《數學分析I》18-19-1試卷C解答

武國寧

February 22, 2019

1 填空題(每題3分，共30分)

(1) . 函數$y=e^{x^2}$的導函數為：$\underline{y'=e^{x^2}2x}$.

(2) . 設函數$f(x)=\begin{cases} x^\alpha\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在$x_0=0$點連續，則$\underline{\alpha>0}$.

(3) . $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x}(\alpha>0)=\underline{0.}$

(4) . $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=\underline{1.}$

(5) . $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right]=\underline{\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}}.$

(6) . 函數$\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$的漸近線為：$\underline{x-2.}$

(7) . $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\underline{\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.}$

(8) . $\displaystyle\int\frac{1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x=\underline{\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|+C.}$

(9) . 函數$y=\ln(1+x)$在$x_0=0$點帶有拉格朗日型余項的n 階泰勒展開式為：$\underline{\ln x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}(0<\theta<1).}$

(10) . 設$y=x\sinh x$,則$(x\sinh x)^{(100)}=\underline{(x\sinh x)^{(100)}=x\sinh x+100\cosh x}.$

2 證明題(本題10分)

利用單調有界原理證明數列

$$x_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, n = 1, 2, \cdots.$$

收斂，並求其極限。

Proof. a).首先證明數列的有界性：
因為$x_1 = \sqrt{3} < 3$,假設$x_n < 3$,則有：$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{3 * 3} = 3$

———4分.

b).首先證明數列的單調性：
$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{3x_n}}{x_n} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x_n}} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$.所以，數列單調遞增。

———4分.

綜上所述數列收斂。
c).求極限值：
假設極限為A,則有$A = \sqrt{3A}$得到$A = 3$.

———2分.

□

3 解答題(每小題5分，共20分)

(1) 指出函數$f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$的間斷點及其類型。
解：討論函數在$x_0 = 0$處的情況。$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$，所以$x_0 = 0$為函數的可去型間斷點。

———2分.

在$x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ $\lim\limits_{x \to n\pi} \dfrac{x}{\sin x} = \infty$所以為函數的第二類間斷點。

———3分.

(2) 求極限$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$ 解：

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

———3分.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

———2分.

(3) 設$\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}$,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3bt^2}{2at} = \frac{3b}{2a}t$$

———3分.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) * \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= \frac{\frac{3b}{2a}}{2at} = \frac{3b}{4a^2t}\end{aligned}$$

———2分.

(4) 求積分$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x$

解：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin 5x - \sin x\right)\,\mathrm{d}x$$

———3分.

$$= 0 - 0 = 0$$

———2分.

4 證明題(本題10分)

證明$\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致連續。

Proof. 若能夠找到數列x_n, y_n，雖然$|x_n - y_n| \to 0$，但是$|f(x_n) - f(y_n)| \nrightarrow 0$
$\Longrightarrow$ 函數不一致連續。

———5分.

$x_n = \frac{1}{n\pi}, y_n = \frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $|x_n - y_n| \to 0$

$$|\sin x_n - \sin y_n| = 1 \nrightarrow 0$$

———5分.

□

5 解答題(每小題5分，共20分)

(1) 利用Lagrange Mean-Value Theorem證明:$ny^{n-1}(x-y) < x^n - y^n < nx^{n-1}(x-y)(0 < y < x, n > 1)$

Proof. 因為

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = n\xi^{n-1}, \quad y < \xi < x$$

———3分.

所以有

$$ny^{n-1} < n\xi^{n-1} < nx^{n-1}$$

———2分.

□

(2) 利用函數的單調性證明：$\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

Proof. 令

$$f(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$$

$f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + x^2 > 0(x \in (0, \frac{\pi}{3}))$ 所以函數$f(x)$在$(0, \frac{\pi}{3})$單調遞增。

———3分.

因為$f(0) = 0$,所以有：

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

———2分.

□

(3) 利用函數的Taylor級數展開求極限$\lim\limits_{x\to\infty} x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Proof.

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x)$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o(x)$$

———3分.

所以有：

$$\lim_{x\to\infty} x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

———2分.

□

(4) 利用凹凸函數的定義證明：$a\ln a + b\ln b \geq (a+b)\left(\ln(a+b) - \ln 2\right)$

Proof. 令

$$f(x) = x\ln x,$$

有

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

所以$f(x) = \arctan x$為$\mathbb{R}^+$上的下凸函數。

———3分.

根據下凸函數的性質，有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

所以有:

$$a\ln a + b\ln b \geq (a+b)\left(\ln(a+b) - \ln 2\right)$$

———2分.

□

6 解答題(每小題5分，共10分)

(1) 設$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$，計算定積分$\int_0^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

解：

$$\int_0^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

———3分.

$$\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2 - \ln 2 + \ln(1+e^{-2}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4}$$

———2分.

(2) 計算極限$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$

解：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2} 2\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{2x^2}}$$

———3分.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0$$

———2分.