第四章 函數的連續性

标签（空格分隔）： 連續 一致連續 初等函數

第一節 連續函數的定義

一. 函數在一點連續

> **定義1.1** 設函數f在$U(x_0)$上有定義，若
> $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1.1}$$
> 則稱函數f在x_0點連續。

- [x] 函數f在x_0點連續的邏輯語言為：

$$\forall \epsilon > 0, \exists U(x_0), \forall x \in U(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{1.2}$$

- [x] 若記$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 函數$f(x)$在$x_0$點連續的充分必要條件為：

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0 \tag{1.3}$$

- [x] 函數$f(x)$在x_0點連續 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x) = f(x_0)$.

> **定義1.2** 函數$f: E \to \mathbb{R}$為E上的連續函數，如果函數在E上的每一點連續。

例子1.1 如果$f(x) \equiv C, x \in E$,則$f(x)$在E上連續。

例子1.2 函數$f(x) = x$在$\mathbb{R}$上連續。

例子1.3 函數$f(x) = \sin x, f(x) = \cos x$在$\mathbb{R}$上連續。

例子1.4 函數$f(x) = a^x$在$\mathbb{R}$上連續。

例子1.5 函數$f(x) = \log_a x$在$\mathbb{R}$上連續。

二. 間斷點及其分類

> **定義1.3** 若函數$f(x), x \in E$在$x_0 \in E$點不連續，則稱x_0為函數$f(x)$的一個間斷點。

- [x] f在x_0無定義，或者$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在， 則函數f在x_0點間斷。
- [x] 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$， 則函數 f 在 x_0 點間斷。
- [x] 函數f在 $x_0 \in E$ 點間斷的邏輯語言為：

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists \tilde{x} \in E \Rightarrow |f(\tilde{x}) - f(x_0)| \geq \epsilon_0 \tag{1.4}$$

例子1.6 函數$f(x) = \mathrm{sgn}(x)$在$x_0 = 0$點間斷。

> **定義1.3** 設$x_0 \in E$為函數$f(x): E \to \mathbb{R}$的一個間斷點， 若存在一個連續函數$\tilde{f}: E \to \mathbb{R}$使得：$f|_{E\setminus a} = \tilde{f}|_{E\setminus a}$. 則稱$x_0$為函數$f(x)$的**可去間斷點**。 * 如果$x_0$為函數$f(x)$的可去間斷點，則有$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$存在，但是$A \neq f(x_0)$.

例子1.7 討論函數

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在$x = 0$點的連續性。

> **定義1.4** 若函數$f(x)$在x_0點有：$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) = B$，則稱$x_0$為函數$f(x)$的**跳躍間斷點**。

例子1.8 討論函數$y = \lfloor x \rfloor$的間斷點及其類型。

> **定義1.5** 可去間斷點和跳躍間斷點統稱為**第一類間斷點**， 不是第一類間斷點的間斷點稱為**第二類間斷點**。

例子1.9 討論函數$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$的間斷點及其類型。 **例子1.10** 討論***Dirichlet***函數

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

的間斷點及其類型。 **例子1.11** 討論***Riemann***函數

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

的間斷點及其類型。

作業

- **1.** 按照定義證明下列函數在其定義域上連續： (1). $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (2). $f(x) = |x|$
- **2.** 指出下列函數的間斷點並說明其類型：

  (1). $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (2). $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ (3). $f(x) = \lfloor |\cos x| \rfloor$ (4). $f(x) = \mathrm{sgn}|x|$ (5). $f(x) = \mathrm{sgn}(\cos x)$ (6). $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
- **3.** 延托下列函數，使其在$\mathbb{R}$上連續： (1). $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ (2). $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (3). $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$

第二節 連續函數的性質

一. 連續函數的局部性質

> **定理2.1** 設$f: E \to \mathbb{R}$在$x_0 \in E$點連續，則下列結論成立： (1). 函數$f: E \to \mathbb{R}$在x_0的某鄰域$U_\delta(x_0)$上有界。 (2). 如果$f(x_0) \neq 0$，則存在x_0的某鄰域$U_\delta(x_0)$，對於$\forall x \in U_\delta(x_0)$，有$f(x)$與$f(x_0)$同號。 (3). 如果函數$g: U_E(x_)) \to \mathbb{R}$定義在$x_0$的某鄰域上，且在$x_0$點連續，則下列函數在$x_0$點連續： $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

二. 閉區間上連續函數的基本性質

三. 反函數的連續性

四. 一致連續

作業

第三節 初等函數的連續性

作業