C卷参考答案

中国石油大学（北京）2018—2019学年第二学期

《数学分析II》期末补考试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、　填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1} = 2$

2. 设$f(x,y,z) = x^2yz$，则$\nabla\times(\nabla f)$（梯度的旋度）为：0

3. 设函数$u = xyz$，它在点$A(5,1,2)$处沿到点$B(9,4,14)$的方向$\overrightarrow{AB}$上的方向导数为：$\frac{98}{13}$

4. 设L是圆周$\begin{cases}x = a\cos t\\ y = a\sin t\end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$，方向为逆时针方向。则第二类曲线积分$\oint_L xdy = \pi a^2$

5. 交换积分$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy$的次序为：$\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx + \int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 函数$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$点处（D）

   (A)不连续；　(B)偏导数存在；　(C)可微；　(D)沿着任意方向的方向导数存在.

2. 已知函数$f(x,y)$在$(0,0)$的某邻域内有定义，且$f_x(0,0) = 2, f_y(0,0) = 1$，则（B）

   (A)曲面$z = f(x,y)$在$(0,0,f(0,0))$处的法向量为$(2,1,1)$；

   (B)曲线$\begin{cases}z = f(x,y)\\ y = 0\end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$(1,0,2)$；

   (C)曲线$\begin{cases}z = f(x,y)\\ y = 0\end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$(2,0,1)$；

   (D)$dz|_{0,0} = 2dx + dy$.

3. 设 D 为单位圆域$x^2+y^2 \le 1$，$I_1 = \iint_D (x^3+y^3)dxdy, I_2 = \iint_D (x^4+y^4)dxdy$，$I_3 = \iint_D (2x^6+y^5)dxdy$则（D）

   (A)$I_1 < I_2 < I_3$；　　(B)$I_3 < I_1 < I_2$；

   (C)$I_3 < I_2 < I_1$；；　　(D)$I_1 < I_3 < I_2$.

4. 设L是圆周$x^2+y^2 = 1$，$\vec{n}$是L的外法线向量，$u(x,y) = \frac{1}{12}(x^4+y^4)$，则$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds$等于（A）

   （A）$\frac{\pi}{2}$,　（B）$-\frac{\pi}{2}$,　（C）$\frac{3\pi}{2}$,　（D）$-\frac{3\pi}{2}$

5. 设S：$x^2+y^2+z^2 = a^2(z \ge 0), S_1$为S在第一卦限中的部分，则(C)

   （A）$\iint_S xdS = 4\iint_{S_1} xdS$;　（B）$\iint_S ydS = 4\iint_{S_1} ydS$;

   （C）$\iint_S zdS = 4\iint_{S_1} zdS$;　(D)$\iint_S xyzdS = 4\iint_{S_1} xyzdS$

三、解答题（每题 6 分，共 30 分）

1. 求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\ (n \in Z^+)$

   解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\,d\sin x = [\cos^{n-1}x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x \quad ---3$$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-\cos^2 x]\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x$,所以得到：

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\cdots=\begin{cases}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, & n=2m\\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1\end{cases} \quad ---3$$

2. 设$\begin{cases}F(x,y,u,v)=u^2+v^2-x^2-y=0\\ G(x,y,u,v)=-u+v-xy+1=0\end{cases}$，求$\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u}$.

解：将方程的两边关于 u 求导得到：

$$\begin{cases}2u-2xx_u-y_u=0\\ -1-yx_u-xy_u=0\end{cases} \quad ------(4)分$$

解方程得到：

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{2xu+1}{2x^2-y}\quad ---(1)分$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{2x+2yv}{2x^2-y}\quad ---(1)分$$

3. 计算由抛物线$y^2=mx,y^2=nx$和直线$y=ax,y=bx$所围区域 D 的面积($0<m<n,0<a<b$)。

解：$\iint_D 1\,dxdy$采用坐标变换$\begin{cases}x=u/v^2\\ y=u/v\end{cases}$，则原式积分为：

$$\iint_D 1\,dxdy=\int_a^b\frac{1}{v^4}dv\int_m^n udu \quad ---3$$

$$=\frac{(n^2-m^2)(b^3-a^3)}{6a^3b^3}\quad ---3$$

4. 计算积分$\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$，其中V为椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

解：$\iiint_V\frac{z^2}{c^2}dxdydz=2\int_0^c\frac{z^2}{c^2}dz\iint_{D_z}dxdy\quad ---2$

$$=2\int_0^c\frac{z^2}{c^2}\pi ab\left[1-\frac{z^2}{c^2}\right]dz=2\pi ab\left[\frac{c}{3}-\frac{c}{5}\right]=\frac{4}{15}\pi abc\quad ---2$$

同理可得：$\iiint_V\frac{y^2}{b^2}dxdydz=\frac{4}{15}\pi abc=\iiint_V\frac{x^2}{a^2}dxdydz$

所以有：$\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz=\frac{4}{5}\pi abc\quad ---2$

5. 设$u=u(x,y)$可微，在极坐标变换下$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$下，证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

证明：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}---(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}---(2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2---(2)$$

四、　解答题（本题 10 分）验证积分$\int_L (2x+\sin y)dx+(x\cos y)dy$

与路径无关，并求原函数$u(x,y)$使得$du(x,y)=(2x+\sin y)dx+(x\cos y)dy$

解：$P(x,y)=2x+\sin y\,,Q(x,y)=x\cos y$，所以有：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y=\frac{\partial P}{\partial y}$$

所以得出积分与路径无关。……………………5

$$(2x+\sin y)dx+(x\cos y)dy=d[x^2+x\sin y+C]$$

所以，有$u(x,y)=x^2+x\sin y+C$。…………5

五、解答题（本题 10 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\ge 0)$的下侧。

解：添加辅助面 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 1)$，取上侧，（2 分）

则根据高斯公式可得：

$$I+\iint\limits_{\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (3\text{ 分})$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}3r^2dz=-2\pi\int_0^1(3r^3-3r^5)\,\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2} \qquad (2\text{ 分})$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$　　（2 分）

故 $I-\pi=-\dfrac{\pi}{2}$，即：$I=\dfrac{\pi}{2}$。　　（1 分）

六、计算题（本题 10 分）计算$\oint_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中L为$x+y+z=1$与三个坐标平面的交线，从z轴正向看，方向为逆时针方向。

解：由斯托克斯公式：

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz=\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} dS---4$$

$$=\iint_S \frac{\sqrt{3}}{3}[2y-2z+2z-2x+2x-2y]\,dS---4$$

$$=0---2$$

七、　　解答题（本题 10 分）已知空间中 n 个点的坐标分别是

$$A_i(x_i,y_i,z_i),\qquad i=1,2,\cdots n$$

试求一点，使得它与这 n 个点距离的平方和最小。

解：设目标函数为：

$$L(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\ldots\ldots\ldots 4$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}2(x-x_i)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n}2(y-y_i)=0\ldots\ldots\ldots 4 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=\sum_{i=1}^{n}2(z-z_i)=0 \end{cases}$$

得到解为：

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$$

$$z=\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i}{n}$$

………………..2