作業

武國寧

第一章　Limits

1.1　解答題

設$a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}, n = 1, 2, \cdots, a = 0.$

(1) 對下列ϵ分別求出極限定義中的N：

$$\epsilon_1 = 0.1, \epsilon_2 = 0.01, \epsilon_3 = 0.001$$

(2) 對$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$，可找到響應的$N$，這是否說明$a_n$趨於0？應該怎樣做才對？

(3) 對於任意給定的ϵ是否可以找到一個N?

1.2　證明題

按$\epsilon - N$定義證明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n}{2n^2-1} = \dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0 (a > 1)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} = 1$

1.3　證明題

證明：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，則對於任意的$k$，有$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$

1.4 解答題

下面那些數列是有界數列、無界數列以及無窮大量：

(1) $\left\{[1+(-1)^n]\sqrt{n}\right\}$

(2) $\{\sin n\}$

(3) $\left\{\dfrac{n^2}{n-\sqrt{5}}\right\}$

(4) $\left\{2^{(-1)^n n}\right\}$

1.5 求下列極限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[10]{n}\right)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$

1.6 證明下列極限存在並求其值

(1) 設$a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2a_n}, n=1,2,\cdots$

(2) 設$a_1=\sqrt{c}(c>0), a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}, n=1,2,\cdots$

(3) 設$a_n=\dfrac{c^n}{n!}(c>0), n=1,2,\cdots$

(4) 設$x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}(n=1,2,\cdots)$, 求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

1.7 證明題

利用$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$為單調遞增的結論，證明$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\right\}$ 為單調遞增數列。

1.8 應用柯西收斂原理證明以下數列收斂

(1) $a_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$

(2) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$

1.9 證明題

證明：若單調數列$\{a_n\}$含有一個收斂子列，則$\{a_n\}$收斂。

1.10 證明題

證明：若$a_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$ 則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$收斂。

1.11 證明

給定$0<a<b$令$x_1=a, y_1=b$。

(1) 若$x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,\cdots)$, 證明$\{x_n\},\{y_n\}$都收斂，且有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

(2) 若$x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}, y_{n+1}=\dfrac{2x_n y_n}{x_n+y_n}(n=1,2,\cdots)$, 證明$\{x_n\},\{y_n\}$都收斂，且有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

1.12 解答題

利用 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, 求下列極限：

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$
4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

1.13 按照定義證明下列極限

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{x} = 6$
2. $\lim_{x\to 2} x^2 - 6x + 10 = 2$
3. $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2} = 0$
4. $\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$

1.14 討論函數在$x \to 0$的極限或左右極限

1. $f(x) = \frac{|x|}{x}$
2. $f(x) = \lfloor x \rfloor$
3. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1 + x^2, & x < 0 \end{cases}$

1.15 求下列函數的極限

1. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x - \cos x - x^2$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$

5. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a^2+x}-a}{a}, a>0$

7. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$

1.16 利用夾逼原理求下列函數的極限

1. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x-\cos x}{x}$

2. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x\sin x}{x^2-4}$

1.17 證明題

設 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 證明：

1. $\lim_{x\to x_0} [f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

2. $\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)]=AB$

3. $\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{A}{B}$

1.18 解答題

設

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_xx^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_0}(a_0b_0\neq 0, m\leq n)$$

求 $\lim_{x\to\infty} f(x)$

1.19 證明題

設$f(x)>0$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 證明：$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}, n\geq 2$

1.20 解答題

1. 敘述函數極限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的海涅原理（歸結原則），並利用它證明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$不存在。

2. 敘述極限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在的充分必要條件，並應用它證明極限 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$不存在。

1.21 計算題，求下列極限

1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan^{-1} x}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x-a}$

8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$

9. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

1.22 計算題，求下列極限

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-x}$

2. $\lim\limits_{x\to0} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, a\in\mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{x\to0} (1+\tan x)^{\cot x}$

4. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$

5. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1.23 證明題

證明：$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right\}=1$

1.24 證明下列各式

1. $2x-x^2=O(x)(x\to 0)$
2. $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})(x\to 0^+)$
3. $\sqrt{1+x}-1=o(1)(x\to 0)$
4. $(1+x)^n=1+nx+o(x)(x\to 0, n\in\mathbb{Z})$
5. $2x^3+x^2=O(x^3)(x\to\infty)$
6. $o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))(x\to x_0)$
7. $o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)g_2(x))(x\to x_0)$

1.25 是確定α的值，使下列函數與x^α當$x\to 0$時為同階無窮小量

1. $\sin 2x-2\sin x$
2. $\frac{1}{1+x}-(1-x)$
3. $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$
4. $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$

1.26 是確定α的值，使下列函數與x^α當$x\to\infty$時為同階無窮大量

1. $\sqrt{x^2+x^5}$
2. $x+x^2(2+\sin x)$
3. $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$

1.27 求下列曲線的漸近線

1. $y = \dfrac{1}{x}$
2. $y = \tan^{-1} x$
3. $y = \dfrac{3x^3 + 4}{x^2 - 2x}$

1.28 確定下列a與α,使下列各無窮小量或無窮大量等價於ax^α

1. $u(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 (x \to 0, x \to \infty)$
2. $u(x) = \dfrac{x^5 + 2x^2}{3x^4 - x^3} (x \to 0, x \to \infty)$
3. $u(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2} (x \to 0+, x \to +\infty)$
4. $u(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} (x \to 0+, x \to +\infty)$
5. $u(x) = \sqrt{1 + 3x} - \sqrt[3]{1 + 2x} (x \to 0, x \to +\infty)$
6. $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x (x \to +\infty)$
7. $u(x) = \sqrt{x^3 + x} - x^{\frac{3}{2}} (x \to 0+)$
8. $u(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{x}} - e^{2x} (x \to 0+)$
9. $u(x) = \ln \cos x - \tan^{-1} x^2 (x \to 0)$
10. $u(x) = \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x} (x \to 0)$

第二章　Continuity

2.1　解答題

設f,g在區間I上連續，記

$$F(x)=\max\left\{f(x),g(x)\right\},G(x)=\min\left\{f(x),g(x)\right\}.$$

證明F,G在區間I上連續。

2.2　解答題

設f為$\mathbb{R}$上的連續函數，常數$c>0$,記

$$F(x)=\begin{cases} -c, & f(x)<-c \\ f(x), & |f(x)|\leq c \\ c, & f(x)>c \end{cases}$$

證明$F(x)$在$\mathbb{R}$上連續。

2.3　解答題

若對於任何充分小的$\epsilon>0$, f在$[a+\epsilon,b-\epsilon]$上連續，能否推出f在(a,b)內連續？

2.4　解答題

求極限(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\tan x$; (2) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{1+2x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

2.5　證明題

證明：任何一個實係數奇次方程至少有一個實根。

2.6 證明題

試用一致連續的定義證明：若f, g在區間I上一致連續，則$f+g$也在I上一致連續。

2.7 證明題

證明：$f(x)=x^2$在$[a,b]$上一致連續，但在$\mathbb{R}$上不一致連續。

2.8 證明題

按照定義證明下列函數在其定義域上連續：

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$
2. $f(x)=|x|$

2.9 解答題

指出下列函數的間斷點並說明其類型：

1. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$
2. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$
3. $f(x)=\lfloor|\cos x|\rfloor$
4. $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$
5. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$
6. $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ -x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

2.10 解答題

延托下列函數，使其在$\mathbb{R}$上連續：

1. $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$
2. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
3. $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$

第三章　Derivative

3.1　解答題

設

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ ax + b, & x < 3 \end{cases}$$

試確定a, b的值，使f在$x = 3$處可導。

3.2　解答題

求下列曲線在指定點處的切線，法線方程。

1. $y = \dfrac{x^2}{4}, P(2, 1)$
2. $y = \cos x, P(0, 1)$

3.3　解答題

求下列函數的導數

1. $f(x) = |x|^3$
2. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$

3.4　解答題

設函數

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

試問：

1. α為何值時，函數在$x = 0$點連續；
2. α為何值時，函數在$x = 0$點可導.

3.5 求下列函數在指定點的高階導數

1. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 9$，求$f'''(1), f^{(4)}(x)(1)$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f''(0), f''(1), f''(-1)$

3.6 求下列函數的高階導數

1. $f(x) = x\ln x$，求$f''(x)$
2. $f(x) = e^{-x^2}$，求$f'''(x)$
3. $f(x) = \ln(1+x)$，求$f^{(5)}(x)$
4. $f(x) = x^3e^x$，求$f^{(10)}(x)$

3.7 解答題

設f為二階可導函數，求下列函數的二階導數

1. $f(\ln x)$
2. $f(x^n)$
3. $f(f(x))$

3.8 解答題

求下列函數的n階導數

1. $y = \ln x$
2. $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$
3. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$
4. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
5. $y = \dfrac{x^n}{1-x}$

3.9 解答題

求下列參數方程所確定的函數的二階導數(1)$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (2)$\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$