补考卷

中国石油大学（北京）2018—2019 学年第一学期

《数学分析》I 期末补考试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 函数$y=e^{x^2}$的导函数为________________

2. 函数$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$在$x=0$处连续，则α的取值范围为：__________

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}(\alpha>0)=$____________________

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=$ ____________________

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right]=$____________________

6. 函数$\frac{x^3}{x^2+2x-3}$的渐近线为：________________

7. $\int x\ln x\,dx=$ ________________

8. $\int\frac{1}{1+x^3}dx=$ ______________

9. 函数$y=\ln(1+x)$在$x_0=0$点带有拉格朗日余项的n阶泰勒展式为：________________

10. 设$y=x\sinh x$, 其中$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, 则$(x\sinh x)^{(100)}=$ ________________________

二、证明题（本题 10 分）利用单调有界原理证明数列

$$x_1=\sqrt{3},\quad x_{n+1}=\sqrt{3x_n}, n=1,2,\cdots$$

收敛，并求其极限。

三、解答题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 指出函数$f(x)=\frac{x}{\sin x}$的间断点及其类型.

2. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$.

3. 设$\begin{cases}x= & at^2\\ y & =bt^3\end{cases}$, 求$\frac{d^2y}{dx^2}(a,b\in R)$.

4. 求$\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos 3x\,dx$

四、证明题（本题 10 分） 证明$\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。

五、解答题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 利用<u>**拉格朗日中值**</u>定理证明：$ny^{n-1}(x-y) < x^n - y^n < nx^{n-1}(x-y)$，其中 $0 < y < x, n > 1$.

2. 利用<u>**函数的单调性**</u>证明：$\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

3. 利用<u>**泰勒展开式**</u>求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x} - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

4. 利用<u>**凸函数的定义**</u>证明对于任何非负实数a, b，有：$a\ln a + b\ln b \geq (a+b)[\ln(a+b) - \ln 2]$

六、解答题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 设$f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, x < 0 \end{cases}$, 计算定积分$\int_0^4 f(x-2)\,dx$

2. 计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$