中国石油大学（北京）2019-2020-1《数学分析III》期末补考试卷(1)

姓名：王杰　学号：2018011766　课程：《数学分析III》　班级：默认班级　提交时间：2020-06-05 17:31　ip：219.159.23.4　成绩：64.0分

一、 单选题 （ 题数：10，共 40.0 分）

1、

$\cos x$的麦克劳林级数为（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

C、 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

正确答案： A　　　王杰的答案：A

2、

设$\lambda>0$，则级数$\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{\lambda}{\ln n})$

学生得分：0.0 分）

A、 条件收敛

B、 绝对收敛

C、 发散

D、 可能收敛，也可能发散

正确答案： A　　　王杰的答案：B

3、

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-a)^n}{n}$在$x>0$时发散，在$x=0$处收敛，则常数$a=$( )

学生得分：4.0 分）

A、 1

B、 -1

C、 2

D、 -2

正确答案： B　　　　王杰的答案：B

4、

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n b_n$

学生得分：4.0 分）

A、 绝对收敛

B、 条件收敛

C、 发散

D、 敛散性不能确定

正确答案： A　　　　王杰的答案：A

5、

下列四个级数中发散的是( )

学生得分：0.0 分）

A、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

B、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

C、 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

D、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n[3+(-1)^n]^n}{6^n}$

正确答案： A　　　　王杰的答案：C

6、

设$f(x)$是以2为周期的函数，它在一个周期内的表达式为

$f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x & 1<x\leq 2 \end{cases}$，则

$f(x)$的傅立叶级数

$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$在

$x=3$处收敛于( )

学生得分：4.0 分）

A、 1

B、 1/2

C、 3/2

D、 0

正确答案： C　　　王杰的答案：C

7、

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

学生得分：0.0 分）

A、 同时收敛或同时发散

B、 敛散性不同

C、 都发散

D、 都收敛

正确答案： A　　　王杰的答案：D

8、

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n^2}$的收敛半径为（）

学生得分：4.0 分）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 4

正确答案： A　　　王杰的答案：A

9、

正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛是级数

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛的

学生得分：0.0 分）

A、 充要条件

充分条件

C、 必要条件

D、 既非充分条件，又非必要条件

正确答案： B　　　　王杰的答案：C

10、

设
$f(x)$是以
2π为周期的函数，它在一个周期内的表达式为
$f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases}$，则它的Fourier展开式中（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 只有正弦项

B、 只有余弦项

C、 既有正弦项，又有余弦项

D、 以上结果都不正确

正确答案： B　　　　王杰的答案：B

二、 简答题 （题数：5，共 40.0 分）

1、

求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$的收敛区间。

学生得分：7.0 分）

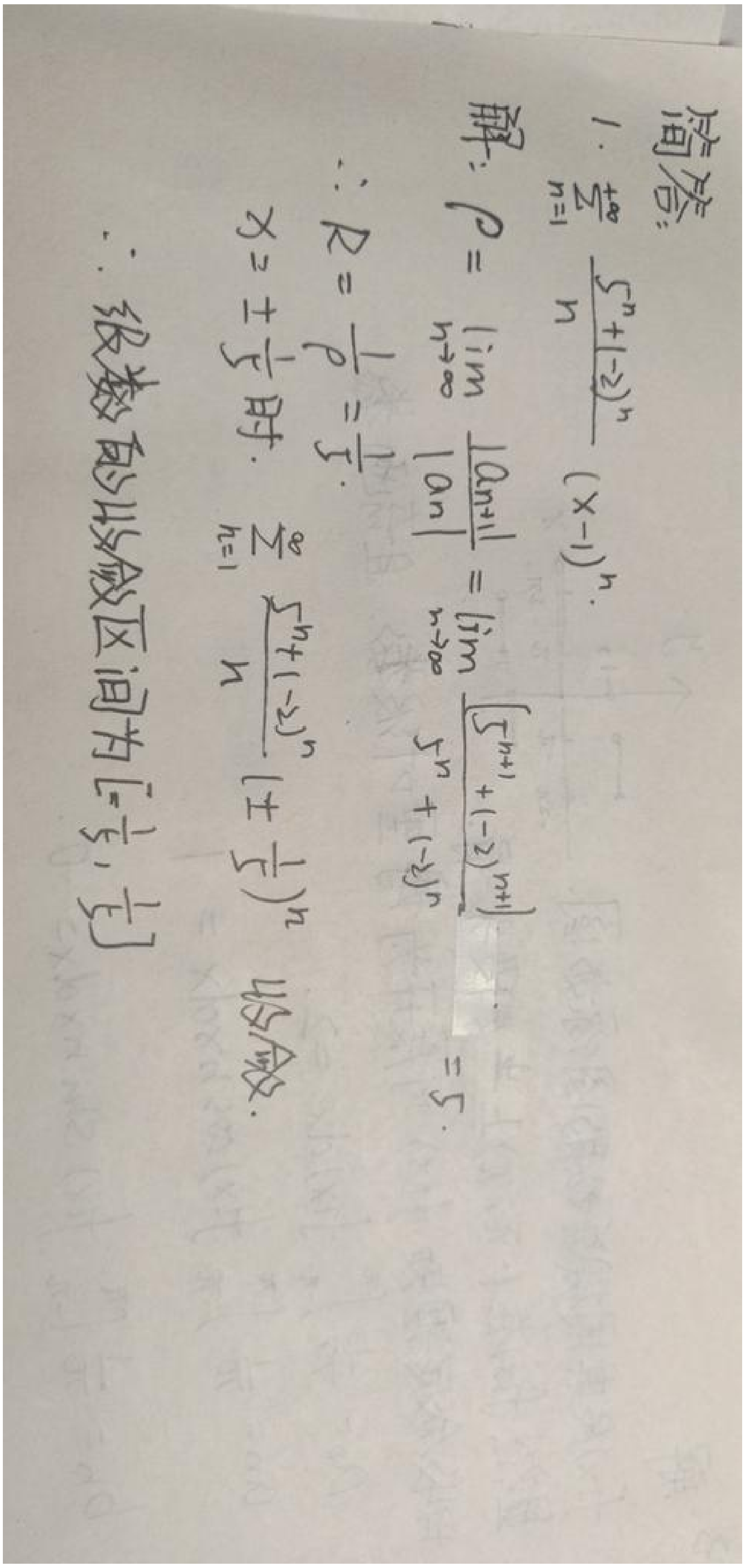
正确答案

因为$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{5^n+(-2)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n}}=5---4分$,

所以幂级数的收敛半径为$R=\frac{1}{5}---3分$

故，级数的收敛区间为：$|x-1|<\frac{1}{5},\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right).---1分$

王杰的答案


简答：

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$.

解：$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+(-2)^{n+1}}{5^n+(-2)^n} = 5$.

∴ $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{5}$.

$x = \pm\frac{1}{5}$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-2)^n}{n}(\pm\frac{1}{5})^n$ 收敛.

∴ 级数的收敛区间为 $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$

批语

最后一步不正确。

2、

设$u_n(x) = \frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$，

证明该函数列在$[0,1]$上一致收敛到0。

学生得分：8.0 分）

正确答案

证明: $|u_n(x)-0| = \left|\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)-0\right| \le \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}, x\in[0,1]---$5分,

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$,

所以, $u_n(x)\rightrightarrows 0---$3分

王杰的答案

2.

证: $u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)=0$.

令 $u(x)=0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|u_n(x)-u(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)\right| =0$.

∴ 该函数列在[0,1]上一致收敛于0.

批语

回答正确

3、

设$f(x)$是以

2π为周期的函数，它在一个周期上的表达式为:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$ 。求

$f(x)$的傅立叶级数展开式。

学生得分：6.0 分）

正确答案

计算傅立叶系数:

$a_n = 0(n = 0, 1, 2, \cdots,)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

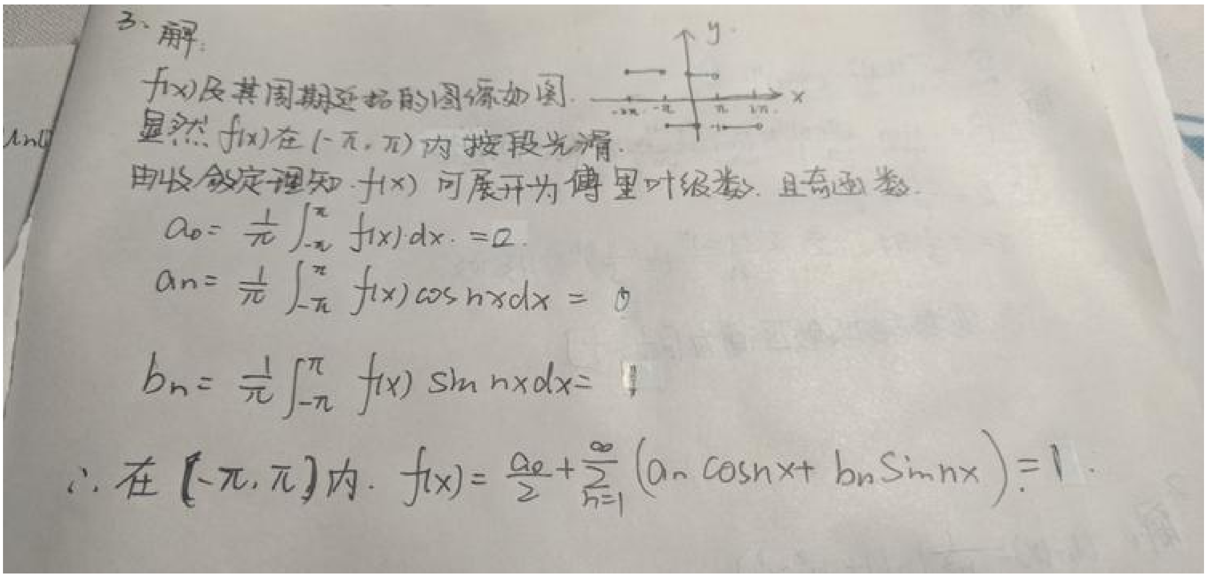
$$= \begin{cases} \dfrac{4}{(2m+1)\pi}, & n = 2m+1 \\ 0, & n = 2m \end{cases} ---5分$$

,

所以，函数的展开式为:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x, (x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots) ---3分$$

王杰的答案



3、解:

f(x)及其周期延拓的图像如图.

显然 f(x)在 $(-\pi, \pi)$ 内按段光滑.

由收敛定理知 f(x) 可展开为傅里叶级数. 且奇函数.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$

$\therefore$ 在 $[-\pi, \pi]$ 内. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = 1$.

批语

过程基本正确，部分解答不对。

4、

求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域。

学生得分：7.0 分)

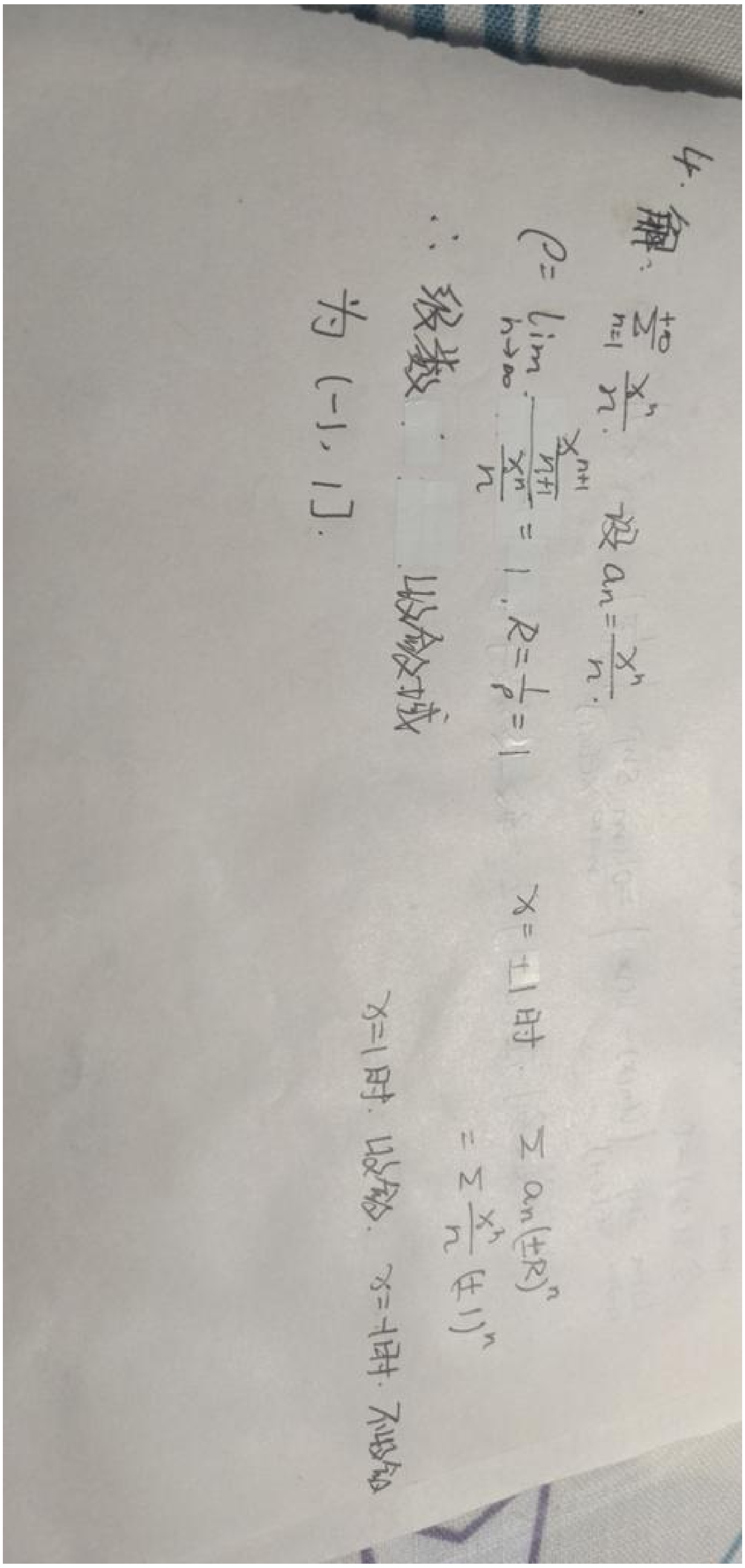
正确答案

$$因为 \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1,所以级数的收敛半径R = 1 ---4分,$$

当 $x = 1$ 时，级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，当 $x = -1$ 时，级数 $\sum\frac{(-1)^n}{n} ---3分$ 收敛,

所以级数的收敛域为: $[-1, 1) ---1分$。

王杰的答案



4. 解: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. 设 $a_n = \frac{x^n}{n}$.

$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} = 1$, $R = \frac{1}{\rho} = 1$

$x = \pm 1$ 时. $\sum a_n (\pm R)^n = \sum \frac{x^n}{n} (\pm 1)^n$

$x=1$ 时. 收敛. $x=-1$ 时. 不收敛

∴ 级数 收敛域 为 $(-1, 1]$.

批语

最后收敛域不正确。

5、

证明级数
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$在
$(-\infty, +\infty)$上一致收敛。

学生得分：4.0 分）

正确答案

因为，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$,有$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} - - - 4$**分**，由M判别法知，

级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛。$- - -4$**分**

王杰的答案

5. 解：

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$. $-\frac{1}{n^2}\le\frac{\cos nx}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$. $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

即 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 设 $f(x)=0$.

$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$.

∴ 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛

批语

前半部分正确。

三、 计算题 （ 题数：2，共 20.0 分）

1、

将函数$y=\sin x$在

$x_0=\dfrac{\pi}{4}$ 处展开成为幂级数，并指出收敛域。

学生得分：4.0 分）

正确答案

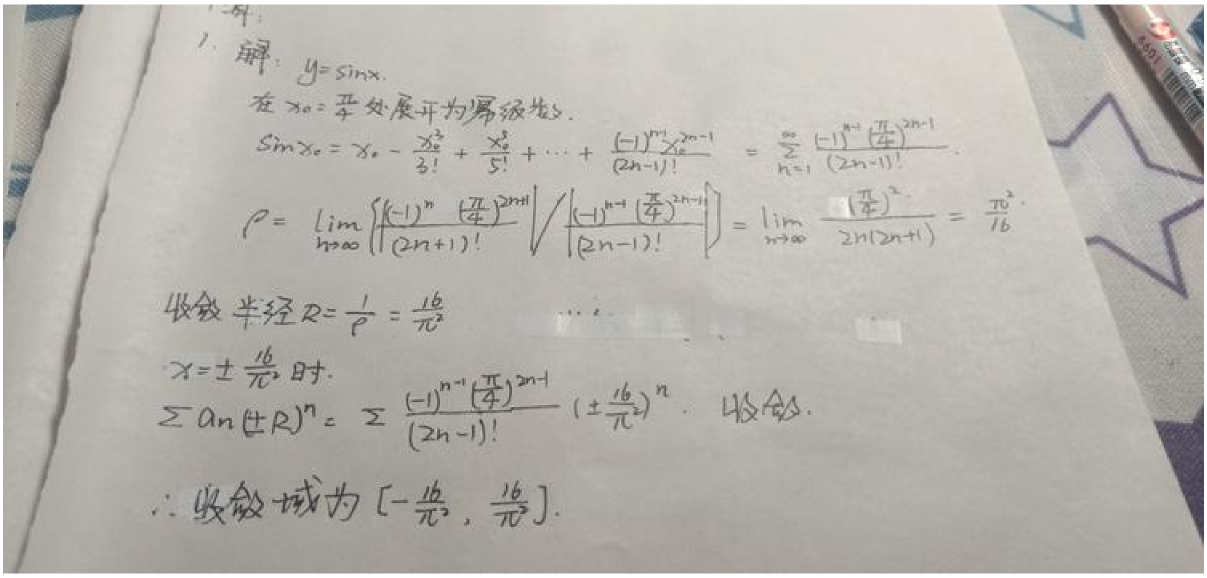
解：$\sin x=\sin\left[(x-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{\pi}{4}\right]$----2分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+\cos(x-\dfrac{\pi}{4})\right]$ --------2分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}\right]$ ------5分

$x\in(-\infty,+\infty)$-----1分

王杰的答案


解:

1. 解: $y=\sin x$.

在 $x_0=\frac{\pi}{4}$ 处展开为幂级数.

$\sin x_0 = x_0-\frac{x_0^3}{3!}+\frac{x_0^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x_0^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{\pi}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}\middle/\frac{(-1)^{n-1}(\frac{\pi}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{\pi}{4})^2}{2n(2n+1)} = \frac{\pi^2}{16}$.

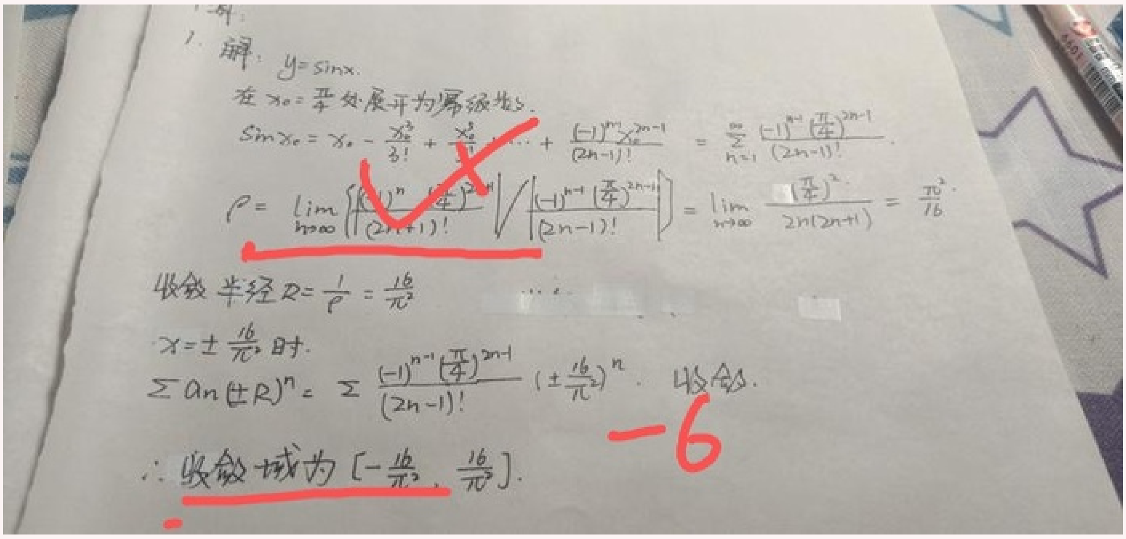
收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=\frac{16}{\pi^2}$

$x=\pm\frac{16}{\pi^2}$ 时.

$\sum a_n(\pm R)^n = \sum\frac{(-1)^{n-1}(\frac{\pi}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!}(\pm\frac{16}{\pi^2})^n$. 收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $[-\frac{16}{\pi^2},\frac{16}{\pi^2}]$.

批语



1. 解: $y=\sin x$.

在 $x_0=\frac{\pi}{4}$ 处展开为幂级数.

$\sin x_0 = x_0 - \frac{x_0^3}{3!} + \frac{x_0^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x_0^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{\pi}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \Big/ \left|\frac{(-1)^{n-1}(\frac{\pi}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{\pi}{4})^2}{2n(2n+1)} = \frac{\pi^2}{16}$.

收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=\frac{16}{\pi^2}$

$x=\pm\frac{16}{\pi^2}$ 时.

$\sum a_n(\pm R)^n = \sum\frac{(-1)^{n-1}(\frac{\pi}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(\pm\frac{16}{\pi^2}\right)^n$. 收敛.

∴ 收敛域为 $[-\frac{16}{\pi^2}, \frac{16}{\pi^2}]$.

-6

2、

求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)(a>1)$.

学生得分：4.0 分）

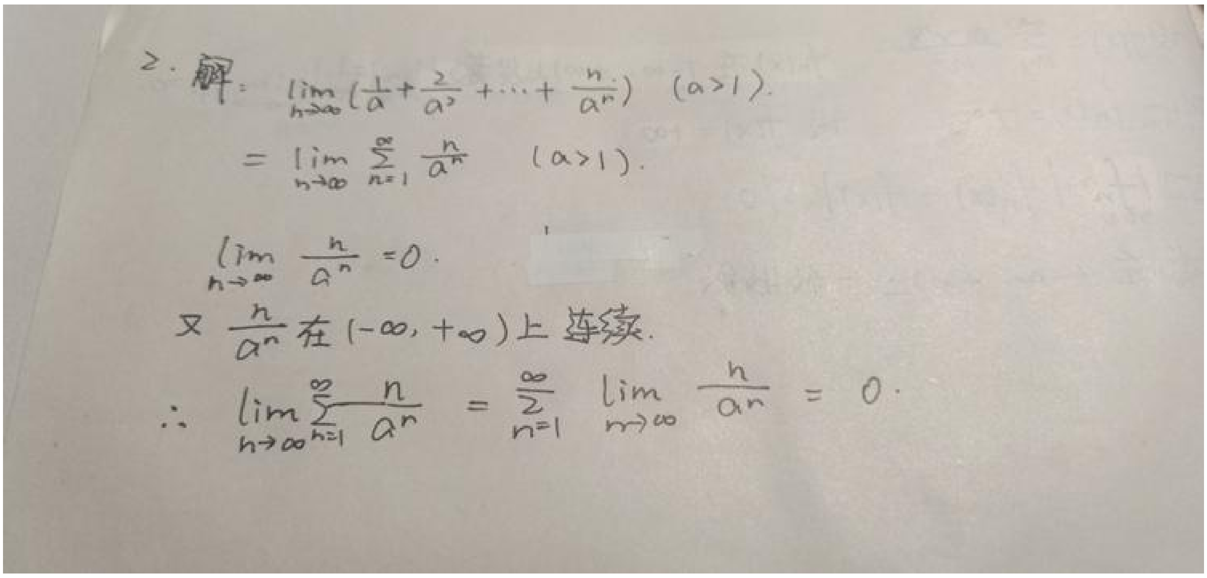
正确答案

解：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, x\in(-1,1)$--------4分

$= x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$--------5分

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right) = \frac{a}{(1-a)^2}$ -------1分

王杰的答案



2. 解: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$ $(a>1)$.

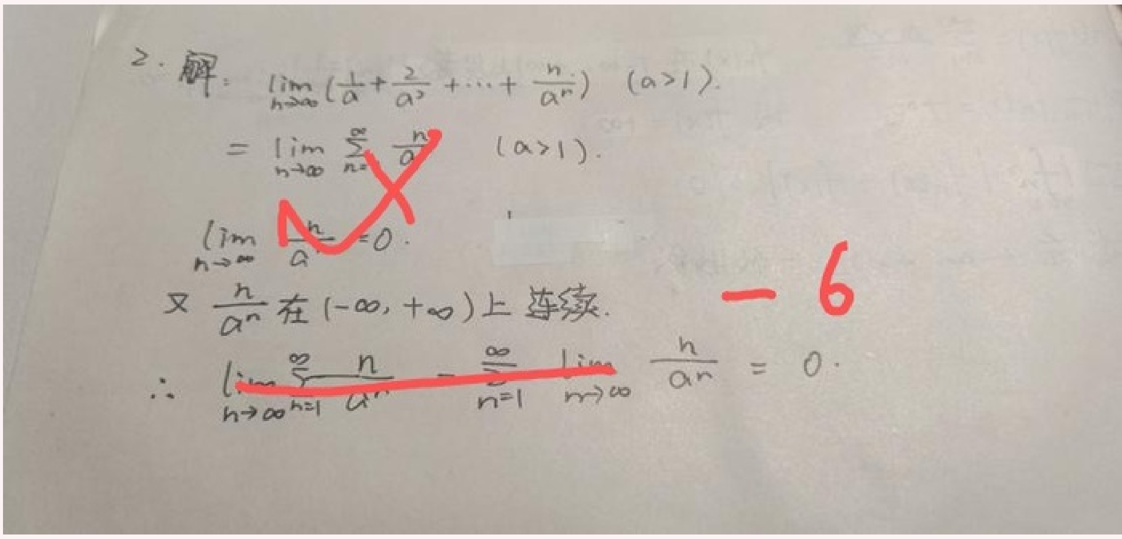
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ $(a>1)$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

又 $\frac{n}{a^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

∴ $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

批语


2. 解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$ $(a>1)$.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ $(a>1)$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

又 $\frac{n}{a^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

$\therefore\ \cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{n}{a^n}=0$.

−6

构造正确，求解错误。