中国石油大学（北京）2019-2020-1《数学分析III》期末补考试卷(1)

姓名：耿威风 学号：2018011782 课程：《数学分析III》 班级：默认班级 提交时间：2020-06-05 17:26 ip：114.242.62.32 成绩：74.0 分

一、 单选题 （ 题数：10，共 40.0 分）

1、

$\cos x$的麦克劳林级数为（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

C、 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

正确答案： A 耿威风的答案：A

2、

设$\lambda>0$，则级数$\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{\lambda}{\ln n})$

学生得分：0.0 分）

A、 条件收敛

B、 绝对收敛

C、 发散

D、 可能收敛，也可能发散

正确答案： A 耿威风的答案：C

3、

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-a)^n}{n}$在$x>0$时发散，在$x=0$处收敛，则常数$a=(\ )$

学生得分：0.0 分）

A、 1

B、 -1

C、 2

D、 -2

正确答案： B 耿威风的答案：A

4、

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n b_n$

学生得分：0.0 分)

A、 绝对收敛

B、 条件收敛

C、 发散

D、 敛散性不能确定

正确答案： A 耿威风的答案：B

5、

下列四个级数中发散的是( )

学生得分：0.0 分)

A、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

B、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$

C、 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

D、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n[3+(-1)^n]^n}{6^n}$

正确答案： A 耿威风的答案：B

6、

设$f(x)$是以2为周期的函数，它在一个周期内的表达式为

$f(x)=\begin{cases} x+1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$，则

$f(x)$的傅立叶级数

$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi x+b_n \sin n\pi x)$在

$x=3$处收敛于( )

学生得分：4.0 分）

A、 1

B、 1/2

C、 3/2

D、 0

正确答案： C　　　耿威风的答案：C

7、

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

学生得分：4.0 分）

A、 同时收敛或同时发散

B、 敛散性不同

C、 都发散

D、 都收敛

正确答案： A　　　耿威风的答案：A

8、

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2}$的收敛半径为（）

学生得分：4.0 分）

A、 1

B、 2

C、 3

D、 4

正确答案： A　　　耿威风的答案：A

9、

正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛是级数

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛的

学生得分：0.0 分）

A、 充要条件

充分条件

C、 必要条件

D、 既非充分条件，又非必要条件

正确答案： B　　　　耿威风的答案：A

10、

设

$f(x)$是以

2π为周期的函数，它在一个周期内的表达式为

$f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases}$，则它的Fourier展开式中（ ）

学生得分：4.0 分）

A、 只有正弦项

B、 只有余弦项

C、 既有正弦项，又有余弦项

D、 以上结果都不正确

正确答案： B　　　　耿威风的答案：B

二、 简答题 （ 题数：5，共 40.0 分）

1、

求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$的收敛区间。

学生得分：8.0 分）

正确答案

因为$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{5^n+(-2)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n}}=5---4$分，

所以幂级数的收敛半径为$R=\frac{1}{5}---3$分

故，级数的收敛区间为：$|x-1|<\frac{1}{5}$，$\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right).---1$分

耿威风的答案

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n+(-2)^n}{n} (x-1)^n .$$

解: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} [5(x-1)]^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot [-2(x-1)]^n$

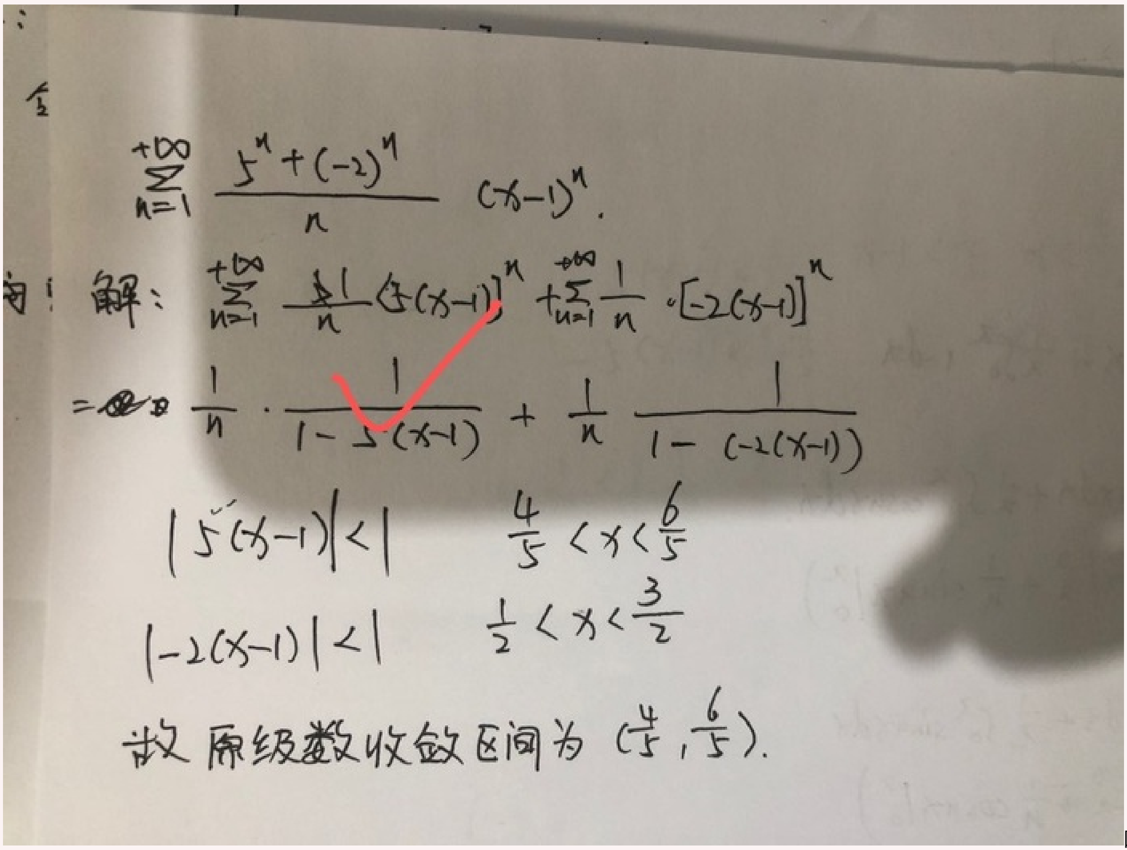
$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-5(x-1)} + \frac{1}{n} \frac{1}{1-(-2(x-1))}$

$|5(x-1)|<1 \qquad \frac{4}{5}<x<\frac{6}{5}$

$|-2(x-1)|<1 \qquad \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

故原级数收敛区间为 $(\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$.

批语


$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n.$$

解：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(5(x-1))^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cdot[-2(x-1)]^n$

$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-5(x-1)}+\frac{1}{n}\frac{1}{1-(-2(x-1))}$

$|5(x-1)|<1$ $\quad \frac{4}{5}<x<\frac{6}{5}$

$|-2(x-1)|<1$ $\quad \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

故原级数收敛区间为 $(\frac{4}{5},\frac{6}{5})$.

回答正确

2、

设$u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$,

证明该函数列在$[0,1]$上一致收敛到0。

学生得分：3.0 分）

正确答案

证明：$|\ u_n(x)-0\ |\ =\left|\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)-0\right|\le\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n},x\in[0,1]---5$分,

因为 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$,

所以，$u_n(x)\rightrightarrows 0---3$分

显示答案

耿威风的答案

$u_n(x) = \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2x^2)$.

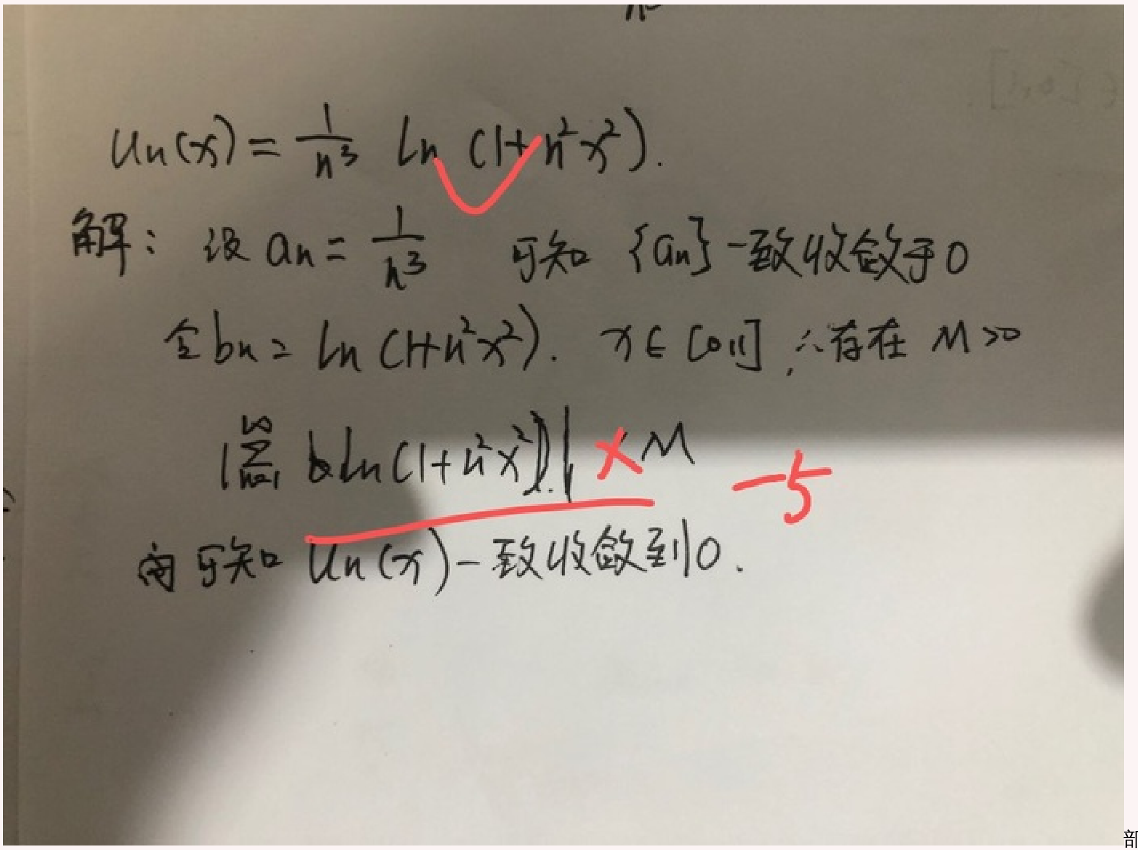
解：设 $a_n = \frac{1}{n^3}$ 可知 $\{a_n\}$ 一致收敛于 0

令 $b_n = \ln(1+n^2x^2)$. $x \in [0,1]$，∴存在 $M>0$

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \cancel{b} \ln(1+n^2x^2)\right| < M$

由 可知 $u_n(x)$ 一致收敛到 0.

批语



$u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$.

解：设 $a_n=\frac{1}{n^3}$ 可知 $\{a_n\}$ 一致收敛于0

令 $b_n=\ln(1+n^2x^2)$. $x\in[0,1]$ ∴存在 $M>0$

$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\ln(1+k^2x^2)\right| \le M$

-5

由 可知 $u_n(x)$ 一致收敛到0.

部分正确

3、

设$f(x)$是以

2π为周期的函数，它在一个周期上的表达式为：

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$ 。求

$f(x)$的傅立叶级数展开式。

学生得分：7.0 分）

正确答案

计算傅立叶系数：

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots,)$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{(2m+1)\pi}, & n=2m+1\\ 0, & n=2m\end{cases}---5分$$

,

所以，函数的展开式为：

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x,(x\neq0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots)---3分$$

耿威风的答案

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi . \end{cases}$$

解:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot dx$$

$$= 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\sin nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= 0.$$

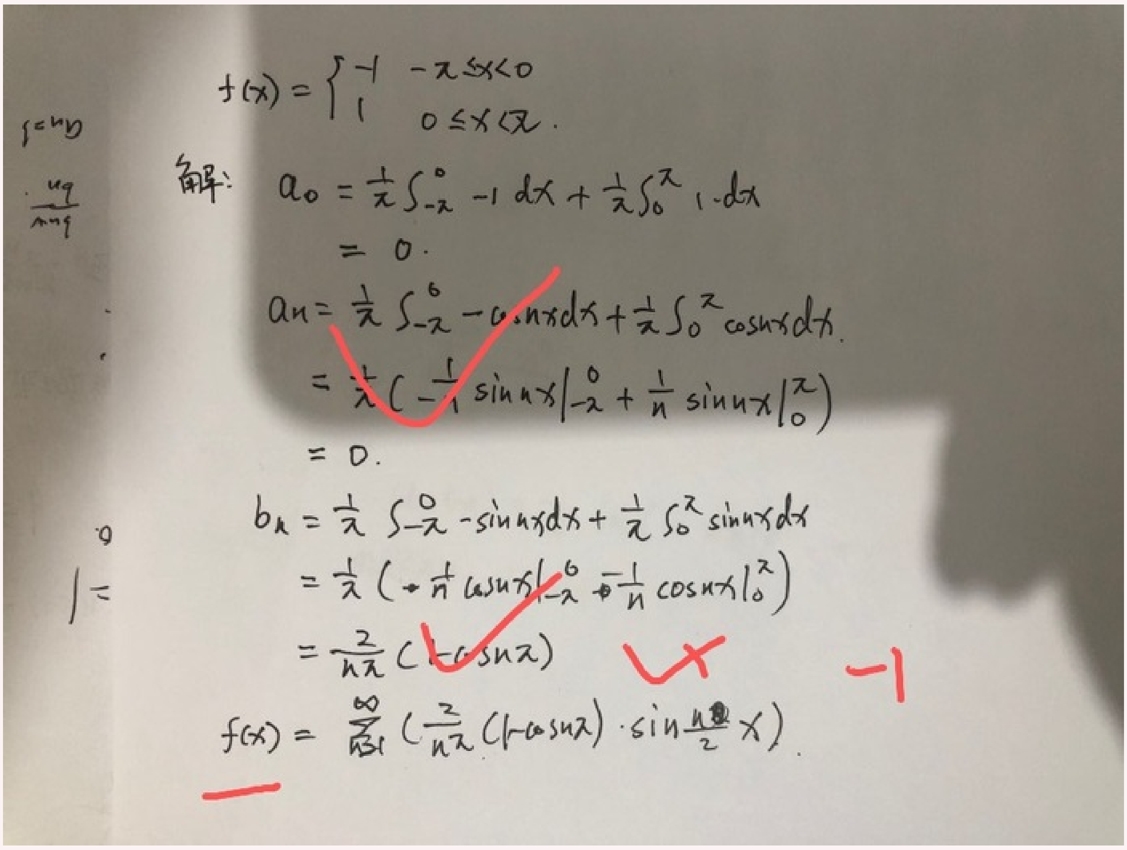
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos nx \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\cdot \sin nx\right).$$

批语



$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

解: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-1\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot dx$

$=0.$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)$

$=0.$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)$

$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$

-1

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\cdot\sin\frac{n}{2}x\right).$

4、

求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛域。

学生得分：8.0 分）

正确答案

因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$,所以级数的收敛半径$R=1---4$分,

当$x=1$时，级数$\sum\frac{1}{n}$发散，当$x=-1$时，级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}---3$分收敛,

所以级数的收敛域为：$[-1,1)---1$分。

耿威风的答案

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

$$R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

又∵ $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 调和级数发散

$x=-1$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 交错级数收敛.

∴ 收敛域为 $[-1,1)$.

批语

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

$$R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

又∵ $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 调和级数发散

$x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 交错级数收敛.

∴收敛域为 $[-1,1)$.

回答正确

5、

证明级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$在

$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

学生得分：8.0 分）

正确答案

因为，$\forall x \in (-\infty,+\infty)$,有$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $---$ 4分，由M判别法知，

级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。$---$4分

耿威风的答案

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos nx$.

令 $a_n = \cos nx$ 则 $|a_n| \leq 1$

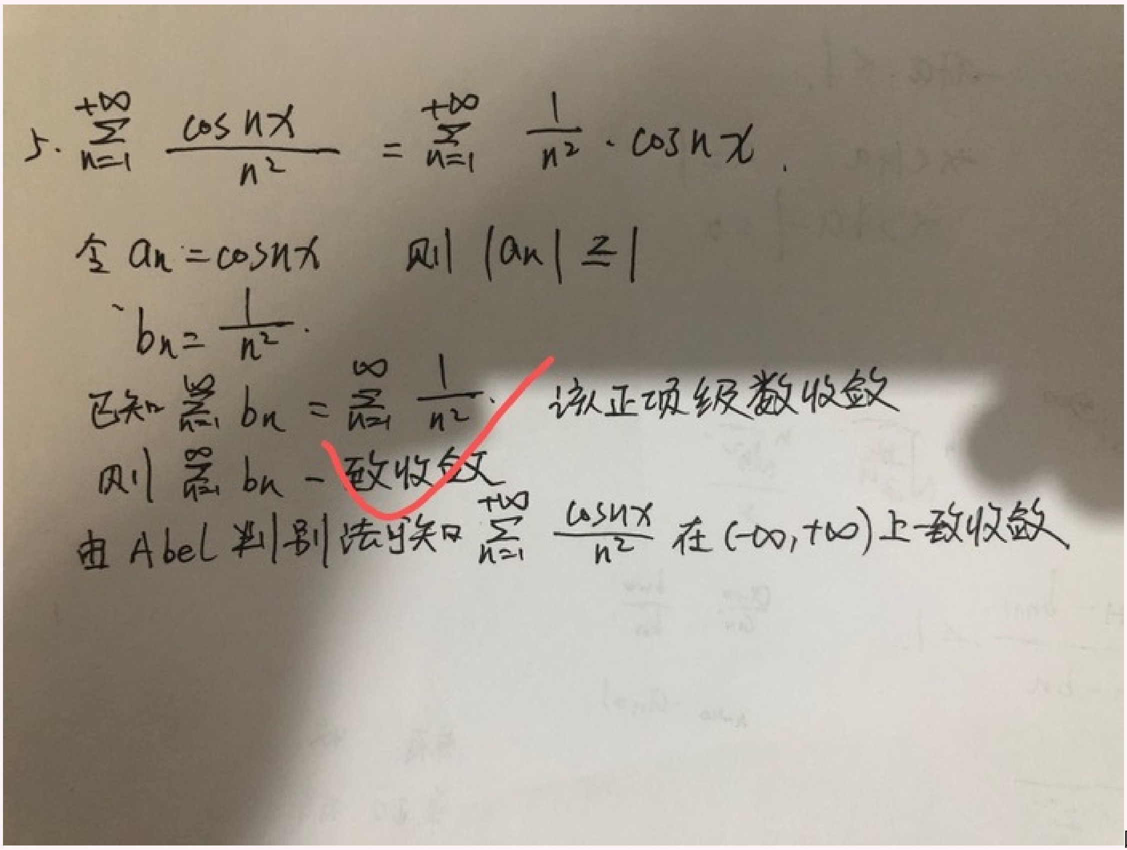
$b_n = \frac{1}{n^2}$.

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. 该正项级数收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 一致收敛

由 Abel 判别法可知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛

批语



5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\cos nx$.

令 $a_n=\cos nx$　则 $|a_n|\le 1$

$b_n=\frac{1}{n^2}$.

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$　该正项级数收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 一致收敛

由Abel判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛

回答正确

三、 计算题 （ 题数：2，共 20.0 分）

1、

将函数$y=\sin x$在

$x_0=\frac{\pi}{4}$ 处展开成为幂级数，并指出收敛域。

学生得分：10.0 分）

正确答案

解：$\sin x=\sin\left[(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}\right]$----2分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4})\right]$ ---------2分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}\right]$ -------5分

$x\in(-\infty,+\infty)$-----1分

耿威风的答案

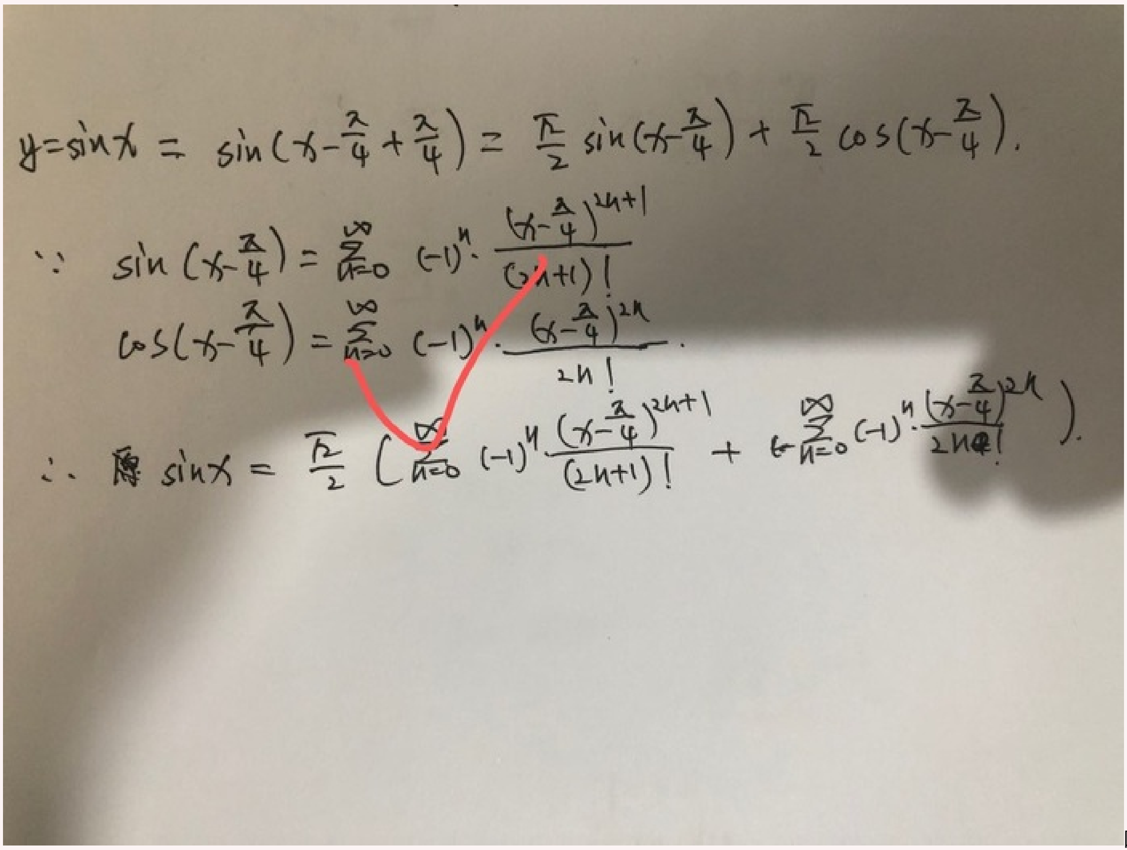
$$y=\sin x = \sin\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\because \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n!}.$$

$$\therefore \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n!}\right).$$

批语



$$y=\sin x = \sin\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\because \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n!}.$$

$$\therefore \text{原}\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n!}\right).$$

回答正确

2、

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)(a>1).$

学生得分：10.0 分）

正确答案

解：令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n, x\in(-1,1)$--------4分

$=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^n)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$--------5分

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)=\frac{a}{(1-a)^2}$-------1分

耿威风的答案

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)\ (a>1).$$

解：令 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}$.

$$\frac{1}{a}S_n=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^{n+1}}$$

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)S_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots+\frac{1}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}}.$$

$$S_n=\frac{a}{a-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}\right)-\frac{a}{a-1}\cdot\frac{n}{a^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}-0=\frac{a}{(a-1)^2}$$

批语

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)\ (a>1).$$

解：令 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}$.

$$\frac{1}{a}S_n=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^{n+1}}$$

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)S_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots+\frac{1}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}}.$$

$$S_n=\frac{a}{a-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}\right)-\frac{a}{a-1}\cdot\frac{n}{a^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}-0=\frac{a}{(a-1)^2}$$

回答正确