

# B 卷

中国石油大学（北京）2017—2018 学年第二学期

## 《数学分析 II》期末考试试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_

学号：\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、 填空题（每题 3 分，共 30 分）

1.  $\int_0^{2\pi} \sin(2x) \sin(3x) dx =$  \_\_\_\_\_

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right] =$  \_\_\_\_\_

3. 设函数  $u = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ , 它在点  $(a, b, c)$  的梯度为: \_\_\_\_\_

4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1} =$  \_\_\_\_\_

5. 交换积分  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$  的次序为: \_\_\_\_\_

6. 设  $D = \{(x, y) | \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ , 则  $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$  \_\_\_\_\_

7. 设  $L$  是圆周  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ , 方向为逆时针方向。则第二类曲线积分

$$\oint_L x dy - y dx =$$

8. 设  $L$  是半圆周  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$ 。则第一类曲线积分  $\int_L x^2 + y^2 ds =$  \_\_\_\_\_

9. 设  $S$  为平面  $x + y + z = 1$  在第一象限中的部分, 方向为上侧。则第二类曲面积分

$$\iint_S x + y + z dx dy =$$

10. 设  $S$  为平面  $x + y + z = 1$  在第一象限中的部分, 则第一类曲面积分

$$\iint_S x + y + z dS =$$

二、 解答题（每题 6 分，共 30 分）

1. 求  $\int_0^2 f(x-1) dx$ , 其中  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$

2. 设 $f(x, y)$ 可微, 证明: 在坐标变换

$$x = u \cos \theta - v \sin \theta, y = u \sin \theta + v \cos \theta$$

下,  $(f_x)^2 + (f_y)^2$  是一个形式不变量。即若

$$g(u, v) = f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta)$$

则必有 $(f_x)^2 + (f_y)^2 = (g_u)^2 + (g_v)^2$ .

3. 设 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v \\ y = e^u - u \cos v \end{cases}$ 求 $u_x, v_x$

4. 计算积分 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ 其中 $D$ 是由 $x = 0, y = 0, x + y = 1$ 所围成的区域。

5. 计算积分  $\iiint_V \frac{z^2}{c^2} dx dy dz$ , 其中V为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

三、 解答题（本题 10 分）验证积分

$$\int_L (2x + \sin y)dx + (x \cos y)dy$$

与路径无关，并求原函数  $u(x, y)$  使得  $du(x, y) = (2x + \sin y)dx + (x \cos y)dy$

四、 计算题（本题 10 分）计算积分

$$\oiint_S y(x - z)dydz + x^2 dzdx + (y^2 + xz)dxdy$$

其中S 为  $x = y = z = 0, x = y = z = a$  六个平面所围成的正方体并取外侧。

五、解答题（本题 10 分）讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点的可微性。

六、解答题（本题 10 分）已知空间中  $n$  个点的坐标分别是

$$A_i(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

试求一点，使得它与这  $n$  个点距离的平方和最小。