

路径分析与结构方程模型

授课教师：吴翔

邮箱：wuhsiang@hust.edu.cn

- 1 结构方程模型及其起源
- 2 因果推断概述
- 3 因果推断的反事实框架
- 4 路径模型与因果图

Section 1

结构方程模型及其起源

结构方程模型案例

考虑以下典型的**结构方程模型** (SEM) 案例。

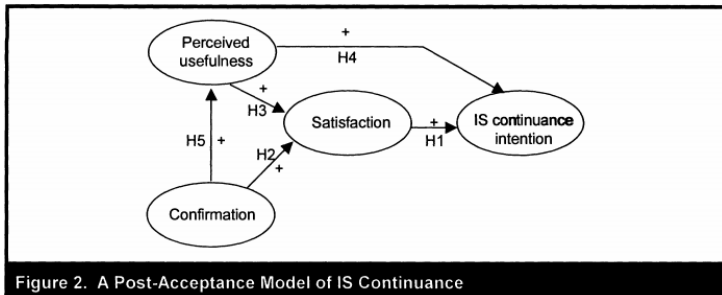


图 1: SEM 案例

请思考: (1) 箭头是什么含义? (2) $X \rightarrow Y$ 的箭头指向, 依据是什么?

结构方程模型案例（续）

以上 SEM 可以使用 LISEREL、AMOS、SmartPLS、Mplus、R:lavaan、R:sem 等软件包估计，得到**路径系数**：

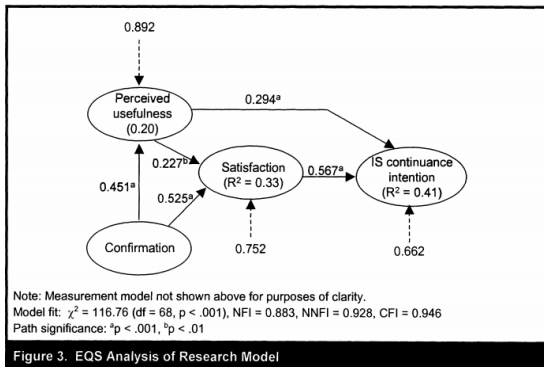


图 2：路径系数

路径分析评注

Pearl (2018) 非常推崇路径分析，并给出了如下评注：

路径分析在经济学和社会学中有着不同的命运轨迹，但两者最终都走向了对Sewall Wright思想的背叛。社会学家将路径分析改名为结构方程建模（structural equation modeling，简称SEM），他们接纳了其中的图形表示法，并将其广泛应用于各类研究——直到1970年，LISREL程序包被开发出来，用于自动计算路径系数。Sewall Wright很可能预测到了接下来发生的事：路径分析变成了生搬硬套的方法，研究者则变成了软件使用者，对后台发生的事情全无兴趣。

Pearl 则由路径分析发展出了因果图 (causal diagrams)。

为什么需要结构模型？

案例讨论：张三硕士毕业后，在医院工作了 5 年，年薪为 27 万。如果当时念完博士再进入职场，那么其期望年薪是多少？

假设使用数百份随机样本来探讨这一问题，估计如下模型：

$$Income_i = \alpha + \beta_1 \cdot Educ_i + \beta_2 \cdot Exper_i + \epsilon_i$$

得到 $\hat{\alpha} = 20$, $\hat{\beta}_1 = 3$, $\hat{\beta}_2 = 1$ 。那么，如上问题的答案是？请给出理由。

要点：结构模型 (structural model) vs 简约模型 (reduced model)

辛普森悖论

患者	处理组（服药）		对照组（未服药）	
	痊愈人数	痊愈率	痊愈人数	痊愈率
女性	81/87	93%	234/270	87%
男性	192/263	73%	55/80	69%
总数	273/350	78%	289/350	83%

图 3: Simpson's Paradox

- 不论男性患者还是女性患者，处理组（服药）的痊愈率更高
- 就整体人群而言，处理组（服药）的痊愈率更低
- 该药物到底是否能够提高痊愈率？

性别歧视？

学生	历史系		机械系		总数	
	录取人数	录取率	录取人数	录取率	录取人数	录取率
女性	12/40	30%	6/10	60%	18/50	36%
男性	1/10	10%	20/40	50%	21/50	42%

图 4: Sex discrimination

- 就整个大学来看，女性的录取率低于男性
- 就各专业来看，女性的录取率均高于男性
- 该大学是否在招生时存在性别歧视？

研究评注

卫生管理、卫生信息管理和图书情报研究中应当注意的事项：

- 问题导向而非数据驱动：研究过程始于研究情境和研究问题，进而是有研究理论推演研究假设，然后才是数据搜集和分析。
- 克服对因果推断的**偏见**：“相关不等于因果”众所周知，然而因果是什么？除了作为金标准的 RCT，如何探讨其它情形下的因果问题，例如吸烟与肺癌？
- 注重**数据生成过程**：研究模型分析应当先于数据分析。单纯的数据分析有误导性，例如探寻冰淇淋销售量 X 与犯罪率 Y 之间的关系。
- 使用**常识、理论和逻辑**：用于推演研究假设，或者图示化的研究模型。
- 使用精确的、数学化的统计模型：清晰表述数据是什么，统计分析在做什么。

Section 2

因果推断概述

三国史论

- **官渡之战**：“昔许子远舍袁就曹，规画计较，应见纳受，遂破袁军，以定曹业。向使曹氏不信子远，怀疑犹豫，不决於心，则今天下袁氏有也。”－《三国志·是仪胡综传》
- **赤壁之战**：后太祖征荆州还，於巴丘遇疾疫，烧船，叹曰：“郭奉孝在，不使孤至此。”－《三国志·郭嘉传》
- **夷陵之战**：先主既即尊号，将东征孙权以复关羽之耻，群臣多谏，一不从。章武二年，大军败绩，还住白帝。亮叹曰：“法孝直若在，则能制主上，令不东行；就复东行，必不倾危矣。”－《三国志·法正传》

请思考并讨论，(1) 以上《三国志》各段，阐明了什么观点？其**逻辑**是什么？(2) 赤壁之战前夕，谁游说了孙权联刘抗曹？

赤壁东风

杜牧《赤壁》

折戟沉沙铁未销，自将磨洗认前朝。
东风不与周郎便，铜雀春深锁二乔。

讨论：诗中阐述了哪两个变量之间的关系？其逻辑是如何的？

大运河

皮日休《汴河怀古二首》

万艘龙舸绿丝间，载到扬州尽不还。
应是天教开汴水，一千余里地无山。

尽道隋亡为此河，至今千里赖通波。
若无水殿龙舟事，共禹论功不较多。

讨论：诗中阐述了哪几个变量之间的关系？其逻辑是如何的？

真伪难辨

白居易《放言五首·其三》

赠君一法决狐疑，不用钻龟与祝蓍。
试玉要烧三日满，辨材须待七年期。
周公恐惧流言日，王莽谦恭未篡时。
向使当初身便死，一生真伪复谁知？

讨论：诗中阐述了哪几个变量之间的关系？其逻辑是如何的？

如何评估因果效应?



图 5: Evaluate the causal effect

The Road Not Taken

The Road Not Taken -- By ROBERT FROST

Two roads diverged in a yellow wood,
And sorry I could not travel both
And be one traveler, long I stood
And looked down one as far as I could
To where it bent in the undergrowth;
Then took the other, as just as fair,
...

I shall be telling this with a sigh
Somewhere ages and ages hence:
Two roads diverged in a wood, and I-
I took the one less traveled by,
And that has made all the difference.

因果推断主要学术流派

因果推断主要存在三大流派：

- **统计学流派**：代表人物为 Donald Rubin、Guido Imbens (2021 年诺奖得主)、Paul Rosenbaum 等。提出的 Rubin Causal Model 更加精确，且符合流行病学的传统思路，易于卫生管理领域的学者理解。
- **人工智能流派**：代表人物为 Judea Pearl (2011 图灵奖得主，贝叶斯网络之父)。在路径模型基础上提出的 Causal Diagrams，更加直观、容易理解。do 算子则相对困难。
- **计量经济学流派**：代表人物为 James Heckman (2000 年诺奖得主)、Joshua Angrist (2021 年诺奖得主) 等。

参考教材

因果推断领域在近几十年内有重大进展，诸多专著均成书于过去 10 年内。请参阅：

- Imbens, G. W., & Rubin, D. B. (2015). Causal inference in statistics, social, and biomedical sciences. Cambridge University Press.
- Pearl, J., Glymour, M., & Jewell, N. P. (2016). Causal inference in statistics: A primer. John Wiley & Sons.
- Pearl, J., & Mackenzie, D. (2018). The book of why: the new science of cause and effect. Basic books.
- Angrist, J. D., & Pischke, J. S. (2008). Mostly harmless econometrics. Princeton university press.
- Angrist, J. D., & Pischke, J. S. (2014). Mastering'metrics: The path from cause to effect. Princeton university press.

Section 3

因果推断的反事实框架

Rubin 因果模型

Rubin 因果模型 (Rubin Causal Model, RCM), 包括三个核心概念:

- 潜在结果 (potential outcomes)
- 个体处理效应稳定性假设 SUTVA
- 处理分配机制 (assignment mechanism)

潜在结果

Rubin (1975) 认为“**没有操纵就没有因果关系**” (no causation without manipulation)。此处的操纵，可以源于处理、干预，以及**想象**。操纵作用于单元 (unit) 之上，为了简化，后续均以个体代表单元，以二值处理代表操纵。

设 D_i 表示个体 i 是否接受处理或干预， $D_i = 1$ 代表处理， $D_i = 0$ 代表对照，而 Y_i^{obs} 代表观察到的结果变量。每个操纵都对应一个**潜在结果** (potential outcomes) $Y_i(D_i)$ ，这些潜在结果是**先验可观察的** (priori observable)，即一旦给定具体的处理水平，就可以观察到。

同时，从**后验** (posteriori) 意义上，一旦应用于具体的处理水平，**最多**可以观察到一个潜在结果。

因果效应定义

$\{Y_i(1), Y_i(0)\}$ 代表个体 i 接受处理或者对照的潜在结果，因而个体 i 接受处理的因果效应 (causal effect) 为：

$$CE_i = Y_i(1) - Y_i(0).$$

可以看到，因果效应涉及潜在结果的比较。

总体的平均因果效应 (average causal effect, ACE) 如下：

$$ACE(D \rightarrow Y) = E[Y_i(1) - Y_i(0)].$$

因果效应定义（续）

如果结果变量取值为二值时，可以使用风险差、风险比及比数比来定义因果效应。

风险差（risk difference, RD）衡量的因果效应为：

$$CRD(D \rightarrow Y) = P(Y(1) = 1) - P(Y(0) = 1).$$

比数比（odds ratio, OR）衡量的因果效应为：

$$COR(D \rightarrow Y) = \frac{P(Y(1) = 1)/P(Y(1) = 0)}{P(Y(0) = 1)/P(Y(0) = 0)}.$$

因果效应定义（续）

因果效应的定义，有两个重要之处：

- 因果效应的定义取决于潜在结果，但并不取决于实际观察到的结果。从数学上来看，个体层面的因果效应 $\pi_i = Y_i(1) - Y_i(0)$ ，并不涉及实际观察到的结果 Y_i^{obs} 。
- 因果效应是处理后同一时间、同一个体的潜在结果的比较。特别需要强调的是，因果效应不是不同时间的结果比较，例如服用阿司匹林前后个体头痛情况的比较。

因果效应的定义，与侵权法和刑法中 but-for 测试的逻辑一致，but-for 测试问道：“要不是 X 的存在，Y 会发生吗？” (but for the existence of X, would Y have occurred?)

因果效应估计

在定义因果效应时，我们考虑了单一个体（单元）。估计因果效应时，我们需要比较潜在结果。由于任一个体都最多只有一个实现了的潜在结果，因此在估计因果效应时需要考虑多个个体。更确切地说，我们必须观察多个个体，有些接受了处理，而有些接受了对照。

为了使用多个个体估计因果效应，我们面临两个潜在风险：

- 存在个体相互干扰的可能性。
- 处理水平应用于多个个体，这些处理水平可能存在形式或版本差异。

因此，我们引入额外的假设：个体处理效应稳定性假设。

SUTVA

个体处理效应稳定性假设 (the stable unit treatment value assumption, SUTVA):

SUTVA假设：任何个体（或称单元）的潜在结果，不会随着分配给其他个体的处理而变化。并且对于每个个体，每个处理水平没有不同的形式或版本，使得不同的潜在结果产生。

SUTVA (续)

SUTVA 包含两个部分:

- 无干扰部分 (no-interference component): 即假设应用于个体的处理不会影响其他个体的潜在结果。这一假设通常是合理的。但在传染病疫苗接种等情形下, 并不成立。此时, 可以重新界定分析单元, 例如分析单元为个体能够交互的社区, 但社区之间是隔离的。
- 无隐藏的处理变化 (no hidden variations of treatments): 即每个处理水平没有不同的形式或版本, 使得不同的潜在结果产生。这一假设要求明确定义处理和潜在结果是什么。

因果效应估计（续）

在 SUTVA 假定下, 个体 $i (1 \leq i \leq N)$, 要么接受处理 (此时 $D_i = 1$), 要么接受对照 (此时 $D_i = 0$)。两个潜在结果只能实现一个, 因而最多也就能观察到一个。此时, 实现并且观察到 (realized and observed) 的结果:

$$Y_i^{obs} = Y_i(D_i) = D_i \cdot Y_i(1) + (1 - D_i) \cdot Y_i(0) = \begin{cases} Y_i(1), & \text{if } D_i = 1; \\ Y_i(0), & \text{if } D_i = 0. \end{cases}$$

与此同时, 另一潜在结果则无法观察到, 因而在数据上是**缺失**的:

$$Y_i^{mis} = Y_i(1 - D_i) = D_i \cdot Y_i(0) + (1 - D_i) \cdot Y_i(1) = \begin{cases} Y_i(0), & \text{if } D_i = 1; \\ Y_i(1), & \text{if } D_i = 0. \end{cases}$$

分配机制

由于因果效应是通过比较潜在结果来定义的，因而无论采取什么处理，它都可以良好地被定义。然而，我们最多观察到所有潜在结果的一半，并且没有观察到任何个体层面的因果效应，因此存在因果效应的推断或估计问题。

从这一意义上而言，**因果推断的问题，本质上是缺失数据问题** (Rubin, 1974)：给定分配给个体的任何处理，那么与替代处理相关的潜在结果就缺失了。因此，缺失数据机制或者说**分配机制** (assignment mechanism) 发挥了关键作用。如何确定哪些个体得到了处理，或者换言之，哪些潜在结果可以实现，而哪些不能？这一机制对于因果推断问题非常重要。

因果效应估计案例

考虑患者可能接受两个处理：手术治疗 ($D = 1$) 和药物治疗 ($D = 0$)。潜在结果为患者治疗后的生存年数 Y 。

- 在给定潜在结果的情形下，请计算因果效应。
- 考虑给定的观察结果，思考其可能的分配机制是什么。

因果效应估计（续）

Table 1.4. Medical Example with Two Treatments, Four Units, and SUTVA: Surgery (S) and Drug Treatment (D)

Unit	Potential Outcomes		Causal Effect
	$Y_i(0)$	$Y_i(1)$	$Y_i(1) - Y_i(0)$
Patient #1	1	7	6
Patient #2	6	5	-1
Patient #3	1	5	4
Patient #4	8	7	-1
Average	4	6	2

图 6: Potential Outcomes

因果效应估计（续）

Table 1.5. *Ideal Medical Practice: Patients Assigned to the Individually Optimal Treatment; Example from Table 1.4*

Unit i	Treatment W_i	Observed Outcome Y_i^{obs}
Patient #1	1	7
Patient #2	0	6
Patient #3	1	5
Patient #4	0	8

图 7: Observed Outcomes

因果效应估计（续）

问题在于，真实的平均因果效应 $E[Y_i(1) - Y_i(0)]$ 与观察到的组间（处理组 vs 对照组）差异 $E(Y_i^{obs} | D_i = 1) - E(Y_i^{obs} | D_i = 0)$ 是什么关系？

因果效应估计 (续)

观察到的处理组与对照组在结果变量 Y 上的平均差异, 可以分解为两部分:

$$\begin{aligned}
 & E(Y_i^{obs} | D_i = 1 - Y_i^{obs} | D_i = 0) \\
 &= E[Y_i(1) | D_i = 1 - Y_i(0) | D_i = 0] \\
 &= \underbrace{E[Y_i(1) | D_i = 1 - Y_i(0) | D_i = 1]}_{\text{average causal effect}} + \underbrace{E[Y_i(0) | D_i = 1 - Y_i(0) | D_i = 0]}_{\text{selection bias}}
 \end{aligned}$$

如果第二项选择性偏误等于零, 则观察到的处理组与对照组在结果变量上的平均差异, 就等于平均因果效应。此时要求, 处理 D 独立于潜在结果 $\{Y_0, Y_1\}$:

$$D \perp \{Y_0, Y_1\}.$$

随机对照实验

如何满足 $D \perp \{Y_0, Y_1\}$? 随机化!

因此, 估计因果效应时, 可以直接比较处理组和对照组在结果上的差异。此时可以推导:

$$ACE(D \rightarrow Y) = E[Y(1) - Y(0)] = E[Y(1)|D = 1] - E[Y(0)|D = 0].$$

讨论: (1) 为什么 RCT 满足如上假设; (2) 观察研究中, 如何估计因果效应?

可忽略性

更一般地，如果给定协变量 Z 后，处理的分配机制可以做到随机化，例如有区组的随机化实验，那么分配机制就是可忽略的。

可忽略处理分配 (ignorable treatment assignment) 假设

$$D \perp \{Y_0, Y_1\} | Z.$$

在满足可忽略处理分配假设时，观察研究也可以做因果推断。这一假设也称为 selection on observables。

可忽略性 (续)

当 $D \perp \{Y_0, Y_1\} | Z$ 时, 平均因果效应:

$$\begin{aligned}
 ACE(D \rightarrow Y) &= E[Y(1) - Y(0)] \\
 &= E\{E[Y(1)|Z]\} - E\{E[Y(0)|Z]\} \\
 &= E\{E[Y(1)|Z, D = 1]\} - E\{E[Y(0)|Z, D = 0]\} \\
 &= E\{E[Y^{obs}|Z, D = 1]\} - E\{E[Y^{obs}|Z, D = 0]\}.
 \end{aligned}$$

因而, 此时 $ACE(D \rightarrow Y)$ 可以直接使用观察数据来估计。

可忽略性 (续): 辛普森悖论

请重新考虑辛普森悖论, 并估计药物对痊愈的因果效应。

患者	处理组 (服药)		对照组 (未服药)	
	痊愈人数	痊愈率	痊愈人数	痊愈率
女性	81/87	93%	234/270	87%
男性	192/263	73%	55/80	69%
总数	273/350	78%	289/350	83%

图 8: Simpson's Paradox

可忽略性 (续): 辛普森悖论估计案例

在给定性别 Z 的条件下, 服药与否 D 独立于是否痊愈这一潜在结果 $\{Y(0), Y(1)\}$ 。女性 ($Z = 1$) 占比为 $(87+270)/700=0.51$; 男性 ($Z = 0$) 占比为 $(263+80)/700=0.49$ 。因此,

$$\begin{aligned} ACE(D \rightarrow Y) &= E\{E[Y^{obs}|Z, D = 1]\} - E\{E[Y^{obs}|Z, D = 0]\} \\ &= (93\% \times 0.51 + 73\% \times 0.49) - (87\% \times 0.51 + 69\% \times 0.49) \\ &= 83.2\% - 78.2\% = 5\%. \end{aligned}$$

可忽略性 (续)

Q: 如果协变量 Z 较多时, 则难以直接使用以上公式来计算。此时该如何处理?

A: 可以计算**倾向得分**, 使用倾向得分来做统计调整, 或者匹配。匹配方法的思路是, 找到类似的样本, 可以填补缺失的潜在结果。此时的处理方法, 可以参阅 Imbens & Rubin (2015) 关于倾向得分的表述, 以及 Guo & Fraser (2014) 的倾向得分匹配方法。

可忽略性（续）

Q: 如果不满足可忽略处理分配 (ignorable treatment assignment) 假设, 应当如何处理?

A: 此时称为 **selection on unobservables**, 处理上需要更多假设或者工具, Rubin 在此处的阐述不及另两个因果推断流派。因而, 处理方法可以参阅 Pearl 的因果图 + do 算子, 以及 Heckman 的样本选择模型。

Section 4

路径模型与因果图

Monty Hall 悖论

美国电视娱乐节目 Let's Make a Deal 的主持人 Monty Hall:

- 你面前有三扇关闭着的门，其中一扇门后是汽车，其余两扇门后是山羊，选中后面有车的那扇门就可以赢得该汽车。假设你选定了 A 门，主持人开启了另外两扇门中的一个，露出一只山羊，例如此时主持人打开的是 C 门。那么，你是否要更换选择，选 B 门？

在流行病领域，类似的问题称为**博克森悖论**：两种疾病即使在一般人群中彼此不存在实际联系，在医院的病人中也会形成某种似是而非的关联。

讨论：如何抉择？



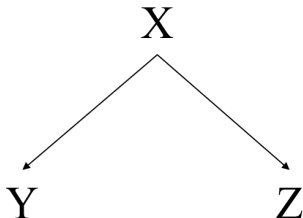
图 9: Monty Hall Problem

三种基本结构

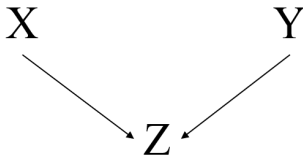
(a) 链结构



(b) 分叉结构



(c) 对撞结构



链结构案例

开放讨论：

- UC Berkeley 招生案例中，大学层面的女学生录取率更低，而各个专业的女学生录取率更高。请问，是否存在性别歧视？
- 如何理解中介模型？

提示：总效应 vs 直接效应

分叉结构案例

讨论:

- 有哪些常见的分叉结构的例子?
- 如何绘制和分析巧克力→ 诺贝尔奖数量这一研究设计?

对撞结构: Monty Hall 悖论分析

1 号门	2 号门	3 号门	换门的结果	坚持的结果
车	山羊	山羊	输	赢
山羊	车	山羊	赢	输
山羊	山羊	车	赢	输

图 11: Monty Hall Problem: Analysis

讨论: 如果改变游戏规则, 主持人 Monty Hall 随机打开另外两扇门, 即可能打开有汽车的那扇门。那么, 你是否会选择换门?

Monty Hall 悖论分析 (续)

你选的门	车所在的门	主持人打开的门	换门的结果	不换门的结果
1	1	2 (山羊)	输	赢
1	1	3 (山羊)	输	赢
1	2	2 (车)	输	输
1	2	3 (山羊)	赢	输
1	3	2 (山羊)	赢	输
1	3	3 (车)	输	输

图 12: Alternative Problem: Analysis

Monty Hall 悖论分析 (续)

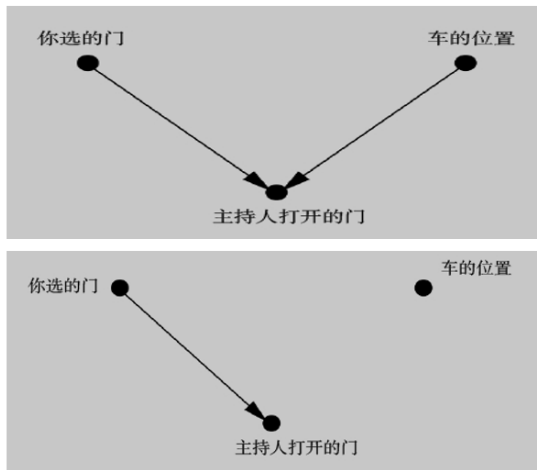


图 13: Causal Diagrams of Monty Hall Problems

案例分析与讨论

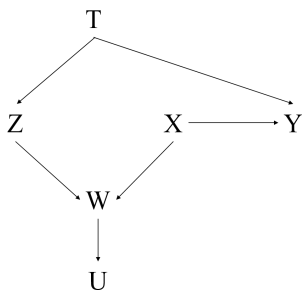


图 14: Case study

在以上路径图（或因果图）中，如何估计（即应当控制哪些变量）：

- X 对 Y 的效应
- Z 对 Y 的效应

案例分析与讨论（续）

请使用因果图方法，考虑如下案例，应当如何估计水的纯净度（X）与霍乱（Y）之间的关系。

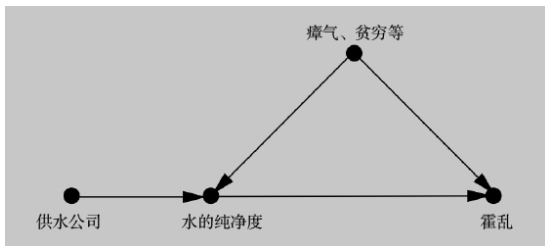


图 15: John Snow 与霍乱之战