中国石油大学（北京）2019-2020-1《数学分析I》期末补考试卷(1)

姓名：何思海　学号：2019011826　课程：《数学分析I》　班级：默认班级　提交时间：2020-06-05 17:29　ip：58.243.254.199　成绩：60.0 分

一、 单选题 （题数：15，共 60.0 分）

1、

不定积分 $\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx =$ ( )

学生得分：4.0 分）

A、 $\ln(e^x+1)+C$

B、 $\ln e^x + C$

C、 $(e^x+1)+C$

D、 e^x+C

正确答案： A　　　何思海的答案：A

2、

当 $x\to 0$ 时， $\arcsin x$ 是 3^x-1 的（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 高阶无穷小

B、 等价无穷小

C、 同阶但非等价无穷小

D、 低阶无穷小

正确答案： C　　　何思海的答案：D

3、

若 $a>0, b>0$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{5}{x}} =$ ( )

学生得分：0.0 分）

A、 e

B、 $(ab)^{5/2}$

C、 $(ab)^{3/2}$

D、 1

正确答案： B　　　何思海的答案：D

4、

若 $f(x)$ 为可导函数，则以下选项中正确的是（　　）

学生得分：4.0 分）

A、 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$

B、 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$

C、 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$

D、 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

正确答案： D　　　何思海的答案：D

5、

$x=0$是$f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$的（）

学生得分：0.0 分）

A、 跳跃间断点

B、 可去间断点

C、 震荡间断点

D、 无穷间断点

正确答案： B　　　何思海的答案：D

6、

当 $x\to 0$时，以下无穷小中与$f(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ 等价的是（）

学生得分：0.0 分）

A、 $1+\cos x$

B、 $\arcsin x$

C、 $\tan x-\sin x$

D、 $\sqrt{x}$

正确答案： B　　　何思海的答案：A

7、

$f(x)$在$x = x_0$ 处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 必要而非充分条件

B、 充分而非必要条件

C、 充分必要条件

D、 既非充分也非必要条件

正确答案： D　　　何思海的答案：B

8、

若函数 $f(x)=\begin{cases}-3+\sqrt{x^2-1}, & -\infty<x<-1\\ b, & x=-1\\ a+\dfrac{\arccos x}{\pi}, & -1<x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $x=-1$ 处连续，则 $a+b=()$

学生得分：4.0 分）

A、 -5

B、 -6

C、 -7

D、 -8

正确答案： C　　　何思海的答案：C

9、

设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$，则$f(x)$ 的一个原函数为（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 $\ln\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

B、 $2\arctan(2x-3)+C$

C、 $\ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|-3$

D、 $\ln\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|+2$

正确答案： C　　　何思海的答案：C

10、

若

$y=y(x)$ 是由参数方程

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定的隐函数，则

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=()$

学生得分：0.0 分）

A、 $\frac{1}{2t}$

B、 $\frac{1+t^2}{4t}$

C、 $2t$

D、 $2t(1+t^2)$

正确答案： A　　　何思海的答案：D

11、

方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$为（ ）

学生得分：0.0 分）

A、 $\frac{-y}{e^y+x}$

B、 $\frac{y}{e^y+x}$

C、 $\frac{-y}{e^y-x}$

D、 $\frac{y}{e^y-x}$

正确答案： A　　　何思海的答案：D

12、

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+500}=()$

学生得分：0.0 分）

A、 e

B、 e^{500}

C、 e^{501}

D、 1

正确答案： A　　　　何思海的答案：D

13、

极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}) =$ ( )

学生得分：4.0 分)

A、 1

B、 2

C、 3

D、 4

正确答案： B　　　　何思海的答案：B

14、

极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=$ ( )

学生得分：0.0 分)

A、 1

B、 2

C、 3

D、 不存在

正确答案： D　　　　何思海的答案：C

15、

设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$且$\lim\limits_{x\to x_0}(b_n-a_n)=0$，则（ ）

学生得分：4.0 分)

A、 $\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，且极限相等

B、 $\{a_n\},\{b_n\}$都收敛，但极限未必相等

C、 $\{a_n\}$收敛，而$\{b_n\}$发散

D、 $\{a_n\}$和$\{b_n\}$可能都收敛，也可能都发散

正确答案： D　　　　何思海的答案：D

二、 论述题 （题数：4，共 40.0 分）

1、

证明$y=\frac{1}{x}$在$(0,\ 1)$上不一致连续。

学生得分：6.0 分）

正确答案

证明：存在$\epsilon_0=\frac{1}{2}$,取$x_n=\frac{1}{n}$, $x_{n+1}=\frac{1}{n+1}$,显然

$$|x_n-x_{n+1}|=\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|\to 0(n\to+\infty)---5\text{分}$$

有：

$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\epsilon_0=\frac{1}{2}---5\text{分}$$

。

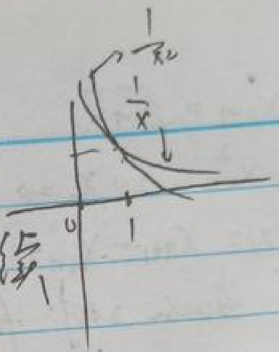
所以，函数$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。

何思海的答案

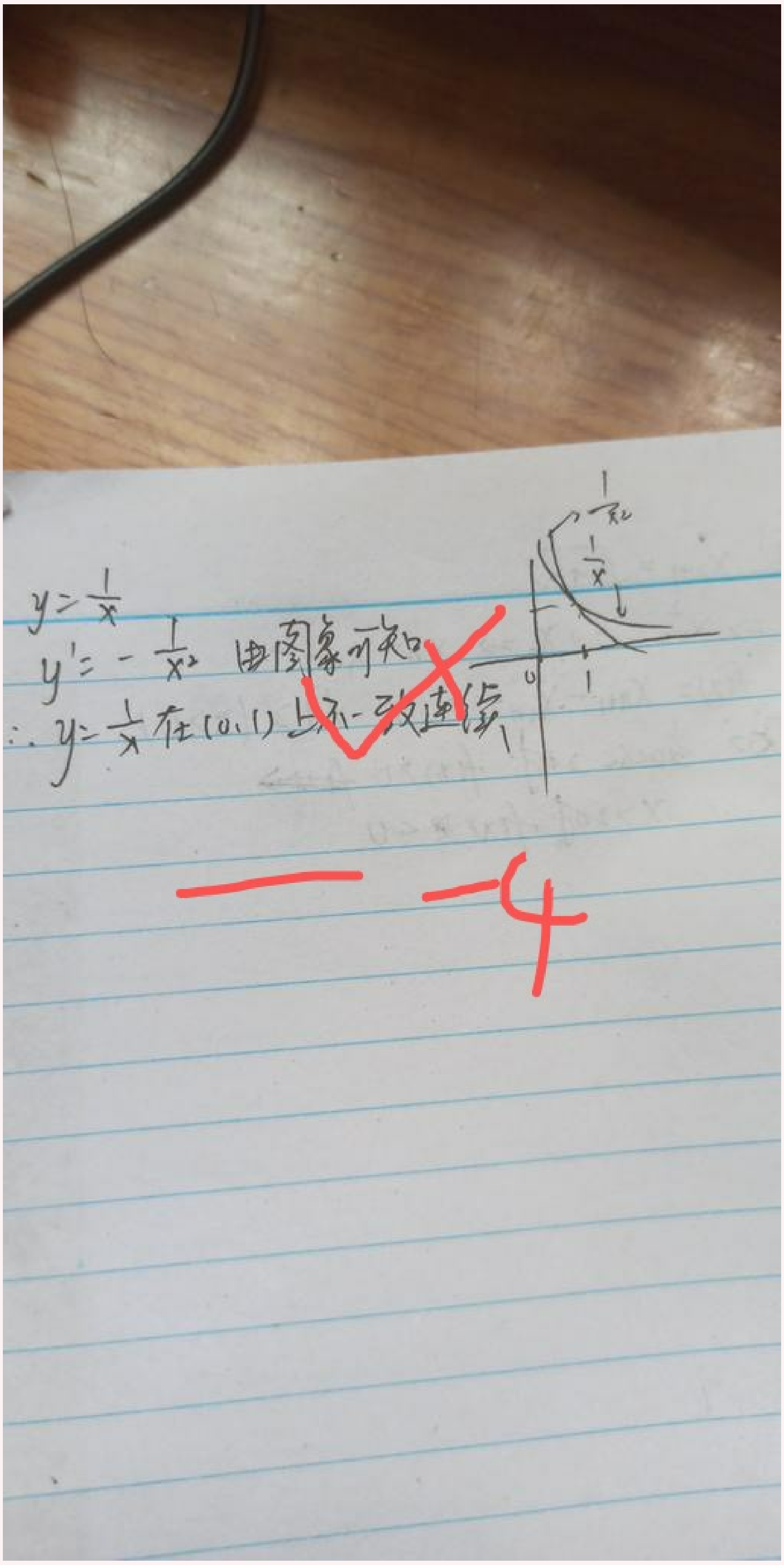
$y=\frac{1}{x}$

$y'=-\frac{1}{x^2}$ 由图象可知

$\therefore y=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$上不一致连续



批语



2、

采用单调有界原理证明数列：$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}, \cdots (x_{n+1}=\sqrt{2+x_n})$ 收敛，并求其极限。

学生得分：10.0 分）

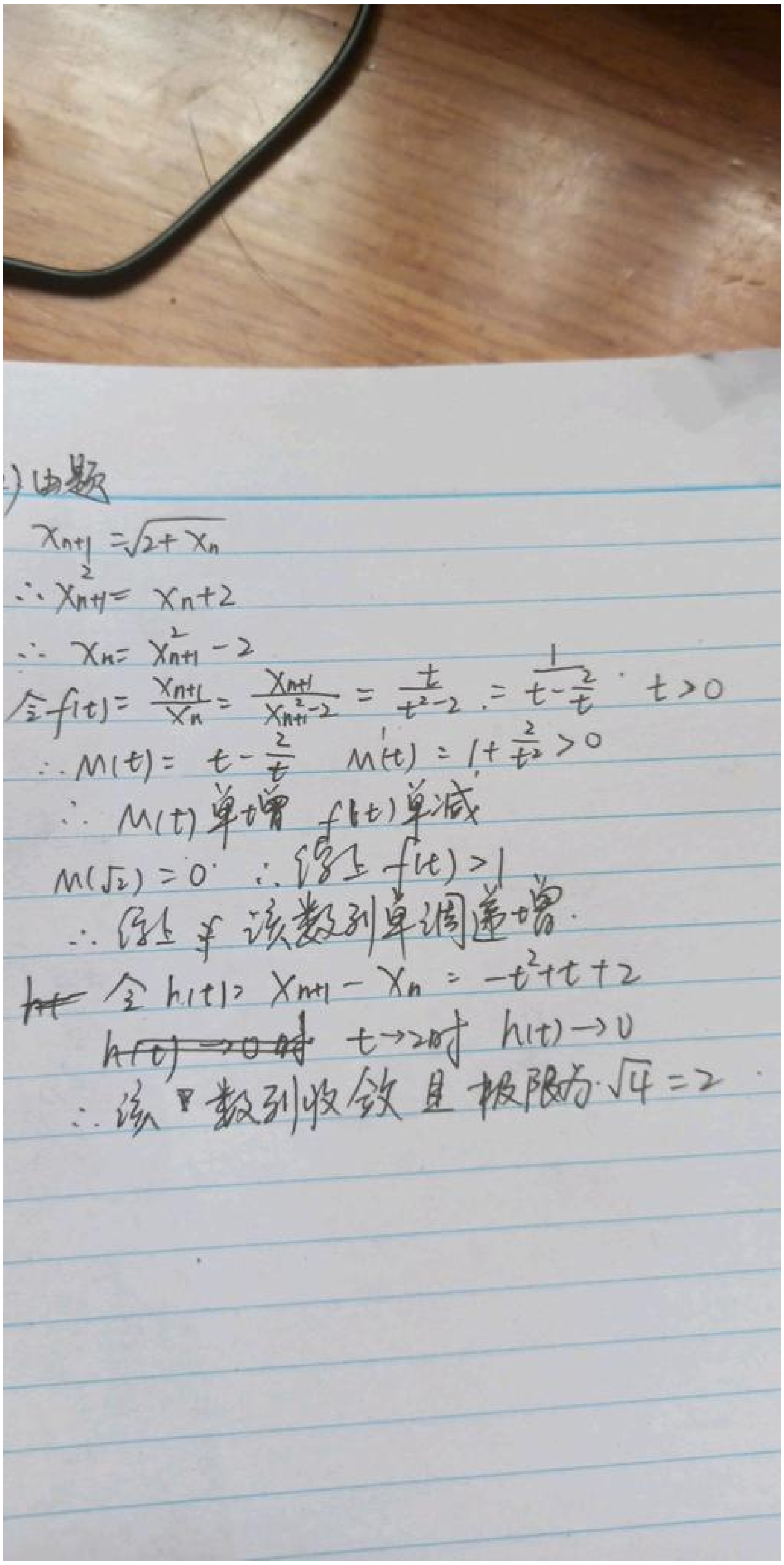
正确答案

解：$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}$，所以数列单调，又因为$x_2>x_1$，所以数列单调递增$---4$分

因为$0<x_1<2$，假设$x_n<2$，则有：$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{4}=2$，所以数列有上界2. 根据单调有界原理，数列收敛。$---4$分

假设数列的极限为A，则有：$A=\sqrt{2+A}$，所以有$A=2---2$分

何思海的答案



(1) 由题

$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$

$\therefore x_{n+1}^2=x_n+2$

$\therefore x_n=x_{n+1}^2-2$

令 $f(t)=\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}^2-2}=\dfrac{t}{t^2-2}=\dfrac{1}{t-\frac{2}{t}}$ $t>0$

$\therefore M(t)=t-\dfrac{2}{t}$ $M'(t)=1+\dfrac{2}{t^2}>0$

$\therefore M(t)$ 单增 $f(t)$ 单减

$M(\sqrt{2})=0$ $\therefore$ 综上 $f(t)>1$

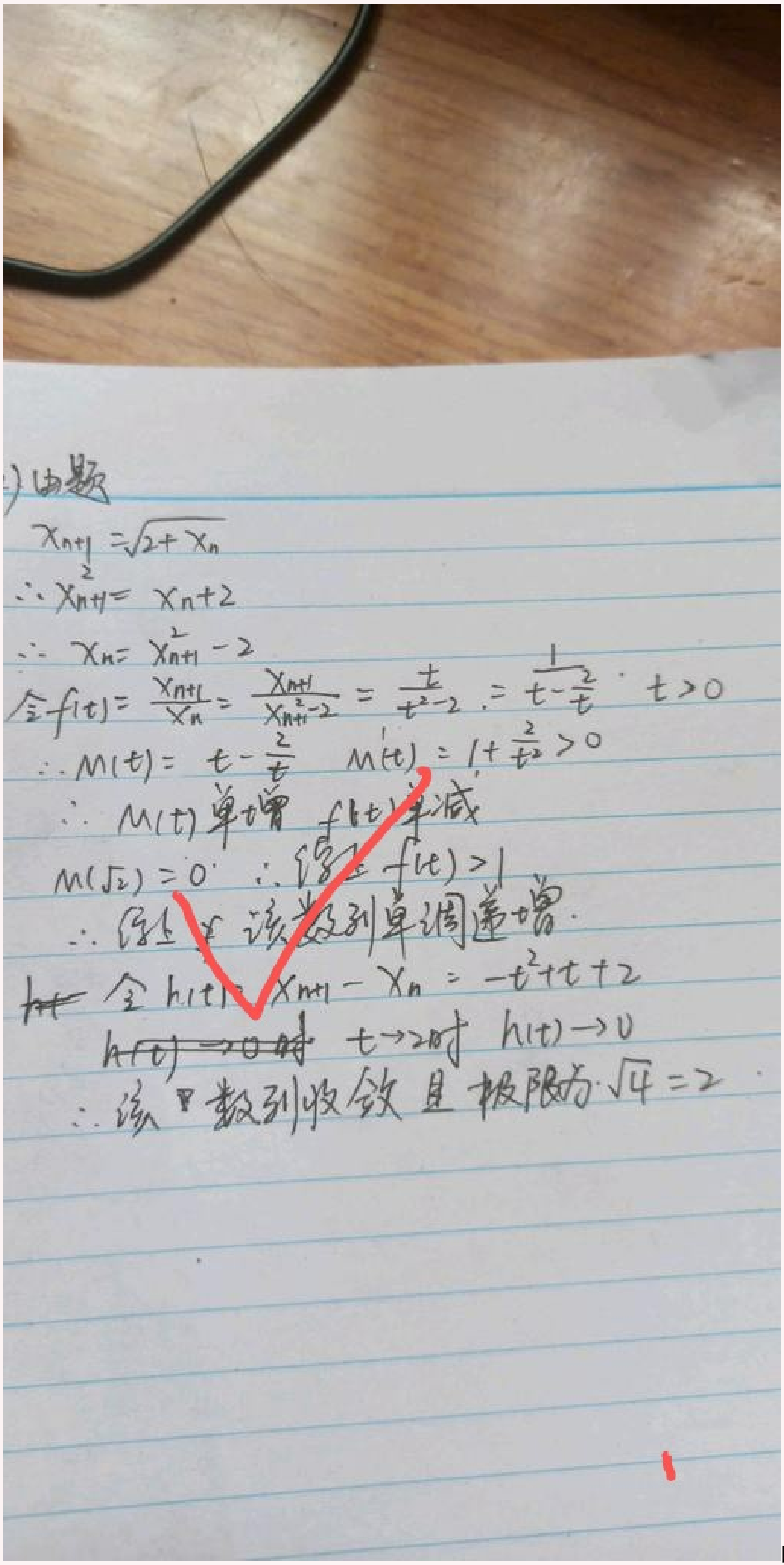
$\therefore$ 综上 ~~x~~ 该数列单调递增.

~~h~~ 令 $h(t)=x_{n+1}-x_n=-t^2+t+2$

~~h(t)→0时~~ $t\to 2$时 $h(t)\to 0$

$\therefore$ 该数列收敛且极限为 $\sqrt{4}=2$

批语



(2) 由题

$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$

$\therefore x_{n+1}^2=x_n+2$

$\therefore x_n=x_{n+1}^2-2$

令 $f(t)=\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_{n+1}}{x_{n+1}^2-2}=\frac{t}{t^2-2}=\frac{1}{t-\frac{2}{t}}$ $t>0$

$\therefore M(t)=t-\frac{2}{t}$ $M'(t)=1+\frac{2}{t^2}>0$

$\therefore M(t)$ 单增 $f(t)$ 单减

$M(\sqrt{2})=0$ $\therefore$ 综上 $f(t)>1$

$\therefore$ 综上 该数列单调递增.

令 $h(t)=x_{n+1}-x_n=-t^2+t+2$

~~h(t)→0时~~ $t\to 2$时 $h(t)\to 0$

$\therefore$ 该数列收敛且极限为 $\sqrt{4}=2$.

回答正确

3、

求函数$u=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}(x>0,y>0,z>0,a>0)$约束下的极值。

学生得分：10.0 分）

正确答案

解：作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right),---4\text{ 分}$$

令，

$$\begin{cases}L_x=yz-\lambda\left(\frac{1}{x^2}\right)=0\\ L_y=xz-\lambda\left(\frac{1}{y^2}\right)=0---3\text{ 分}\\ L_z=xy-\lambda\left(\frac{1}{z^2}\right)=0\end{cases}$$

解之得到

$$xyz=\frac{\lambda}{3a}\rightarrow x=y=z=3a$$

所以极小值为：$f(3a,3a,3a)=27a^3---3$ 分

何思海的答案

(3)

~~$x+y$~~

$u = xyz \le (\frac{x+y}{2})^2 \cdot z$

又 $z = \frac{1}{a} - \frac{x+y}{xy}$

$\therefore u \le \frac{1}{a}(\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x+y}{2})^2 \cdot \frac{x+y}{xy}$

$\le \frac{1}{a} \cdot \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x+y)^3}{4xy} \le \frac{(x+y)^2}{4a} - \frac{(x+y)^3}{4} \cdot \frac{4}{(x+y)^2}$

即 $\frac{(x+y)^2}{4a} - (x+y)$

~~令 $x+y=t$~~ 令 $x+y=t$. $h(t) = \frac{t^2}{4a} - t$.

~~时 $u \le \frac{t^2}{4a} - t = h(t)$ $(t>0)$~~

~~$h(t)_{min} = a$.~~

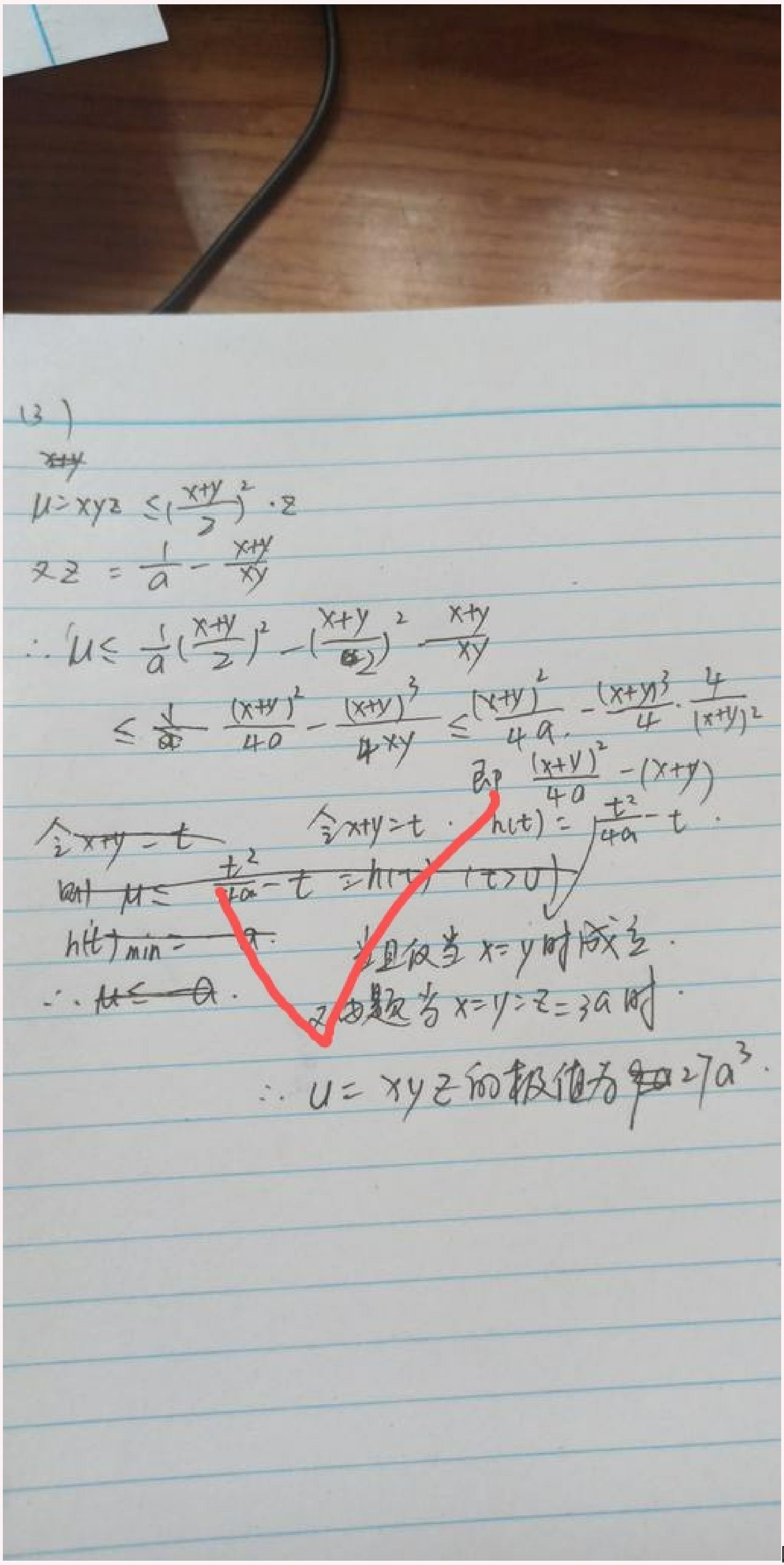
$\therefore$ ~~$u \le a$~~.

当且仅当 $x=y$ 时成立.

又由题当 $x=y=z=3a$ 时.

$\therefore u = xyz$ 的极值为 $27a^3$.

批语



回答正确

4、

设$b>a>0$,证明$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}$

学生得分：10.0 分）

正确答案

因为 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi},\xi\in(a,b)---7分$，

所以有，

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}---3分$$

何思海的答案

(4) $\cancel{\ln\frac{b}{a}>}$

由题

即证 $\frac{\ln b-\ln a}{b}>\frac{b-a}{b}$

$\ln\frac{b}{a}>1-\frac{a}{b}$

令 $\frac{b}{a}=t$ 则 $t>1$

$\ln t>1-\frac{1}{t}$

即证 $\ln t+\frac{1}{t}-1>0$

令 $f(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1>0$

$f'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}$

$=\frac{t-1}{t^2}>0$

$\therefore f(t)$ 单调递增

$f(1)=0$ $\therefore f(t)>0$

$\therefore \ln t+\frac{1}{t}-1>0$ 得证

$\therefore \frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{1}{b}$ 得证

批语

(4) ~~$\ln\frac{b}{a} >$~~

由题

即证 $\ln b-\ln a > \frac{b-a}{b}$

$\ln\frac{b}{a} > 1-\frac{a}{b}$

令 $\frac{b}{a}=t$ 则 $t>1$

$\ln t > 1-\frac{1}{t}$

即证 $\ln t + \frac{1}{t} - 1 > 0$

令 $f(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1>0$

$f'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}$

$=\frac{t-1}{t^2}>0$

$\therefore f(t)$ 单调递增

$f(1)=0 \therefore f(t)>0$

$\therefore \ln t+\frac{1}{t}-1>0$ 得证

$\therefore \frac{\ln b-\ln a}{b-a} > \frac{1}{b}$ 得证

回答正确