

《數學分析I》 18-19-1試卷A解答

武國寧

January 4, 2019

1 填空題(每題3分，共30分)

(1) . 設函數 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 在 $x_0 = 0$ 點連續，則 $\alpha > 0$.

(2) . 函數 $y = x^x$ 的導函數為： $y = e^{x \ln x}, y' = x^x (\ln x + 1)$.

(3) . $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right] = \underline{1}$.

(4) . $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_\alpha x}{x^\alpha} (\alpha > 0, \neq 1) = \underline{0}$.

(5) . $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - n^2}} \right] = \underline{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2}}$.

(6) . $\int x \sin x dx = \underline{-x \cos x + \sin x + C}$.

(7) . 函數 $\frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$ 的漸近線為： $x - 2$.

(8) . $\int \frac{1}{x(1+x)} dx = \underline{\ln \left| \frac{x}{1+x} \right| + C}$.

(9) . 設 $y = x \cosh x$, 則 $(x \cosh x)^{(100)} = \underline{(x \cosh x)^{(100)} = x \cosh x + 100 \sinh x}$.

(10) . 函數 $y = \ln(1+x)$ 在 $x_0 = 0$ 點帶有拉格朗日型余項的 n 階泰勒展開式
為： $\ln x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} (0 < \theta < 1)$.

2 解答題(每小題5分，共20分)

- (1) 指出函數 $f(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ 的間斷點及其類型。

解：討論函數在 $x_0 = 0$ 處的情況。 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right)$ 極限不存在，因為

取 $x'_n = \frac{1}{n}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = 0$$

取 $x''_n = \frac{1}{n + 1/2}$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x''_n) = \frac{1}{2}$$

所以 $x_0 = 0$ 為函數的第二類間斷點。

——3分.

在 $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ 函數的間斷點類型為跳躍性間斷點。

——2分.

- (2) 求極限 $\lim_{x \rightarrow 0+} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right]$

解：

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0+} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}} \end{aligned}$$

——3分.

$$= 1$$

———2分.

(3) 設 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$

———3分.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) * \left(\frac{dt}{dx} \right) \\ &= \frac{-2}{(\sin t + \cos t)^2} * \frac{1}{e^t(\sin t + \cos t)} \\ &= -\frac{2}{e^t(\sin t + \cos t)^3} \end{aligned}$$

———2分.

(4) 求積分 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 3x \, dx$

解：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 3x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x) \, dx$$

———3分.

$$= 0 - 0 = 0$$

———2分.

3 證明題(本題10分)

利用單調有界原理證明數列

$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}, \dots, (x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n = 1, 2, \dots, x_1 = \sqrt{2}.)$$

收斂，並求其極限。

Proof. a). 首先證明數列的單調性：
因為數列 $x_n > 0$,

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - \sqrt{2 + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2 + x_n} + \sqrt{2 + x_{n-1}}}$$

所以 $x_{n+1} - x_n$ 與 $x_n - x_{n-1}$ 同正負，因為 $x_2 - x_1 > 0$ ，所以 $x_{n+1} - x_n > 0$ ，故數列 $\{x_n\}$ 單調遞增。

——4分.

b). 下面證明數列的有界性：

因為 $x_1 = \sqrt{2} < 2$ ，假設 $x_n < 2$ ，則有： $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$

——4分.

綜上所述數列收斂。

c). 求極限值：

假設極限為 A ，則有 $A = \sqrt{2 + A}$ 得到 $A = 2$ 。

——2分.

□

4 證明題(本題10分)

證明 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致連續。

Proof. $f(x)$ 在 I 上一致連續 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$ such that:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

$\forall \epsilon > 0$, 因為

$$|\sin x_1 - \sin x_2| < |x_1 - x_2|$$

——5分.

所以取 $\delta = \epsilon$ ，對於任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ，只要 $|x_1 - x_2| < \delta$ ，就有：

$$|\sin x_1 - \sin x_2| < |x_1 - x_2| < \epsilon.$$

所以， $\sin x$ 在 \mathbb{R} 上一致連續。

——5分.

□

5 解答題(毎小題5分，共20分)

- (1) 利用函數的單調性證明： $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

Proof. 令

$$f(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$$

$f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + x^2 > 0 (x \in (0, \frac{\pi}{3}))$ 所以函數 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 單調遞增。

——3分.

因為 $f(0) = 0$, 所以有：

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

——2分.

□

- (2) 利用Lagrange Mean-Value Theorem證明： $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} (0 < a < b)$

Proof. 因為

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi} (\xi \in (a, b))$$

——3分.

所以有

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

——2分.

□

- (3) 利用凹凸函數的定義證明： $2 \arctan \left(\frac{a+b}{2} \right) \geq \arctan a + \arctan b, \forall a, b \in \mathbb{R}^+$.

Proof. 令

$$f(x) = \arctan x,$$

有

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

所以 $f(x) = \arctan x$ 為 \mathbb{R}^+ 上的上凸函數。

———3分.

根據上凸函數的性質，有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$

所以有：

$$2 \arctan \left(\frac{a+b}{2} \right) \geq \arctan a + \arctan b, \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

———2分.

□

- (4) 利用函數的Taylor級數展開求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

Proof.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)$$

———3分.

所以有：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)}{x^4} \\ &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

———2分.

□

6 解答題(毎小題5分，共10分)

(1) 計算極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

解：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} 2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{2x^2}}$$

——3分.

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0$$

——2分.

(2) 計算定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin x}{1 + \sin^2 x}$$

——3分.

$$= \arctan(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

——2分.