4，共 40.0 分）**

1、

证明$y=\frac{1}{x}$在$(0,\ 1)$上不一致连续。

学生得分：8.0 分）

正确答案

证明：存在$\epsilon_0=\frac{1}{2}$,取$x_n=\frac{1}{n}$, $x_{n+1}=\frac{1}{n+1}$,虽然

$|x_n-x_{n+1}|=\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|\to 0(n\to+\infty)---5$分

有：

$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\epsilon_0=\frac{1}{2}---5$分

。

所以，函数$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。

余佳涵的答案

解：$\because y=\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$

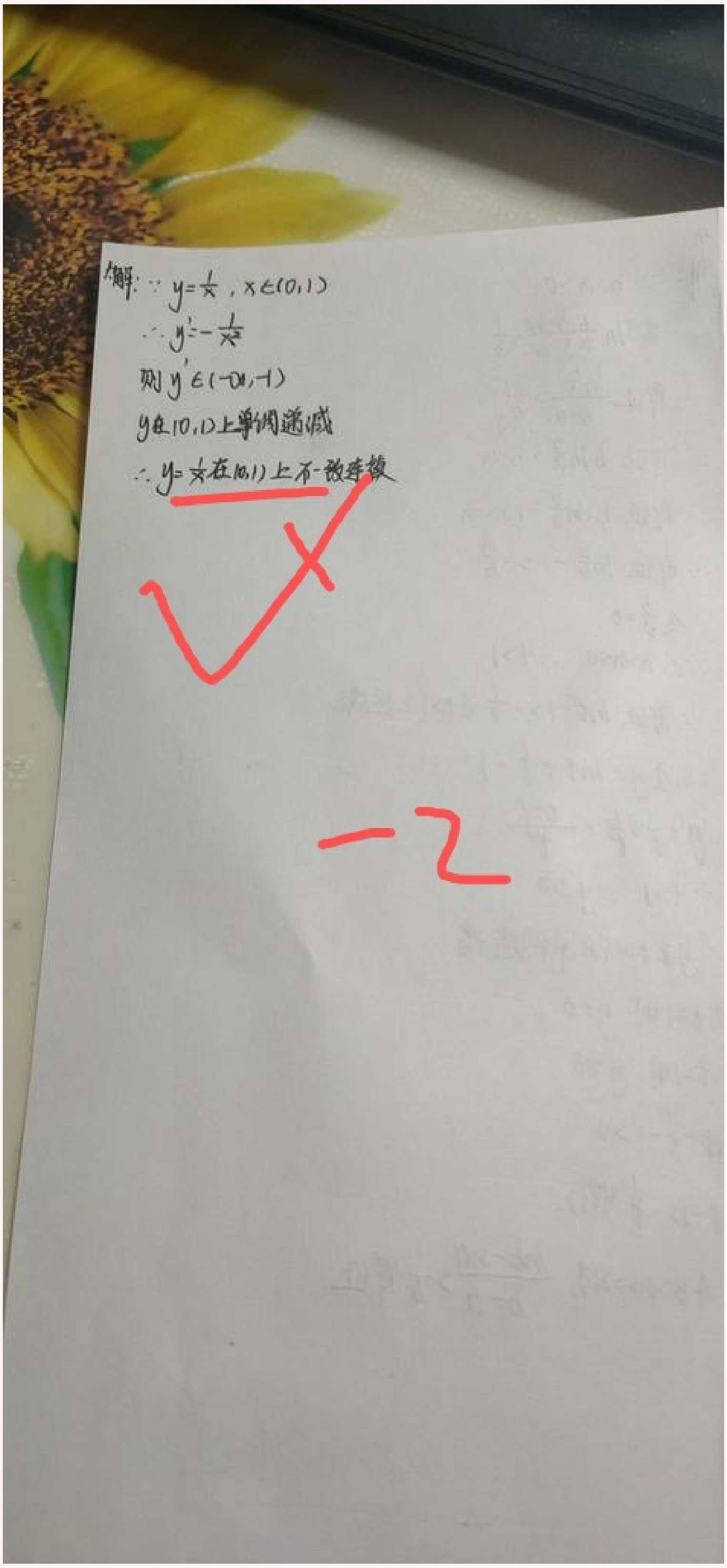
$\therefore y'=-\frac{1}{x^2}$

则 $y'\in(-\infty,-1)$

y在$(0,1)$上单调递减

$\therefore y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续

批语



解：∵ $y=\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$

∴ $y'=-\frac{1}{x^2}$

则 $y'\in(-\infty,-1)$

y在$(0,1)$上单调递减

∴ $y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续

-2

2、

采用单调有界原理证明数列：$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\cdots(x_{n+1}=\sqrt{2+x_n})$ 收敛，并求其极限。

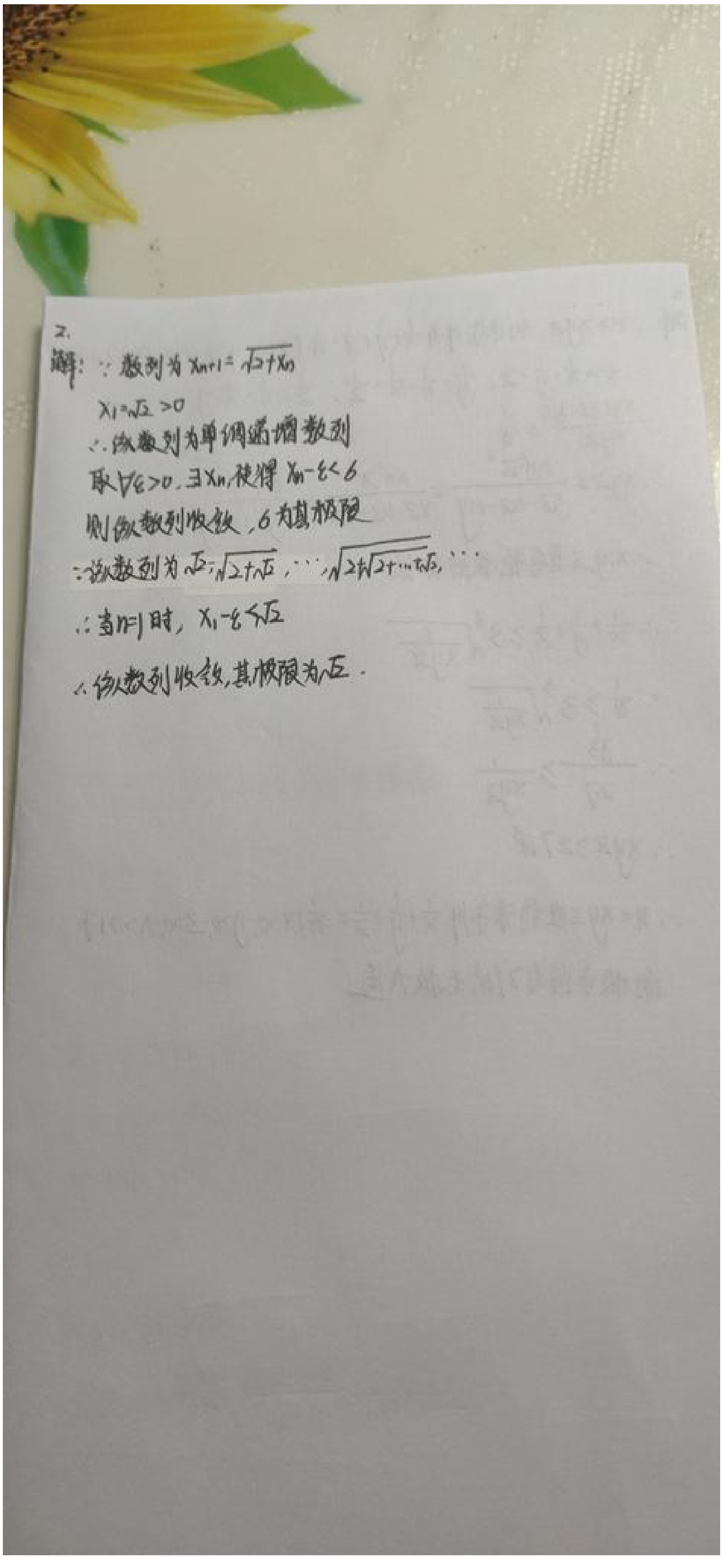
学生得分：8.0 分）

正确答案

解：$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}$,所以数列单调，又因为$x_2>x_1$，所以数列单调递增$---4$分

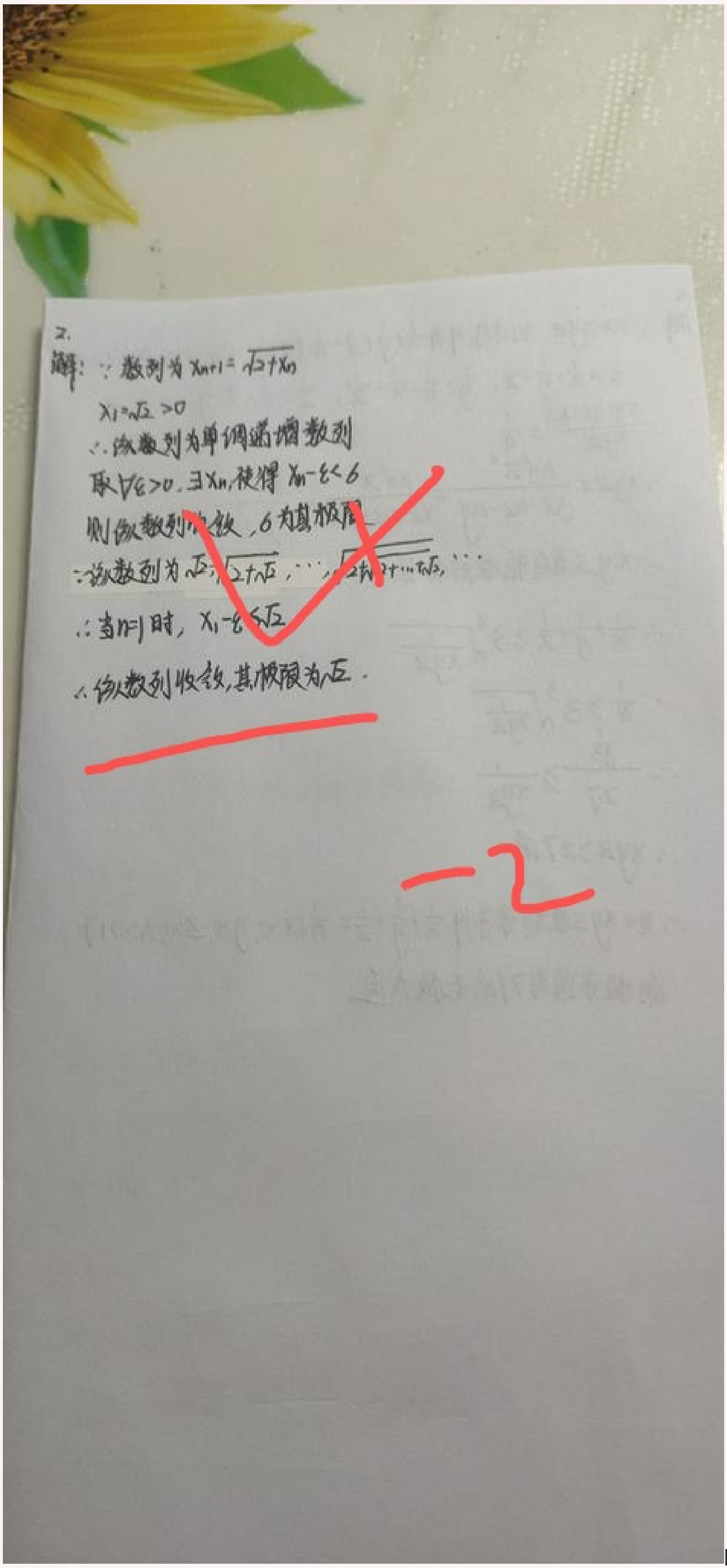
因为$0<x_1<2$,假设$x_n<2$,则有：$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{4}=2$,所以数列有上界2. 根据单调有界原理，数列收敛。$---4$分
假设数列的极限为A,则有：$A=\sqrt{2+A}$,所以有$A=2---2$分

余佳涵的答案



2.
解：$\because$ 数列为 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$
$x_1=\sqrt{2}>0$
$\therefore$ 该数列为单调递增数列
取 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_n$，使得 $x_n-\varepsilon<6$
则该数列收敛，6为其极限
$\because$ 该数列为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\cdots$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，$\cdots$
$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$x_1-\varepsilon<\sqrt{2}$
$\therefore$ 该数列收敛，其极限为 $\sqrt{2}$.

批语



2.

解：∵数列为 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$

$x_1=\sqrt{2}>0$

∴该数列为单调递增数列

取 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_n$，使得 $x_n-\varepsilon<6$

则该数列收敛，6为其极限

∴该数列为 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\cdots$

∴当 $n=1$ 时，$x_1-\varepsilon<\sqrt{2}$

∴该数列收敛，其极限为 $\sqrt{2}$.

-2

回答基本正确

3、

求函数 $u=xyz$ 在条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}(x>0,y>0,z>0,a>0)$ 约束下的极值。

学生得分：10.0 分）

正确答案

解：作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right),---4\text{ 分}$$

令，

$$\begin{cases}L_x=yz-\lambda\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0\\ L_y=xz-\lambda\left(\dfrac{1}{y^2}\right)=0---3\text{ 分}\\ L_z=xy-\lambda\left(\dfrac{1}{z^2}\right)=0\end{cases}$$

解之得到

$$xyz=\frac{\lambda}{3a}\to x=y=z=3a$$

所以极小值为：$f(3a,3a,3a)=27a^3---3$ 分

余佳涵的答案

3.

解. $\because u=xyz$，约束条件为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x>0, y>0, z>0, a>0)$

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{a}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}$，$\frac{1}{z}=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$

$\therefore \frac{xy+xz+yz}{xyz}=\frac{1}{a}$

$\therefore xyz=\frac{ay^2z^2}{yz-az-ay}=\frac{ax^2z^2}{xz-az-ax}=\frac{ax^2y^2}{xy-ax-ay}$

$\therefore x, y, z$ 具有轮换对称性

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

$\therefore \frac{1}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

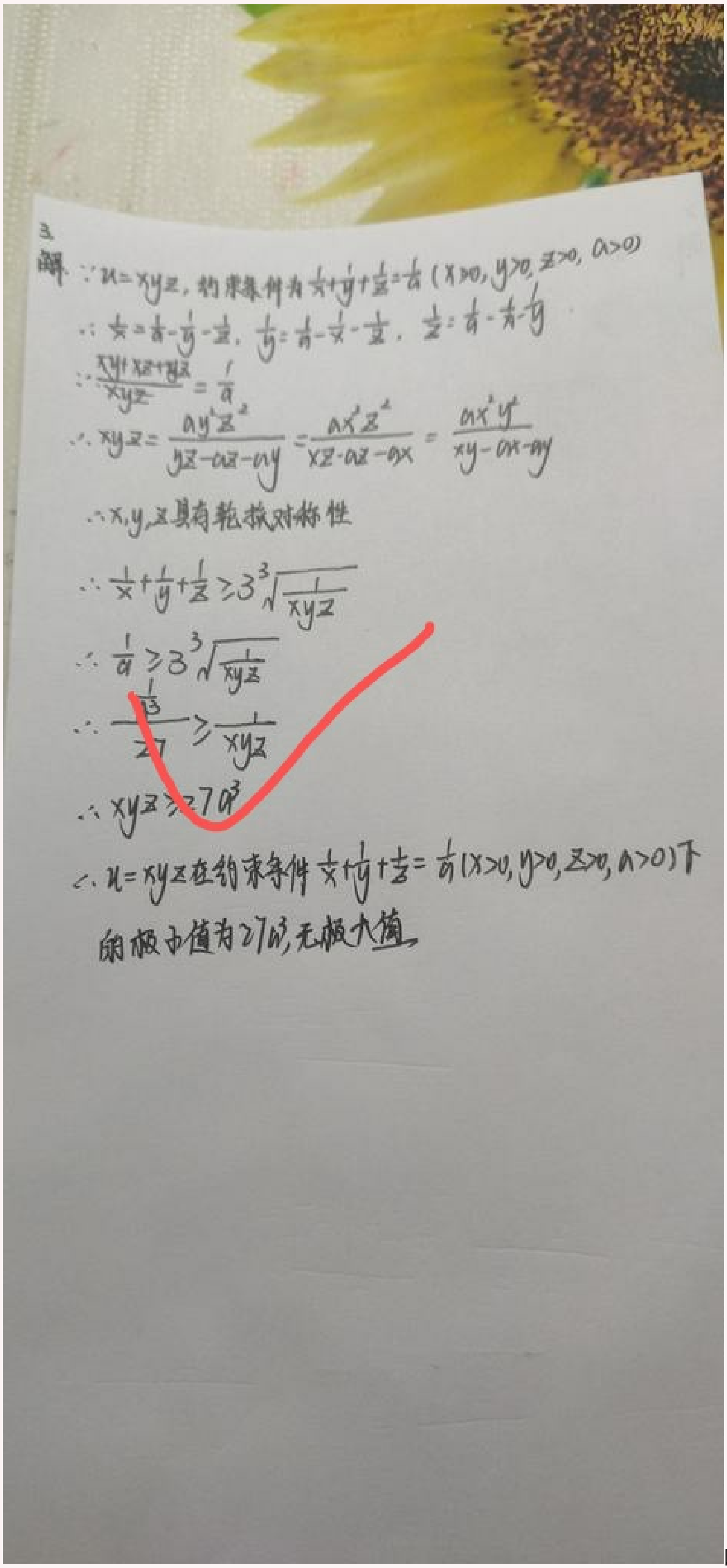
$\therefore \frac{\frac{1}{a^3}}{27}\geq\frac{1}{xyz}$

$\therefore xyz\geq 27a^3$

$\therefore u=xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x>0, y>0, z>0, a>0)$ 下

的极小值为 $27a^3$，无极大值

批语


3.

解. ∵ $u=xyz$，约束条件为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x>0, y>0, z>0, a>0)$

∴ $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}$，$\frac{1}{z}=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$

∵ $\frac{xy+xz+yz}{xyz}=\frac{1}{a}$

∴ $xyz=\frac{ay^2z^2}{yz-az-ay}=\frac{ax^2z^2}{xz-az-ax}=\frac{ax^2y^2}{xy-ax-ay}$

∴ x,y,z 具有轮换对称性

∴ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

∴ $\frac{1}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

∴ $\frac{\frac{1}{a^3}}{27}\geq\frac{1}{xyz}$

∴ $xyz\geq 27a^3$

∴ $u=xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x>0, y>0, z>0, a>0)$ 下的极小值为 $27a^3$，无极大值

回答正确

4、

设 $b>a>0$，证明 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}$

学生得分：10.0 分）

正确答案

因为 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=\dfrac{1}{\xi},\xi\in(a,b)---7$分，

所以有，

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}---3\text{分}$$

余佳涵的答案

4.

解：$\because b>a>0$

若要证 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{1}{b}$

即证 $\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}>\dfrac{1}{b}$

即证 $b\ln\frac{b}{a}>b-a$

即证 $b(\ln\frac{b}{a}-1)>-a$

即证 $\ln\frac{b}{a}-1>-\frac{a}{b}$

令 $\frac{b}{a}=t$，

$\because b>a>0$，$\therefore t>1$

$\therefore$即证 $\ln t-1>-\frac{1}{t}$ 在 $t>1$ 上恒成立

$\therefore$令 $y=\ln t+\frac{1}{t}-1$

$y'=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$

$\because t>1$ $\therefore y'>0$

$\therefore y$ 在 $t>1$ 上单调递增

当 $t=1$ 时，$y=0$

$\therefore t>1$ 时，$y>0$

$\ln t+\frac{1}{t}-1>0$

$\ln t-1>-\frac{1}{t}$ 得证

$\therefore$当 $b>a>0$ 时，$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{1}{b}$ 得证

批语

4.

解：$\because b>a>0$

若要证 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}$

即证 $\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}>\frac{1}{b}$

即证 $b\ln\frac{b}{a}>b-a$

即证 $b(\ln\frac{b}{a}-1)>-a$

即证 $\ln\frac{b}{a}-1>-\frac{a}{b}$

令 $\frac{b}{a}=t$.

$\because b>a>0$，$\therefore t>1$

$\therefore$ 即证 $\ln t-1>-\frac{1}{t}$ 在 $t>1$ 上恒成立

$\therefore$ 令 $y=\ln t+\frac{1}{t}-1$

$y'=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$

$\because t>1$ $\therefore y'>0$

$\therefore y$ 在 $t>1$ 上单调递增

当 $t=1$ 时，$y=0$

$\therefore t>1$ 时，$y>0$

$\ln t+\frac{1}{t}-1>0$

$\ln t-1>-\frac{1}{t}$ 得证

$\therefore$ 当 $b>a>0$ 时，$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}$ 得证

回答正确