Homework

Guoning Wu

March 19, 2020

1 作業

1.1 證明題

1. 證明：若分割$\widetilde{P}$ 是分割P增加若干分點得到的分割，則有：

$$\sum_{\widetilde{P}} \omega_i' \Delta x_i' \leq \sum_{P} \omega_i \Delta x_i$$

Proof. Here $\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x',x'' \in \Delta x_i} |f(x') - f(x'')|$

Suppose the partion $\widetilde{P}$ is a finer partition of P, and we suppose the subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ is subdivided into

$$x_{i-1} = x_{i-1,0} < x_{i-1,1} < \cdots < x_{i-1,j-1} < x_{i-1,j} < \cdots < x_{i-1,n_i} = x_i$$

For

$$\sum_{P} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \sum_{j=1} \Delta x_{ij} \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} \omega_{ij} \Delta x_{ij} = \sum_{\widetilde{P}} \omega_{ij}' \Delta x_{ij}'$$

□

2. 證明：若f在$[a, b]$上可積，$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 則$f$在$[\alpha, \beta]$上也可積。

Proof. As we known,

$$f \in \mathcal{R}[a, b], \iff \exists P, \sum_{P} \omega_i \Delta x_i \leq \epsilon$$

the partition P limited on the interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ must satisfy

$$\sum_{P|_{\alpha,\beta}} \omega_i \Delta x_i \leq \epsilon$$

□

3. 設f, g均為定義在$[a, b]$上的有界函數，僅在有限個點處$f(x) \neq g(x)$, 證明：若f在$[a, b]$上可積，則g在$[a, b]$上也可積，且有：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Proof. $\square$

4. 設f在$[a,b]$上有界，$\{a_n\} \subset [a,b]$, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, 證明：若$f$在$[a,b]$上只有$a_n, n = 1, 2, \cdots$為其間斷點，則$f$在$[a,b]$ 上可積。

5. 證明：若$f \in C[a,b]$ 且$f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ 則以下結果成立：

   (a) 如果函數$f(x)$存在一點$f(x_0) > 0, x_0 \in [a,b]$，則有：

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

   (b) 若$\int_a^b f(x) = 0$，則有$f(x) \equiv 0$

6. 證明若$f \in C[a,b], f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, 且$M = \max_{[a,b]} f(x)$,則

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = M$$

7. 證明黎曼函數

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q\text{互質}, q > p, \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 其它(0,1)內無理數} \end{cases}$$

   在區間$[0,1]$上可積。

8. 計算下列定積分

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x (a > 0)$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x (a > 0)$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, \mathrm{d}x$

(i) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \, \mathrm{d}x$

(j) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

(k) $\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, \mathrm{d}x (a > 0)$

(l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \, \mathrm{d}x$

9. 求下列極限

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} \, \mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} \, \mathrm{d}t}$

10. 求下列曲線的弧長

(a) $y = x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 4$

(b) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t (a > 0), 0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $r = a\sin^3 \frac{\theta}{3} (a > 0), 0 \leq \theta \leq 3\pi$

11. 求下列平面曲線繞旋轉軸所圍成立體的體積

(a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$,繞$x$軸。

(b) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$, 繞$x$軸。

(c) $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$，繞極軸。

12. 求下列平面曲線繞指定軸旋轉得到的面積

(a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$,繞$x$軸。

(b) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$, 繞$x$軸。

(c) $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$，繞極軸。

13. 討論下列積分是否收斂？若收斂，則求其極限。

(a) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$

(e) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_{0}^{1} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(h) $\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x$

14. 討論下列積分的收斂性

(a) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\arctan x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^m}{x^n+1}\,\mathrm{d}x(m,n\geq 0)$

(e) $\int_{0}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$

15. 討論下列去窮積分為絕對收斂還是條件收斂

(a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x \, \mathrm{d}x$