The Differential of a Function of Several Variables

Guoning Wu

March 26, 2020

1 偏導數與全微分

1.1 偏導數

Definition 1.1. 設$D \subset \mathbb{R}^2, f :\mapsto \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in D$。如果極限

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta x}$$

存在，那麼稱函數$f(x, y)$再(x_0, y_0)關於x可偏導，並稱此極限為$f(x, y)$在點(x_0, y_0)關於x的偏導數，記為：

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

如果函數f在D上的每一點關於x可偏導，則它稱為f關於x的偏導函數記為

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$$

.

Examples 1. 設$f(x, y) = x^4 + 2x^y + y^4$,求$f_x(x, y), f_y(x, y), f_x(0, 1), f_y(0, 1)$

Examples 2. 設$f(x, y, z) = \ln(x + y^2 + z^3)$,求$f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)$

Examples 3. 設

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

求$f_x(0, 0), f_y(0, 0)$.

1.2 方向導數

Definition 1.2. 設$D \subset \mathbb{R}^2, f :\mapsto \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in D$。如果極限

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

存在，那麼稱函數$f(x, y)$在(x_0, y_0)沿方向$v(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 的方向導數，記為

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0).$$

Remark. 偏導數存在的充分必要條件為沿著x軸的正向和反向的方向導數存在，且為相反數。

Examples 4. 求函數$f(x, y) = |x^2 - y^2|$在$(0, 0)$點的方向導數。

1.3 全微分

Definition 1.3. 設$D \subset \mathbb{R}^2, f :\mapsto \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in D$。如果

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

,則稱函數f在(x_0, y_0)點可微，稱$A\Delta x + B\Delta y$ 為f在(x_0, y_0)點處的全微分，記為

$$df(x_0, y_0) = Adx + Bdy$$

Examples 5. 求函數$z = e^{xy}$在點$(2, 1)$處的全微分。

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)t\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)t\sin\alpha + o(t)}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\alpha$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Examples 6. 求函數$u = x - \cos\frac{y}{2} + \arctan\frac{z}{y}$的全微分。

一個函數即使在某一點連續，且所有方向的方向導數存在，也不一定在該點可微。

Examples 7.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{x^2+y^4}, x^2+y^2 \neq 0 \\ \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Theorem 1.1. 設函數$f(x,y)$在(x_0,y_0)點的某鄰域上存在連續偏導數，則函數在(x_0,y_0)點可微分。

1.3.1 切平面與法向量

曲面$z = f(x,y)$在點(x_0,y_0)點的切平面和法線方程為：

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

1.3.2 誤差：Errors

對於一個二元函數$z = f(x,y)$,如果自變量x,y的絕對誤差限為δ_x,δ_y 即有

$$|\Delta x| \leq \delta_x, |\Delta y| \leq \delta_y$$

那麼

$$|\Delta z| \approx |\mathrm{d}z| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \leq \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \leq \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y$$

從而有z的絕對誤差限為：

$$\delta_z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y$$

相對誤差限為：

$$\delta_z/z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}/z\right|\delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}/z\right|\delta_y$$

1.4 梯度: Gradient

Definition 1.4. 稱向量$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ 為函數$z = f(x, y)$ 在(x_0, y_0)點的梯度，記為：

$$\boldsymbol{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

有以下基本性質

1. Suppose $f \equiv C, \nabla f = 0$
2. $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
3. $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$
4. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}, g \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f \cdot v$$

Examples 8. 設$z = x^2 - xy + y^2$求它在$(1, 1)$處的沿著$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 的方向導數，並指出：

1. 沿著那個方向的方向導數最大？

2. 沿著那個方向的方向導數最小？

3. 沿著那個方向的方向導數零？

2 多元復合函數求導法則

Theorem 2.1. 設g在(u_0, v_0)點可導，即$x = x(u, v), y = y(u, v)$在(u_0, v_0)點可偏導，記$x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0)$, 如果$f$在$(x_0, y_0)$點可微，那麼

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(y_0)g'(x_0)$$

Examples 9. 設$z=\arctan(xy), y=e^x$求，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$

Examples 10. 設$z=\dfrac{x^2}{y}, x=u-2v, y=2u+v$求，$\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$

Examples 11. 設$w=f(x^2+y^2+z^2,xyz)$,f具有連續的二階偏導數，求$\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}$

Examples 12. 已知$u=u(x,y)$為可微函數，試求$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$在極坐標下的表達式。

Examples 13. 設向量值函數$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$的表示為$\begin{cases} x=\cos u\sin v\\ y=\sin u\cos u\end{cases}$,且$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$的表示為$\begin{cases} u=s+t\\ v=s-t\end{cases}$求復合函數的導數。

2.1 一階微分的形式不變性

Examples 14. 設$z=\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}$求$\mathrm{d}z$

Examples 15. 設$z=\ln(x+y)$求$\mathrm{d}^k z$

3 中值定理與泰勒公式

3.1 高階導數

Examples 16. 求函數$z=e^{x+2y}$的所有二階偏導數和$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$

Examples 17. 設$z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Examples 18. 設

$$f(x)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ \\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

討論混合偏導數$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

Examples 19. 求函數$z = \arctan\dfrac{y}{x}$所有二階偏導數。

Examples 20. 混合偏導數是否相等？考察函數在$(0,0)$ 點的二階偏導數的連續性。

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Theorem 3.1. 若$f_{xy}(x_0,y_0), f_{yx}(x_0,y_0)$都在$(x_0,y_0)$點連續，則：

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

Examples 21. 設$z = f(x,y), x = \varphi(s,t), y = \psi(s,t)$ ，其中f,φ,ψ具有連續的二階導數，計算

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Examples 22. 設$z = f(x, \dfrac{x}{y})$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Examples 23. 設$z = (x^2+y^2)e^{x+y}$，計算$\dfrac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}$

3.2 高階微分

可以證明

$$\mathrm{d}^k z = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k z$$

$$\mathrm{d}^k u = \left(\mathrm{d}x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k z$$

3.3 向量值函數的導數

Suppose $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ is differential, and denotes the matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{m\times n}$$

as the derivative of the function.

Examples 24. 求函數

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 + ze^y \\ y^3 + z\ln x \end{pmatrix}$$

在$(1,1,1)$點的導數。

3.4 中值定理和泰勞公式

Definition 3.1. 設$D \subset \mathbb{R}^n$是區域。若連結D中的任意兩點的線段都完全屬於D，即對於任意兩點$x_0, x_1 \in D$和一切$\lambda \in [0,1]$，恆有

$$x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \in D$$

D凸區域。

Theorem 3.2. 設二元函數$f(x,y)$在凸區域$D \subset \mathbb{R}^2$上可微，則對於D內的任意兩點(x_0, y_0)和$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$，至少存在一個$\theta(0 < \theta < 1)$使得，

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ & = f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta_y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta_y)\Delta y \end{aligned}$$

Corollary 3.3. 如果函數$f(x,y)$在區域$D \subset \mathbb{R}^2$上的偏導數恆為零，那麼它在D上必是常值函數。

Examples 25. 設$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上可微。$\mathbf{l_i}, i = 1, 2$是兩個線性無關的單位向量，若

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l_i}}(x,y) = 0$$

證明：在$\mathbb{R}^2$上函數$f(x,y) \equiv C$

Theorem 3.4. 設函數$f(x,y)$在點(x_0, y_0)的鄰域$U = O((x_0, y_0), r)$具有$n+1$階連續的偏導數，那麼對於U內的每一點$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$有

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \\ & f(x_0, y_0) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + +\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) \\ & + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + +\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_n. \end{aligned}$$

其中，

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), (0 < \theta < 1)$$

Examples 26. 求$f(x,y) = x^y$在點$(1,4)$的泰勒公式*(*到二階為止*)*，並用它計算$(1.08)^{3.96}$

3.5 極值問題

Theorem 3.5. 若函數$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$點存在偏導數，且在P_0點取得極值，則有

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0.$$

黑賽Hesse矩陣

$$H_f(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Theorem 3.6. 設二元函數$f(x,y)$在點$P_0(x_0,y_0)$的某鄰域内$U(P_0)$上具有二階連續的偏導數，且P_0點是f的穩定點。則當$H_f(P_0)$是正定矩陣時，$f(x,y)$在點P_0取得極小值；當$H_f(P_0)$是負定矩陣時，$f(x,y)$ 在點P_0取得極大值；則當$H_f(P_0)$是不定矩陣時，$f(x,y)$ 在點P_0不取極值。

Examples 27. 求$f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$的極值。

Examples 28. 討論$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$在原點是否取得極值。

Examples 29. 設通過觀測點或者實驗得到點集合$(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n.$ 它們大體在一條直線上，採用最小二乘原理求直線合。

4 隱函數

4.1 單個方程

Theorem 4.1. 若函數$F(x,y)$滿足以下條件：

1. F在以$P_0(x_0,y_0)$為内點的某一區域$D\subset\mathbb{R}^2$上連續；
2. $F(x_0,y_0)=0$；
3. F在D内具有連續的偏導數$F_x(x,y),F_y(x,y)$；
4. $F_y(x_0,y_0)\neq 0.$

則

1. 存在P_0的某一鄰域$U(P_0)\subset D$，在$U(P_0)$上方程$F(x,y)=0$唯一決定了定義在某區間$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 上的隱函數$y=f(x)$，使得當$x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 時，$(x,f(x))\in U(P_0)$，且$F(x,f(x))\equiv 0, f(x_0)=y_0$;
2. $f(x)$在$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$上連續；

3. $f(x)$在$(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$上可導，且有:

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

Theorem 4.2. 若函數$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$滿足以下條件：

1. F在以$P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_0^n, y_0)$為內點的某一區域$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$上連續；
2. $F(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_0^n, y_0) = 0$；
3. F在D內具有連續的偏導數；
4. $F_y(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_0^n, y_0) \neq 0$.

則

1. 存在P_0的某一鄰域$U(P_0) \subset D$，在$U(P_0)$上方程$F(x,y) = 0$唯一決定了定義在某區間$U(P_0, \delta)$ 上的隱函數$y = f(x)$，使得當$x \in U(P_0, \delta)$時，$(x, f(x)) \in U(P_0)$，且$F(x, f(x)) \equiv 0, f(x_0) = y_0$;
2. $f(x)$在$(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$上連續；
3. $f(x)$在$(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$上可導，且有:

$$f_{x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}, i = 1, 2, \cdots, n$$

Examples 30. 設方程

$$F(x,y) = y - x - \frac{1}{2}\sin y = 0$$

求函數在$(0,0)$點附近的導數。

Examples 31. 討論笛卡兒葉形線

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

所確定的隱函數$y = f(x)$的一階，二階導數。

Examples 32. 求有方程

$$F(x,y,z) = xyz^3 + x^2 + y^2 - z = 0$$

在原點的附近所確定的二元函數$z = f(x,y)$的偏導數及其在$(0,1,1)$處的全微分。

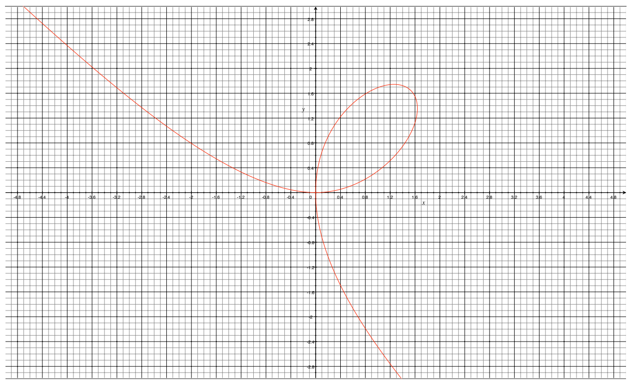

Figure 1: Descartes.

4.2 隱式方程組

Theorem 4.3. 若

1. $F(x,y,u,v)$與$G(x,y,u,v)$在點以$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$為內點的區域$V\subset\mathbb{R}^4$上連續；

2. $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

3. 在V上F,G具有連續的偏導數；

4. $J=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0$

則

1. 在P_0的某一鄰域內確定了隱函數$u=f(x,y), v=g(x,y)$,滿足

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0$$

$$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0$$

;

2. $f(x,y),g(x,y)$具有連續的偏導數；

3.
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

Examples 33.

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0 \\ G(x,y,u,v) = -u + v - xy + 1 = 0 \end{cases}$$

在點$P_0(2,1,1,2)$附近確定了怎樣的隱函數，並求其導數。

Examples 34. 設$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，其表示為

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

如果f在D上可導，求其逆影射的導數。驗證：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

5 作業

1. 求下列函數的偏導數
   (a) $z = x^2y$
   (b) $z = y\cos x$
   (c) $z = \ln(x + y^2)$
   (d) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$
   (e) $u = (xy)^z$
   (f) $u = x^{y^z}$
2. 設
$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$
考察函數在$(0,0)$點的偏導數。
3. 證明函數$z = \sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$點連續但偏導數不存在。
4. 考察函數
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$
在$(0,0)$點的可微性。
5. 證明函數
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$
在$(0,0)$點的連續，偏導數存在，但在該點不可微。
6. 驗證函數
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$
在$(0,0)$點連續且可偏導，但在該點不可微。

7. 驗證函數

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ \\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏導函數$f_x(x,y), f_y(x,y)$在$(0,0)$點不連續，但在該點可微。

8. 驗證函數

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ \\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在$(0,0)$點沿著各個方向的方向導數存在，但它在該點不連續，故在該點不可微。

9. 計算下列函數的梯度

   (a) $z=x^2+y^2\sin(xy)$

   (b) $u=x^2+2y^2+3xy+4yz+6x-2y-5z$在點$(1,1,1)$

10. 計算下列函數的高階導數

    (a) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

    (b) $z=xe^{xy}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

    (c) $u=xyze^{x+y+z}$，求$\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^p\partial z^r}$

11. 計算下列函數的高階微分

    (a) $z=x\ln(xy)$, 求d^2z

    (b) $z=\sin^2(ax+by)$, 求d^3z

12. 利用鏈式法則求下列函數的極限

    (a) $z=u^2\ln v, u=\dfrac{x}{y}, v=3x-2y$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

    (b) $z=x^2+y^2+\cos(x+y), x=u+v, y=\arcsin v$，求$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$

    (c) $u=f(xy,\dfrac{x}{y})$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

13. $z=f(x,y)$具有連續的二階偏導數，出$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在座標變換

$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ u=2xy \end{cases}$$

下的表達式。

14. 設向量值函數$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$的座標分量函數為：

$$\begin{cases} x=u^2+v^2 \\ y=u^2-v^2 \\ z=uv \end{cases}$$

向量值函數$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$的座標分量表示為：

$$\begin{cases} u=r\cos\theta \\ v=r\sin\theta \end{cases}$$

求復合函數$f\circ g$的導數。

15. 設$u=f(x,y),x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，證明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

16. 求函數$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$在點$(1,-2)$的泰勒公式

17. 求下列函數的極值點

    (a) $z=3axy-x^3-y^3(a>0)$

    (b) $z=x^2-xy-2x+y(a>0)$

18. 求下列方程所確定的隱函數的導數或偏導數

    (a) $\sin y+e^x-xy^2=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

    (b) $x^y=y^x$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

    (c) $e^z-xyz=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

    (d) $f(x,x+y,x+y+z)=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

19. 求下列方程組所確定的隱函數的導數或偏導數

    (a) $\begin{cases} z-x^2-y^2=0 \\ x^2+2y^2+3z^2=4a^2 \end{cases}$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$

(b) $\begin{cases} xu + yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$,求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(c) $\begin{cases} u = f(ux, v + y) \\ v = g(u - x, v^2 y) \end{cases}$,求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$

20. 通過變量替換$\begin{cases} x = e^{\xi} \\ y = e^{\eta} \end{cases}$ 變換方程

$$ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.(a, b, c \in \mathbb{R})$$

21. 求下列曲線在所示點處的切線與發平面

(a) $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$在點$t = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9, z^2 = 3x^2 + y^2$在點$(1, -1, 2)$

22. 求曲面$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$的切平面，使它平行與平面$x + 4y + 6z = 0$

23. 求$f(x, y, z) = xyz$在條件$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(x > 0, y > 0, z > 0, r > 0)$下的極小值，並證明不等式

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^{-1} \leq \sqrt[3]{abc},$$

其中a, b, c為任意的正實數。

24. 應用拉格朗日乘數法，求下列函數的條件極值

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2, s.t.$(subject to)$x + y - 1 = 0$

(b) $f(x, y) = xyz, s.t.$(subject to)$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$