中国石油大学（北京）2019-2020-1《数学分析I》期末补考试卷(1)

姓名：巨克强　学号：2019011851　课程：《数学分析I》　班级：默认班级　提交时间：2020-06-05 17:25　ip：111.44.169.173　成绩： 64.0分

一、 单选题 （题数：15，共 60.0 分）

1、

不定积分$\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx =$ ( )

学生得分：4.0 分）

A、 $\ln(e^x+1)+C$

B、 $\ln e^x + C$

C、 $(e^x+1)+C$

D、 $e^x + C$

正确答案： A　　巨克强的答案：A

2、

当$x \to 0$时， $\arcsin x$是3^x-1的（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 高阶无穷小

B、 等价无穷小

C、 同阶但非等价无穷小

D、 低阶无穷小

正确答案： C　　巨克强的答案：A

3、

若$a>0, b>0$,则极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{5}{x}} =$ ( )

学生得分：4.0 分）

A、 e

B、 $(ab)^{5/2}$

C、 $(ab)^{3/2}$

D、 1

正确答案： B　　　　巨克强的答案：B

4、

若 $f(x)$ 为可导函数，则以下选项中正确的是（　　）

学生得分：0.0 分）

A、 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$

B、 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$

C、 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$

D、 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

正确答案： D　　　　巨克强的答案：B

5、

$x = 0$是$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$的（）

学生得分：0.0 分）

A、 跳跃间断点

B、 可去间断点

C、 震荡间断点

D、 无穷间断点

正确答案： B　　　　巨克强的答案：C

6、

当 $x \to 0$时，以下无穷小中与$f(x) = \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}$ 等价的是（）

学生得分：0.0 分）

A、 $1 + \cos x$

B、 $\arcsin x$

C、 $\tan x - \sin x$

D、 $\sqrt{x}$

正确答案： B　　　　巨克强的答案：D

7、

$f(x)$在$x=x_0$处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 必要而非充分条件

B、 充分而非必要条件

C、 充分必要条件

D、 既非充分也非必要条件

正确答案： D　　　　巨克强的答案：D

8、

若函数 $f(x)=\begin{cases} -3+\sqrt{x^2-1}, & -\infty<x<-1 \\ b, & x=-1 \\ a+\dfrac{\arccos x}{\pi}, & -1<x\leqslant 1 \end{cases}$ 在 $x=-1$ 处连续，则 $a+b=()$

学生得分：0.0 分）

A、 -5

B、 -6

C、 -7

D、 -8

正确答案： C　　　　巨克强的答案：B

9、

设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$，则$f(x)$ 的一个原函数为（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 $\ln\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

B、 $2\arctan(2x-3)+C$

C、 $\ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|-3$

D、 $\ln\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|+2$

正确答案： C　　　　巨克强的答案：D

10、

若

$y=y(x)$ 是由参数方程

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定的隐函数，则

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\ )$

学生得分：4.0 分）

A、 $\dfrac{1}{2t}$

B、 $\dfrac{1+t^2}{4t}$

C、 $2t$

D、 $2t(1+t^2)$

正确答案： A　　　巨克强的答案：A

11、

方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$为（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 $\dfrac{-y}{e^y+x}$

B、 $\dfrac{y}{e^y+x}$

C、 $\dfrac{-y}{e^y-x}$

D、 $\dfrac{y}{e^y-x}$

正确答案： A　　　巨克强的答案：A

12、

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n+500}=()$

学生得分：4.0 分）

A、 e

B、 e^{500}

C、 e^{501}

D、 1

正确答案： A　　　　巨克强的答案：A

13、

极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})=(\ )$

学生得分：0.0 分）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 4

正确答案： B　　　　巨克强的答案：A

14、

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=(\ )$

学生得分：0.0 分）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 不存在

正确答案： D　　　　巨克强的答案：B

15、

设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$且$\lim\limits_{x\to x_0}(b_n-a_n)=0$，则（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 $\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，且极限相等

B、 $\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，但极限未必相等

C、 $\{a_n\}$收敛，而$\{b_n\}$发散

D、 $\{a_n\}$和$\{b_n\}$可能都收敛，也可能都发散

正确答案： D　　　　巨克强的答案：D

二、论述题 （题数：4，共 40.0 分）

1、

证明$y=\frac{1}{x}$在$(0,\ 1)$上不一致连续。

学生得分：6.0 分）

正确答案

证明：存在$\epsilon_0=\frac{1}{2}$,取$x_n=\frac{1}{n}$，$x_{n+1}=\frac{1}{n+1}$,显然

$$|x_n-x_{n+1}|=\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|\to 0(n\to+\infty)---5分$$

有：

$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\epsilon_0=\frac{1}{2}---5分$$

。

所以，函数$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。

巨克强的答案

证明：取 $\forall x_1, x_2$，$x_1, x_2\in(0,1)$，$\forall\varepsilon>0$，$\forall a$ $0<a<1$

当 $|x_1-x_2|<\varepsilon$ 时，使得 $|y_1-y_2|=\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=$

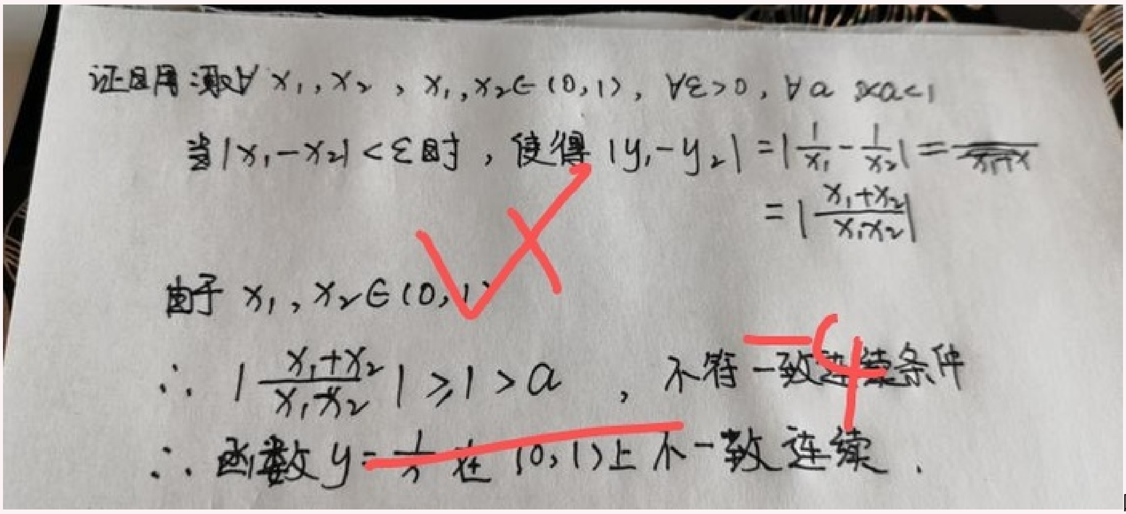
$=\left|\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right|$

由于 $x_1, x_2\in(0,1)$

$\therefore \left|\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right|\geq 1>a$，不符一致连续条件

$\therefore$ 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

批语



证明 取 $\forall x_1, x_2$，$x_1, x_2 \in (0,1)$，$\forall \varepsilon > 0$，$\forall a$ $a<1$

当 $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ 时，使得 $|y_1 - y_2| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right|$

由于 $x_1, x_2 \in (0,1)$

$\therefore \left|\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right| \geq 1 > a$，不符一致连续条件

-4

$\therefore$ 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

回答基本正确

2、

采用单调有界原理证明数列：$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}, \cdots (x_{n+1} = \sqrt{2+x_n})$ 收敛，并求其极限。

学生得分：10.0 分）

正确答案

解：$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+x_n} - \sqrt{2+x_{n-1}} = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n} + \sqrt{2+x_{n-1}}}$,所以数列单调，又因为$x_2 > x_1$，所以数列单调递增$---4$分

因为$0 < x_1 < 2$,假设$x_n < 2$,则有：$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{4} = 2$,所以数列有上界2. 根据单调有界原理，数列收敛。$---4$分

假设数列的极限为A,则有：$A = \sqrt{2+A}$,所以有$A = 2---2$分

巨克强的答案

证明：设数列为x_n，则$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}>0$

$\because x_1<2$，则设$x_k<2$

则有$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}<\sqrt{2+2}=2$ 成立.

$\therefore 0<x_n<2$ 有界.

$\because x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\geq\sqrt{2x_n}>x_n$

$\therefore x_{n+1}>x_n$ 单调递增.

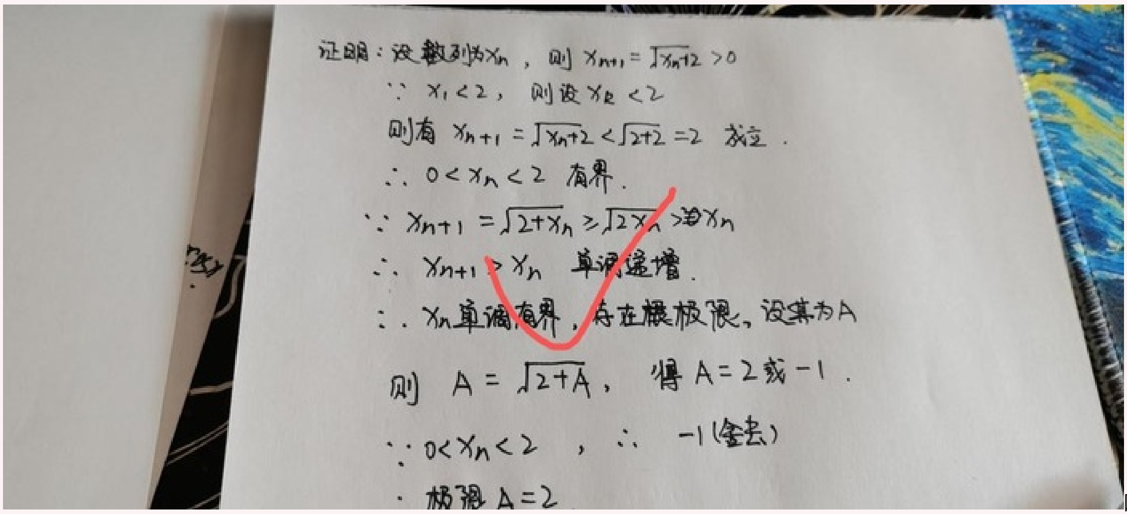
$\therefore x_n$单调有界，存在极限，设其为A

则 $A=\sqrt{2+A}$，得 $A=2$或-1.

$\because 0<x_n<2$，$\therefore -1$(舍去)

$\therefore$ 极限 $A=2$

批语


证明：设数列为x_n，则 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}>0$

∵ $x_1<2$，则设 $x_k<2$

则有 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}<\sqrt{2+2}=2$ 成立.

∴ $0<x_n<2$ 有界.

∵ $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\geq\sqrt{2x_n}>x_n$

∴ $x_{n+1}>x_n$ 单调递增.

∴ x_n单调有界，存在极限，设其为A

则 $A=\sqrt{2+A}$，得 $A=2$或-1.

∵ $0<x_n<2$，∴ -1(舍去)

∴ 极限 $A=2$

回答正确

3、

求函数$u=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}(x>0,y>0,z>0,a>0)$约束下的极值。

学生得分：10.0 分）

正确答案

解：作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right),---4\text{ 分}$$

令，

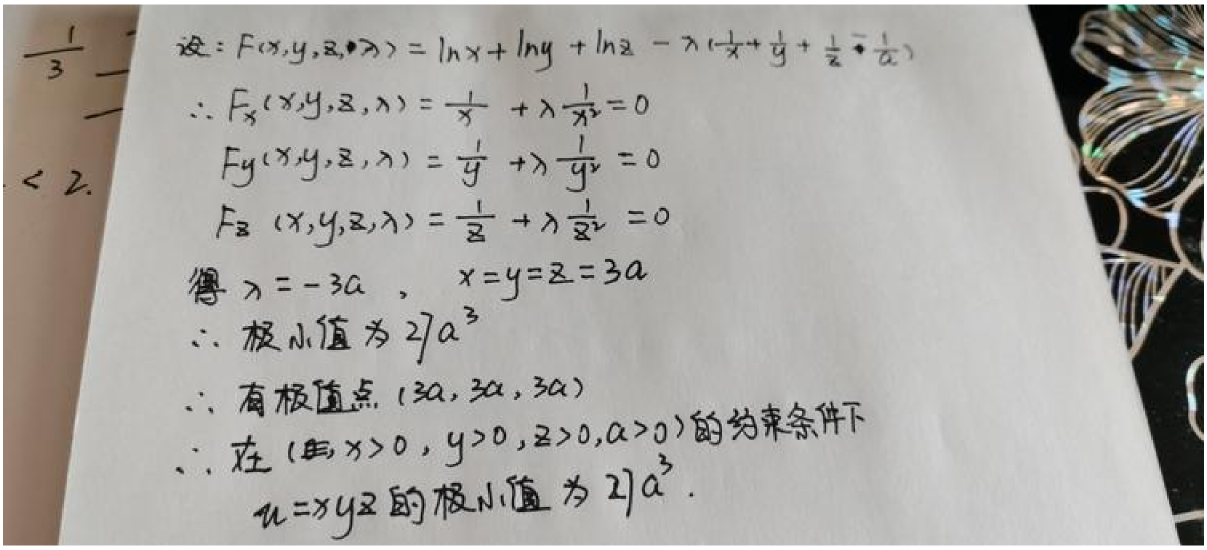
$$\begin{cases} L_x=yz-\lambda\left(\frac{1}{x^2}\right)=0 \\ L_y=xz-\lambda\left(\frac{1}{y^2}\right)=0---3\text{ 分} \\ L_z=xy-\lambda\left(\frac{1}{z^2}\right)=0 \end{cases}$$

解之得到

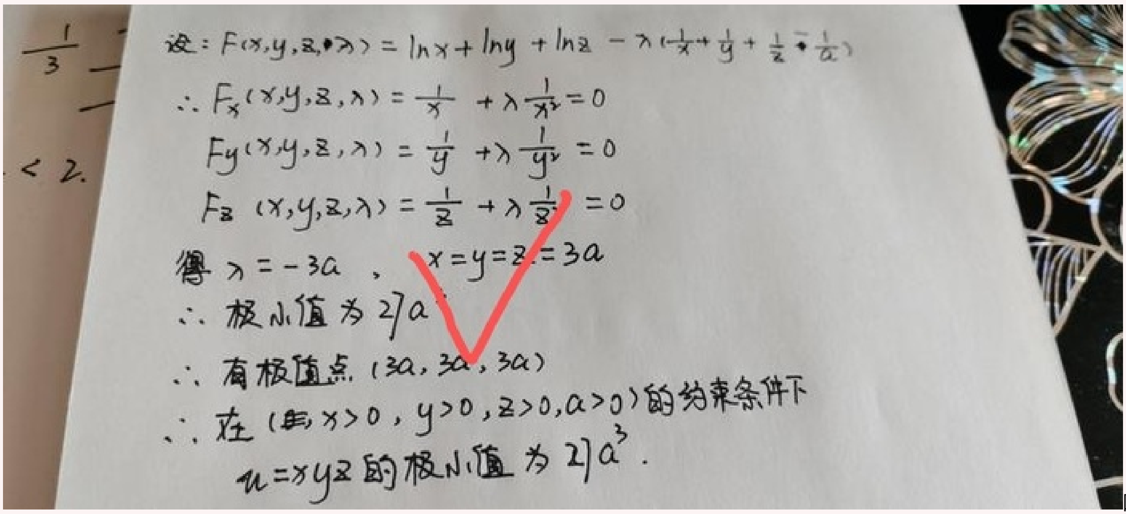
$$xyz=\frac{\lambda}{3a}\rightarrow x=y=z=3a$$

所以极小值为：$f(3a,3a,3a)=27a^3---3$ 分

巨克强的答案



批语



回答正确

4、

设$b > a > 0$,证明$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{1}{b}$

学生得分：10.0 分）

正确答案

因为$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi}, \xi \in (a,b) - - - 7$分,

所以有,

$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{1}{b} - - - 3$分

巨克强的答案

$\frac{5}{6}$

$\frac{1}{6}$

证明：$\because \frac{\ln b-\ln a}{b-a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow \ln\frac{b}{a} > 1-\frac{a}{b}$

令 $b=at$ $(t>1)$

则有 $\ln t > 1-\frac{1}{t}$

设函数 $F(t)=\ln t-1+\frac{1}{t}$， $F(1)=0$

$F'(t)=\frac{1}{t}-0-\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}(1-\frac{1}{t})$

$\because t>1$

$\therefore \frac{1}{t}(1-\frac{1}{t})>0$

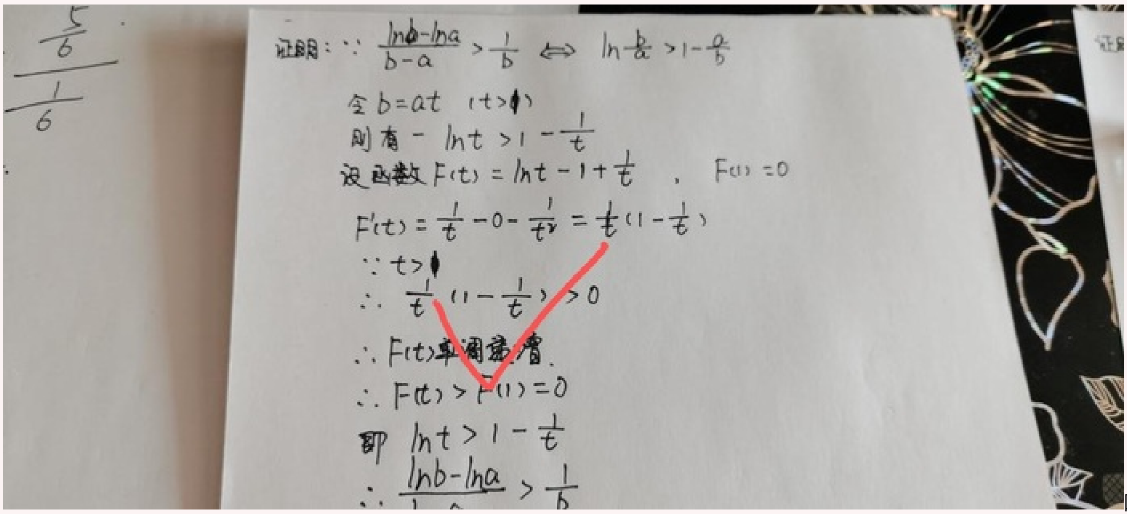
$\therefore F(t)$单调递增.

$\therefore F(t)>F(1)=0$

即 $\ln t > 1-\frac{1}{t}$

$\therefore \frac{\ln b-\ln a}{b-a} > \frac{1}{b}$

批语



证明：$\because \frac{\ln b-\ln a}{b-a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow \ln\frac{b}{a} > 1-\frac{a}{b}$

令 $b=at \quad (t>1)$

则有 $\ln t > 1-\frac{1}{t}$

设函数 $F(t)=\ln t-1+\frac{1}{t}$ ， $F(1)=0$

$F'(t)=\frac{1}{t}-0-\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}(1-\frac{1}{t})$

$\because t>1$

$\therefore \frac{1}{t}(1-\frac{1}{t})>0$

$\therefore F(t)$ 单调递增.

$\therefore F(t)>F(1)=0$

即 $\ln t>1-\frac{1}{t}$

$\therefore \frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}$

回答正确