含參變量積分作業

武國寧

1 含參變量正常積分

1. 求下列極限
   (a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$
   (b) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$
2. 設$F(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y$,求$F'(x)$.
3. 應用對參變量的微分法，求下列積分
   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\,\mathrm{d}x\ \left(a^2+b^2\neq 0\right)$
   (b) $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\,\mathrm{d}x$
4. 應用積分號下的積分法，求下列積分：
   (a) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x(b>a>0)$
   (b) $\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x(b>a>0)$
5. 設
$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$
$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$
   其中$0<k<1$(這兩個積分稱為完全橢圓積分).

(a) 試求$E(k)$與$F(k)$的導數，並以$E(k), F(k)$來表示它們；

(b) 證明$E(k)$滿足方程

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0$$

.