中国石油大学（北京）

2019 — 2020 学年第 I 学期

《数学分析 I》结课考试试卷

（A 卷）

考试方式：闭卷考试

班级：

姓名：

学号：

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

注：1. 试卷共 8 页，请勿漏答。

2. 试卷（及所附草稿纸）不得拆开，所有答案均写在题后空白

一、 填空题（15 分，每小题 3 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{2n} =$ ____________.

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}D(x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$。若函数$f(x)$在$x=0$点连续，则$\alpha$的取值范围为：___________.

3. $\lfloor x\rfloor$表示下取整函数，则极限$\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor$ =____________.

4. 设常数$k>0$，则函数$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$在$(0,+\infty)$内的零点的个数为:_______.

5. $x=1$为函数$y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$ ____________间断点（填：可去型，跳跃型，无穷型）。

二、 选择题（15 分，每小题 3 分）

1. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则（　）

（A）$F(x)$是奇函数的**充分条件**为$f(x)$为偶函数

（B）$F(x)$是偶函数的**充分条件**为$f(x)$为奇函数

（C）$F(x)$是周期为 T 的函数的**充分条件**为$f(x)$为周期为 T 的函数

（D）$F(x)$是严格单调函数的**充分条件**为$f(x)$严格单调函数

2. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=2$(其中$a,b$为常数)，则（　）

（A）$a=0,b\in R$　　　　（B）$a=0,b=2$

（C）$a\in R,b=0$　　　　（D）$a\in R,b\in R$

3. 若函数$f(x)$与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上皆可导，且$f(x)<g(x)$，则必有（　）

（A）$f(-x)>g(-x)$　　　　（B）$f'(x)<g'(x)$

（C）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　　　　（D）$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$

4. 设$f(t)=\begin{cases}\sin\frac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则$F(x)$在$x=0$处（　）

（A）不连续　　　　（B）连续但不可导

（C）可导且$F'(0)\neq 0$　　　　（D）可导且$F'(0)=0$

5. 若函数$f(x)$的一个原函数是$(x-2)e^x$，则$f'(x+1)=$(　)

（A）xe^x　　　　（B）xe^{x+1}

（C）$(x+1)e^{x+1}$　　　　（D）$(x+1)e^x$

三、　解答题（30 分，每小题 6 分）

1. 计算积分$\int\frac{1}{\sin^2 x+9\cos^2 x}\mathrm{d}x$

2. 设曲线为$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$，求该曲线在对应$t = 1$处的切线和法线方程。

3. 若$y = |(x-1)(x-2)^2|$，求$y'(x)(x \neq 1,2), y'(2)$，进一步讨论$y'(1)$的存在性。

4. 设$y = x^2 e^x$, 求$y^{20}(x)$

5. 利用定积分的定义计算极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right]$

四、　解答题（8 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+\sin^3 x)}$

五、 解答题（9 分）设$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中$a_i$为确定的正整数且$a_i>0, a_i\neq 1(i=1,2,\cdots,n,n\geq 2)$，求下列极限：

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$；（3）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

六、 证明题（15 分，每小题 5 分）

（1） 证明对于任意的正整数n, 有$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$成立；

（2） 证明$\frac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}(x \neq y)$

（3） 证明$y = \sin x$在$(-\infty, +\infty)$上一致连续

七、　计算题（8 分，每小题 4 分）

（1）$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$

（2）在什么条件下（a,b,c满足什么条件），积分$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数？（注：有理函数为$\frac{P(x)}{Q(x)}$,其中$P(x),Q(x)$为两个关于x的多项式）