1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1} = 2$

2. 设$f(x,y,z) = x^2yz$，则$\nabla\times(\nabla f)$（梯度的旋度）为：0

3. 设函数$u = xyz$，它在点$A(5,1,2)$处沿到点$B(9,4,14)$的方向$\overrightarrow{AB}$上的方向导数为：$\frac{98}{13}$

4. 设L是圆周$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$，方向为逆时针方向。则第二类曲线积分$\oint_L xdy = \pi a^2$

1. 函数$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$点处（D）

(A)不连续；　(B)偏导数存在；　(C)可微；　(D)沿着任意方向的方向导数存在.

2. 已知函数$f(x,y)$在$(0,0)$的某邻域内有定义，且$f_x(0,0) = 2, f_y(0,0) = 1$，则（B）

(A)曲面$z = f(x,y)$在$(0,0,f(0,0))$处的法向量为$(2,1,1)$；

(B)曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$(1,0,2)$；

(C)曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$(2,0,1)$；

(D)$dz|_{0,0} = 2dx + dy$.

3. 设 D 为单位圆域 $x^2+y^2 \le 1$，$I_1 = \iint_D (x^3+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2 = \iint_D (x^4+y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3 = \iint_D (2x^6+y^5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$则（D）

(A)$I_1 < I_2 < I_3$；　　(B)$I_3 < I_1 < I_2$；

(C)$I_3 < I_2 < I_1$；；　　(D)$I_1 < I_3 < I_2$.

4. 设S：$x^2+y^2+z^2 = a^2 (z \ge 0), S_1$为S在第一卦限中的部分，则(C)

（A）$\iint_S x\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$;　　（B）$\iint_S y\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} y\mathrm{d}S$;

（C）$\iint_S z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} z\mathrm{d}S$;　　(D)$\iint_S xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}S$

1. 求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x\ (n \in Z^+)$

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,\mathrm{d}\sin x = [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x$$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-\cos^2 x]\cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x$，所以得到：

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \cdots = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, & n = 2m \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

2. 设$\begin{cases}F(x,y,u,v)=u^2+v^2-x^2-y=0\\G(x,y,u,v)=\ -u+v-xy+1=0\end{cases}$, 求$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$.

解：将方程的两边关于 u 求导得到：

$$\begin{cases}2u-2xx_u-y_u=0\\-1-yx_u-xy_u=0\end{cases}$$

解方程得到：

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{2xu+1}{2x^2-y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{2x+2yv}{2x^2-y}$$

3. 计算积分$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$，其中V为椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

解：$\iiint_V \frac{z^2}{c^2}dxdydz=2\int_0^c\frac{z^2}{c^2}dz\iint_{D_z}dxdy$

$$=2\int_0^c\frac{z^2}{c^2}\pi ab\left[1-\frac{z^2}{c^2}\right]dz=2\pi ab\left[\frac{c}{3}-\frac{c}{5}\right]=\frac{4}{15}\pi abc$$

同理可得：$\iiint_V \frac{y^2}{b^2}dxdydz=\frac{4}{15}\pi abc=\iiint_V \frac{x^2}{a^2}dxdydz$

所以有：$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz=\frac{4}{5}\pi abc$

4. 设$u=u(x,y)$可微，在极坐标变换下$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$下，证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

证明：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

一、 解答题（本题 10 分）验证积分$\int_L (2x+\sin y)dx+\ (x\cos y)dy$

与路径无关，并求原函数$u(x,y)$使得$du(x,y)=(2x+\sin y)dx+\ (x\cos y)dy$

解：$P(x,y)=2x+\sin y, Q(x,y)=x\cos y$，所以有：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y=\frac{\partial P}{\partial y}$$

所以得出积分与路径无关。

$$(2x+\sin y)dx+\ (x\cos y)dy=d[x^2+x\sin y+C]$$

所以，有$u(x,y)=x^2+x\sin y+C$。

二、解答题（本题 10 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$的下侧。

解：添加辅助面 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\leq 1)$，取上侧

则根据高斯公式可得：

$$I+\iint\limits_{\Sigma_1} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}3r^2dz=-2\pi\int_0^1(3r^3-3r^5)\ \mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\pi$

故 $I-\pi=-\dfrac{\pi}{2}$ ，即：$I=\dfrac{\pi}{2}$