

# 浙江大学

## 线性系统与数字控制



中文论文题目: **1/4 车辆主动悬架控制器设计与优化**

英文论文题目: **1/4 Vehicle Active Suspension Controller  
Design and Optimization**

姓 名: **吴浩**

学 号: **3200102027**

所 在 学 院: **机械工程学院**

课 程 名 称: **线性系统与数字控制**

指 导 老 师: **雷勇**

**2023.6.20**

## 摘 要

随着车辆普及率的上升，从最初的追求家用车辆的基本性能指标（动力性、安全性和经济型）逐渐上升到追求车辆自身的行驶特性和运动特性（舒适性、平顺性和操稳性）。车辆悬架系统是车辆车体与车轮之间所有传力的连接装置的总称，由弹性元件、阻尼元件和导向机构等构成。车辆悬架系统用于连接车体和车轮，传递作用于其间的力和力矩，对由路面不平引起的振动起到缓和和衰减的作用。

主动悬架系统在原被动悬架系统的基础上，引入可以根据控制条件产生任意方向、任意大小的控制力的作动器，将其与原弹簧和阻尼器并联构成新的悬架系统。作动器是车辆主动悬架系统的核心部件，其性能好坏对整车振动控制的实施及行驶性能有着至关重要的影响。

先进的悬架系统之所以能够使车辆具有良好的行驶性能，一方面由作动器或阻尼器的先进性决定，另一方面由对作动器或阻尼器施加的主动控制算法的有效性决定。本文就 1/4 车辆 2 自由度系统的主动悬架和被动悬架，对其连续系统和离散系统的稳定性、能控能观性进行分析，利用全维状态观测器进行观测，同时配置其极点的位置。此外，通过 PID 控制器、LQR 控制器、状态反馈 $H_\infty$ 等常见的控制方法控制其达到理想的控制结果，比照各个控制器的性能和方法，理解各个控制器的原理、效果和作用。

**关 键 词：**主动悬架、稳定性、PID 控制器、LQR 控制器、全维状态观测器、 $H_\infty$

## ABSTRACT

With the rise of vehicle popularity, from the initial pursuit of the basic performance indicators of household vehicles (power, safety and economy) gradually rose to the pursuit of the vehicle's own driving characteristics and sporting characteristics (comfort, smoothness and stability of operation). Vehicle suspension system is a general term for all the connecting devices between the vehicle body and the wheels that transmit force, consisting of elastic elements, damping elements and guiding mechanism, etc. The vehicle suspension system is used to connect the vehicle body and wheels, transfer the force and moment acting between them, and play a role in moderating and attenuating the vibration caused by the unevenness of the road.

Active suspension system on the basis of the original passive suspension system, the introduction of the actuator can be based on the control conditions to produce any direction, any size of the control force, the original spring and dampers in parallel to form a new suspension system. The actuator is the core component of the vehicle active suspension system, and its performance has a crucial impact on the implementation of vibration control and driving performance of the vehicle.

The reason why an advanced suspension system can make the vehicle have good driving performance is determined by the advancedness of the actuator or damper on the one hand, and the effectiveness of the active control algorithm applied to the actuator or damper on the other hand.

In this paper, we analyze the stability and energy control energy observability of the continuous and discrete systems with respect to the active and passive suspensions of a 2-degree-of-freedom system of a 1/4 vehicle, using a full-dimensional state observer, while configuring the positions of its poles. In addition, common control methods such as PID controller, LQR controller, and state feedback  $H_\infty$  are used to control them to achieve the desired control results, comparing the performance and methods of each controller to understand the principle, effect, and role of each controller.

**KEY WORDS:** Active suspension, stability, PID controller, LQR controller, full dimensional state observer,  $H_\infty$

## 目录

摘 要 .....	2
ABSTRACT .....	3
1 问题重述.....	6
1.1 研究背景 .....	6
1.2 1/4 车辆 2 自由度悬架系统数学模型 .....	6
1.2.1 悬架系统数学模型 .....	6
1.2.2 仿真参数.....	8
1.3 1/4 车辆路面激励模型 .....	8
1.4 悬架系统振动特性.....	8
2 系统稳定性.....	9
2.1 1/4 车辆 2 自由度悬架系统稳定性分析 .....	9
2.1.1 连续系统李亚普诺夫稳定性判别 .....	9
2.1.2 连续系统稳定性分析 .....	9
2.1.3 离散系统稳定性判别 .....	12
2.2 能控性与能观性.....	14
3 PID 控制.....	15
3.1 PID 控制器设计 .....	15
3.1.1 连续系统 PID 控制器设计 .....	15
3.1.2 离散系统 PID 控制器设计 .....	17
3.2 PID 控制器参数整定 .....	17
3.2.1 连续系统 PID 控制器参数整定.....	17
3.2.2 离散系统 PID 控制器参数整定.....	20
4 极点配置与状态估计 .....	21
4.1 极点配置 .....	21
4.2 状态估计 .....	22
5 状态反馈 $H_\infty$ 控制.....	24
5.1 模型建立 .....	24

5.2 性能指标与控制器.....	25
<b>6 LQR 控制器设计 .....</b>	<b>27</b>
<b>7 总结与体会.....</b>	<b>31</b>
7.1 总结与展望 .....	31
7.2 感想.....	31
7.3 课程建议 .....	32
<b>参考文献 .....</b>	<b>33</b>
<b>附录 .....</b>	<b>34</b>

# 1 问题重述

## 1.1 研究背景

车辆是一个振荡系统，时时刻刻与复杂路面相接触。车辆的振荡不仅影响到人和运输的货物，而且会影响城市建筑群的耐久性，产生负面效益。因此，需要悬挂系统来解决车辆在驾驶中的舒适性和安全性问题。

被动悬架系统由阻尼和刚度不变的弹簧和阻尼器组合，其只能对某些路面的颠簸情况作出响应，难以兼顾舒适性和安全性。主动悬架系统在被动悬架系统的基础上，在簧载质量与非簧载质量之间安装平行于减震器的作动器，通过作动器输出的控制力，降低由路面激励引起的簧载质量振动，从而改善舒适性。车辆主动悬架系统的核心部件是作动器，其性能好坏对整车振动控制的实施及行驶性能起到重要的影响。

在本文中，主要研究 1/4 车辆主动悬架系统的状态特性及控制方法，讨论在不同控制方法和控制参数下其性能的好坏和表现出的性能。

## 1.2 1/4 车辆 2 自由度悬架系统数学模型

1/4 车辆 2 自由度模型常用于先进悬架系统及相应减震器的设计开发，以验证减震器的合理性和悬架系统的可行性。1/4 车辆 2 自由度系统将车辆前悬架和后悬架独立开来，在半车 4 自由度悬架系统模型基础上进一步简化。2 自由度模型能反应车辆垂直振动特性，可以通过车体垂直振动加速度和车轮动载荷评价车辆行驶平顺性和路面附着性等车辆行驶中的性能指标。

### 1.2.1 悬架系统数学模型

1/4 车辆 2 自由度的主动悬架系统数学模型如图 1-1 所示，为了便于研究，做出以下假设：

- 车辆弹性中心与质心重合；
- 车辆为刚体，乘员与车体运动一致；
- 车轮与路面之间不存在滑动状态，并且车轮始终与地面相接触；
- 车轮垂直振动特性简化为不考虑阻尼作用的弹簧；
- 车辆左右两侧悬架系统完全对称，可以单独考虑；
- 车辆前后悬架系统完全独立无干涉，无耦合影响。

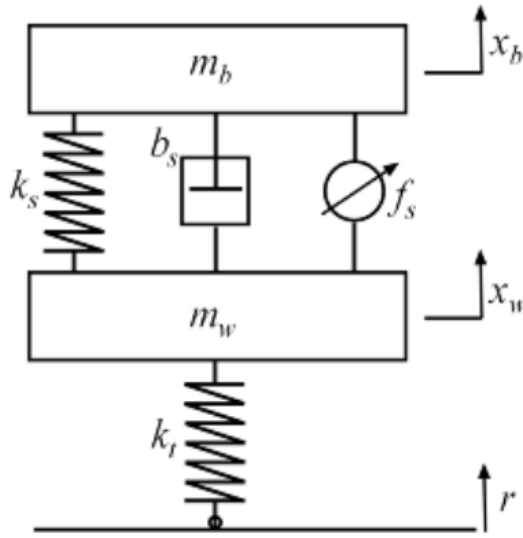


图 1-1 1/4 车辆 2 自由度的主动悬架

其中,

$m_b$ 为车体质量;

$m_w$ 为车轮质量;

$k_s$ 为悬架系统的等效刚度;

$k_t$ 为车轮的等效刚度;

$b_s$ 为悬架系统的阻尼系数;

$x_b$ 为车体的绝对位移;

$x_w$ 为车轮的绝对位移;

$x_r$ 为路面激励;

$f_s$ 为悬架作动器的主动控制力。

由牛顿动力学方程,考虑车体与车轮在垂直方向上的受力平衡,可以建立主动悬架系统的运动微分方程:

$$m_b \ddot{x}_b + b_s(\dot{x}_b - \dot{x}_w) + k_s(x_b - x_w) - 1000f_s = 0$$

$$m_w \ddot{x}_w - b_s(\dot{x}_b - \dot{x}_w) - k_s(x_b - x_w) + k_t(x_w - x_r) + 1000f_s = 0$$

选择状态向量 $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x_b \ \dot{x}_b \ x_w \ \dot{x}_w]^T$ , 将微分方程转换为系统状态方程, 有

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$\text{式中: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_b} & -\frac{b_s}{m_b} & \frac{k_s}{m_b} & \frac{b_s}{m_b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_w} & \frac{b_s}{m_w} & -\frac{k_s+k_t}{m_w} & -\frac{b_s}{m_w} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1000}{m_b} \\ 0 & 0 \\ \frac{k_t}{m_w} & -\frac{1000}{m_w} \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} x_r \\ f_s \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_b} & -\frac{b_s}{m_b} & \frac{k_s}{m_b} & \frac{b_s}{m_b} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1000}{m_b} \end{bmatrix}。$$

在实际情况下,车辆悬架中的弹性元件和阻尼元件都存在不同程度的非线性,因此实际上其是

复杂的非线性不确定系统，为简化模型，忽略其非线性影响，不作详细论述。

1.2.2 仿真参数

以 1/4 车辆 2 自由度的主动悬架系统数学模型为基础，给出其基本的参数进行测试与仿真，其数值和符号在程序中会有所体现。

表 1-1 主要仿真参数

仿真参数	符号	数值	单位
车体质量	$m_b$	300	kg
车轮质量	$m_w$	60	kg
悬架刚度	$k_s$	16000	N/m
车轮刚度	$k_t$	190000	N/m
悬架被动阻尼	$b_s$	1000	N · s/m
作动器输入力	$f_s$	/	kN

1.3 1/4 车辆路面激励模型

路面激励作为悬架系统的输入，在对车辆悬架系统建立数学模型进行振动特性分析前，需要建立相应的路面激励模型。对悬架系统模型施加一定的路面激励输入，才能得到其振动特性。常见的路面激励包括有随机激励、正弦激励和冲击激励，其分别模拟路面不平度随时间随机变化、在给定激励频率频率下路面不平度随时间变化和路面凸起如减速带、石子等的冲击。

基于谐波叠加法实现在时域上随机路面激励的离散化数值模拟，模拟出 C 级路面的不平度时域曲线：

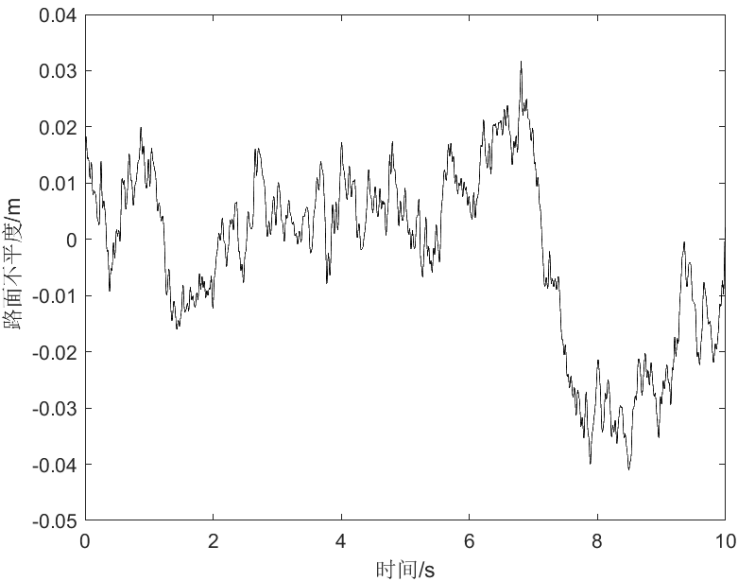


图 1-2 模拟随机路面激励

由其响应的功率谱密度与标准功率谱密度相比较，两者相互吻合证明了所生成路面的正确性。

1.4 悬架系统振动特性

对车辆施加一定的路面激励输入和振动控制输入，考察悬架系统对各项振动特性性能指标的变



化情况，通过与原被动悬架系统进行对比分析，给出先进悬架系统振动特性的评价结果，进一步分析车辆各项行驶性能的改善情况。车辆悬架振动特性的评价指标包括乘坐舒适性、行驶平顺性、路面附着性、操纵稳定性、行驶安全性、能耗特性，这里主要的控制目标制定在乘客舒适度和道路操纵性，其分别为车身加速度 $a_b$ 和悬架的行程 $s_d = x_b - x_w$ 相关。因此，在设计控制器时，可以将多个设计目标表达成单一的成本函数，实现最优化控制。

## 2 系统稳定性

一般来讲，适用于线性时不变连续时间系统稳定性分析方法，也一定程度上适用于 LTI 离散时间系统的分析。以下将分别对连续系统和离散系统进行稳定性校验。

### 2.1 1/4 车辆 2 自由度悬架系统稳定性分析

#### 2.1.1 连续系统李亚普诺夫稳定性判别

李亚普诺夫稳定性判别直接法是求解状态方程的特征多项式，判断极点位置，全在左半平面则稳定，存在极点落在右半平面，则系统不稳定。

```
P =
-8.5682 +57.5702i
-8.5682 -57.5702i
-1.4318 + 6.9140i
-1.4318 - 6.9140i
```

由其特征值实部均小于 0，故系统在平衡点附近渐近稳定。

李亚普诺夫间接法无需直接求解，只需构造广义李雅普诺夫函数 $V$ ，判定 $V$ 和 $\dot{V}$ 的正定性和负定性，即构造出 $A^T P + P A = -Q$ ，有解则说明系统稳定。

#### 2.1.2 连续系统稳定性分析

对系统的稳定性进行分析，其连续系统的传递函数为：

```
num(1)/den =  
  
          3.3333 s^2 + 10555.5556  
-----  
s^4 + 20 s^3 + 3486.6667 s^2 + 10555.5556 s + 168888.8889  
  
num(2)/den =  
  
          20 s^2 + 10555.5556  
-----  
s^4 + 20 s^3 + 3486.6667 s^2 + 10555.5556 s + 168888.8889  
  
num(3)/den =  
  
3.3333 s^4 - 1.9124e-14 s^3 + 10555.5556 s^2 - 7.7495e-12 s  
-----  
s^4 + 20 s^3 + 3486.6667 s^2 + 10555.5556 s + 168888.8889
```

以传递函数 1 为例，绘制出连续系统的零极点图，确定系统极点的分布；画出系统开环奈奎斯特图，由奈奎斯特曲线对(-1,j0)点的包围情况和开环右极点个数判断闭环稳定性；画出其根轨迹图：

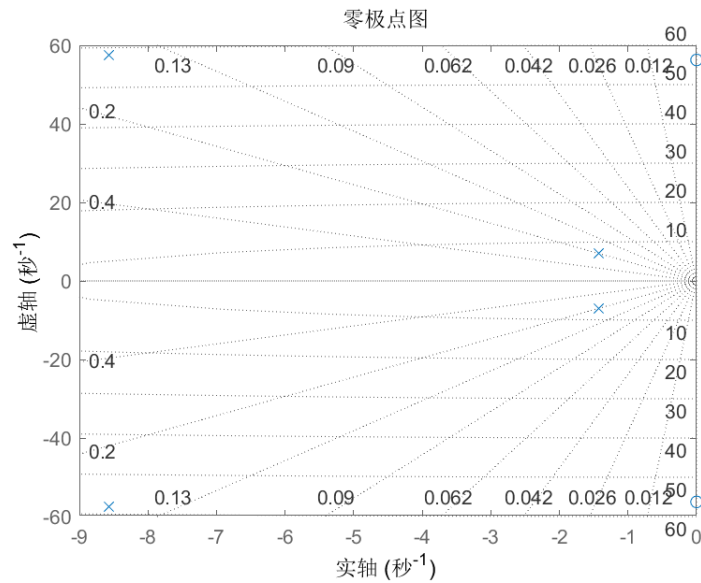


图 2-1 连续系统零极点图

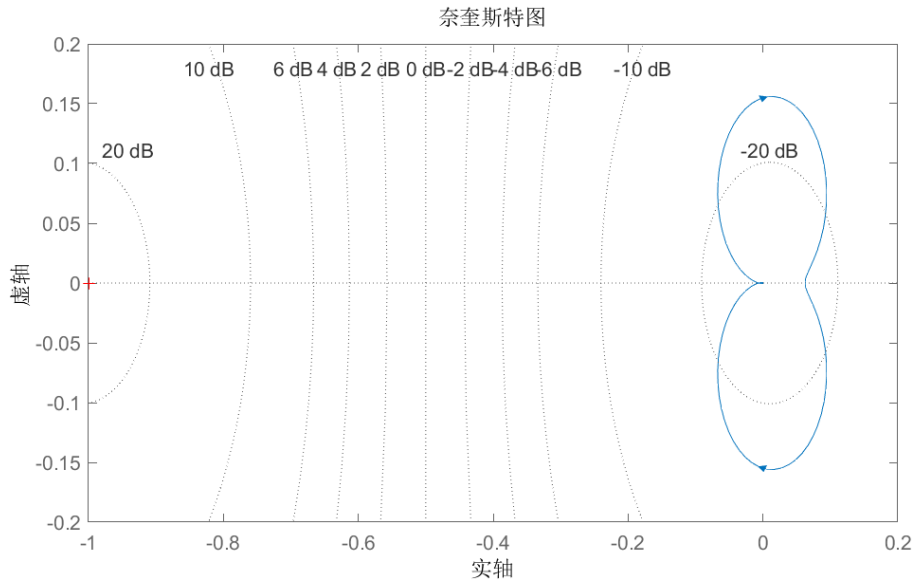


图 2-2 连续系统奈奎斯特图

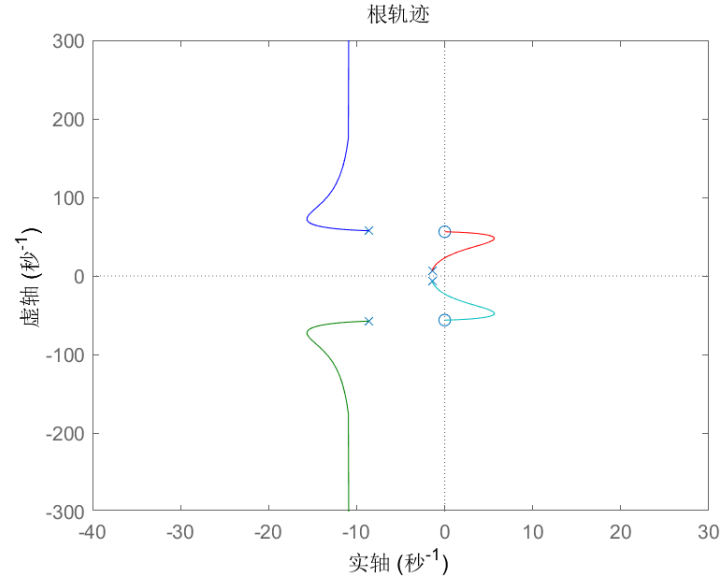


图 2-3 连续系统根轨迹图

从零极点图、奈奎斯特图、根轨迹图可以看出系统是稳定的。

除了其稳定性，可以发现从执行器到车身位移和加速度的传递函数有虚轴上的零点，其自然频率为  $56.27\text{rad/s}$ 。同样，从执行器到悬架挠度的传递函数有虚轴上的零点，自然频率为  $22.97\text{rad/s}$ 。由于虚轴零点的存在，反馈控制不能在  $56.27\text{rad/s}$  的频率下改善路面扰动对车身加速度的响应，同样在  $22.97\text{rad/s}$  频率下不能改善路面扰动对悬架挠度的响应。

绘制从路面扰动和执行器力到车身加速度和悬架位移的开环增益图，可以直观看到两个自然频率对增益的影响：

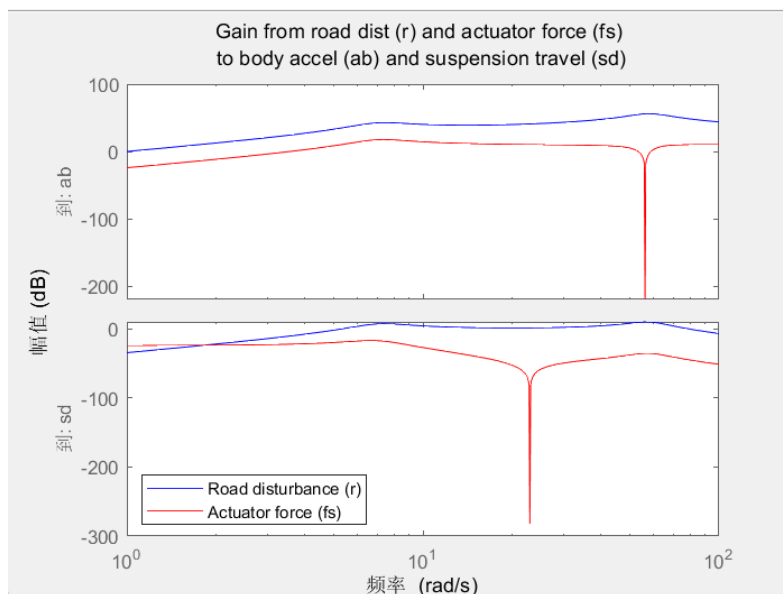


图 2-4 路面对车身加速度和悬架行程的增益曲线

### 2.1.3 离散系统稳定性判别

设置采样时间为 0.02s, 由采样时间, 将传递函数离散化, 可以得到其在  $z$  平面上的传递函数。

num(1)/den =

$$\frac{0.00058414 z^3 - 1.5486e-06 z^2 + 0.00015128 z + 0.00050406}{z^4 - 2.6111 z^3 + 2.975 z^2 - 2.0144 z + 0.67032}$$

num(2)/den =

$$\frac{0.0031937 z^3 - 0.0029447 z^2 - 0.0017913 z + 0.0027802}{z^4 - 2.6111 z^3 + 2.975 z^2 - 2.0144 z + 0.67032}$$

num(3)/den =

$$\frac{-1.0675 z^3 + 2.6443 z^2 - 2.3915 z + 0.74867}{z^4 - 2.6111 z^3 + 2.975 z^2 - 2.0144 z + 0.67032}$$

绘制出离散系统的零极点图, 确定系统极点的分布; 画出开环奈奎斯特图, 由奈奎斯特曲线对  $(-1, j0)$  点的包围情况和开环右极点个数判断闭环稳定性; 画出其根轨迹图:

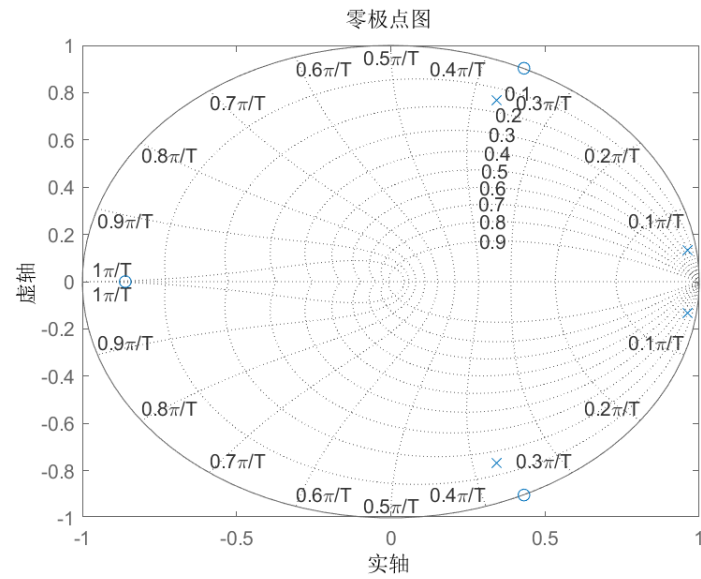


图 2-5 离散系统零极点图

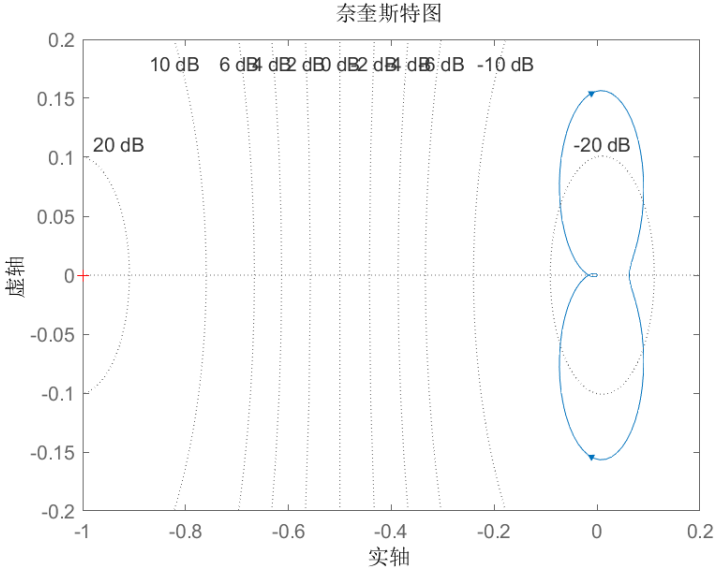


图 2-6 离散系统奈奎斯特图

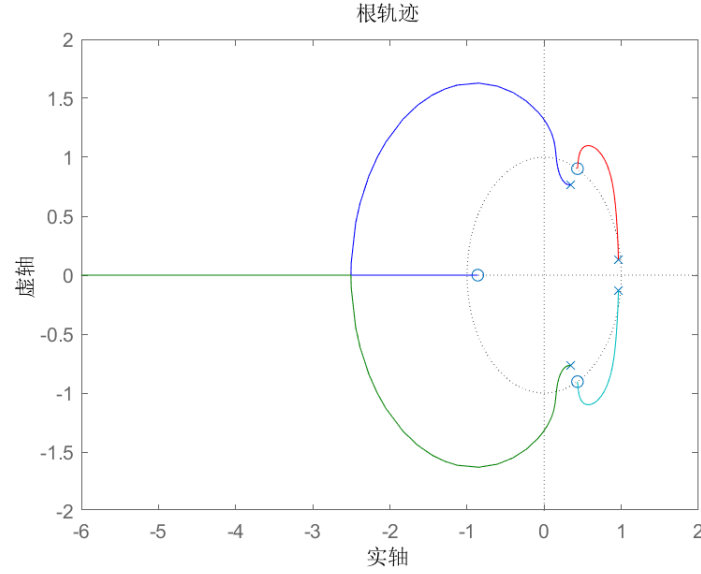


图 2-7 离散系统根轨迹图

从零极点图、奈奎斯特图、根轨迹图可以看出离散系统稳定，对比在连续系统和离散系统下的稳定性，可以发现两者基本类似。

上面只针对第一个传递函数进行了稳定性分析，其余两个传递函数的相关结果可见附录 A。

## 2.2 能控性与能观性

动态系统的能控性和能观性是揭示动态系统不变的本质特征的基本结构特性，系统能控性指控制作用对被控系统的状态和输出进行控制的可能性，能观性反映由能直接观测的输入输出确定系统内部动态特性状态的可能性。

状态方程的能控性和能观性判别矩阵：

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

$$Q_o = [C \quad CA \quad CA^2 \quad CA^3]^T$$

在连续系统下：

```
Qc =
1.0e+08 *
    0         0         0    0.0000    0.0001   -0.0000   -0.0004    0.0000
    0    0.0000    0.0001   -0.0000   -0.0004    0.0000   -0.3596    0.0019
    0         0    0.0000   -0.0000   -0.0005    0.0000   -0.0982    0.0005
    0.0000   -0.0000   -0.0005    0.0000   -0.0982    0.0005    3.4693   -0.0202

Qo =
1.0e+07 *
    0.0000         0         0         0
    0.0000         0   -0.0000         0
   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
    0    0.0000         0         0
    0    0.0000         0   -0.0000
    0.0001    0.0000   -0.0012   -0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0003    0.0000
   -0.0004    0.0001    0.0046   -0.0011
    0.0001    0.0000   -0.0012   -0.0000
    0.0006    0.0000   -0.0070    0.0003
   -0.3071   -0.0196    3.9030    0.0238
```

因为能控性矩阵和能观性矩阵的秩均为 4，与系统的维度相同，因此系统是完全能控和完全能观的。

在离散系统下：

```

S_control =

    0.0129    0.0006    0.0714    0.0015    0.1262    0.0024    0.1342    0.0034
    1.8436    0.0548    3.4028    0.0423    1.6822    0.0464   -0.7314    0.0527
    0.5087   -0.0026    0.8069   -0.0039    0.2025   -0.0004   -0.4235    0.0029
    42.5719   -0.2144   -12.8765    0.0857   -39.0306    0.2143   -17.6285    0.0889

S_observe =

    1.0000         0         0         0
    1.0000         0   -1.0000         0
   -53.3333   -3.3333   53.3333    3.3333
    0.9907    0.0194   -0.0036    0.0006
    0.9489    0.0164   -0.4531   -0.0129
   -36.2527   -3.1426  -125.9522    1.2990
    0.9663    0.0374   -0.0506    0.0017
    0.8626    0.0291    0.3687   -0.0077
   -33.9621   -3.6765  -113.2034   -1.5699
    0.9280    0.0540   -0.1386    0.0022
    0.8179    0.0431    0.4896    0.0051
   -40.5320   -4.8295    25.0097   -2.0991

```

同样地，其能控性矩阵和能观性矩阵的秩均为 4，系统完全能控和完全能观。

## 3 PID 控制

PID 控制是过程控制中广泛应用的控制算法，按照比例、积分、微分进行控制。

### 3.1 PID 控制器设计

#### 3.1.1 连续系统 PID 控制器设计

PID 控制器的数学表达式为

$$F_{PID} = K_P e + K_I \int_0^t e dt + K_D \frac{de}{dt}$$

由 1/4 车辆 2 自由度悬架系统的运动微分方程：

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_b + b_s(\dot{x}_b - \dot{x}_w) + k_s(x_b - x_w) - 1000f_s &= 0 \\ m_w \ddot{x}_w - b_s(\dot{x}_b - \dot{x}_w) - k_s(x_b - x_w) + k_t(x_w - x_r) + 1000f_s &= 0 \end{aligned}$$

可以在 simulink 中建立被动悬架系统和主动悬架系统的方块图：

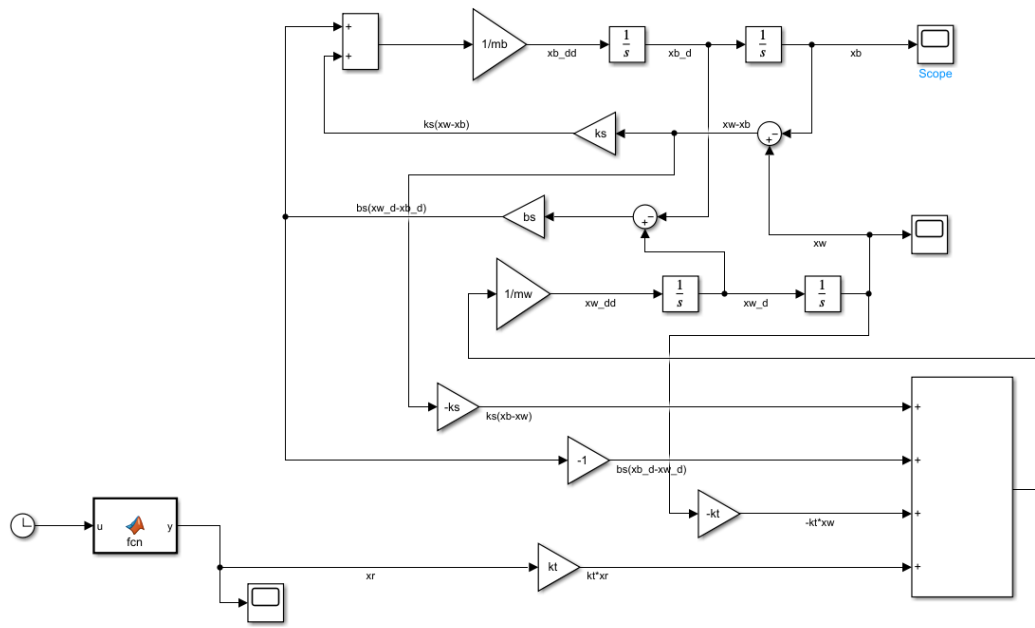


图 3-1 被动悬架系统方块图

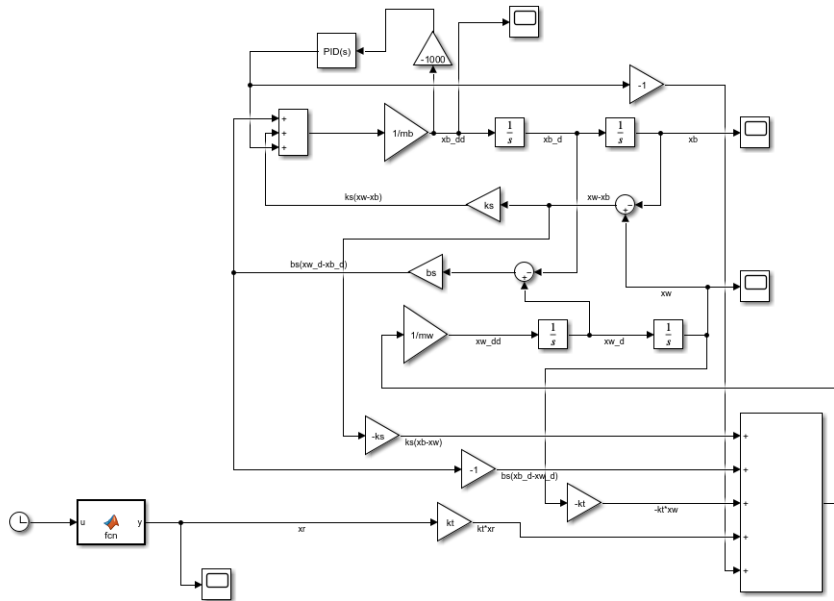


图 3-2 主动悬架系统方块图

这里以乘坐舒适度，即车身加速度为设计目标，尽可能保持车身加速度小，保持车身在面对颠簸时的稳定，因此以 0 为车身加速度的目标值，其偏差  $e = -a_b$ 。

$$f = K_P(-a_b) + K_I \int_0^t (-a_b) dt + K_D \frac{d(-a_b)}{dt}$$

同样地，除了控制车身加速度外，还可以用 PID 去调节其他参数，只需要改变偏差值即可。

同样，simulink 也支持离散系统，只需将输入和积分微分环节变为离散输入和 z 变换即可。



### 3.1.2 离散系统 PID 控制器设计

在数字控制系统中,将给出的 PID 控制器离散化,采样周期为 2ms,系统进行第  $k$  次采样时刻,控制器的输出值为  $u(k)$ ,此时偏差可以表示为  $e(k) = r(k) - y(k)$ ,第  $k$  次采样时, PID 的离散形式可以表示为:

$$u(k) = K_P e(k) + K_I \sum e(k) + K_D (e(k) - e(k-1))$$

其增量形式可以表示为:

$$u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$$

Matlab 中含有 PID 设计工具包用于控制增益的自动计算,其控制器格式为

$$D(z) = K_P + K_I \left[ \frac{T}{z-1} \right] + K_D \left[ \frac{1}{T_F + \frac{T}{z-1}} \right]$$

其中,  $T$  为采样周期,  $T_F$  为设定高频极点以获得性能改进的参数。

## 3.2 PID 控制器参数整定

### 3.2.1 连续系统 PID 控制器参数整定

采用 PID 控制时,  $K_P$ 、 $K_I$ 、 $K_D$  三个参数对系统的控制效果起到决定性作用,要使 PID 控制起到良好的控制效果,就要寻找最佳的  $K_P$ 、 $K_I$ 、 $K_D$  参数值,即进行 PID 控制器的参数整定,从而使主动悬架的 PID 控制达到预期要求。

由汽车悬架系统的性能要求和基本的整定参数经验,选定不同的 PID 参数在 Matlab/Simulink 环境下进行仿真,最终确定满意的参数。在调定 PID 参数的过程中实行先比例、后积分、再微分的整定步骤,先设置  $K_I = K_D = 0$ ,逐步增加  $K_P$  直到控制系统响应速度足够快,超调量不大的情况,然后依次增加  $K_I$  和  $K_D$ ,反复调节直到其动态过程达到满意的效果。

以车身加速度最小为目标,调定 PID 的各项参数,设置不同的路面状况如正弦、阶跃、半正弦等输入样式,可以得到被动悬架和主动悬架下车身加速度的响应曲线:

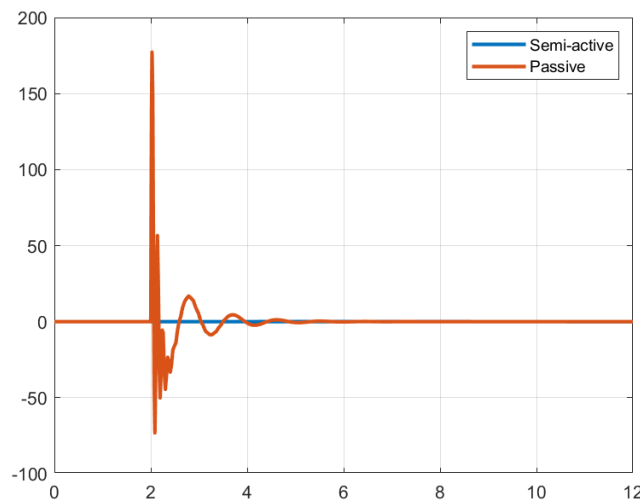


图 3-3 主被动悬架在阶跃输入下的响应曲线

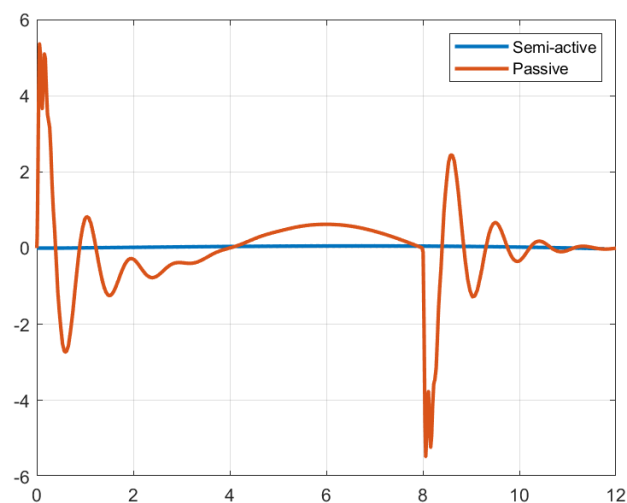


图 3-4 主被动悬架在正弦输入下的响应曲线

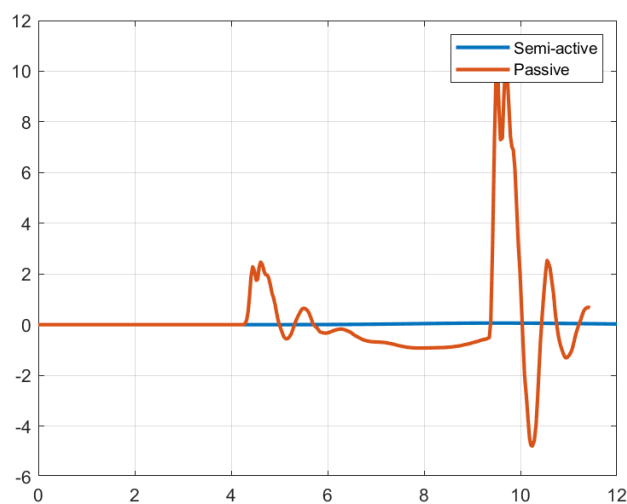
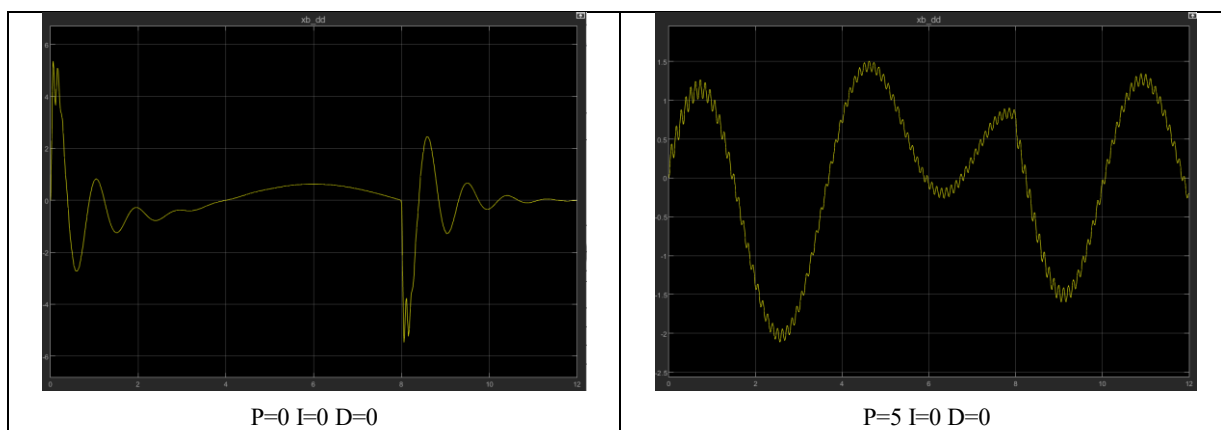
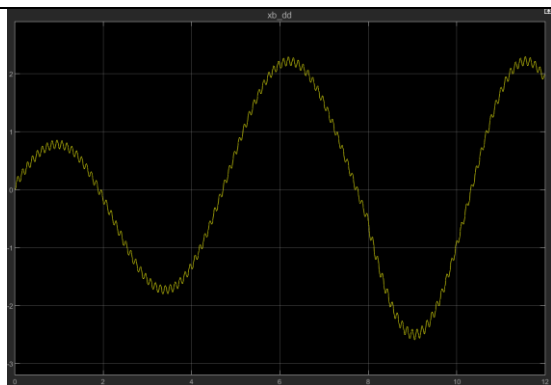


图 3-5 主被动悬架在半正弦输入下的响应曲线

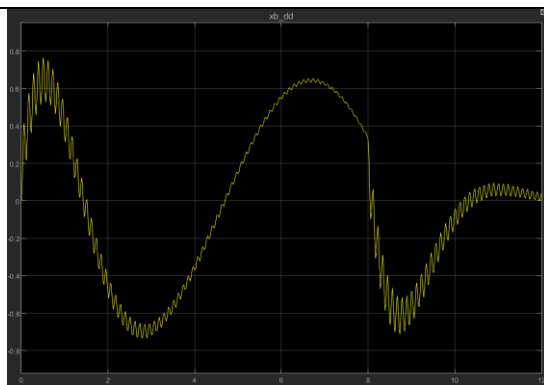
可以观察到，主动悬挂的时域响应特性明显优于被动悬挂，针对车身加速度调定好 PID 的各项参数后，其车身加速度的值得到明显的改善，在面对阶跃、正弦输入时其加速度基本保持不变（变化范围在 0.08 以内），而在未加 PID 调定时，在面对特别是加速度突变（阶跃）的输入时，其变化幅度大，而且振荡不平缓。

以正弦输入为例，其具体的 PID 参数整定的过程为：

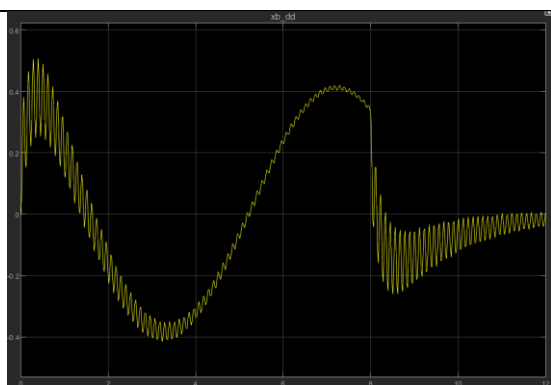




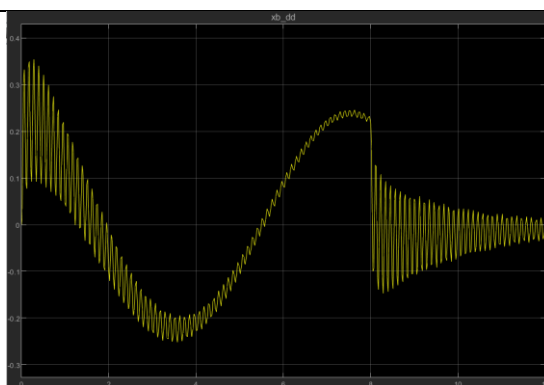
P=10 I=0 D=0



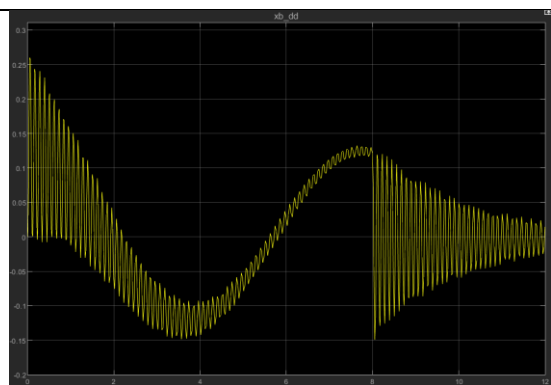
P=5 I=10 D=0



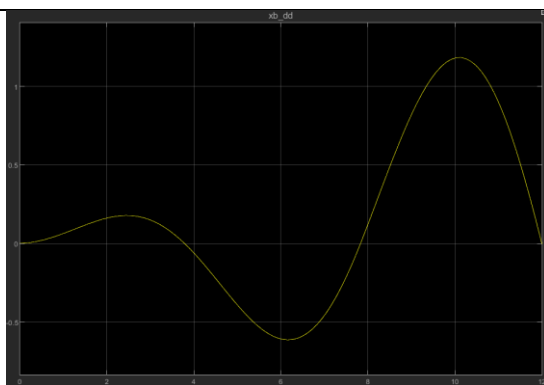
P=5 I=25 D=0



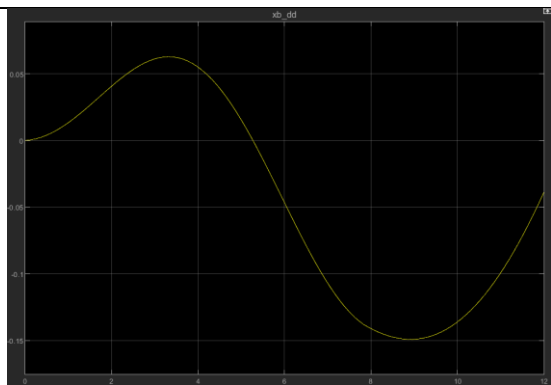
P=5 I=50 D=0



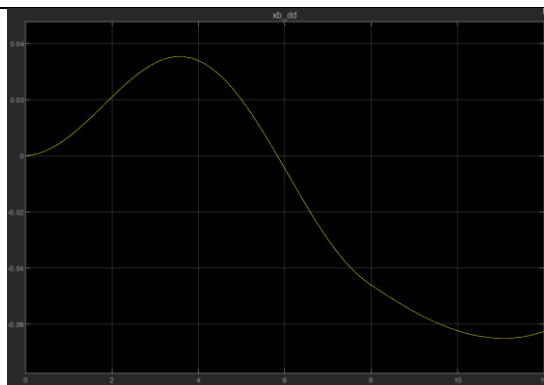
P=5 I=100 D=0



P=5 I=50 D=100



P=5 I=50 D=500



P=5 I=50 D=1000

可以看出，随着 P 值的增加，其车身加速度振荡的幅值明显减小，但会出现高频振动；随着 I 值的增加，其振荡幅值再一次减小，比原先未加 PID 的振荡小几个数量级；随着 D 值的增加，其高频振荡得到抑制，加速度的变化变得平缓。

3.2.2 离散系统 PID 控制器参数整定

将以上 s 空间变为 z 空间即可以实现在离散系统中 PID 控制器，其实现效果和方法一致。除此之外，运用 Matlab 中的 pidtool()函数实时调节其频域响应，将相位裕量维持在 60°的同时，探索相位裕度频率设计点的设置。如将 $\omega_{\omega 1}$ 从 1.4rad/s 增加到 1.6rad/s，其上升时间从 1.22s 降到 1.16s，增益裕度从 6.25dB 降到 5.18dB，稳定时间从 3.18s 升到 3.98s，超调量从 1.06%提高到 3.28%。以此可以任意配置离散系统在频域上的带宽和相位裕量，调节系统响应的快速性和稳定性性能。

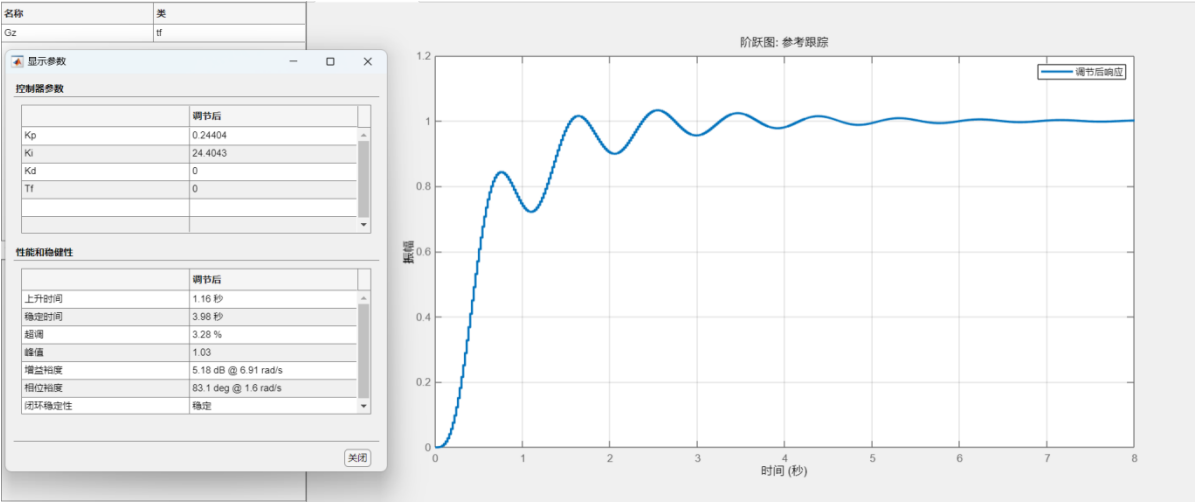


图 3-6 离散系统下 PID 控制器的参数整定

提高系统的带宽至 1.6rad/s，可以得到更迅速的响应速度，其 PIDF 的控制器设计如下，且 PIDF 的各参数为 $K_P = 0.24404$ ， $K_I = 24.4043$ ， $K_D = 0$ ， $T_F = 0$ 。

```
PIDF Gain and Phase Margin:

GmdB =

    5.1842

Pm =

    83.0856

Unit-step performance metrics:

PIDF_stepinfo =

    包含以下字段的 struct:

    RiseTime: 1.1600
    TransientTime: 3.9800
    SettlingTime: 3.9800
    SettlingMin: 0.8995
    SettlingMax: 1.0328
    Overshoot: 3.2789
    Undershoot: 0
    Peak: 1.0328
    PeakTime: 2.5400
```

## 4 极点配置与状态估计

如果希望在数学上给出系统的最佳描述，则可能将所有可用的系统状态作为系统的反馈。为了实现基于全状态反馈的系统设计，就需要利用可得到的检测值估计系统的状态。

### 4.1 极点配置

零极由于系统完全能控，可以通过状态反馈的方法对极点进行配置，优化系统响应性能。

由超调量  $\sigma = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} \leq 5\%$ ，上升时间  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \leq 0.5s$ ，可以得到：

$$\xi \geq 0.707$$

$$\omega_n \geq 9$$

因此可以选取  $\xi = 0.707$ ， $\omega_n = 10$ 。其极点为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -7.07 \pm j7.07$$

$$\lambda_3 = -100$$

$$\lambda_4 = -200$$

可以计算出期望极点对应的 K 值，可以得到新的 A 值，验证极点配置后的系统性能。绘制两个输入到三个输出在时域上的冲激响应和阶跃响应曲线，可以观察到在加入极点配置后，其各个输出量对于路面的响应，振荡的幅值和稳定时间都得到提高，而对于作动器力的响应都不大，这是由于其本身的刚度大，地面 1m 的冲激或阶跃要明显强于作动器输出 1000N 的力的影响，但同样可以看出极点配置后对作动器输入力的响应特性优于未配置时。

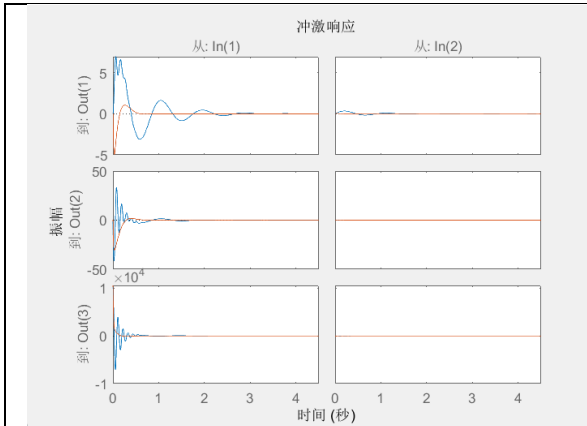


图 4-1 连续系统冲激响应曲线

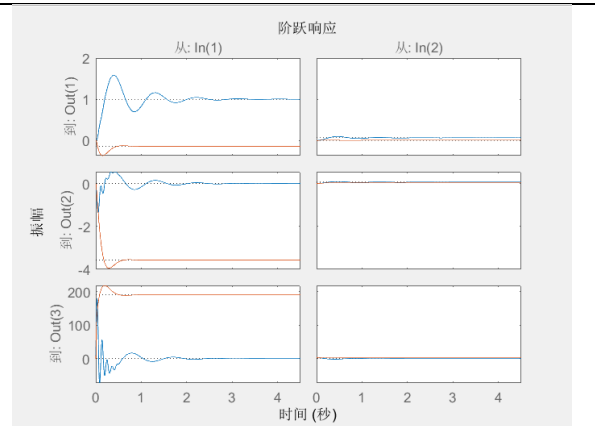


图 4-2 连续系统阶跃响应曲线

由于这里极点配置是无源校正网络，所以其能量衰减，在实际中，要加入一定的放大环节抵消其能量的衰减。

在离散系统中，同样可以如上进行极点配置，其极点配置后的阶跃响应图为：

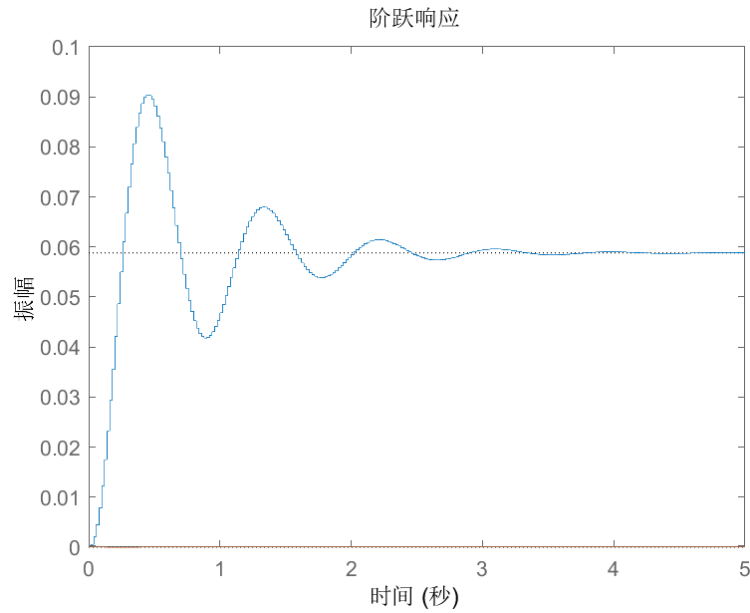


图 4-3 离散系统极点配置前后阶跃响应曲线

## 4.2 状态估计

由于检测到控制对象所有状态的要求难以实现，而状态观测器可以根据对象的可用信息来估计状态。由其能控性和能观性矩阵可以看出，系统是完全能控和能观的，因此可以设计全维观测器观测系统的状态信息。

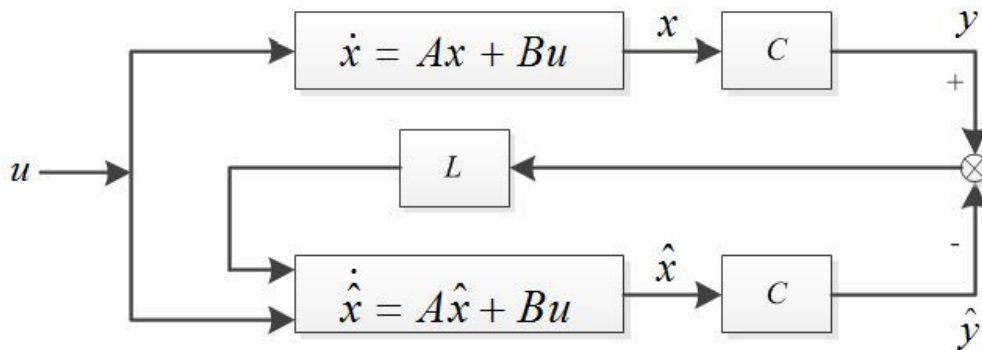


图 4-4 状态观测器

以路面状况为输入，以车身的位移为输出建立其全维观测器，将控制器极点配置在

$$\lambda_1 = -7.07 + j7.07$$

$$\lambda_2 = -7.07 - j7.07$$

$$\lambda_3 = -100$$

$$\lambda_4 = -200$$

将观测器极点配置在

$$\lambda_1 = -5 + j5$$

$$\lambda_2 = -5 - j5$$

$$\lambda_3 = -50$$

$$\lambda_4 = -100$$

观测器的极点相对于控制器的极点靠右，使观测器收敛速度更快，从而获得可靠的反馈值来控

制系统。

则可以计算得到

```

K =

    7.9598    1.0193    2.8787    0.0929

G =

    1.0e+05 *

    0.0014
    0.0026
   -0.0041
   -1.2483
  
```

利用 Simulink 建立全维观测器的方块图如下。

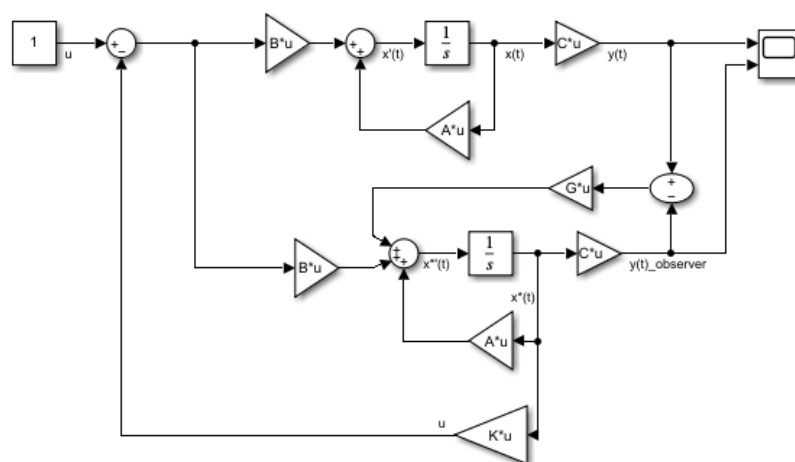


图 4-5 全维状态观测器

观察其观测到的输出与实际上的输出：

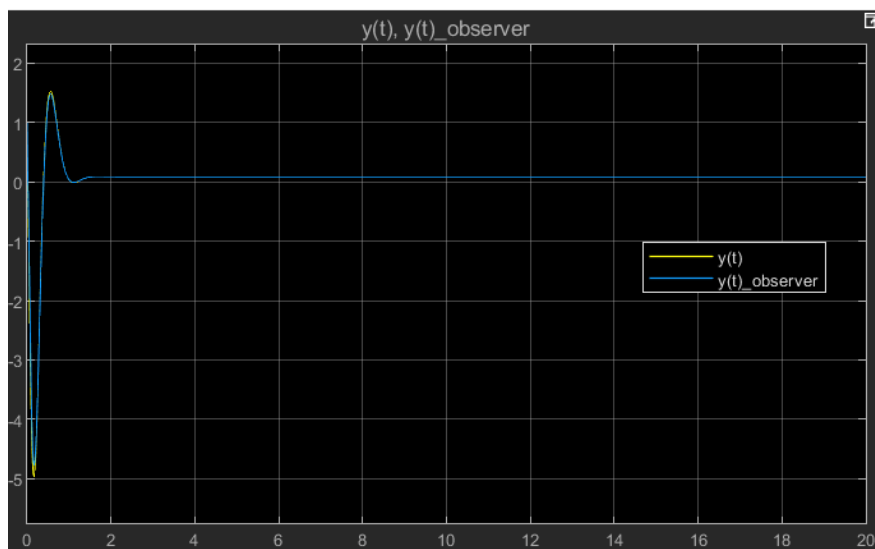


图 4-6 全维状态观测器实际值与观测值

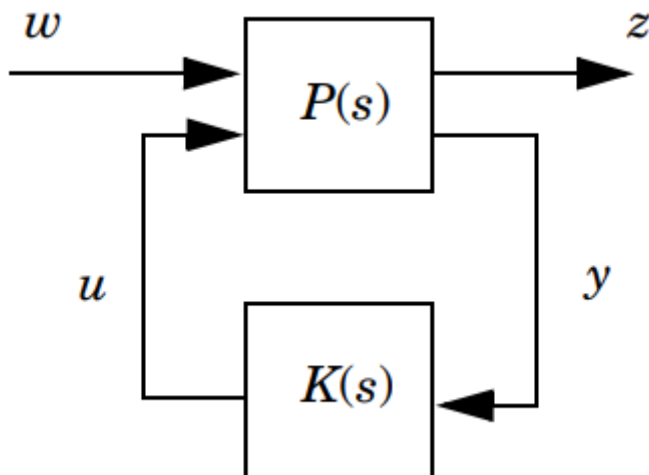
可以观察到其观测器观测到的值与真实值十分相近，因此全维观测器是相对可靠的。

## 5 状态反馈 $H_\infty$ 控制

由于工作状态变动、外部干扰以及建模误差的缘故，在实际过程中难以得到精确的模型，不确定性在控制系统中广泛存在。鲁棒控制就是设计固定的控制器，使具有不确定性的对象满足控制品质。而  $H_\infty$  控制理论充分考虑到系统不确定性的影响，不仅保证控制系统的鲁棒稳定性，而且能优化性能指标，其采用状态空间方法，具有时域方法精确计算和最优化的优点。

### 5.1 模型建立

在设计控制器时，主要的控制目标由乘坐舒适度和道路操控性制定，其分别与车身加速度  $a_b$  和悬架的行程  $s_d = x_b - x_w$  相关，将控制目标表达为单一的成本函数，用  $H_\infty$  控制策略以最小化成本函数，其程序控制框图如下图所示。

图 5-1  $H_\infty$  基本逻辑框图



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + (B_1 \ B_2) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \end{cases}$$

状态反馈  $H_\infty$  问题本质上是全状态反馈，其结构满足

$$u = -Kx$$

$K$  满足使系统对噪声能量衰减最大。

## 5.2 性能指标与控制器

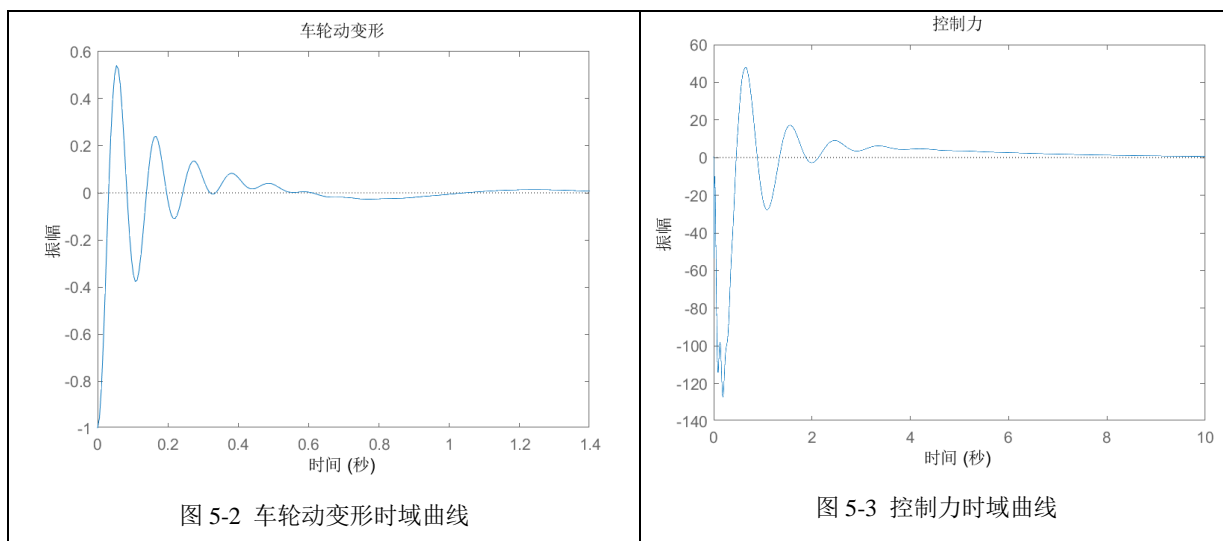
反馈控制器利用对悬架行程和车身加速度的测量来计算驱动动作器的控制信号，其有一个控制输入  $u$ ，两个测量信号  $a_b$  和  $s_d$ ，使用 LMI 方法求解  $H_\infty$  输出反馈控制器，得到其控制器参数。

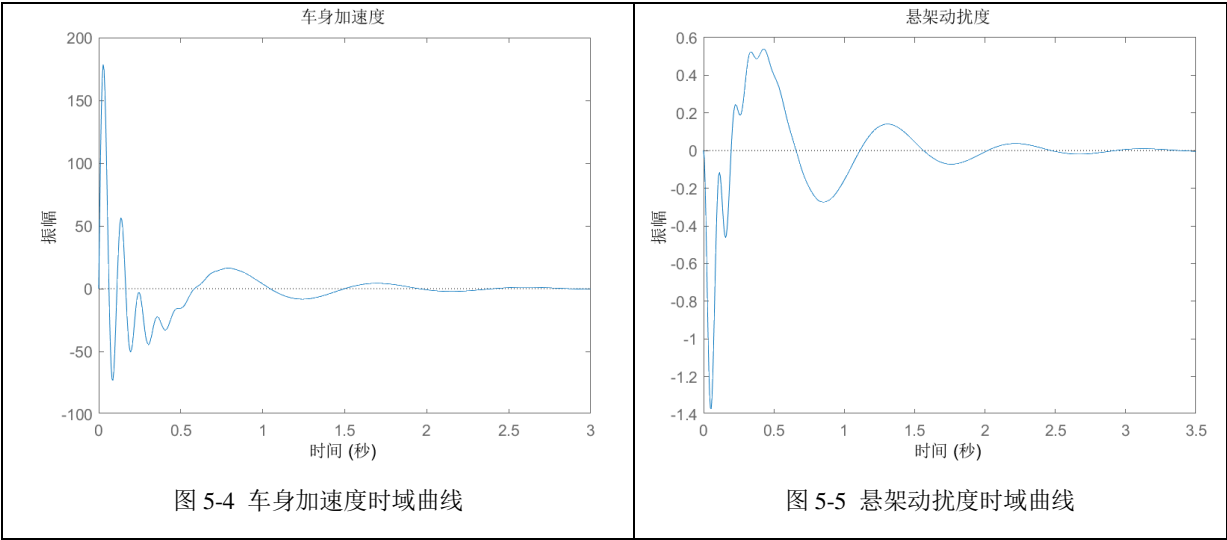
```
gamma =
    0.8132

K =
    1.0e+05 *
    -0.0009    -0.0013    -0.0022    -0.0007    0.0030    -0.0004    0.0010    -0.0007    -0.0041    0.0001
    0.0017    0.0127    0.0314    0.0034    0.0006    0.0052    -0.0127    0.0122    -0.0444    0
    -0.0059    -0.0487    -0.1087    -0.0089    -0.0018    -0.0152    0.0410    -0.0431    -0.1511    0
    -0.0138    -0.1103    -0.2539    -0.0232    -0.0042    -0.0374    0.0986    -0.0999    -0.1212    0
    -0.0036    -0.0284    -0.0665    -0.0064    -0.0014    -0.0100    0.0263    -0.0261    -0.0004    0
    -0.4283    -3.3825    -7.9417    -0.7786    -0.1405    -1.1974    3.1532    -3.1089    0.8211    0
    0.3608    2.8114    6.7263    0.7010    0.1241    1.0352    -2.7262    2.6218    -4.2546    0
    -0.0000    -0.0000    -0.0000    0.0000    0.0000    -0.0000    0.0000    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    -Inf
```

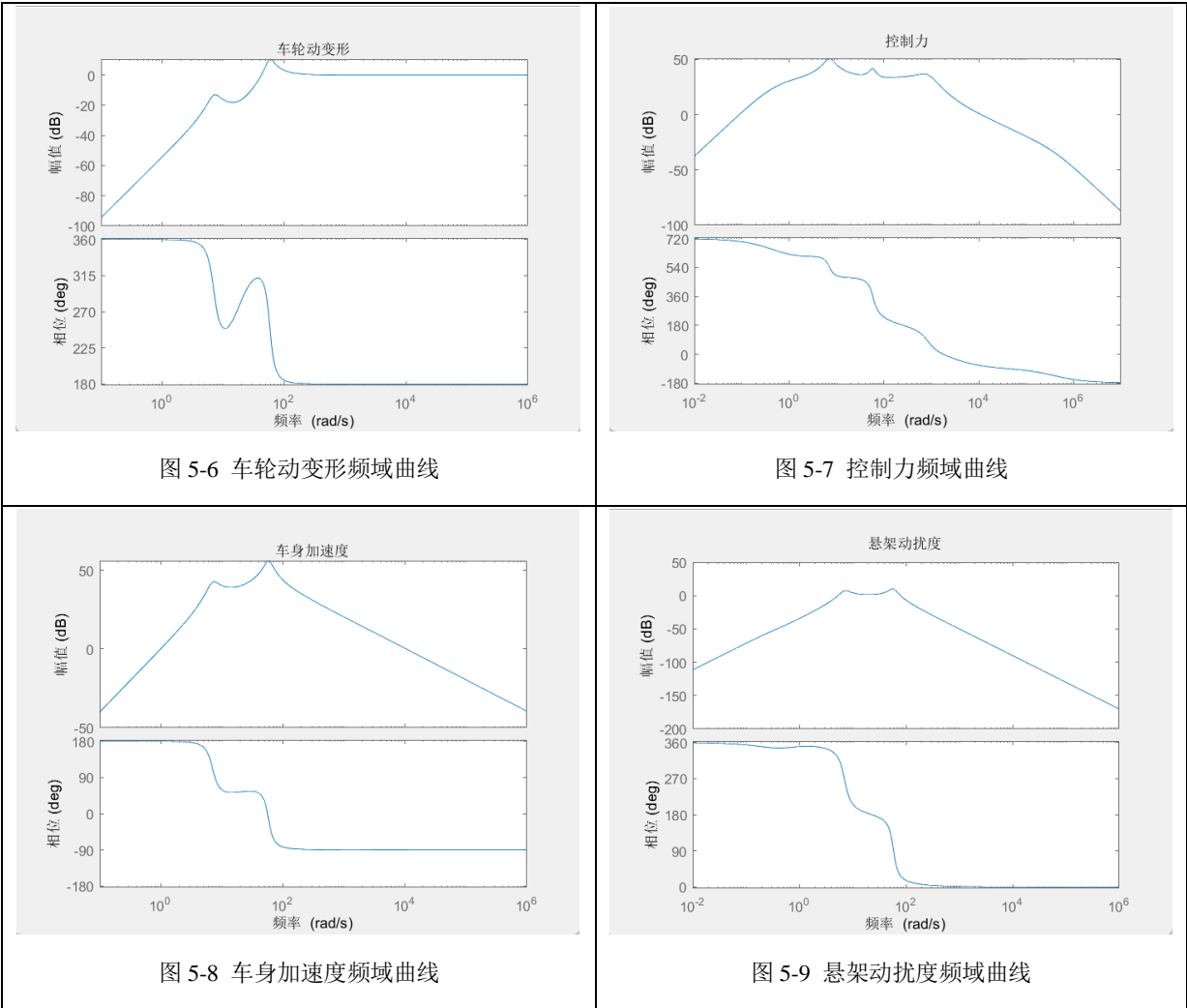
可以获得加入控制器后，路面激励到各个被控变量的传递函数，研究其在时域和频域上的阶跃响应曲线。

绘制在闭环系统下的时域阶跃响应函数：





绘制在闭环系统下的频域阶跃响应函数：



可以通过修改被控输出权矩阵可以控制其需要的最佳控制效果，其本质上是输出结果的加权。

## 6 LQR 控制器设计

主动悬架系统的运动微分方程：

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_b + b_s(\dot{x}_b - \dot{x}_w) + k_s(x_b - x_w) - f_s &= 0 \\ m_w \ddot{x}_w - b_s(\dot{x}_b - \dot{x}_w) - k_s(x_b - x_w) + k_t(x_w - x_r) + f_s &= 0 \end{aligned}$$

由于作动器的输出力是可以认为设计和控制的，而路面的变化和无法控制和预测，因此在转化状态空间时候将两者分开。

选择  $x_1 = x_b - x_w$ ,  $x_2 = \dot{x}_b$ ,  $x_3 = x_w - x_r$ ,  $x_4 = \dot{x}_w$  作为状态变量建立状态空间方程，则

$$\dot{X} = AX + Bf_s + Lx_r$$

式中：  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_b} & -\frac{b_s}{m_b} & 0 & \frac{b_s}{m_b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_w} & \frac{b_s}{m_w} & -\frac{k_t}{m_w} & -\frac{b_s}{m_w} \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_b} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_w} \end{bmatrix}$ ;  $L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

有三个传递函数可以评价悬架系统的效能：

$$\text{加速度传递函数: } H_A(s) = \frac{\ddot{x}_b}{x_r}$$

$$\text{动行程传递函数: } H_R(s) = \frac{x_b - x_w}{x_r}$$

$$\text{轮胎形变传递函数: } H_T(s) = \frac{x_w - x_r}{x_r}$$

对于没有主动力的悬架，相关参数的变化对汽车悬架性能的影响可以由伯德图反映，在被动悬架的设计中，可以选择合适的悬架刚度、悬架阻尼来提高车辆在运行时的性能。

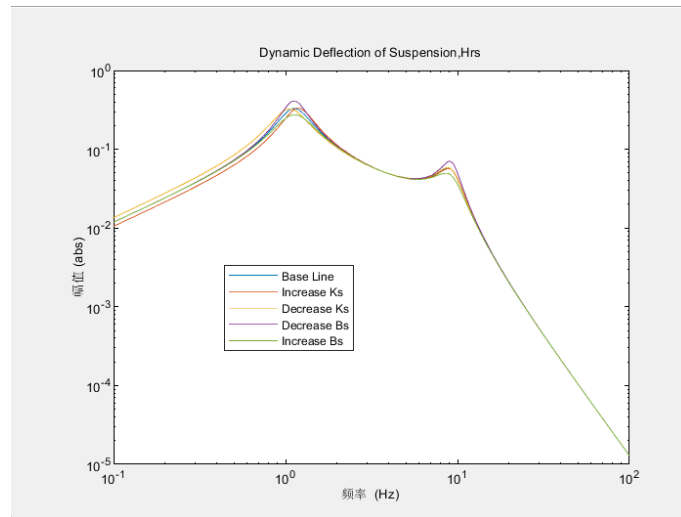


图 6-1 悬架刚度和阻尼对动行程的频域曲线

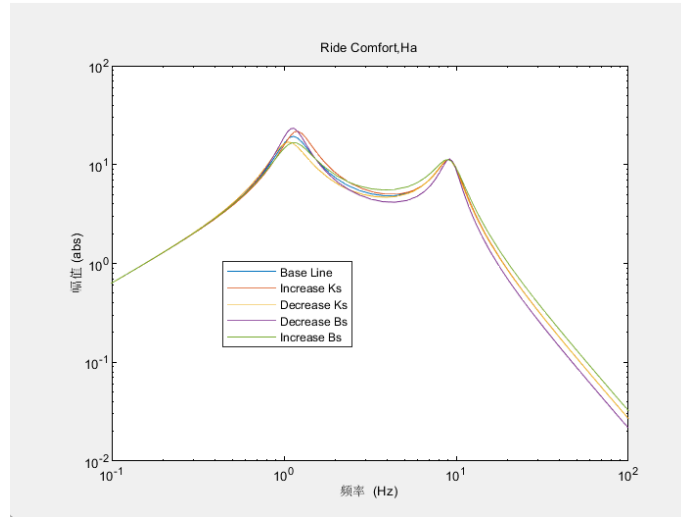


图 6-2 悬架刚度和阻尼对加速度的频域曲线

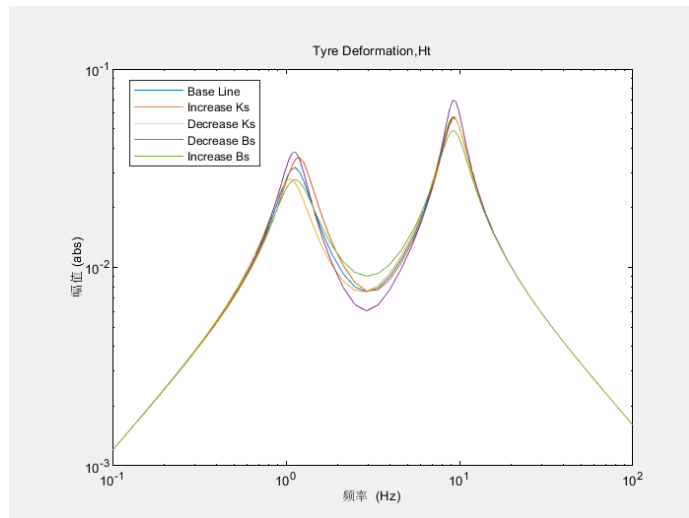


图 6-3 悬架刚度和阻尼对轮胎形变的频域曲线

从图中可以观察到，减小悬架的刚度能够改善高频下悬架的加速度，提高车辆在高速下行驶的舒适性，但会增加低频下的悬架行程，另一方面，增加悬架的阻尼可以改善悬架加速度和悬架动行程的低频共振频率峰值，改善平顺性，但也会显著增加车辆轮胎在中频下的形变。

主动悬架相比于被动悬架可以施加主动力，主动力的引入能够改善悬架的性能，下面用 LQR 方法对主动力进行设计。

考虑性能函数： $J = \min \int_0^\infty [\dot{x}_b^2 + p_1(x_b - x_w)^2 + p_2\dot{x}_b^2 + p_3(x_w - x_r)^2 + p_4\dot{x}_w^2] dt$ ，其中  $p_i$  为权重因子。一般来说，加权矩阵  $Q$  和  $R$  的选取是在提高舒适性与操纵性间的平衡考量，其与  $H_\infty$  有相似之处。

将状态方程代入到性能函数可以整理为： $J = \min \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt$ 。

$$\text{式中: } Q = \begin{bmatrix} \frac{k_s^2}{m_b^2} + p_1 & \frac{b_s k_s}{m_b^2} & 0 & -\frac{b_s k_s}{m_b^2} \\ -\frac{b_s k_s}{m_b^2} & \frac{b_s^2}{m_b^2} + p_2 & 0 & -\frac{b_s^2}{m_b^2} \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ -\frac{b_s k_s}{m_b^2} & -\frac{b_s^2}{m_b^2} & 0 & \frac{b_s^2}{m_b^2} + p_4 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_b^2} \\ -\frac{b_s}{m_b^2} \\ 0 \\ \frac{b_s}{m_b^2} \end{bmatrix}; \quad R = \frac{1}{m_b^2}.$$

则此类线性二阶次问题的解  $u = -Kx$ ,  $K = R^{-1}(B^T P + N)$ , 其中  $P$  满足  $A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$ 。

求解其 LQR 控制器, 得到其控制器参数:

```
K =
1.0e+04 *
-1.4103    0.2194   -1.0324   -0.0181

S =
1.0e+03 *
0.0673    0.0067    0.0424    0.0001
0.0067    0.0113   -0.0353    0.0001
0.0424   -0.0353    2.7532   -0.0002
0.0001    0.0001   -0.0002    0.0008

E =
-0.6341 + 0.0000i
-9.8530 +55.3522i
-9.8530 -55.3522i
-9.9916 + 0.0000i
```

考察加速度、动行程和轮胎形变的响应特性, 其加入 LQR 控制器和未加入控制器时的伯德图, 其中红色线条为被动悬架, 蓝色线条为加入 LQR 控制器后:

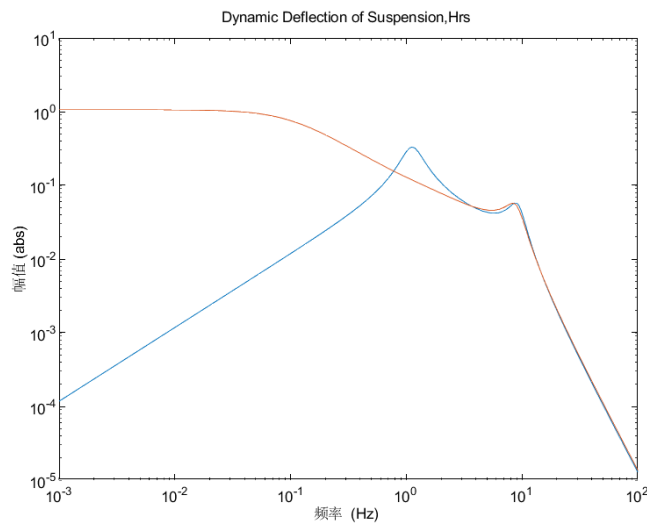


图 6-4 加入 LQR 控制器前后动行程频域曲线

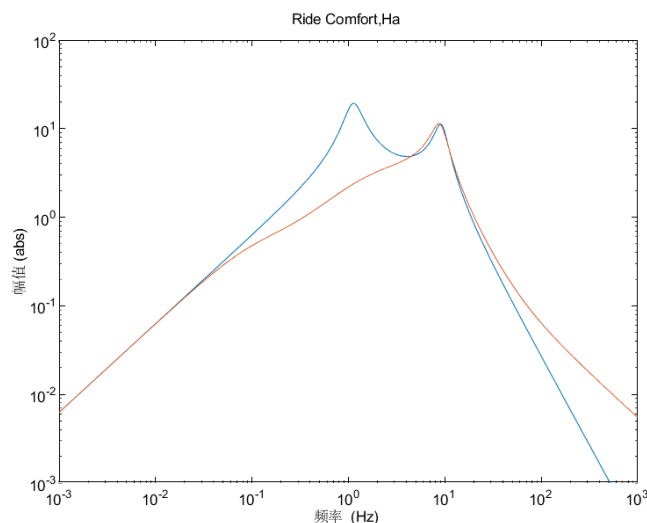


图 6-5 加入 LQR 控制器前后加速度频域曲线

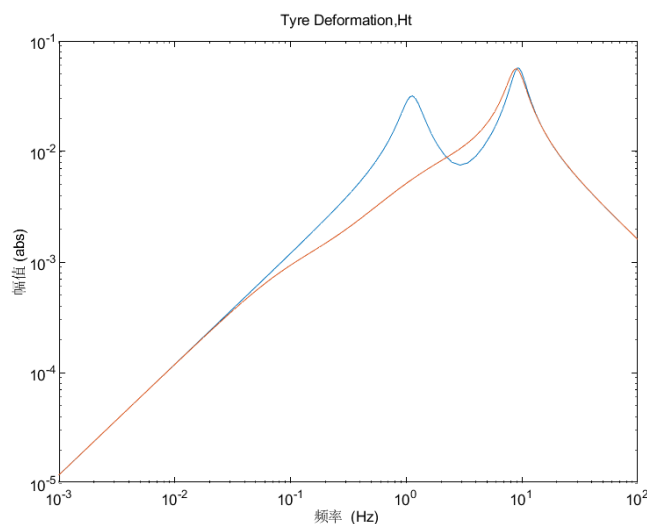


图 6-6 加入 LQR 控制器前后轮胎形变频域曲线

被动式悬架和主动式悬架的动态特性对比如图所示。从图中可以看出相比于被动悬架，LQR 方法设计的主动悬架能够改善悬架在低频扰动下的加速度响应，显著减少了低频下的谐振峰峰值，这增加了车辆行驶过程中的平顺性；与此同时汽车轮胎变形在低频扰动下也有所减小，却增大了在高频谐振峰的变形；然而相比于被动悬架，低频扰动时悬架行程增加。

在加入 LQR 控制器后在离散空间下的时域响应为：

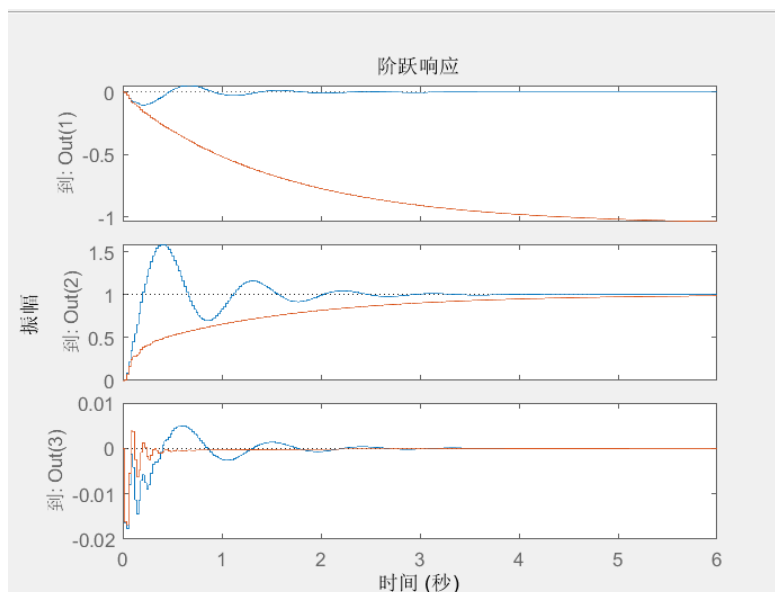


图 6-7 加入 LQR 控制器前后离散空间下时域响应曲线

可以看到，与控制器加入前相比，LQR 控制器得到的路面到各个输出的响应都得到了优化，其行驶平顺性和快速性都得到提高，由于不同的权重矩阵下其设计目标不同，改变权重的配比可以得到不同设计目标下理想的输出。

## 7 总结与体会

### 7.1 总结与展望

不加外部主动控制的汽车悬挂本身是稳定的，其系统完全能控完全能观，但在时域和频域上的响应性能差。主动悬挂通过作动器的力反馈，在一定程度上提高车辆的舒适性和操纵性。主动悬挂的控制策略多样，本文就常见的 PID 控制、LQR 最优控制、 $H_\infty$ 、状态反馈控制和状态观测器的设计，对控制结果在 Matlab/Simulink 进行仿真，比较不同控制器的控制效果，得到明显优于被动悬挂的控制方式。

在整个设计过程中，运用课堂所学的知识，从直接设计和间接设计两种思路出发，直接法基于离散系统进行设计，离散特征的增加和减少易于模型的快速迭代，时间复杂度低；间接法基于连续系统，设计过程和思路直观，能直接与性能要求相连接。

未对控制器进行设计时，其车身加速度、悬挂的偏移都会随着路面的扰动而剧烈振荡，不利于其舒适性和操纵性。而当加入控制器后，在颠簸路面车辆行驶的舒适性、平顺性和操纵性都得到一定程度提高，而且可以对某项特定的指标进行优化或加权进行综合优化。

### 7.2 感想

大作业的完成过程不可谓不艰辛，首先是这种系统设计的连贯性很强，而且 Matlab 在实现控制器设计，极点校正都是通过封装的函数，因此无法直观地看到其具体的计算和实现过程，不能一

眼看出结果的对错。因此,在实现的过程中每一步计算结果都经过验证或图像呈现来确认其正确性。其二就是离散空间的控制器设计相较于连续空间更为陌生,无论是理论上的运算和理解还是在程序实现上函数的调用和实现,因此在整体的完成过程中都需要计算、对比和回溯。总体来说,这项作业任务花费了不少时间与经历,但加深我对于无论是离散系统还是连续系统控制器设计以及对系统本身特性的理解,虽然离散系统与连续系统在结果上总体趋于一致,但也存在细微的区别。连续系统简洁直观,但离散系统在实际应用中也有价值。而且在对车辆主动悬架的设计过程中,也理解到车辆在悬架设计上的学问,不同控制器,不同控制策略都对于控制目标有不一样的影响,在电子技术发展的今天,鲁棒性和适应性强的控制器可以得到广泛的应用。虽然上文提到的控制器都算常见和基础,但是只是理解和真正运用还是有一定区别,纸上得来终觉浅。

### 7.3 课程建议

数字控制相对于线性系统抽象性高,对理论的理解和在实践过程中的应用相比于现代控制理论的方法困难,虽然在数字控制的课程上讲解了数字控制的基本概念和方法,但是没有对各个方法横向比较和提供其在 Matlab/Simulink 中的实际仿真的实现方法,导致在完成大作业时会在某些地方出现卡顿和不解。我希望能将理论和实践相结合,在数字控制的授课过程中理清概念,步步为营,以任务为导向进行讲解;同时我觉得线性系统和数字控制两者理论之间没有建立广泛的联系,两门课之间有一定的分裂感,我希望能将线性系统的知识融入到数字控制的课程中,帮助理解和掌握其中的思想和概念。

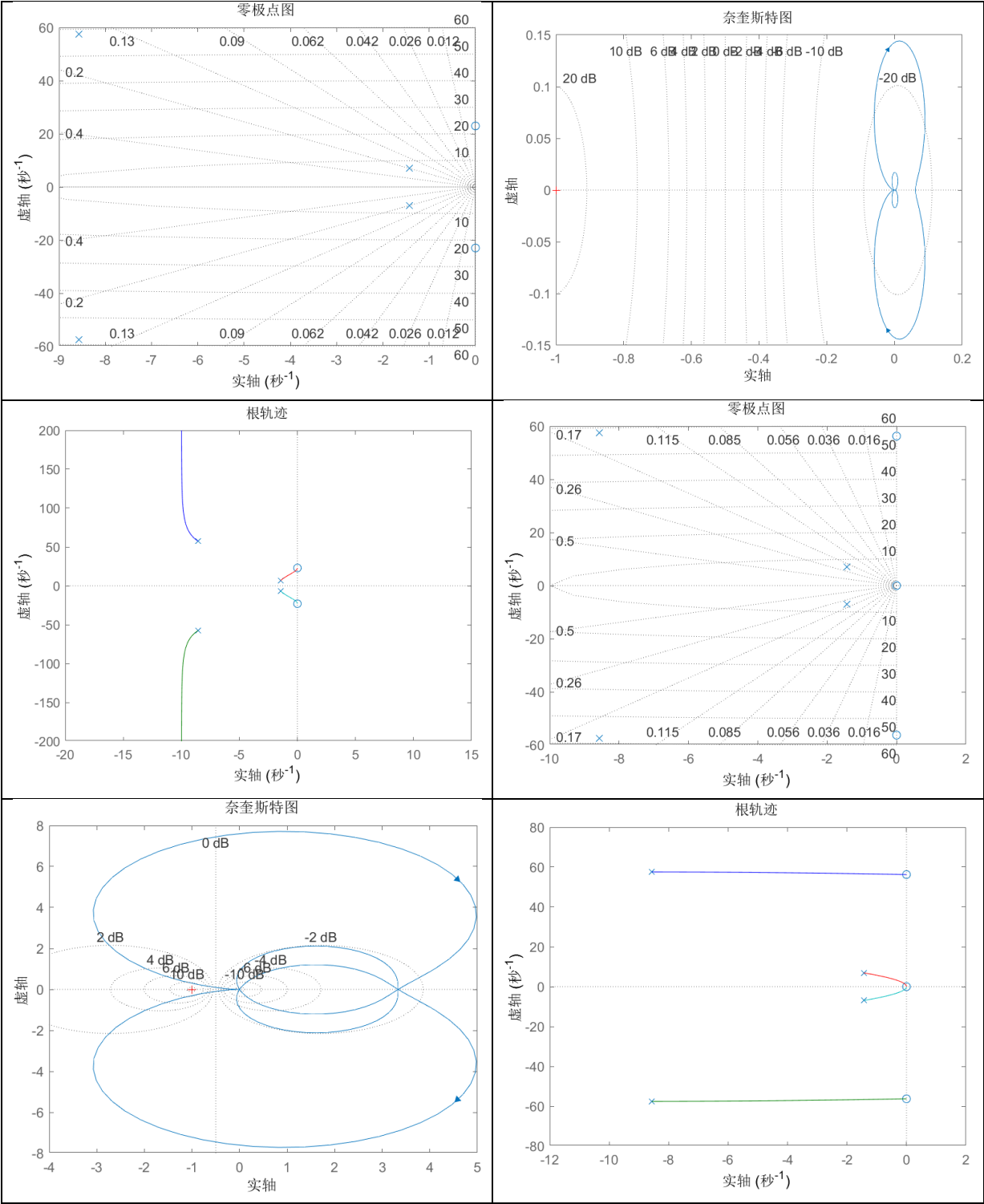


## 参考文献

- [1] 张进秋, 黄大山, 姚军. 车辆悬架系统振动控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2020.4.
- [2] [美]Charles L.Philips.数字控制系统分析与设计[M].王萍译.北京: 机械工业出版社, 2017.6.
- [3] [法]Ioan D.Landau Gianluca Zito.数字控制系统——设计、辨识和实现[M].齐瑞云,陆宁云译.北京: 科学出版社, 2014.
- [4] 何法. 车辆麦弗逊式主动悬架系统控制仿真研究[D].东北林业大学,2016.
- [5] 秦武. 具有约束和不确定性的汽车主动悬架控制方法研究[D].华南理工大学,2020.DOI:10.27151/d.cnki.ghnlu.2020.000094.
- [6] 刘之涵. 麦弗逊悬架角振动模型及其 LQG 控制[D].青岛理工大学,2019.DOI:10.27263/d.cnki.gqudc.2019.000477.
- [7] 宋文滔. 车辆悬架系统振动控制策略设计与仿真研究[D].江苏大学,2022.DOI:10.27170/d.cnki.gjsuu.2022.001216.

附录

A. 连续系统其余传递函数的稳定性分析结果:



B. 道路不平度功率谱密度与标准功率谱密度:

