经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

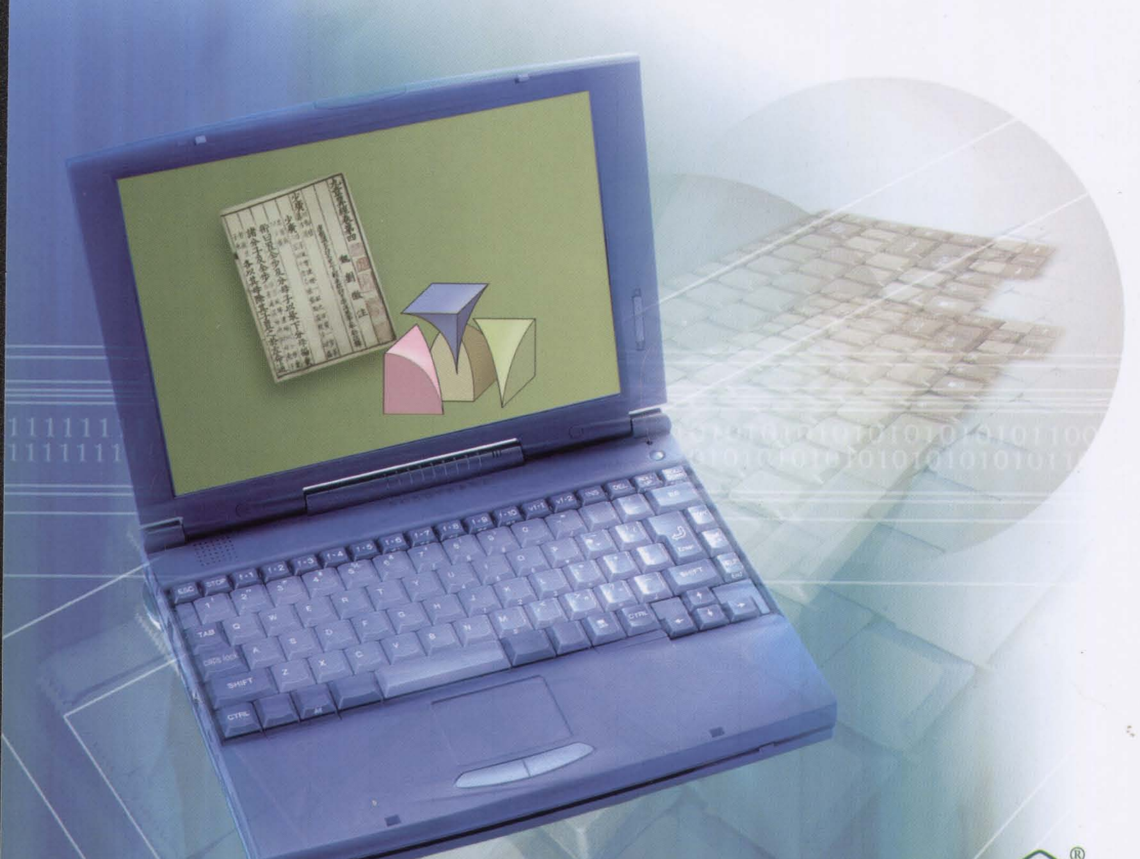
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修3–1

数学史选讲

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3-1

数学史选讲

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

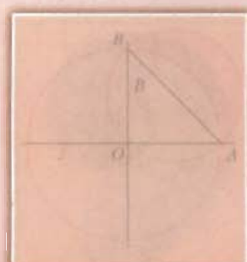
A版

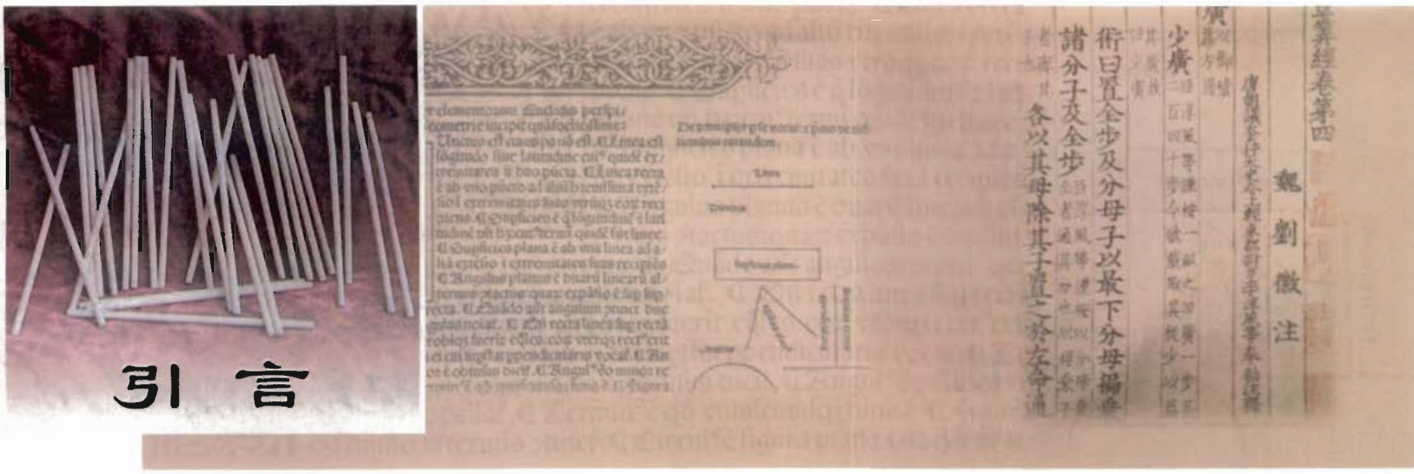
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

主要编者：林立军
责任编辑：王　嵘
美术编辑：高　巍　王　艾
封面设计：吴　敬

目 录

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA





引言

当我们开始认识这个世界时，数学就和我们在一起了．同学们在进入小学之前，就已经开始认识和使用阿拉伯数字，这是进入数学殿堂的开端，至今大家已经掌握了大量数学知识．那么，这些数学知识是如何产生和发展的呢？比如，最早的数学知识都诞生在哪些地方，为什么像$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$以及 π 这样的数称为无理数，几何问题为什么要进行推理证明，等等．这些问题你考虑过吗？你想了解数学家们是如何思考这些问题的吗？

数学知识的形成过程与人类认识自然的历史一样漫长，是随着人类社会的生活、生产活动而自然产生、发展和成熟的．现在看起来很自然的一些数学概念（例如无理数、负数、0 等），历史上却经历了漫长的过程才被接受，它们是许多学者前赴后继、辛勤耕耘的结果．数学是一门历史性或积累性很强的学科．数学史记载了这门学科发生、发展的过程，展现了其深刻内涵和完美形式背后激动人心的灵感、睿智的思想和孜孜不倦的探索精神．

“历史使人明智”．学习一些数学史知识，可以使同学们了解数学的发展轨迹，更好地体会数学概念所反映的思想方法，感受数学家们刻苦钻研和勇于开拓的精神，这对开阔视野、启发思维以及学习和掌握数学知识都大有益处．

本书选取数学史中一些典型的、重要的专题，例如，早期算术与几何，中国古代数学瑰宝，微积分的产生，近代数学两巨星，康托尔的集合论等等，介绍了一些常见数学概念、理论和方法的来源、典故及历史演变过程，以此反映不同时期数学发展的水平和特点．

数学的历史源远流长，内涵丰富．希望同学们通过本书所展示的数学发展过程中若干重要事件、重要人物和重要成果，初步了解数学产生与发展的过程，体会数学对人类文明发展的作用，加深对数学的理解，感受数学家的严谨态度和锲而不舍的探索精神．

第一讲 早期的算术与几何
——记数与测量

尼罗河下游的古埃及、两河流域的古巴比伦、恒河与印度河畔的古代印度以及黄河与长江流域的古代中国并称“四大文明古国”，创造了灿烂辉煌的“河谷文明”，早期的数学就诞生在这些地方.

人类在长期的生产实践和与自然斗争的过程中，逐渐掌握了丰富的科学知识. 土地面积的丈量、商品的交易以及大规模宫殿的建造，无疑都要使用较高深的数学知识.

在大量的生产和生活实践活动的基础上，四个地区的古代先民们对数学——空间形式和数量关系的研究各具特色，成绩斐然. 就已有的数学史料看，古埃及与古巴比伦的数学历史最为久远.

一 古埃及的数学

古埃及位于非洲东北部的尼罗河两岸. 公元前 525 年，波斯入侵，埃及成为波斯帝国的一个郡. 公元前 332 年以后，该地区处于希腊人的统治之下，所创造的数学归入希腊数学的范围. 而古埃及数学一般指公元前 6 世纪以前这个地区所创造的数学.

1. 象形文字中的数字记法

古埃及最古老的文字是象形文，大约在公元前 3000 年就已形成，如图 1-1.

图 1-1 古埃及的象形文

在古埃及的象形文中已经出现代表数字的各种符号，各个符号所代表的数字如图 1-2 所示. 进位的基数是 10，每个数字可能有几种写法. 1 就是一个竖划，2 到 9 依次累加，10 像拱门，100 是一卷绳，1 000像荷花，10 000 是一个指头，有时向左弯，有时向右弯，100 000 有好几种写法，有时像青蛙或蝌蚪，有时像江鳕鱼或小鸟. 在古埃及的第 1 王朝

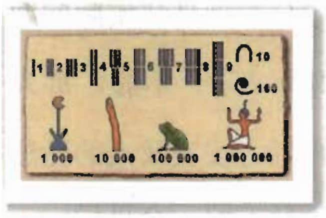


图 1-2　象形文中的数字

还出现过 10^6 的符号，像埃及的空间之神，最大的单位是 10^7，像初生的太阳．其他的数可以通过这些数的简单累积来表示，如数 12 345 可以写作 ．

在这种记数方法中，每一个较高的单位都要创设一个新符号，记数时有多少单位就要重复多少次，上下左右书写均可．但符号毕竟是有限的，记太大的数就会显得捉襟见肘．

在远古时代，人们使用分数的需要还不迫切，但随着生产力的发展和人类文明的进步，特别是进入青铜时代以后，分数及分数符号的产生就显得尤为重要，而且不可避免．象形文中用一种特殊的记号来表示分子为 1 的分数，这样的分数又称为单分数：在表示整数的符号上画一个简单的椭圆，就表示该整数的倒数．如 $\frac{1}{5}$ 写成 ，$\frac{1}{10}$ 写成 ，$\frac{1}{15}$ 写成 ……在古埃及的另一种文字僧侣文中也有相应分数的记法．

这些数字散见于古埃及时代的陶片、石头、木头或纸草上，在坟墓内、庙宇的墙上及方尖塔上也能够见到．

2. 纸草书上的数学


莱因德纸草书(上为全景下为局部)

在尼罗河三角洲地区盛产一种形如芦苇的水生植物——纸草．古埃及人用削尖的芦杆蘸上黑色或红色颜料把文字写在纸草上．

埃及的纸草文书为后世留下了大量珍贵的历史资料，其中与数学有关的纸草书有两本．一本称为“莱因德纸草书”，归伦敦大英博物馆所有，大约产生于公元前 1650 年．另一本称为“莫斯科纸草书”，收藏在莫斯科国立造型艺术博物馆．这本纸草书产生于公元前 1850 左右，比莱因德纸草书产生得早，但重要性要稍逊于莱因德纸草书．

这两本数学纸草书都是用僧侣文写成的，全书共有 84 个题目，是我们认识古埃及数学的主要依据．莱因德纸草书的开头写到：“准确的计算，阐明一切黑暗的、秘密存在的事物的指南．”本书大概是当时一种实用的计算手册，记述千余年来的一些数学问题．

单分数

埃及数学中有一个独特现象：除 $\frac{2}{3}$ 用一个单独的符号表示以外，其他分数都要写成若干个单分数和的形式．莱茵德纸草书在前言之后就给出了形如 $\frac{2}{n}$（$n=5，7，9，\cdots，101$）的分数分解为单分数和的表．利用这张表就可以把其他分数分解成单分数和的形式．

埃及人为什么如此偏爱单分数，这个问题至今仍是一个未解之谜．有一种观点认为，

单分数就是从实际问题中产生的．假定有两个面包，要平均分配给 5 个人，问怎样分？如果每人$\frac{1}{2}$，不够，每人$\frac{1}{3}$，余$\frac{1}{3}$，再将这$\frac{1}{3}$分成 5 份，每人得$\frac{1}{15}$，这样每人分得$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$．再者，按埃及人的除法，所得的商是单分数之和．也许由于这些原因，单分数就成为古埃及数学的一大特色．

算术运算

僧侣文的记数法属于分级符号制（详见第 11 页），整数的加减法很简单，只要将表示数目的符号累积起来，再转写成相应的符号即可．但分数的加减法却相当复杂，因为所有的分数都要化成单分数．

乘法是累加法，是以“倍乘”（即乘 2）及“平分”$\left(\text{即乘}\frac{1}{2}\right)$为基础进行的．以 25×18 为例（用现代的符号和术语）：

1	25	被乘数
* 2	50	
4	100	
8	200	
* 16	400	
乘数 18	450	积

先写 1　25（表示 1×25＝25）作为第 1 行，再写 2　50（表示 2×25＝50），以下同样逐次加倍，加到 16 可不必再加，因为再加下去就超过乘数 18 了．从左列数（1，2，4，8，…）中选出若干个，使其凑成 18．本例是 2 与 16，各打上 * 号，再将右列中与 * 号对应的数相加，即得 $25\times(2+16)=50+400=450$．

除法的原理一样，只不过将步骤颠倒过来．

代数问题

书中有几个问题属于现在代数中的一元一次方程问题，其中一个是这样的：一个量，加上自身的七分之一等于 19．现在的解法很简单，列方程为 $x+\frac{x}{7}=19$，解得 $x=16\frac{5}{8}$．纸草书中的解法却非常烦琐，但结果却是正确的．

几何问题

在纸草书上出现了一些求面积（如三角形、圆的面积）和体积（如四棱台体）的题，但得到的结果总体来说还不够精确．可以看出，尽管埃及是几何学的发源地，但其几何水平却不高，始终处在实验阶段，还没有将它发展为系统的、理论的学科．

3. 几何学的诞生

尼罗河是埃及的母亲河，通常在每年的 7 月中旬定期泛滥，11 月后洪水逐渐消退，留下肥沃的淤泥．这样来年就容易耕作，庄稼的丰收也就有了保障．埃及的几何学就起源于尼罗河泛滥后的土地测量，这种说法最早出自古希腊的历史学家希罗多德（Herodotus，

约公元前 484—前 424)，他说：“塞索斯特里斯在全体埃及居民中把埃及的土地作了一次划分．他把同样大小的正方形土地平均分配给所有人，而土地持有者每年向他缴纳租金，作为他的主要收入．如果河水冲走了某人分得土地的任何一部分，这个人就可以将此事告知国王，国王就会派人前来调查并测量损失地段的面积．今后的租金就要按照减少后的土地面积来征收了．我想正是由于有了这样的做法，埃及才第一次有了几何学，而希腊人又从那里学到了它．”

埃及由土地的测量促使几何学的兴起，那些从事土地测量的人员有一个专名，叫做“拉绳者”，可以说，这些拉绳者就是当时的几何学家．

古埃及的“拉绳者”

古希腊的亚里士多德（Aristotle，公元前 384—前 322）则从另一个角度说明几何学起源于埃及，他在《形而上学》中写道：“在实用的技术发明之后，那些并不直接为生活的需要或满足的科学才会产生出来．它首先出现在人们有闲暇的地方，数学科学最早在埃及兴起，就是因为那里的祭司阶层享有足够的闲暇．”

从纸草书中记载的三角形、圆以及棱台体积的计算内容看，虽然埃及是几何学的发源地，但始终停留在实验阶段，几何学知识是零碎的、片段的，尚未形成完整的体系，还缺乏逻辑因素，基本上看不到命题的证明，似乎还不知道勾股定理．直到公元前 4 世纪希腊人占领了该地区以后，情况才发生了根本的变化．

二 两河流域的数学

亚洲西部的底格里斯河与幼发拉底河之间的地带，通常叫做美索布达米亚平原，美索布达米亚语出希腊文，意思是“两河之间的地区”，故而这个地区也称为两河流域（今伊拉克境内)．像尼罗河一样，两河流域也是人类文明的摇篮．从公元前 3000 年到前 200 年，这一地区（在今伊拉克和伊朗西部）所创造的数学，习惯统称为巴比伦数学．

早在公元前四、五千年，两河流域的苏美尔人用削尖的芦苇杆或木棒在软泥板上写字，泥板晒干后坚硬如石．由于这样的字形状像楔子，所以这种文字称为楔形文．苏美尔人后，各民族继续使用楔形文，只是不同时期所使用的有所不同．

1. 楔形文字中的记数法

19 世纪初开始，两河流域陆续出土了大约 50 万块泥板．从内容看，几十万块泥板中属于数学的仅 300 块左右，其中约 200 块是各种数表，包括乘法表、倒数表、平方表和立方表等．

苏美尔人创造了楔形文字，后来传给了巴比伦人．巴比伦人发展成一套记数方法，是 10 进和 60 进的混合物．60 以下用 10 进的简单累数制，60 以上用 60 进的位值制．

在巴比伦的楔形文字中，数码符号只有两个：𒁹 表示 1，𒌋 表示 10．一个 𒁹 表示 1，两个 𒁹 表示 2……九个 𒁹 表示 9．超过 9 的，一个 𒌋 表示 10，两个 𒌋 表示 20……大于 59 的数，巴比伦人则采用 60 进的位值记法．同一记号，根据它在数字表示中相对位置的不同赋予不同的值．图 1-3 给出了 1 到 130 的数字符号．

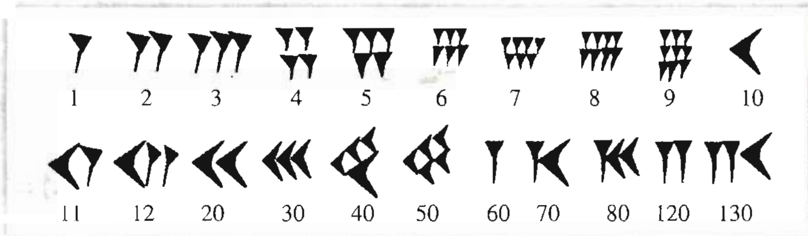


图 1-3　楔形文中的数字

其中，𒁹𒁹𒌋 $=60\times2+10=130$．

2. 泥板上的代数

从泥板的数学内容可以看出，古巴比伦人不但能计算各种复杂的算术问题，而且给出了乘法表，并能求解一元二次方程．

我们知道，代数与算术的根本区别在于代数引入了用符号表示的未知数，根据已知条件列出方程，对未知数加以运算，最后解方程求出未知数．如果说未知数、符号和方程是代数学的基本特征，那么代数只能说开始于法国数学家韦达（F. Vieta，1540—1603）等人引进代数符号的 16、17 世纪．如果放宽条件，把引入未知数，可对未知数进行运算都归入到代数的范畴，那么代数学至少在古埃及的纸草书和古巴比伦的泥板上就已经出现了．

在现藏美国耶鲁大学的一块古巴比伦数学泥板上，有一个典型的代数问题：已知两数的积为 $60'$，差为 $7'$，求这两个数．将泥板正反两面的楔形文字翻译过来就是计算过程．

这个计算过程，除进位制不同之外，和现代的二次方程的求根公式完全一致．在数学泥板中，这种二次方程的例子数以百计．这充分说明，虽然不具备现代的形式，但巴比伦人已经知道二次方程的求根公式．不过他们还不知道负数，因此，也不知道二次方程有两个根．

更加令人不可思议的是，巴比伦人甚至已经知道如何求解指数方程．例如有这样一个复利问题：有一笔钱，年利率为 20%，问经过多长时间后利息与本金相等？这实际上是求

指数方程：

$$1.2^x=2.$$

解的结果 x 为 4 年减去 $\left(2+\frac{33}{60}+\frac{20}{60^2}\right)$ 月．古巴比伦人的数学水平，不能不令人赞叹．

3. 泥板上的几何

泥板上已经出现了各种几何问题，从中可以看出古巴比伦的几何已经达到了较高的水平．

泥板上的几何图形

$\sqrt{2}$的计算

在勾股定理和勾股数的计算与研究方面，巴比伦人的成就遥遥领先于其他三个文明古国．泥板数学中，有许多涉及到勾股定理应用的问题．特别是在一块公元前 1700 年左右的圆饼状泥板上，刻有一个正方形，并画出了对角线．对角线上写了一行数字，即 1，24，51，10，化为 10 进小数就是

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.414\ 212\ 96\cdots.$$

显然，这就是$\sqrt{2}$的近似值，与真值的差不超过 6×10^{-7}，正是按勾股定理推算出来的单位正方形对角线的长．

在古印度也有对$\sqrt{2}$的记载．《测绳的法规》给出了$\sqrt{2}=1.414\ 215\ 68\cdots$，误差是 2.1×10^{-6}，比泥板上$\sqrt{2}$的近似值的误差大得多，并且时间已经晚了一千多年．

勾股数

普林顿 322 号数学泥板

纽约哥伦比亚大学的珍本图书馆藏有一块年代为公元前 1900—前 1600 的泥板，称为普林顿 322 号数学泥板．泥板上用楔形文刻有 4 列数字，共 15 行，最初人们以为是一种普通的商业账单，没有引起太多的注意．后来经过研究才发现，这竟然是一个勾股数表．所谓勾股数，就是满足不定方程

$$a^2+b^2=c^2$$

的正整数组 $(a,\ b,\ c)$，也叫毕达哥拉斯三元数组．巴比伦最令人吃惊的数学成就，就是在很古老的年代就给出了大量的、数目巨大的勾股数．普林顿 322 泥板还有许多未解之谜等着人们去研究．

巴比伦数学在某些方面取得了惊人的成就，最突出的是勾股定理和勾股数，领先于其他国家千年以上．还有二次方程、复利问题及位值制记数法的思想都是领先于时代的，但 60 进制却不是很理想的进位制度．

总的来说，古巴比伦的数学与古埃及的数学一样，主要是解决各类具体问题的实用知识，处于原始算法积累时期．尽管在古埃及的纸草书和巴比伦的泥板上都有求几何图形面

积的问题，但本质上都是算术的应用，几何学作为独立的学科还不存在．数学的进一步的飞跃要等待古希腊来完成．

三 丰富多彩的记数制度

我们现在普遍使用的 0，1，2，…，9 称作阿拉伯数码，任何一个数字都可以用这 10 个数码来表示．当数字大于 9 时，无需创造新的数码，只要在表示十位的地方写 1，在表示个位的地方写 0 就可以了，这样就写出了数字 10．由此可以看出，上述十个阿拉伯数码放在不同的数位上，它所表示的意义是不一样的．拿 1 为例，放在个位表示 1，放在十位表示 10，放在百位表示 100……这样的记数制度叫做“十进位值制”．

用十进位值制记数法非常方便，写出的数字简洁明了．古代的先民采用十进可能与人有 10 个手指有关．十进位值制包含两个要素：一个是**十进**，一个是**位值**，两者缺一不可．在这两个要素中，位值的思想比进位的思想更具实际意义．

1. 中国古代的算筹记数

中国古代用算筹来进行计算，而中国古代的算筹记数法就是现代的十进位值制．算筹的功用和后世的算盘珠大致相仿，5 以下的数码是几就用几根算筹表示，6、7、8、9 四个数码用一根放在上面，余下的数，每根算筹表示 1．算筹是将几寸长的小竹棍（或用木、玉、金属制造）摆在平面上进行运算，算筹的摆放形式有纵横两种方式，如图 1-4．那么，算筹的摆放形式为什么采用纵横两种方式呢？

西汉象牙算筹

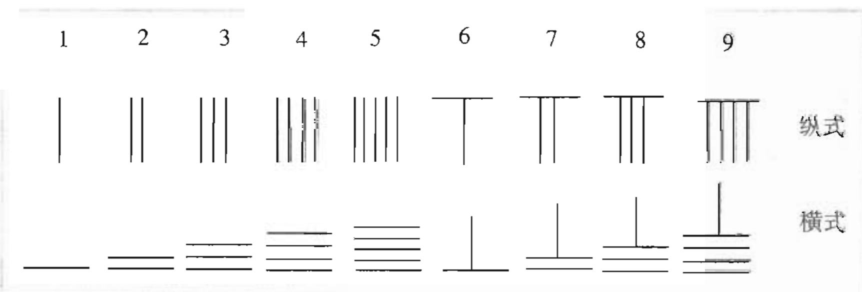


图 1-4 中国古代的算筹数码

表示一个多位数时，像现在用阿拉伯数码记数一样，把各位的数码从左到右横着排列，但各位数码的筹式需要纵横相间，个位数用纵式表示，十位数用横式表示，百位、万位用纵式，千位、十万位用横式……例如 6 614 用算筹表示出来就是𝍮𝍥𝍩𝍣；数字有空位时，如 86 021 用算筹表示就是𝍧𝍮　𝍪𝍠，百位上是空位不放算筹，又如10 340用算筹表示出来就是𝍠　𝍢𝍬　，千位和个位都不放算筹．因为布置算筹需要纵横相间，这个数

字有没有空位是很容易辨别的.《孙子算经》中清晰地记载了算筹的纵横相间制“一纵十横，百立千僵．千、十相望，万、百相当．满六以上，五在上方．六不积算，五不单张”．算筹记数的纵横相间制传到宋元时期都没有改变.

算筹记数是中国古人在生产实践中创造出来的一种方法．用极简单的算筹，纵横布置，就可以表示任何自然数（和小数）．虽然没有表示空位的符号，但确实能够实行位值制记数法，为加减乘除等运算建立起良好的条件．算筹记数方法除了数码形式不同之外，和现在的十进位值制并无两样．我国古代数学在数字计算方面有辉煌的成就，应当归功于遵循十进位值制的算筹记数法.

算筹作为计算的工具，它的起源很早，大约可以上溯到公元前 5 世纪，有证据足以说明，春秋末期以前，人们早已利用算筹来计算了．后来写在纸上变成为算筹记数法．在纸上为了明确起见，用 O 表示空位，这就是中国的零号．正是由于古代中国人使用算筹非常普遍，所以留下了后世的名句“运筹帷幄之中，决胜千里之外”，而从事数学研究的人在古代则被称作“筹人”.

2. 印度—阿拉伯数码

现在国际通用的数码常称为阿拉伯数码，这是历史遗留下来的不确切名称，其实叫做印度—阿拉伯数码更为恰当．这种数码采用十进位值制，它的演变，有一段漫长而复杂的历史.

印度—阿拉伯数码最早可以上溯到婆罗米文字，这种文字形成于公元前 7、8 世纪，是印度文字的祖先．婆罗米数字在分类上属于分级符号制，以后逐渐向位值制发展．大约在公元前 600 年已过渡到位值制记数法．最初用空一格表示零，后来用小点表示．完成位值制必须有零号，根据目前掌握的史料，印度最早的确凿无疑的零号“0”出现在瓜廖尔地方的一块石碑上，年代是公元 876 年.

公元 773 年，印度数码开始传入阿拉伯国家．由于当时没有印刷术，数码全凭手写，字体因人因地而异，变化很大．东西阿拉伯的写法就很不相同．西部较接近现代的写法，但没有零号．东部字体逐渐固定下来，至今许多伊斯兰国家仍在使用．有人顾名思义，认为“阿拉伯数码”就是阿拉伯人创造的数码，这是误解.

13 世纪，欧洲的著名数学家斐波那契（L. Fibonacci，1170—1250）写了一本书，名为《算盘书》，这是第一部向欧洲人介绍印度数码的著作．这本书的一开头就写到：“这是印度的九个数码：

9　8　7　6　5　4　3　2　1，

还有一个阿拉伯人称之为零的符号 0，这样任何数都可以表示出来.”

从那时起，又经过数百年的改进，到 16 世纪，终于形成了当今国际通用的数码．在欧洲人的印象中，这些数码来自阿拉伯国家，所以称之为阿拉伯数码，这个名称就这样沿用下来.

在古代，一些国家或地区采用了位值制但不是十进的记数法，也有些地区使用十进的记数法，但却不是位值的．而中国的算筹记数法却是最早的既是十进制又是位值制的记数

方法，这是我国古代数学的一大创造.

3. 其他记数制度

历史上，在不同的时代，不同的地域，不同的文化中产生的记数制度可以说五花八门，不一而足. 除了上述的十进位值制记数制度外，主要还有如下的几种.

简单累数制

这种制度的特点是每一个较高的单位，都用一种新的符号来表示，比如古埃及象形文中的数字；在巴比伦楔形文中，60 以下的数采用的也是简单累数制.

图 1-5 罗马街头的钟

另外，12 世纪以前盛行欧洲的罗马数码采用的也是简单累数制，现在某些场合还在使用，如书本的卷数，章节的序号，正文前的页码，老式的钟表盘（图 1-5）等. 罗马数字用大写的拉丁字母（有时也用小写）表示数目：

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

一个简单的数要写成长长的一串，如

$$3\,888 = \mathrm{MMMDCCCLXXXVIII},$$

从左向右书写，单位从大到小排列. 但如果较小的单位写在较大单位之左，要用“减法原则”. 如：IV=5−1=4，IX=10−1=9 等. 这个原则在历史上时兴时废，直到中世纪还未固定下来，有时 IV 也写成 IIII. 一般只允许减去一个单位，但古代并不完全遵守这一原则.

分级符号制

和简单累数制比起来，分级符号制不但对每一个较高的单位都要另立符号，而且对较高单位的倍数也要设新符号.

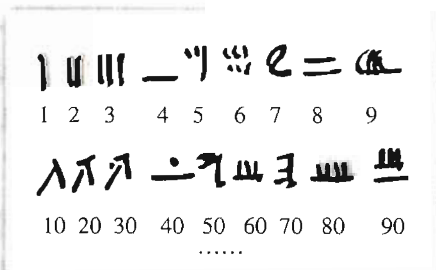


图 1-6

古埃及僧侣文中的数码就属于十进的分级符号制. 除了 1，2，…，9 各有符号表示外，10，20，…，90 以及 100，200，…，900 等等都有特殊符号表示，如图 1-6.

使用这种记数制度需要记住很多符号，这是缺点，但写起来很紧凑，如 4 997 写作 ，其中前两个符号分别表示 4 000 和 900. 由于这样的特殊符号毕竟是有限的，所以在表示太大的数字时，这种记数制度就无能为力了.

古希腊的字母记数法，犹太民族的希伯来字母记数法以及阿拉伯字母记数法都属于分级符号制.

乘法累数制

简单累数制也可叫做加法累数制，原理是将各个数码所表示的数加起来. 600 要把 100 重复写 6 次，这是很麻烦的. 乘法累数制是将重复书写改用乘法表示. 最具代表性的

是中国数字，如 4 600 不必写成“千千千千百百百百百百”，也不用另造表示 4 000 与 600 的新字，而是写成“四千六百”，这是多么聪明的办法！

带数字的甲骨

中国自古以来便使用十进的乘法累数制，仅用 13 个数字：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万，就可以表示相当大的数．如：214 557 可以写作二十一万四千五百五十七．

这 13 个数字在甲骨文中就已经出现（图 1-7），大于 10 的自然数都是用十进位制，只是写法有所不同．

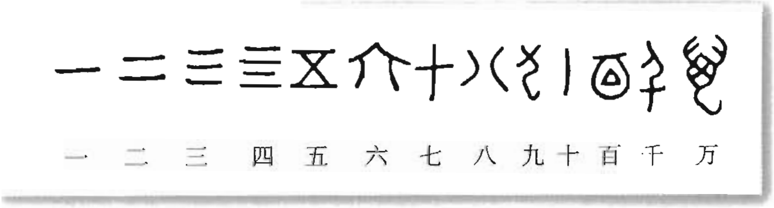


图 1-7

万以上的数，后来又增加了一些新字，以表示更大的单位．如《数术记遗》中提出亿、兆、京、垓等 10 种名称，但有三种不同的进位法．进位法不统一，很容易弄错，现在只剩下“万万为亿”还在使用，亿以上不再另定新名．不过在自然科学中还保留“百万为兆”的用法，比如，无线电频率中有兆赫，电子计算机中有多少兆内存等．

进位制

巴比伦的记数制是 60 进的，现在的小时、分、秒仍然在沿用这种进位制度．巴比伦的记数法不是纯粹的位值制，而是和简单累数制混在一起的．60 以下的数用简单累数制，60 以上则是位值制和简单累数制的混合．

古代的中美洲有两个文化中心：一个是南美洲的印加，广泛地使用结绳记数，另一个是中美洲的玛雅．玛雅人用一种特殊的数字表示时间，图 1-8 中的 19 个符号相当于1～19 的数字，这是一些神的头像．如 5 是玉米神，10 是死神等．但在计算其他事物时又采用另一套数码，和巴比伦的记数法有相似之处，20 以下采用 5 进的简单累数制，20 以上采用位值制．在一般的计算中，他们采用严格的 20 进位值制．

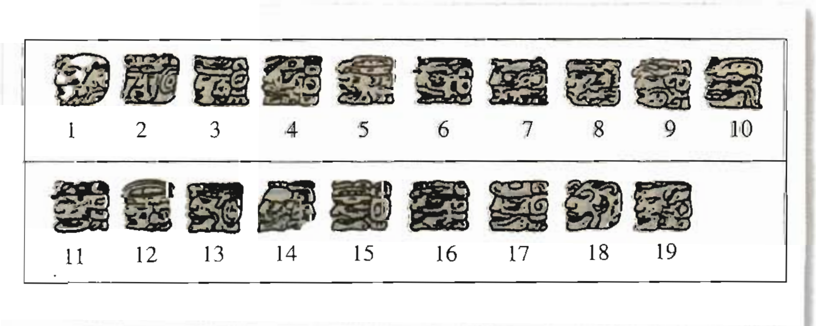


图 1-8 玛雅数字

除了上面的这些进位制外，还有许多别的进位制．比如英国的 12 进制，12 个为一打；电子计算机中使用的是二进制，只要用 0 和 1 两个数码就可以表示任何数，因为计算机中

的电器元件只有“开”和“关”两种状态；中国古代还使用16两为1斤，时至今日还在某些行业中使用，如称量中药就用16进制．“半斤八两”就是由16进制而来的．

思考题

你认为数字符号、记数制的发展对数学发展有怎样的重要作用？请你结合本讲的学习谈谈体会．

第二讲 古希腊数学

古希腊处在欧洲通往亚洲的咽喉要道上，优越的地理位置、宜人的地中海式气候造就了古希腊发达的航海业、农业和手工业．公元前 8 世纪前后，古希腊进入奴隶社会，科学、文化和生产力得到极大发展，产生了许多奴隶制城邦，这些城邦虽然相互独立，但具有相同的文化、习俗和宗教信仰．

公元 6 世纪，这些城邦逐步形成以雅典为中心的古希腊，从此出现了欧洲文明的第一次高潮，尤其是数学达到了空前的繁荣．通常，我们将古希腊在公元前 600 到 600 年所发展起来的数学称为“希腊数学”．

一　希腊数学的先行者

希腊数学先后出现过许多数学学派，其中最早的一个学派叫做伊奥尼亚❶学派，其创始人为泰勒斯（Thales，约公元前 625—约前 547），他是现在所知的古希腊最早的数学家、哲学家，是古希腊数学的先行者．

泰勒斯像

泰勒斯曾游历过巴比伦、埃及等地，学到那里的数学和天文学知识，晚年则转向哲学．泰勒斯几乎涉猎了当时人类的全部思想和活动领域，享有崇高声誉，被尊为“希腊七贤”之首．

关于泰勒斯的传说很多，其中最脍炙人口的事迹是预报了发生于公元 585 年的一次日食，并因此消弭了一场鏖战经年的战争．泰勒斯另一项令人津津乐道的业绩是他在埃及时，测定了金字塔的塔高．

泰勒斯在数学方面划时代的、影响最深远的贡献是引入命题证明的思想．命题的证明，就是借助一些公理或真实性业已确定的命题来论证某一命题真实性的思想过程．它标志着人类对客观事物的认识已经从实践上升到理论．这是数学史上一次不寻常的飞跃．正是因为有了逻辑证明，数学命题的正确性得到保证，数学理论才能立于不败之地；数学定理之间的关系得到揭示，数学的结构体系才能建立，数学的进一步发展才有基础．从泰勒

❶ 伊奥尼亚（Ionia）位于小亚细亚（今属土耳其）西岸中部，包括爱琴海东部诸岛．公元前 1200 年到前 1000 年间，希腊部落伊奥尼亚人迁移于此，因而得名．

斯开始，命题证明成为希腊数学的基本精神.

二 毕达哥拉斯学派

伊奥尼亚学派之后，毕达哥拉斯学派兴起. 这个学派存在了两个世纪之久，对人类文明的影响非常深远.

1. 毕达哥拉斯

毕达哥拉斯像

毕达哥拉斯学派的创始人是希腊论证数学的另一位祖师毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 560—前 480），他与我国的孔子（公元前 551—前 479）处于同一时代. 与泰勒斯类似，毕达哥拉斯也没有著作传世，身世也是充满迷团. 通过一些间接的历史资料，我们对他的情况有一些基本的了解.

毕达哥拉斯曾师从伊奥尼亚学派的学者，以后游历埃及、巴比伦等地（也有记载说他到过印度），接受古代流传下来的天文、数学知识，回到家乡以后开始讲学. 公元前 520 年左右，为了摆脱暴政，毕达哥拉斯背井离乡，移居西西里岛，最后定居意大利半岛东南沿海的克罗托内. 在那里广收门徒，建立了一个宗教、政治、学术合一的秘密团体，也就是毕达哥拉斯学派. 他的讲学吸引了大批的听众，包括各个阶层特别是社会上层人士.

毕达哥拉斯将信徒们分成两等. 一种是普通听讲者，这是大多数，他们只能听讲，不能参加讨论，高深的知识是不向他们传授的. 另一种才是真正的学派成员，叫做 μαθηματικοί，这个词的原意是指那些获得较高深知识的人，以后演化为 μαθηματικά，这就是欧洲文字“数学”（拉丁文 mathematica，英文 mathematics，德文 mathematik）一词的来源. 除数学外，毕达哥拉斯学派还致力于哲学研究.

虽然泰勒斯沿着论证数学的方向迈出了第一步，但后人主要将数学中这一新方向的成长归功于毕达哥拉斯学派. 毕达哥拉斯继泰勒斯之后，将这门科学改造为自由的教育形式，首先检验其原理，并用一种无形和理智的方式探讨其定理.

毕达哥拉斯本人没有留下什么著作，而学派内部的发明创造是秘而不宣的，所以鲜为人知，不过也有少数信息通过各种途径流传开来. 以后组织逐渐分散，保密的教条被摒弃，才出现了公开讲述这个学派教义的著作. 此后，许多学者开始了对毕达哥拉斯的研究工作，他的思想和学说逐渐变得广为人知.

2. 勾股定理与勾股形数

西方的文献中一直把勾股定理称作毕达哥拉斯定理，因为大家都相信这是毕达哥拉斯发现的，并给出了某种证明，后来被欧几里得编入《原本》之中. 他是如何发现的，又是

用什么方法证明的？这一点，后人作了很多合乎情理的推测.

毕达哥拉斯学派曾经研究过铺地砖问题. 像图 2-1 那样用等腰直角三角形地砖来铺地是常见的. 不难看出，$\triangle ABC$ 的直角边上的两个正方形合起来恰好是斜边上的正方形. 受此启发，自然会推想对于非等腰直角三角形这个关系，即

$$c^2=a^2+b^2$$

也成立. 毕达哥拉斯的证明方法现在已不可考，后人对他的证明只能进行一些合理的推测. 但不论哪种推测，人们对其都是半信半疑，众说纷纭.

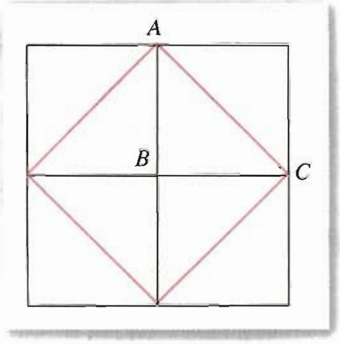


图 2-1

勾股定理可能是所有数学定理中证法最多的. 卢米斯（E. S. Loomis）的《毕达哥拉斯命题》一书中载有 367 种证法，实际的数目还不止这些.

证明了勾股定理后，自然会想：满足什么关系的三个数可以构成一个直角三角形？也就是，怎样的三个数能够满足不定方程

$$x^2+y^2=z^2.$$

毕达哥拉斯发现，$2n+1$ 和 $2n^2+2n$ 为直角边，$2n^2+2n+1$ 为斜边满足上面的不定方程. 满足不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的正整数组，现在叫做“毕达哥拉斯数”，也叫做“毕达哥拉斯三元数组”或简称“勾股数”. 但上面这一组解并非方程 $x^2+y^2=z^2$ 的全部解，它只是斜边与一条直角边的差是 1 的情形.

3. 多边形数

毕达哥拉斯学派有一个基本信条——万物皆数. 这个学派晚期的一位成员费洛罗斯（Philolaus，约卒于公元前 390 年）曾宣称：“人们所知道的一切事物都包含数，因此，没有数就既不可能表达、也不可能理解任何事物.”

毕达哥拉斯学派所说的数仅指正整数，分数被看作两个整数的比. 他们认为数 1 生成所有的数，每个数都被赋予了特定的属性，而在一切数中最神圣的是 10，也就是说毕达哥拉斯学派信奉和崇拜数 10，将 10 看作完美、和谐的标志. 毕达哥拉斯学派对整数进行了深入研究，尤其注意形与数的关系. “多边形数”也称“形数”，就是形与数的结合物. 用点排成的图形如图 2-2.

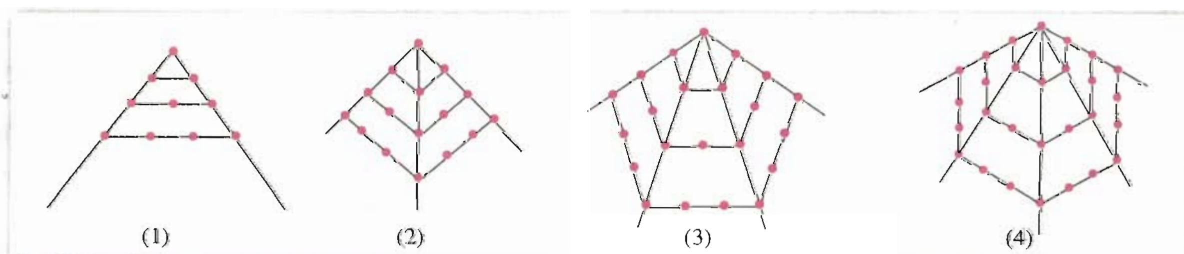


图 2-2　多边形数

其中图（1）的点数叫做三角形数，从上至下，第一个三角形数是 1，第二个三角形数是 $1+2=3$，第三个三角形数是 $1+2+3=6$……第 n 个三角形数是 $1+2+\cdots+n=$

$\frac{n(n+1)}{2}$. 据信，毕达哥拉斯已知道这个公式.

同样，图（2）的点数 1，4，9，16，…，n^2，…叫做正方形数. 正方形数可以看作从 1 起连续奇数之和，如

$$1+3+5+7+9+11=6^2.$$

一般地，作出正方形数 n^2 的图形后，再镶上一个曲尺形的、点数为 $2n+1$ 的边，就得到

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

类似地，可用点排出正五边形数、正六边形数，等等. 正五边形数和正六边形数分别由序列

$$N=1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$$

和

$$N=1+5+9+\cdots+(4n-3)=2n^2-n$$

得到，这是一些高阶等差数列. 类似地，用同样的方式可以定义所有的多边形数. 这一过程还可以推广到三维空间去构造多面体数. “形数”体现了数与形的结合.

毕达哥拉斯学派对数字的研究加强了数概念中的理论倾向，如果说埃及与巴比伦算术主要是实用的数字计算技巧，那么毕达哥拉斯学派的算术则更多地体现出某种初等数论的萌芽，这是向理论数学过渡时观念上的飞跃. 并且由于数形结合的观点，这种飞跃实质上推动了几何学的抽象化倾向.

4. 不可公度

毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”，而数就是正整数，分数看作整数的比. 除此之外，他们不认识，也不承认有别的数. 毕达哥拉斯学派相信，任何量都可以表示成两个整数之比. 在几何上这相当于说：对于任意给定的两条线段，总能找到第三条线段，以它为单位（即公度）线段能将给定的两条线段划分为整数段. 希腊人称这样给定的两条线段为“可公度量”，意思是有公共的度量单位.

然而，毕达哥拉斯学派后来却发现，并不是任意两条线段都是可公度的. 例如，正方形的对角线与其一边就不能构成可公度线段. 对这一事实的证明最早出现在阿基米德的著作中.

根据勾股定理，若正方形的对角线与其一边之比为 $\alpha:\beta$（α，β 互素），则有 $\alpha^2=2\beta^2$. 这里 α^2 为偶数，所以 α 也必为偶数. 不妨设 $\alpha=2\rho$，于是 $\alpha^2=4\rho^2=2\beta^2$，即 $\beta^2=2\rho^2$，则β^2 为偶数，因此 β 也必为偶数，这就与 α，β 互素的假设矛盾，因此正方形的对角线与其一边就构成不可公度量.

不可公度量的发现，大约是在公元前 470 年左右，当时毕达哥拉斯早已不在人世. 传说学派成员希帕苏斯（Hippasus）发现了不可公度性，当时他们正在海上泛舟集会，希帕苏斯说出他的发现后，惊恐不已的其他成员将他抛进了大海. 还有一种说法是希帕苏斯因泄露了不可公度的秘密而遭此厄运.

毕达哥拉斯学派讨论的数仅限于可公度的量. 设一个量是公度的 p 倍，另一个量是公度的 q 倍，那么两者的比就是 $p:q$. 后来的希腊人，如欧几里得采用"ρητός"这个词来表示这个比，原意是"可表达的""可比的". 后来转译成拉丁文 ratio，rationalis. ratio除保留了"比"的意义外，还有理由的意思. Rationalis 由 ratio 派生出来，它的意义是"可比的"，但同时又有"合理的"的含义. 前者逐渐被人遗忘，只剩下"有理的""合理的"的含义. 转译成英文 rational，法文 rationnel 等也都已经没有"可比的"的含义了. 自然地，对于不可公度量，这个学派认为是"不可比的"（άλονος）或"不可表达的"（άρρητος），翻译成拉丁文和英文就变成了 inrationalis 和 irrational，即"无理的". 所以说，无理数并非"无理".

无理数的发现对毕达哥拉斯学派"万物皆数"的信条造成了强烈的震撼. 后来，人们又陆续发现了$\sqrt{2}$以外的许多无理数. 这些"怪物"深深地困扰着古希腊的数学家们，这就是数学史上的"第一次数学危机".

一般认为，在数学中引入逻辑因素，对命题加以证明，是从伊奥尼亚学派开始的，但毕达哥拉斯学派在这方面做出了巨大的推进. 他们的工作可以说是欧几里得公理化体系的先驱. 伊奥尼亚学派研究数学，并不单纯为了它本身的兴趣，也为了实际应用. 而毕达哥拉斯学派却使数学从这些实际应用中摆脱出来，把数学当作一种思想来追求，通过它去追求永恒的真理.

三 欧几里得与《原本》

从公元前 338 年腓力二世（亚历山大大帝之父）统一希腊半岛，到公元前 30 年最后一个希腊化国家托勒密王国被罗马所征服，这一时期是希腊数学的"黄金时期". 代表人物就是名垂青史的大几何学家欧几里得和大科学家阿基米德.

1. 几何大师欧几里得

欧几里得（Euclid，约公元前 300 年）是古希腊论证数学的集大成者，他通过继承和发展前人的研究成果，编撰出旷世巨著《原本》（Elements）. 这部书的最大意义在于，它是用公理化方法建立起演绎体系的最早典范.


欧几里得像

欧几里得的生平后世所知甚少，但根据有限的历史记载推断，欧几里得早年就学于雅典，公元前 300 年左右，欧几里得应托勒密王一世之邀到当时的文化中心亚历山大，成为亚历山大学派的奠基人. 据说，托勒密王问欧几里得，除了他的《原本》之外，有没有其他学习几何的捷径. 欧几里得回答道："几何无王者之路."意思是在几何里，没有专门为国王铺设的道路. 这句话后来推广为"求知无坦途"，成为千古传诵的学习箴言.

另一则故事记载，一个学生才开始学习第一个命题，就问："学习了几何学之后我能得到什么？"欧几里得说："给他三个钱币，因为他想在学习中获得实利．"由此可见，欧几里得主张学习必须循序渐进、刻苦钻研，不赞成投机取巧的作风和狭隘的实用主义观点．

除了《原本》，欧几里得还有许多其他著作，可惜大都失传了．

2. 《原本》

主要内容

全书共分 13 卷，包括 5 条公理、5 条公设，119 个定义和 465 条命题．

公元 888 年《原本》希腊文手抄一页

在第 I 卷之首，给出了 23 个最基本的定义，如"点是没有部分的""线只有长而没有宽""面是只有长度和宽度的"，等等．还有圆、直角、垂直、平行等定义．接着列出 5 个公设：

Ⅰ．假定从任意一点到任意一点可作一直线．

Ⅱ．一条有限直线可不断延长．

Ⅲ．以任意中心和直径可以画圆．

Ⅳ．凡直角都相等．

Ⅴ．一直线与两直线相交，若所构成的同旁内角小于两直角，那么把这两条直线延长，一定在那两内角的一侧相交．

最后一个公设，也被称为平行公设．由于平行公设不像其他公设那么简单明了，人们自然会怀疑，欧几里得把它列为公设，不是它不能证明，而是找不到证明．从《原本》诞生到 19 世纪初，许多学者投入毕生精力，力图洗去这部不朽杰作的白璧微瑕，但都没有成功．有意思的是，这样的努力却导致了非欧几何的诞生（详见第六讲）．

紧接着 5 个公设是 5 个公理：

1. 等于同量的量彼此相等．
2. 等量加等量，和相等．
3. 等量减等量，差相等．
4. 彼此重合的图形是全等的．
5. 整体大于部分．

欧几里得就是以这些基本公设、公理和定义作为全书的出发点，建立起自己的几何王国，构成了历史上第一个数学公理体系．

《原本》的前四卷包含了平面几何的一些基本内容，如全等形、平行线、多边形、圆、毕达哥拉斯定理、初等作图及相似形等．第Ⅴ卷是比例论，这是《原本》的最高成就．毕达哥拉斯学派过去虽然也建立了比例论，不过只适用于可公度量，这样很难建立关于一切量的比例关系．摆脱这一困境的是欧多克索斯（Eudoxus，约公元前 400—前 347），他用公理法重新建立了比例论，使它适用于所有可公度和不可公度的量．虽然他的著作早已失

传，但幸运的是他的主要思想和内容还保留在《原本》之中.

卷Ⅵ把卷Ⅴ已建立的理论用到平面图形上去，处理相似直线图形中的各种成比例线段等等. 卷Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ是数论，讨论正整数的性质和分类. 卷Ⅹ是篇幅最大的一卷，主要讨论无理量，即不可公度量. 卷Ⅺ是立体几何，卷Ⅻ是穷竭法，这是希腊人创造的强有力的证明方法. 经欧多克索斯的努力臻于完善，最后被收入《原本》之中. 最后的第ⅩⅢ卷主要讨论了球的内接正多面体的作图法.

产生的背景及历史意义

众所周知，公理化方法是数学中的重要方法，它的主要精神是从尽可能少的几条公理以及若干原始概念出发，推导出尽可能多的命题. 历史上，公理化思想最早出现在希腊，而《原本》就是公理化思想的典型代表. 过去所积累下来的数学知识是零碎的、片段的，只有借助逻辑的方法，把这些知识组织起来，加以分类、比较，揭露彼此间的内在联系，系统化、条理化地整理在一个严密的系统之中，才能建成巍峨的几何大厦. 《原本》完成了这项艰巨的任务，对整个数学的发展产生了深远影响.

在《原本》出现前的300多年间，许多希腊数学家做了大量先驱性的工作. 泰勒斯开命题证明的先河，为建立几何的演绎体系迈出了可贵的第一步. 后来的毕达哥拉斯学派用数解释一切，将数学从具体的事物中抽象出来，建立起理论体系，并将算术和几何紧密地联系起来，为算术的几何化提供了线索. 巧辩学派提出的尺规作图三大难题（详见第七讲），德谟克利特（Democritus，约公元前460—前370）提出的原子论等都为《原本》的诞生准备了条件.

“原本”（element）一词在希腊文中是指一门学科中广泛使用的最重要的定理. 欧几里得在该著作中用公理法对当时的数学知识作了系统化、理论化的总结. 近现代数学就是按照《原本》所提供的公理化模式发展起来的.

既然《原本》中的许多研究成果在欧几里得之前就已存在甚至成熟，那么欧几里得本人有什么历史功绩呢？如同建筑师没有创造木石砖瓦，但利用现有的材料建成大厦也是不平凡的创造一样，公理的选择、定义的给出、内容的编排、方法的运用以及命题的严格证明，都需要高度的智慧并要付出巨大的劳动. 从事这项宏伟工程的并不是个别学者，在欧几里得之前已经有好几个数学家做过这种综合整理工作，但只有欧几里得的《原本》硕果仅存，经受住了历史风霜的考验. 它的公理化思想和方法在其他学科中也得到了广泛应用，指明了数学乃至其他科学的前进道路.

版本流传

欧几里得的《原本》手稿早已失传，现在看到的各种版本都是根据后人的修订本、注释本、翻译本重新整理出来的. 1482年，《原本》以印刷的形式在意大利的威尼斯出版，这是西方最早印刷的数学书. 到19世纪末，《原本》的印刷本用各种文字出了一千版以上. 古往今来，还没有哪本书像《原本》那样长期成为莘莘学

《原本》的最早印刷本


利玛窦与徐光启

子传诵的读物．在西方，它流传之广，持续时间之长，影响之大，仅次于《圣经》．

明朝末年，《原本》传入中国．1606 年，由中国科学家徐光启执笔，意大利传教士利玛窦（Matteo Ricci，1552—1610）口译，合作翻译了《原本》的前六卷，并于 1607 年在北京印刷出版．这是我国最早的汉译本，在翻译时，徐光启在“原本”前加上了“几何”一词，它可能是单词“geometry”中“geo”的音译，“几何原本”一词由此而来．该译本第一次把欧几里得几何学及其严密的逻辑体系和推理方法引入中国，同时确定了许多我们现在耳熟能详的几何学名词，如点、直线、平面、相似、外切等．

尺规作图的来历

《原本》中的几何作图，规定只能用直尺和圆规．为什么要做这样的限制呢？这是希腊人留下来的习惯．他们做出这种独特的规定可以归结为以下几个原因．

首先，自从泰勒斯在数学中引入逻辑证明后，经过两三个世纪的演变，几何逐渐发展成为一门独立的、演绎的科学．这一点突出体现在欧几里得的《原本》中，即从不多的几个基本假定（定义、公设、公理）出发，推导出一系列的定理，这就是希腊数学的基本精神．它要求基本假定越少越好，推出的命题越多越好．因此，对于作图工具，自然也相应地限制到不能再少的程度．

根据《原本》的前 3 条公设，作图工具就只能用直尺和圆规．由于这本书影响巨大，尺规作图便成为希腊几何学的金科玉律，时至今日仍一直在沿用．

其次，几何学除了有实用价值外，还有训练智力的巨大作用．这一点充分反映在古希腊哲学家柏拉图（Plato，公元前 428—前 348/前 347）的思想中．他主张通过几何的学习达到训练逻辑思维的目的．训练逻辑思维能力为什么不直接学习逻辑规律而要借助几何学呢？理由是几何能给人以直观印象，将逻辑推理体现在具体的图形之中．逻辑的推理和结论，还可以通过实际观测来验证，使抽象规律和直观认识结合起来，收到相得益彰之功效．两千多年的实践证明，通过几何学习培养逻辑思维能力的确行之有效．

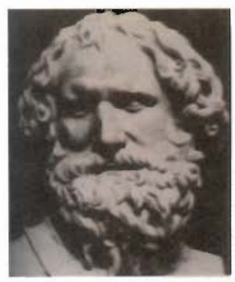
最后，以毕达哥拉斯学派为代表的希腊人认为，圆是最完美的平面图形．圆和直线是几何学最基本的研究对象，有了尺规，圆和直线已经能够作出，因此就规定只能用这两种工具了．

历史上最早明确提出尺规限制的是伊诺皮迪斯（Oenopides），大概属于毕达哥拉斯学派．他发现了下面的作图法：在已知直线的已知点上作一角与已知角相等．如果不限制工具，这是轻而易举的，例如平移一下三角板就可以了．但这件事的重要性不在于这个角的实际作出，而是在尺规的限制下从理论上去解决这个问题．后来它被编入欧几里得的《原本》．伊诺皮迪斯之后，尺规的限制逐渐成为一种公约，最后被总结在《原本》之中．

四 数学之神——阿基米德

欧几里得之后，古希腊又出现了一位数学大师，他的数学贡献史无前例，他对当时和后世数学的影响是如此久远、深邃，以至于有人把他称为“数学之神”，这个人就是阿基米德.

数学家、力学家阿基米德（Archimedes，公元前 287—前 212）出生于西西里岛（Sisilia，今属意大利）的叙拉古（Siracusa，又译锡拉库萨）. 早年在当时的文化中心亚历山大跟随欧几里得的学生学习，以后与亚历山大的学者保持密切联系，因此他算是亚历山大学派的成员，他的许多数学成就通过和亚历山大的学者的通信而幸运地保留了下来. 后人予以阿基米德高度评价，把他称为有史以来贡献最大的三位数学家之首.



阿基米德像

阿基米德流传于世的数学著作有 10 余种，多为希腊文手稿. 他的著作集中探讨了求积问题，主要是曲边图形的面积和曲面立方体的体积，其体例深受欧几里得《原本》的影响，先设立若干定义和假设，再依次证明各个命题.

在 20 世纪初，幸运地发现了阿基米德写给数学家埃拉托塞尼（Eratosthenes，约公元前 276—约前 195）的一封信，后被命名为“阿基米德方法”. 这封信极其重要，它记载了阿基米德求体积或面积时采用的“平衡法”思想，也就是杠杆原理.

阿基米德“平衡法”的中心思想是，要计算一个未知量（图形的体积或面积），先将它分成许多微小的量（如面分成线段，体积分成薄片等），再用另一组微小单元来进行比较. 但通常是建立一个杠杆，找一个合适的支点，使前后两组微小的量获得平衡，而后者的总和比较容易计算. 这实际上就是近代积分的基本思想. 阿基米德的睿智在两千二百多年前就放射出耀眼的光芒，因此他可以当之无愧地被称为“积分学的先驱”.

阿基米德用“平衡法”证明了如下结果：

如图 2-3，设 D 是抛物线弧 ABC 的弦 AC 的中点，过 D 作直线平行于抛物线的轴 OY，交抛物线于 B. 则抛物弓形 $ABCD$ 的面积为$\triangle ABC$ 面积的$\frac{4}{3}$.

简而言之，抛物弓形的面积是等底等高三角形的$\frac{4}{3}$.

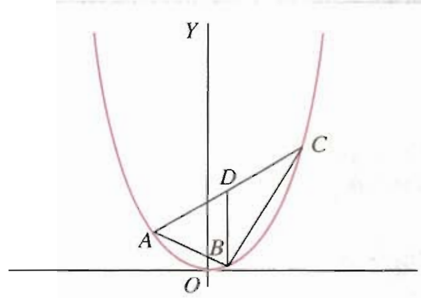
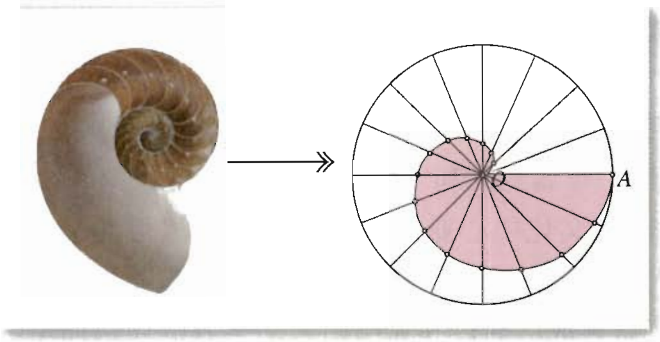


图 2-3 抛物弓形

阿基米德解决问题的技巧极为高超，方法之妙存乎一心，不能不令人叹为观止. 在《论球和圆柱》(On the Sphere and Cylinder) 中，阿基米德用平衡法证明了球的体积公式.

阿基米德在《论螺线》中定义了“阿基米德螺线”：如果在平面上一条射线绕它的固定端点匀速旋转，同时有一点从端点出发沿直线匀速运动，那么这个动点就描绘出一个平

面螺线，如图 2-4. 固定的端点叫做原点（O），射线开始时的位置叫做始线（OA），旋转一周产生的螺线与始线包围的面积叫做“第一面积”（阴影部分），始线旋转一周，以 OA 为半径的圆叫做“第一圆”. 这种曲线是点作匀速直线运动与匀速圆周运动的合成的轨迹. 阿基米德用穷竭法证明了：“第一面积”等于“第一圆”面积的$\frac{1}{3}$.



鹦鹉螺　　　　图 2-4　阿基米德螺线

平衡法的基础是极限思想，但当时还没有严密的极限理论，因此阿基米德在用平衡法得到命题后，又用“穷竭法”加以证明，以保证其无懈可击. 所谓穷竭法就是指某一个图形（如圆）被另一个图形（如内接正多边形）所逐步“穷竭”，即填满.

“穷竭法”最早是由安蒂丰（Antiphon，约公元前 480—约前 411）提出的，阿基米德继承了前人的方法并将其运用到惊人的熟练程度. 在《圆的度量》中，阿基米德用穷竭法求出了圆的周长和面积公式. 他从圆的内接正三角形开始，边数逐步加倍，计算到正 96 边形时得到圆周率 π 的近似值为$\frac{22}{7}$. 在《圆的度量》中，阿基米德用穷竭法证明了与球的表面积和体积相关的重要结果. 比如：球的表面积是其大圆面积的四倍；球与其外切圆柱的体积之比是 $2:3$，表面积之比也是 $2:3$；等等.

如果说古埃及和古巴比伦人的数学还处在积累知识的萌芽阶段，古希腊的数学则走向了辉煌，它为人类创造了巨大的精神财富，其数量和质量都是空前的. 古希腊数学提出了建筑数学理论大厦的公理化思想，为后世的数学发展指明了方向.

思考题

1.《原本》的主要成就有哪些？它的演绎逻辑系统、公理化思想对后世数学的发展起到了怎样的作用？请你结合本讲的学习谈谈体会.

2. 请选取本讲中的一个问题，就其发展历程及自身的感受写一篇小论文，如无理数的起源，从勾股定理到勾股数等等.

第三讲 中国古代数学瑰宝

图 3-1 汉代帛画

中华文明源远流长，发展进程波澜壮阔．在世界的古老文明中，古埃及、古巴比伦文化早已湮灭在历史长河之中；古印度文明屡受摧残而损失殆尽，希腊和罗马也早已失去了往日的荣耀与辉煌．惟有中华文明薪火相传，五千多年虽有起伏跌宕，但却连绵不绝，从未中断．

中国古代为世界数学做出了杰出贡献．我国古人很早以前就开始使用“规”和“矩”，而且在甲骨文中就已经出现了这两个字．图 3-1 是汉代一幅帛画的局部，画上是“伏羲执矩，女娲执规”图．我国古代从丰富的实践经验中发现问题，创造了具有中国特色的几何学，既有实际成果又有系统理论．

先秦著作中记载了许多数学概念．如在《墨子》中，给出对称中心的定义为“中，同长也”；圆的定义为“圜，一中同长也”；端点的定义为“端，体之无厚而最前者也”……在《庄子·天下篇》中，“飞鸟之影未尝动也”“镞矢之疾而有不行不止之时”“一尺之棰，日取其半，万世不竭”等都蕴涵了朴素的极限思想．

我们的祖先最早创用了十进位值制，最早发现了负数，首创了代数学，在 16 世纪之前，除了阿拉伯某些数学著作外，代数学的发展都是由中国做出的．

随着数学知识的不断积累和实际应用，与数学有关的一些书籍也逐渐出现了．流传至今最早的一部与数学有关的著作是《周髀》，它是一部主张盖天说的天文学著作，大约成书于公元前 1 世纪．唐朝的李淳风等在选定数学课本时，认为它是最可贵的数学遗产，将它作为《算经十书》❶的第一种，并将其称为“周髀算经”．

❶ 中国汉唐千余年间陆续出现的十部数学著作．唐代在国立大学设算学，唐高宗显庆元年（656）编定了一套算术书用作国家最高学府的算学教科书，这套算术书包括《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》以及《孙子算经》等十部著作．由于儒家的重要经典称为“经”，所以就把重要的数学著作也称为“算经”．

一 《周髀算经》与赵爽弦图

《周髀算经》是中国最早的天文学著作，成书年代不晚于公元前 1 世纪，与数学有关的内容是：学习数学的方法、用勾股定理测量、计算高深远、近似分数计算等．在这部著作中有相当繁难的数字计算和勾股定理的应用．

该书的第一章叙述了周公、商高❶问答提到的用勾股定理测量的方法，还举出了一个“勾三股四弦五”的特例．发现勾股定理的具体年代已不可详考，但它是在《周髀算经》成书之前发现的则是毋庸质疑的事实．

《周髀算经》记载了一个已知直角三角形两边，用勾股定理求第三边的问题：

$$\sqrt{119\ 000^2-103\ 000^2}=59\ 598.5.$$

被开方数是一个十位的数，而所得平方根的误差不超过 0.25．由此可见中国古代的算术已经达到了很高的水平．

《周髀算经》一页

现传的《周髀算经》卷首写有“赵君卿注”．赵君卿名“爽”，是三国时期的吴人．赵爽研究过张衡的天文学著作，尤其深入研究了《周髀算经》，为之撰写了序言，并逐字逐句为其作了注释．

赵爽对《周髀算经》所作的注释本身没有十分精辟独到的见解，但他撰成“勾股圆方图”说，附录于该书首章的注文中．全文虽短，仅 530 多字、附图 6 幅，却简练、严密、明确地给出了勾股定理的理论证明，而且还对二次方程的解法提出了新的意见，确是一件极具价值的历史文献．赵爽成为中算史上最早给出勾股定理理论证明的数学家．

中国古代把直角三角形的两条直角边分别称为“勾”和“股”，斜边称为“弦”．勾股图说中的勾股定理，赵爽写为“勾、股各自乘，并之为弦实，开方除之即弦”，赵爽所谓的“弦实”就是弦的平方．定理的证明利用了一个弦图，“弦图”就是以弦为边的正方形．如图 3-2，考虑一个分别以三角形的勾和股为边的两个正方形的合并图形 ADE，其面积为 a^2+b^2．如果将此合并图形所含的两个三角形移补到图中所示的位置，将得到一个以原三角形的弦为边的正方形，其面积为 c^2．这就证明了

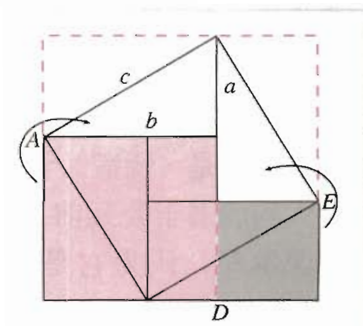


图 3-2 赵爽弦图

$$c^2=a^2+b^2.$$

❶ 周公（约公元前 1100 年）姓姬名旦，武王姬发（约公元前 1122—前 1116 年在位）之弟．商高为周朝大夫．

据此，已知直角三角形的两条边可以求得第三边.

图 3-3 ICM 2002 会徽

印度数学家婆什迦罗（Bhāskara，1114—1185）曾用类似的方法证明了勾股定理，但比赵爽晚了大约 900 年. 赵爽证法的基本思想是：图形经过割补后，面积不变. 这就是中国古代数学中重要的面积“出入相补”原理，是我国古代数学的特色之一. 后世把这一“弦图”称为“赵爽弦图”.

鉴于“赵爽弦图”所表现出的中国古代数学的独具特色以及中国古人的聪明才智和独具匠心，2002 年在中国北京召开的世界数学家大会（ICM）采用此图作为大会的会标（图 3-3）. 此外，这个会标又像中国传统的风车图案，是古老的中华传统文明的一个缩影，旋转的风车预示着有悠久历史的东方古国欢迎来自世界五大洲的朋友们.

二 《九章算术》

《九章算术》大约成书于公元 1 世纪，是中国古代最著名的传世数学著作，又是中国古代最重要的数学典籍. 它从成书直到西方数学传入之前，一直是中国古代数学学习者的首选教材. 历史上多次作为朝廷颁定的数学教科书，对中国古代数学的发展起了巨大的推动作用.

《九章算术》扉页

《九章算术》的作者不详，但有一点是肯定的，《九章算术》所包含的各种算法是汉朝数学家们在秦以前流传下来的数学的基础上，适应当时的社会需要，经过整理、修改、补充，编撰而成的集体智慧的结晶.

经过两千多年来的辗转手抄和刻印，传世的《九章算术》难免出现差错和遗漏，又由于《九章算术》本身文字简略，有些内容不易理解，因此历史上有许多人对该书进行过多次校正和注释. 其中，最主要的两个人是魏晋的刘徽和唐代的李淳风. 因此，现存《九章算术》的贡献包含两个方面，一方面是著作本身蕴涵的数学意义，另一方面就是后人对该书所作的注释中所蕴涵的数学思想.

1. 《九章算术》的重要成就举例

《九章算术》实际上是 246 道应用题及其解法的汇编，分为方田、粟米、衰（音崔）分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股等九章. 这 246 道应用题主要是解决一些生活中常见的问题，并且在一个或几个问题之后，列出这个问题的解法，书中把解法称为“术”.

《九章算术》主要有算术、代数和几何三部分内容，概括了我国古人创造的领先于世

界的数学成就．下面我们采撷其中的几个加以介绍．

盈不足术

盈不足问题是我国数学的古典名题．“盈不足”一章的第一题是：今有共买物，人出八盈三，人出七不足四，问人数、物价各几何．此题在现在的数学书里是一个所谓的“盈亏类”问题，其含义是：现在有几个人买物品，如果每人出 8 文钱，则盈余 3 文钱；如果每人出 7 文钱则还缺 4 文钱．问人数、物价各为多少？

按代数解法，可设人数为 x，物价为 y，则有方程组：

$$\begin{cases} y=8x-3, \\ y=7x+4. \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x=7, \\ y=53, \end{cases}$$

即人数为 7，物价为 53 文钱．

《九章算术》给出的解法是享誉古今的“盈不足术”．

盈不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下．令维乘所出率，并以为实．并盈、不足为法……置所出率，以少减多，余，以约法、实．实为物价，法为人数．

这段话的意思用表格表示计算过程就是：

把每人所出的钱数写出来（表第 1 行：所出率），多余、不足的钱数分别写在它们的下面（表第 2 行：盈不足）．将它们分别与所出的钱数交错相乘（“维乘”即交错相乘，表第 3 行：$8\times4=32$，$7\times3=21$），再相加后的结果称为“实”（表第 4 行：$32+21=53$）．盈、不足相加称为“法”（表第 5 行：$3+4=7$）．根据所出的钱数，将大数减去小数所得的差（表第 6 行：$8-7=1$）分别去除“法”“实”．则除“实”所得的商是物价（表第 7 行：$53\div1=53$），除“法”所得的商是人数（表第 8 行：$7\div1=7$）．

所出率	8	7
盈不足	3	4
维乘	32	21
实	53	
法	7	
所出率差	1	
物价	53	
人数	7	

一般地，设 x 人共出 y 钱购物．若每人出 m 钱则盈 n 钱；每人出 m' 钱则不足 n' 钱．求 x 和 y，按“盈不足术”可得如下的解法公式：

$$x=\frac{n+n'}{m-m'},\quad y=\frac{mn'+m'n}{m-m'}.$$

这是一个“一盈一不足”的问题，“盈不足术”中还有其他“两盈”“两不足”“一盈一适足”“一不足一适足”等四类问题．因此在解这类问题时要注意不要拘泥于一种格式，要做到灵活多变．

对于这种盈不足问题，如果用方程求解不是很方便吗，有什么必要创造这样的一种方

法呢？这是因为在当时有些问题是无法直接用列方程来解决的，比如书中的“两鼠穿墙”题：

今有垣厚五尺，两鼠对穿．大鼠日一尺，小鼠也日一尺．大鼠日自倍，小鼠日自半．问何日相逢，各穿几何？

题意是：有厚墙 5 尺，两只老鼠从墙的两边分别打洞穿墙．大老鼠第一天进一尺，以后每天加倍；小老鼠第一天也进一尺，以后每天减半．问几天后两鼠相遇，各穿几尺？

对于古人而言，这是一道难题．即使让现在初学代数的中学生来解，恐怕也不是件易事．因为老鼠穿墙的速度每天都在变化，是一个变数．假如设 x 天后两鼠相遇，则由于大老鼠每天打墙的进度分别是 1 尺，2 尺，4 尺，…，2^x 尺，小老鼠每天打墙的进度分别是 1 尺，$\frac{1}{2}$尺，$\frac{1}{4}$尺，…，$\frac{1}{2^x}$尺，列方程：

$$1+2+4+\cdots+2^x+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^x}=5.$$

因为当时的数列知识尚不完备，人们对这样的方程是束手无策的．若使用“盈不足术”，只要巧妙转化，就能变难为易．按题意有：假设两只老鼠打洞 2 天，则仍差 5 寸，不能把墙打穿；假设打洞 3 天，就会多出 3 尺 7 寸半．这样一来，就将原来十分复杂的问题转化成了典型的“盈不足”问题：

两只老鼠相遇的天数：

$$\frac{2\times3.75+3\times0.5}{3.75+0.5}=2\frac{2}{17}\text{（天）}.$$

相会时，大、小老鼠分别穿墙：

$$1+2+4\times\frac{2}{17}=3\frac{8}{17}\text{（尺）}.$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{17}=1\frac{9}{17}\text{（尺）}.$$

方程术

在我国，“方程”一词自古有之，但含义与现在有很大区别．《九章算术》的“方程”一章中的“方程”专指多元一次方程组．古人在求解多元一次方程组时，把方程组的系数和常数项用算筹摆成方阵（称这样的方阵为“方程”），再做行之间的加减，以减少系数，最后求得方程组的解．

“方程”章的第一题要解一个三元一次方程组，用现代的形式可表示为

$$\begin{cases}3x+2y+z=39,\\2x+3y+z=34,\\x+2y+3z=26.\end{cases}$$

《九章算术》的方程术是这样的：如图 3-4，把方程组的系数从上至下摆成三列（从右到左），运算采用“遍乘直除”的方法，就是把某一列系数全部乘一个适当的倍数，然后再直接减去另一列的若干倍，一直算到每一列上只剩下分别与三个未知数对应的系数．为方便起见我们采用现代的数码．

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 37 \\ \hline \end{array}$$

图 3-4　遍乘直除

从运算结果可以看出，$x=\frac{37}{4}$，$y=\frac{17}{4}$，$z=\frac{11}{4}$. 其实，所谓的“遍乘直除”就是现在初中数学中求解多元一次方程组时采用的加减消元法.

《九章算术》中的一次方程组有两元、三元、四元和五元的，全部用上述演算程序.

多元方程组的解法在印度最早出现在 7 世纪初婆罗摩笈多（Brahmagupta，598—665 以后）所著的书中. 在欧洲，最早提出三元一次方程组解法的人是 16 世纪的法国数学家比特奥（J. Buteo，约 1492—1564）. 而多元一次方程组的一般解法直到 18 世纪才由法国数学家贝祖（É. Bezout，1730—1783）建立. 所以《九章算术》中的方程术，不仅是中国古代数学的伟大成就，也是世界数学史上一份不可多得的宝贵财富.

正负术

方程的每一行是由多项未知量和一个已知量所组成的等式，其中可能有相反意义的数量，由此产生正数与负数的对立概念. 再者，在通过“遍乘直除”来求解多元一次方程组时，不可避免地会出现小数减大数的情况，鉴于此，“方程”章的第三题给出了正、负数的不同表示法，并给出了正、负数的加减法则，第一次突破了正数的范围. 这在数学史上是一个无比伟大的创举.

刘徽在第三题的注中给出了正、负数的定义：两算得失相反，要令“正”“负”以名之. 同时指出，用红色算筹表示正数，用黑色算筹表示负数. 否则在布置算筹时用正列的算筹表示正数，斜列的算筹表示负数. 但这种方法用于毛笔记录时，换色十分不便，因此在 12 世纪，李冶（1192—1279）首创了在数字上加斜划以表示负数，这可以说是世界上最早的负数记号. 图 3-5 表示的是 $4.12x^2-x+136-248x^{-2}$，其中元所在的行是未知数一次项的系数.

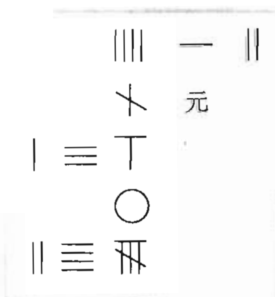
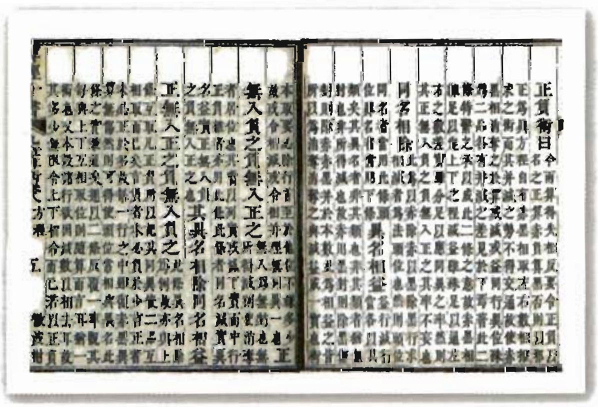


图 3-5　负数记号



《九章算术》中的正负术

《九章算术》最早给出的正负数加减法则的条文如下：

正负术曰，同名相除，异名相益. 正无人负之，负无人正之. 其异名相除，同名相益. 正无人正之，负无人负之.

这里的“同名”“异名”就是现在的“同号”“异号”，“除”“益”分别是“减”“加”. 条文的前四句说的是减法法则，大意为：两数相减时，若二数同号，则差数的绝对值等于二数绝对值的差（大减小）；若二数异号，则差

数的绝对值为二数绝对值之和．减去的数如果是正数而大于被减数，差数为负；减去的数如果是负数而绝对值大于被减数的绝对值，差数为正．后四句说的是加法法则，大意为：两数相加时，若二数同号，则和数的绝对值等于二数绝对值之和；若二数异号，则正数的绝对值较大时，和数为正，负数的绝对值较大时，和数为负．

《九章算术》没有出现有关正负数的乘除运算．直到元代，朱世杰在他的《算学启蒙》中明确给出了正负数的乘除法则：同名相乘为正，异名相乘为负；同名相除所得为正，异名相除所得为负．可见，我国对正负数四则运算所做的总结不会晚于 13 世纪．而国外首先承认负数的人是三个多世纪后的印度数学家婆罗摩笈多，欧洲对负数的认识就更晚了．可以说，在正负数概念的引入以及正负数运算法则的确定方面，我国是遥遥领先的．

2.《九章算术》的深远影响

《九章算术》总结了自周代以来的中国古代数学，它既包含了以前已经解决了的数学问题，又有汉朝时新取得的数学成就．《九章算术》成书标志着中国古代数学体系的形成．作为我国现存最早的数学经典著作之一，它秉承了先秦以来数学的发展源流，流传近2 000年．后世的中国数学家，大多是从《九章算术》开始学习和研究数学的，许多学者为其作注，他们的注释与《九章算术》一起流传至今．唐宋两代，《九章算术》都成为官学采用的算学教科书．1084 年，北宋政府还组织刊刻过《九章算术》，这可以说是世界上最早的印刷版数学书．

对比中国的《九章算术》与古希腊的《原本》可以发现，两部著作各具特色，风格迥异．《原本》是以形式逻辑方法把所有内容组织为有机整体，《九章算术》则按问题的性质和解法分类编排；《原本》注重演绎推理，较少实用，《九章算术》则全是实用算法；《原本》内容全部为几何或几何外衣下的算术，《九章算术》则集中了算术、代数、几何等我国当时的全部数学知识．东西方古代数学的两部代表作可以说是交相辉映．

《九章算术》是一部世界性的数学著作，早在隋唐时期就已经传入朝鲜、日本．现在更被译为英、德、俄等多种文字．《九章算术》及其注文中蕴涵的数学思想不仅对我国古代数学产生了巨大影响，也极大地促进了世界数学的发展．

三　大衍求一术

中国南北朝时期的著作《孙子算经》中，有一个驰名中外的问题：

今有物不知其数：三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

答曰，二十三．

这属于数论的一次同余方程组问题，用现代数学符号可表示为求下列同余方程组的整数解：

$$N \equiv R_1 \pmod 3$$
$$\equiv R_2 \pmod 5$$

$\equiv R_3 \pmod 7$

式中 $R_1=2$，$R_2=3$，$R_3=2$.

中国古人是如何得到这个结果的呢?《孙子算经》给出的算法是这样的：

术曰，三三数之剩二置一百四十，五五数之剩三置六十三，七七数之剩二置三十，并之得二百三十三，以二百十减之，即得. 凡三三数之剩一则置七十，五五数之剩一则置二十一，七七数之剩一则置十五. 一百六以上，以一百五减之，即得.


乘之上十之得二十二丈五尺以表影五
寸除之即得
今有物不知其數三三數之賸二五五數之賸
三七七數之賸二問物幾何
荅曰二十三
術曰三三數之賸二置一百四十五五數
之賸三置六十三七七數之賸二置三十
并之得二百三十三以二百一十減之即
得凡三三數之賸一則置七十五五數之
賸一則置二十一七七數之賸一則置十
五一百六以上以一百五減之即得
今有獸六首四足禽四首二足上有七十六首
下有四十六足問禽獸各幾何

《孙子算经》书影

《孙子算经》中使用一种适合解一般的一次同余方程组的方法，求得此特殊问题的最小整数解 $N=23$. 解题步骤是：选定 5×7 的一个倍数，被 3 除余 1，即 70；选定 3×7 的一个倍数，被 5 除余 1，即 21；选定 3×5 的一个倍数，被 7 除余 1，即 15. 然后按下式计算：

$$N=70R_1+21R_2+15R_3-105p,$$

式中 105 为 3，5，7 的最小公倍数，p 为适当选取的整数，使得 $0<N\leqslant105$，该题取 $p=2$.

孙子的“物不知其数”问题颇有猜谜的意味，并且其解法巧妙、奇特. 流传到后世，又衍生出很多其他叫法，如“秦王暗点兵”“剪管术”“鬼谷算”以及“韩信点兵”等等，成为人们的一种娱乐活动.

推广孙子的“物不知其数”题的解法，我们就可以得到如下的定理：

设 a_1，a_2，…，a_n 两两互素，R_1，R_2，…，R_n 为余数，$M=a_1a_2\cdots a_n$. 则

$$x\equiv R_i \pmod{a_i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

有整数解，且对模 M 是唯一的. 若记最小正整数解为 N，则

$$N\equiv\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{M}{a_i}R_i-pM,$$

其中 k_i 满足

$$k_i\frac{M}{a_i}\equiv1 \pmod{a_i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

p 为适当选取的整数，使得 $N\leqslant M$.

《孙子算经》没有给出求 k_i 的具体方法，南宋数学家秦九韶（1202—1261）在《数书九章》中第一次详细地、完整地阐述了求解一次同余方程组的算法，他称作“大衍总数术”，其中包括求 k_i 的一种机械化方法——大衍求一术. “求一术”一词来源更早，所谓“求一”，指求一个数，被某数除余 1 之意，在“物不知数”题中，就是指给定的 70，21，15 这三个数. 而“大衍”一词来自《易经》，秦九韶将它们合二为一.

《孙子算经》全书共三卷，上卷较详细地记述了算筹记数法和用算筹进行乘、除、开方以及分数等运算的步骤和法则. 后两卷记录的大都是生活中的实际问题. 下卷的第 26 题就是著名的“物不知其数”问题，又称“孙子问题”. 就本书的整体风格来讲，这个问

题看起来与其他的实际问题有些格格不入．这是为什么呢？是作者向壁虚造出来的吗？不是的．其实这个问题与中国古代的天文历法的推算有密切关系．

在欧洲，“物不知数”问题也是一个著名问题．18世纪的欧拉（参见第六讲），拉格朗日等都曾对一次同余式问题进行过研究．德国数学家高斯在1801年出版的《算术探究》一书中明确地给出了上述定理的一般形式．当时欧洲数学家对中国古代数学一无所知，高斯通过独立研究得到了这一成果．1852年，英国传教士伟烈亚力将《孙子算经》中“孙子问题”的解法传到欧洲．1874年，马蒂森（L. Mathiesen）研究后指出，孙子的解法与高斯的定理是一致的，从而国际上将这个定理称为“中国剩余定理”．

四 中国古代数学家

中国古代创造了辉煌的数学成就，在数学发展的历史长河中涌现了许多杰出的数学家．赵爽、刘徽、祖冲之等是其中的佼佼者．先哲们分析和解决问题的历史背景、内容和方法都值得我们研究，他们的丰功伟绩值得我们崇敬，他们百折不挠的治学精神值得我们学习．

1. 刘徽与割圆术

《九章算术》能够影响深远，支配我国数学发展1 900来年，成为东方古代数学的代表作之一，我国古代卓越的数学家刘徽功不可没．刘徽生于东汉末年或三国魏初，以后又在西晋生活过一段时间．

刘徽像

263年，刘徽开始为《九章算术》作注，加上自己的心得，使其便于学习，因而他的注文得以流传下来．刘徽注文的内容非常丰富，他不但纠正了原书中的一些错误，而且指出了正确的解法，还提出了很多独到的见解，从中可以看到刘徽具有很高的数学理论造诣．可以说，刘徽是中国古代数学理论的奠基人．他的贡献主要有如下几个方面：创造了割圆术，运用朴素的极限思想计算圆面积及圆周率；建立了重差术；重视逻辑推理，同时又注意几何直观的作用．

刘徽在他的“九章算术注”中，不但整理了各种解题方法的思想体系，提高了《九章算术》的学术水平，而且创造了许多新方法，开辟了数学发展的新道路．其中割圆术对中国古算的影响尤其深远．

《九章算术》关于圆面积的求法一律采用古法的“周三径一”（$\pi=3$），这是不够精确的．公元初年，西汉的刘歆采用过$\pi=3.154\ 7$，东汉的张衡采用过$\pi=3.146\ 6$，但是这些圆周率的近似值都没有理论根据．刘徽在《九章算术》方田章的“圆田术”中用割圆术计算圆周率，开创了中国数学发展史上圆周率研究的新纪元．

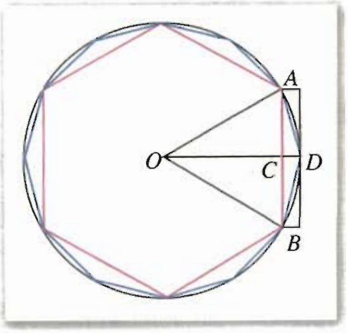


图 3-6 割圆术

刘徽首先肯定圆内接正多边形的面积小于圆的面积，将边数屡次加倍，从而面积增大，边数越多则正多边形的面积越接近圆面积. 他说："割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割则与圆合体而无所失矣." 这句话反映了他的极限思想. 刘徽又说："觚面之外，又有余径. 以面乘余径则幂出弧表. 若夫觚之细者与圆合体，则表无余径. 表无余径，则幂不外出矣." 这里，"觚面" 指圆内接正多边形的边，"余径" 是边心距与圆半径的差. 如图 3-6，AB 为觚面，则 CD 为余径. 幂就是长方形 ABD 的面积.

刘徽从圆的内接正六边形开始，一直计算到正 192 边形，得到精确到小数后两位的圆周率近似值 $\pi\approx3.14$，化成分数为$\frac{157}{50}$，即著名的"徽率". 刘徽一再说明："此率尚微少." 但根据需要可以继续这个程序得到更精确的值. 从刘徽的割圆术可以看出，刘徽不仅明确地多次使用了极限思想，而且采取了对面积进行无穷小分割，然后求其极限状态的和的方式解决圆面积问题的方法. 这说明刘徽的头脑中已经有了朴素的积分思想的萌芽. 刘徽是中算史上第一个建立可靠的理论来推算圆周率的数学家.

当边数无限增加时，圆内接正多边形的面积趋近于圆的面积，公元前 5 世纪，希腊数学家安蒂丰（Antiphon，约公元前 480—前 411）最早发现这个结论，称其为"穷竭法"，但没有利用它来计算圆周率的近似值. 公元 3 世纪，阿基米德利用圆周长介于圆内接正多边形周长和圆外切正多边形周长之间的事实算出 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$.

古希腊的穷竭法与古代中国的割圆术极为相似，刘徽的割圆术比古希腊的穷竭法要晚几百年，但他的成就超过了和他同时代的数学家，这是值得称道的. 刘徽所以能够取得如此辉煌的成就是有原因的：首先，阿基米德的不等式既要用到圆的内接正多边形又要用到圆的外切正多边形，而刘徽的不等式只需用圆内接正多边形，所以能事半功倍；其次，我们的祖先很早就使用十进位值记数，并且筹算技术十分发达，乘方、开方都能迅速完成，数字计算比古希腊人要容易得多.

刘徽在证明《九章算术》中的立体体积公式时，也运用了极限思想. 下面以刘徽使用"牟合方盖" 证明球体积公式为例加以说明.

刘徽看出《九章算术》中的球体积公式是错误的. 为了正确计算球的体积，他创造了一个新的立体图形——"牟合方盖"，并指出，一旦计算出牟合方盖的体积，球的体积就会迎刃而解.

在一个正方体内作两个互相垂直的内切圆柱，这两个圆柱的公共部分就是牟合方盖，如图 3-7，它恰好把正方体的内切球包含在内，并且与其相切. 如果用同一个水平面去截它们，就得到一个圆（球的截面）和它的外切正方形（牟合方盖的截面）. 刘徽指出，每一个高度上的水平截面圆与其外切正方形的面积之比都为 $\pi:4$，因此球体积与牟合方盖的体积之比也应该是 $\pi:4$. 实际上，这就是西方的"卡瓦列利原理"，遗憾的是刘徽没能把它总结为一般形式并且未能求出牟合方盖的体积. 这个问题一直困惑着刘徽. 最后刘徽也

不得不说："敢不阙疑，以俟能言者！"

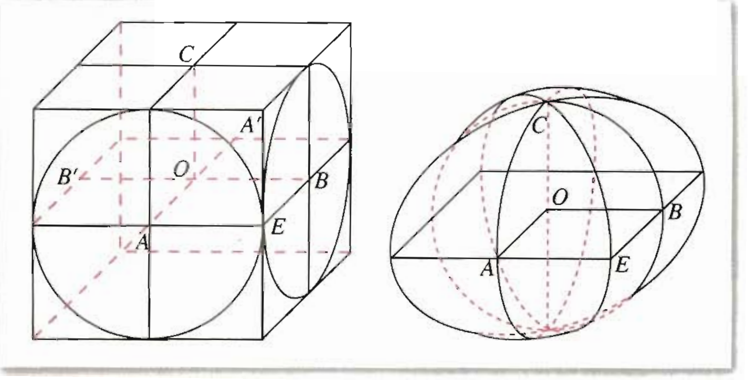


图 3-7　牟合方盖

虽然刘徽未能求出牟合方盖的体积，但他创立的特殊形式的不可分量方法却为后人解决球的体积问题指明了方向.

刘徽首创了割圆术，他的后继者祖冲之进一步把它发扬光大，并用割圆术把圆周率的近似值精确到小数点后七位数.

2. 祖冲之与祖暅

约 200 年后，刘徽所盼望的"能言者"终于出现了，他(们) 就是祖冲之 (429—500) 与祖暅父子，祖冲之因其对圆周率的精确计算而留芳百世.

祖冲之像

由于家中几代人都研究历法，所以祖冲之从小就有机会接触家传的科学知识. 祖冲之的杰出成就，主要在天文历法、机械和数学三方面. 祖冲之的儿子祖暅也是一个博学多才的人并子继父业，他的成就也是在历法和数学方面.

《隋书·律历志》记载："祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间."

这就是说祖冲之算出了圆周率值的上下限：

$$3.1415926\ (\text{朒数}) < \pi < 3.1415927\ (\text{盈数}).$$

史料上没有记载祖冲之是如何推算出圆周率"正数"的上下限的，据推测可能是沿用了刘徽的割圆术. 因为按照刘徽的方法，从圆的内接正六边形开始连续计算至正 24 576 边形时恰好得到这个结果.《隋书·律历志》还记载了祖冲之的有关圆周率的另一重要结果："密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五；约率：圆径七，周二十二."可以看出，祖冲之还得到了圆周率分数形式的近似值，即密率 $\pi=\frac{355}{113}$，约率 $\pi=\frac{22}{7}$.

约率早已被阿基米德所知，但密率却是一项史无前例的创举. 密率 $\frac{355}{113}$ 是一个有趣的数字，分子分母恰好是三个最小的奇数的重复，便于记忆. $\frac{355}{113}=3.141\ 592\ 920\cdots$，相对

误差是 9×10^{-8}. 设圆的直径为 10 公里，用密率计算得到的圆周只比真值大不到 3 毫米. 容易证明，比密率更接近 π 的分数都比密率复杂得多. 其中最简单的一个是$\frac{52\ 163}{16\ 604}$. 换言之，在分母小于 16 604 的分数中，没有比$\frac{355}{113}$更接近 π 的分数了. 为纪念祖冲之的首创之功，“密率”因此又被称为“祖率”.

圆周率的发展，在某种程度上反映着一个时代或一个民族的数学水平. 随着数学的发展，圆周率的精确程度也越来越高. 到 1948 年，两位美国数学家共同发表了有 808 位正确小数的 π，这是人工计算 π 的最高记录. 1946 年，第一台电子计算机的问世为 π 的计算提供了一个史无前例的、强有力的工具.

曾经困扰刘徽的球体积问题到祖冲之时代终于获得了突破. 这个正确结果记载在《九章算术》“开立圆术”之李淳风注中，称为“祖暅之开立圆术”. 祖暅是祖冲之的儿子，也有许多数学贡献.

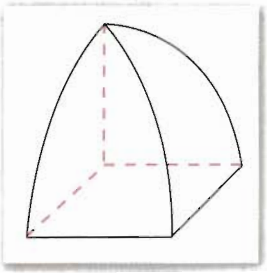


图 3-8

祖暅对球体积的推导也遵循了刘徽的方法，仍从计算牟合方盖体积开始. 祖暅的具体做法是，先取牟合方盖的八分之一（图3-8），考虑它的外切正方体，它把这个正方体又分出三个小立体，如图 3-9. 牟合方盖的八分之一部分称为“内棋”，三个小立体称为“外棋”.

祖暅的贡献在于，他发现三外棋在等高处的截面积之和等于长宽高皆为立方体边长的倒四棱锥在相同高处的截面积. 这时祖暅提出了一条截面原理：“幂势既同，则积不容异.”“幂”是指截面积，“势”是指高. 祖暅的原理的意思是，两等高立方体，若在每一等高处的截面积都相等，则两立方体体积相等. 利用这个原理祖暅证明了：三外棋的体积之和等于一个长宽高皆为立方体边长的四棱锥的体积，如图 3-10.

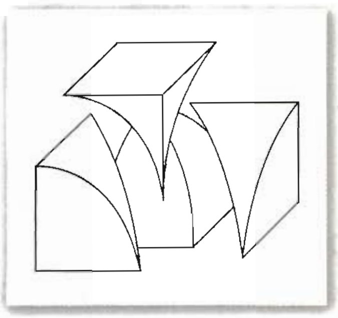


图 3-9

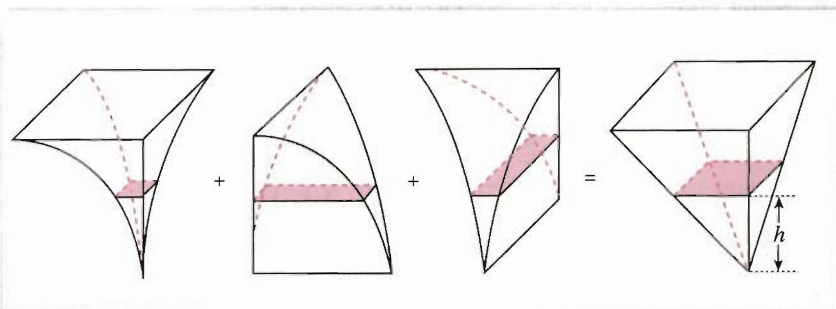


图 3-10

根据上述分析可知：

$$V_{四棱锥}=\frac{r^3}{3}，所以 V_{牟合方盖}=\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)\times8=\frac{16r^3}{3}.$$

又根据刘徽的结论可知：

$$V_{球}:V_{牟合方盖}=\pi:4，即 V_{球}:\frac{16r^3}{3}=\pi:4，所以 V_{球}=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

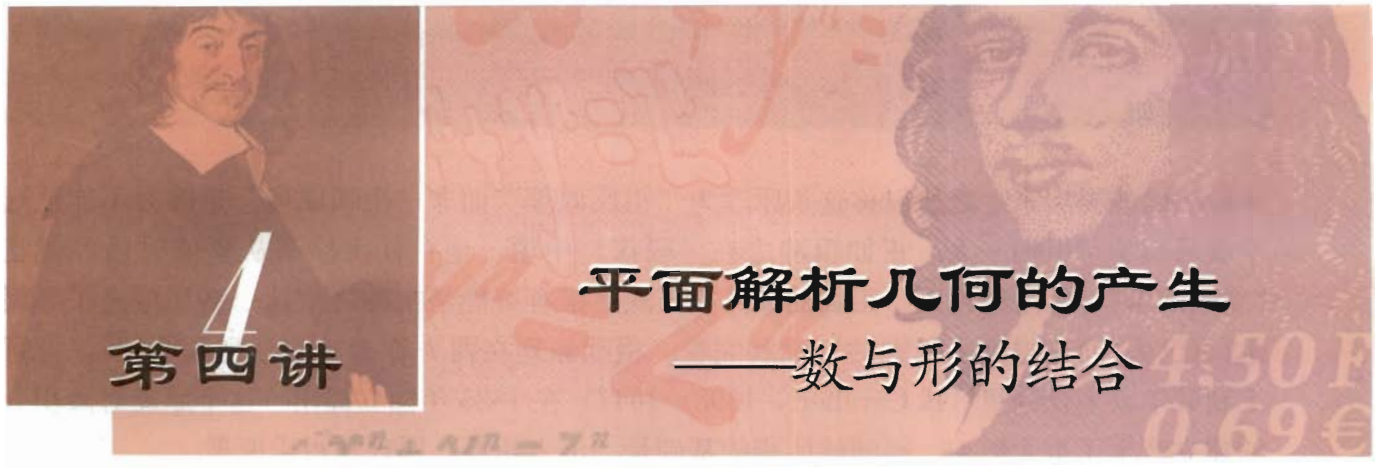
祖暅所提出的截面原理后世称为“祖氏原理”，事实上刘徽已经使用过这个原理，只是

未能明确地提出来．之所以称这条原理为“祖氏原理”而非“祖暅原理”是因为不能把这个成果归功于祖暅一人．正如祖冲之在《驳议》中说，他在任南徐州从事使时已经撰正“立圆旧术”，就是说得到了正确的球体积公式．很有可能是祖冲之把这个结果写进了《缀术》（已失传），得到了祖暅的继承和完善．祖暅原理在西方称为“卡瓦列利原理”，由意大利数学家卡瓦列里（B. Cavalieri，1598—1647）在1635年独立提出．这个原理对微积分的建立产生了重大影响．得到球体积的基础是“出入相补”原理和祖氏原理．

在推导球体积问题上，刘徽与祖暅各完成了任务的一半，刘徽确定了“牟合方盖”之形，指明了努力的方向，而祖暅则算出了“牟合方盖”的体积．一个是奠基性的工作，一个是总结性的成果，两人平分秋色、各有千秋．

思考题

1.《九章算术》的主要内容、成就和历史意义是什么？
2. 刘徽的割圆术蕴涵了什么思想，它对后世数学的发展起到了怎样的重要作用？请你结合本讲的学习谈谈体会．



第四讲 平面解析几何的产生——数与形的结合

从四大文明古国的早期数学、古希腊的论证数学以及阿拉伯发达的代数学到文艺复兴后期的欧洲数学，称为古代数学或初等数学．到 16 世纪末、17 世纪初，整个初等数学的内容已臻于完善，从 17 世纪开始，近代数学开始逐渐走上历史舞台．引进变量，这是近代数学与初等数学的本质区别．

文艺复兴之后，资本主义经济发展迅猛，各种新兴行业对科学技术提出了全新的要求：机械的普遍使用引起了对机械运动规律的研究，武器的进步刺激了弹道学的研究等等．总之，在 16 世纪，运动与变化的研究已经成为自然科学的中心课题．传统的数学工具对某些运动问题已经无能为力，这就迫切地需要一种新的数学工具，从而导致了变量数学即近代数学的诞生．变量数学的第一个标志就是解析几何的发明，解析几何学的诞生改变了整个数学的面貌，是数学发展史上重要的里程碑．

解析几何的基本思想就是在平面上引进“坐标”的概念，并借助这种坐标在平面上的点和有序实数对（x，y）之间建立一一对应关系．尽管用坐标来确定点的位置的基本思想古已有之（如地理中所用的“经线”和“纬线”），而且有先驱者曾经研究过这个问题，但解析几何的真正发明要归功于法国数学家笛卡儿和他的同胞费马．

一　坐标思想的早期萌芽

借助于坐标系，用代数方法研究几何对象间的关系和性质的几何学科，现在称为解析几何，也叫做坐标几何．坐标的思想来源可上溯到公元前 2000 年．两河流域的古巴比伦人已经能够用数字表示一点到另一定点、直线或物体的距离，已有原始的坐标思想．公元前 4 世纪中叶，古希腊数学家门奈赫莫斯（Menaechmus，公元前 4 世纪中）发现了圆锥曲线，并对这些曲线的性质作了系统阐述．公元前 200 年左右，阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，约公元前 262—约前 190）著有《圆锥曲线论》8 卷，全面论述了圆锥曲线的各种性质，其中采用了一种“坐标”，以圆锥体底面的直径作为横坐标，过顶点的垂线为纵坐标，加之所研究的内容，可以看作是解析几何的萌芽．

14 世纪，法国数学家奥雷姆（N. Oresme，约 1320—1382）在其 1360 年出版的《论质量与运动的结构》等书中提出一种坐标几何，用两个坐标来确定点的位置，用水平线上的点表示时间，称为径度；而所对应的速度则用纵线表示，称之为纬度．这是从天文、地

理坐标向近代坐标几何学的过渡.

16 世纪末，法国数学家韦达（F. Viète，1540—1603）提出了应用代数方法解决几何问题的思想. 韦达是符号代数的创始人，他在代数专著《分析五篇》和几何专著中都使用代数方法解决几何问题，曾圆满地解决了阿波罗尼奥斯的问题，他的思想给笛卡儿以很大启迪. 此外，开普勒发现行星运动三大定律，伽利略研究抛射物的运动轨迹，都要求数学从运动变化的观点研究和解决问题. 上述这一切促使了解析几何学的诞生.

二 笛卡儿坐标系

笛卡儿像

哲学家、数学家笛卡儿（R. Descartes，1596—1650）出生在法国的一个上层社会家庭，父亲是地方法院的评议员，拥有一份相当可观的家业，从事这种与法律有关的职业的人在社会上有相当高的地位. 因此，笛卡儿的一生都有可靠的经济来源，能够从事自己喜爱的事业.

笛卡儿从小就对周围的世界充满好奇，因此父亲说他是“小哲学家”. 他从小就对数学有兴趣，并且打下非常坚实的数学基础. 在一次晨思时，笛卡儿看见一只苍蝇在天花板上爬，他头脑中突然闪现出智慧的火花，如果知道了苍蝇与相临两个墙壁的距离之间的关系，就能描述它在天花板上的运动路线，这使他产生了解析几何思想的萌芽. 笛卡儿认为，真正的学问要向“世界这本大书”讨教，以获得“经验”，并要通过理性的探索来区别真理和谬误.

笛卡儿酷爱思考哲学与数学问题，长期致力于探寻一种类似于数学的、具有普遍适用性的获得真正知识的方法. 1619 年，笛卡儿发现了“一种全新的科学，它可能用一种一般的方法解决所有与量有关的领域中的问题，不论这种量是连续的还是数值的”，这就是他发明的解析几何的方法. 他在《方法论》一书中写道：第一，如果要发现真正的知识，必须靠自己去实行整个研究计划，正如一件上好的艺术品或一幢完美的建筑，总是出自一个能人之手；第二，在方法上，必须从怀疑当时哲学的所有内容为出发点，并寻找自明的、确定的原理，在此基础上重新构造出一切科学.

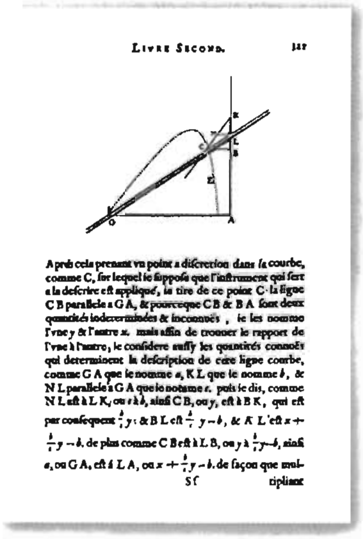
笛卡儿的贡献是多方面的，他是欧洲近代哲学的主要开拓者之一，黑格尔称他为“现代哲学之父”，而他建立解析几何的成就在科学史上有划时代的意义. 数学史家克莱因（M. Kline）这样评价笛卡儿：他只偶尔地是一个数学家，不过像他那样富于智力的人即使只花一部分时间在一个科目上，其工作也必定是有意义的.

笛卡儿的数学贡献与他的哲学思想有着密切的联系. 他曾明确宣称，科学的本质是数学. 他把物质运动的概念作为自然科学的哲学基础后，就把运动带进了数学，在数学和其他自然科学里就有了辩证法. 恩格斯高度评价说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，微分与积分也就立即变成必须.”

1637 年，笛卡儿发表了著名的《几何学》，这是他唯一的数学著作. 书中阐述了解析

几何的思想，后人把这本书看作解析几何的发端.

《几何学》共分三部分：第一部分讨论尺规作图，第二部分讨论曲线的性质，第三部分讨论当时流行的代数问题. 书中第一次出现了变量与函数的概念，不过他当时还未正式使用这种名称. 笛卡儿所谓的变量是指长度可变而方向不变的线段，还指连续经过坐标轴上所有点的数字变量. 正是由于对变量形式的这两种考虑，才使得笛卡儿能够创建一种几何与代数相互渗透的科学，或者说一种把算术、代数和几何统一起来的通用的数学.


LIVRE SECOND. 317

Aprés cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert a la descrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne CB parallele a GA, & pourceque CB & BA sont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre, ie considere aussy les quantités connuës qui determinent la description de cete ligne courbe, comme GA que ie nomme a, KL que ie nomme b, & NL parallele a GA que ie nomme c. puis ie dis, comme NL est à LK, ou c à b, ainsi CB, ou y, est à BK, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & BL est $\frac{b}{c}y-b$, & AL est $x+\frac{b}{c}y-b$. de plus comme CB est à LB, ou y à $\frac{b}{c}y-b$, ainsi a, ou GA, est à LA, ou $x+\frac{b}{c}y-b$. de façon que mul-

Sf tipliant

笛卡儿的几何论文

笛卡儿从已知的天文、地理的经纬制度出发，指出每一对有序实数，即坐标(x, y)都对应于平面上唯一的一个点；反之，平面上每一个点都有唯一的一个坐标(x, y)与之对应. 根据这种坐标思想，笛卡儿进一步考虑二元方程$f(x, y)=0$的性质. 满足这个方程的x，y值有无穷多个，x值变化时y值随之变化，反之亦然，x，y的不同数值所确定的平面上许多不同的点形成一条曲线. 这样一个代数方程就可以通过几何直观的方法去处理. 反之，可以离开几何图形，用代数的方法研究几何的性质. 具有某种性质的点之间有某种关系，“这个关系可以用一个方程来表示”. 这就是解析几何的基本思想，笛卡儿以一个古希腊的数学问题——帕波斯问题举例，求出了双曲线的轨迹方程：

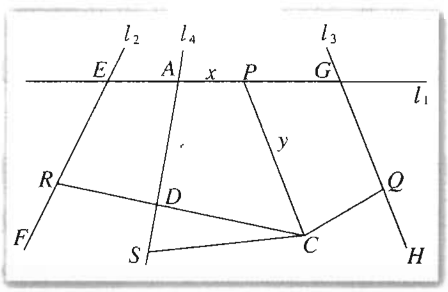


图 4-1

设在平面上给定 3 条直线，l_1，l_2 和 l_3，过平面上的点 C 作 3 条直线分别与 l_1，l_2，l_3 交于点 P，R，Q，交角分别等于已知角 α_1，α_2 和 α_3，求使 $CP \cdot CR = kCQ^2$ 的点 C 的轨迹；如果给定 4 条直线，如图4-1，则求使 $CP \cdot CR = kCQ \cdot CS$（$k$ 为常数）的点 C 的轨迹（问题还可以类似地推广到 n 条直线的情形）.

帕波斯（Pappus，300—约 350）曾宣称，当给定的直线是三条或四条（即所谓的三线或四线问题）时，所得的轨迹是一条圆锥曲线. 笛卡儿在《几何学》的第二卷中证明了四线问题的帕波斯结论，证法如下：

记 AP 为 x，PC 为 y，经简单的几何分析，他用已知量表示出 CR，CQ 和 CS 的值，代入 $CP \cdot CR = CQ \cdot CS$（取 $k=1$），就得到一个关于 x 和 y 的二次方程：

$$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2, \qquad (\text{I})$$

其中 A，B，C，D 是由已知量构成的简单代数式. 于是笛卡儿指出，任给 x 一个值，就得到一个关于 y 的二次方程，从这个方程可以解出 y 值，根据他在《几何学》第一卷中的作图方法，可以用尺规将 y 作出. 如果我们取无穷多个 x 值，就得到无穷多个 y 值，从而得到无穷多个点 C，所以点 C 的轨迹就是方程（Ⅰ）所代表的曲线.

在上述问题中，笛卡儿选定一条直线 AG 作为基线（相当于一根坐标轴），以点 A 为原点，从 A 点量起，x 值是基线的长度；y 值是另外一条直线的长度，该线段从基线出发，与基线成定角. 这样，笛卡儿就建立了历史上第一个倾斜坐标系. 在《几何学》的第三卷

中，笛卡儿又给出了直角坐标系的实例.

在《几何学》的第二卷中，笛卡儿考虑了曲线的分类及其性质，打破了希腊的分类传统，而用代数方程的直接可解性区分“几何曲线”与“非几何曲线”. 他把复杂的高次曲线也看作几何曲线，而把不能用代数方程表示的曲线称为“机械曲线”. 用现代术语，所谓几何曲线就是代数曲线，而机械曲线就是超越曲线. 这样，笛卡儿开辟了全新的曲线领域.

在坐标系和曲线方程的基础上，笛卡儿又提出了一系列新颖的想法. 如：曲线的次数与坐标轴的选择无关；坐标轴的选取应使曲线方程尽量简单；可以利用表示曲线的方程来求两条不同曲线的交点，等等. 此外，笛卡儿对韦达所采用的代数符号作了改进：用字母表中末尾几个字母 x，y，z，…表示未知数；而用开头几个字母 a，b，c，…表示已知数. 这已成为现在的习惯用法. 他还给出了幂指数的简单表示方法，平方根符号“$\sqrt{\ }$”也是笛卡儿首先使用的. 在现代的数学文献中，有许多概念以笛卡儿的名字命名：笛卡儿坐标系、笛卡儿乘积、笛卡儿抛物线，等等.

在《几何学》中，笛卡儿充分发挥了代数学的强大威力，利用坐标系把代数和几何结合起来，使解析几何成为一种普遍的方法. 从此，数学一改古希腊以来依赖于几何学的局面，大大地向前迈进了一步.

三　费马的解析几何思想

与笛卡儿分享创立解析几何殊荣的还有比笛卡儿小 5 岁的费马(P. d. Fermat，1601—1665)，他是 17 世纪上半叶最伟大的数学家之一.

费马像

费马出生在法国南部图卢兹，自幼接受良好的家庭教育，后来进图卢兹大学学习法律，一生以律师为职业. 费马不但有丰富的法律知识，而且是一个博览群书，见多识广的学者. 虽然数学只不过是他的业余爱好，但由于他精通多门语言，所以能深入研究那些古典的数学著作，如阿基米德、阿波罗尼奥斯等人的著作. 费马还结交了当时许多著名的学者，如笛卡儿、梅森、惠更斯等人，经常互通书信，讨论新颖的数学问题.

费马猜想邮票

尽管费马只是一位数学爱好者，但他在数学上的造诣却罕有敌手. 费马对解析几何、微积分和概率论的创建都有重要贡献，在数论方面的贡献尤为重要. 他给出了许多命题，其中最著名的就是费马大定理，又称费马猜想：当$n>2$时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解. 这个问题曾吸引了欧拉、高斯、柯西、勒贝格等许多大数学家一试身手，但都无功而返，该猜想一直悬而未决. 直到 1994 年，英国

数学家维尔斯（A. Wiles，1954— ）在经过 8 年的艰苦努力后终于证明了这个猜想，此时距离费马提出猜想已经 300 多年了.

从费马与友人的通信可以看出，早在笛卡儿的《几何学》发表以前，他已经提出了研究曲线问题的一般方法.

与笛卡儿不同，费马以公元前 3 世纪古希腊几何学家阿波罗尼奥斯的工作为出发点. 他在竭力恢复失传的阿波罗尼奥斯的著作《论平面轨迹》时发现，如果通过坐标系把代数用于几何，轨迹的研究就容易进行. 1629 年，费马用拉丁文撰写了一篇仅有 8 页的论文“论平面和立体轨迹引论”（这里“立体轨迹”是指不能用尺规作出的曲线）. 论文中，费马取一条水平的直线作为轴，并在此直线上确定一点为原点. 他考虑任意曲线和它上面的一般点 M（图 4-2）. 点 M 的位置用两个字母 A，E 来确定，A 表示从原点 O 沿轴线到点 Z 的距离，E 表示从 Z 到 M 的距离，ZM 与轴线成固定的角 α. 费马也是用倾斜坐标系，但 y 轴没有明显地出现，而且不用负数. 费马清晰地阐明了他的解析几何原理：“只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一条轨迹，这两个量之一就描绘出一条直线或曲线. 直线的种类只有一种，而曲线的种类则是无限的，有圆、抛物线、椭圆等等.”这里，费马采用韦达的方法，让一个字母代表一类数，然后写出联系 A 和 E 的各种方程，并指明它们所描绘的曲线.

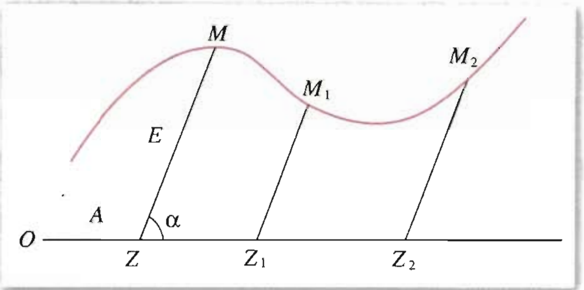


图 4-2

费马还提出并使用了坐标的概念，而且也使用了直角坐标系. 他解析地定义了以下曲线（用现代的符号）：

直线：$d(a-x)=by$；

圆：$b^2-x^2=y^2$；

椭圆：$b^2-x^2=ky^2$；

抛物线：$x^2=ay$，$y^2=ax$；

双曲线：$xy=a^2$ 或 $x^2+b^2=ay^2$；等等.

费马还把抛物线 $x^2=ay$ 和等轴双曲线 $xy=a^2$ 推广为 $x^n=a^{n-1}y$ 的形式. 由方程 $x^n=a^{n-1}y$确定的曲线，现在称为费马抛物线（当 $n>0$ 时）和费马双曲线（当 $n<0$ 时）. 类似地，他还推广了阿基米德螺线.

应该指出，因为费马不用负坐标，所以他的方程不能代表整条曲线，但从他给出一些复杂的二次方程，并给出它们的简化形式可以看出，他已经领会到坐标轴可以进行平移或旋转.

1643 年，费马在一封信里简短地描述了三维解析几何的思想，他第一个把三元方程应用于三维解析几何，包括柱面、椭圆抛物面、双叶双曲面和椭球面. 指出含有三个未知量（即变量）的方程表示一个曲面. 尽管费马对三维解析几何未能给出一个几何框架，但他却为之提供了代数基础. 1650 年，费马在论文“新型二阶或高阶方程分析中的指标问题”中指出：一个自变量的方程决定点的作图，两个自变量的方程决定平面曲线的轨迹的作

图，三个自变量的方程决定空间中曲面的轨迹作图.

由对曲线性质的研究，费马得到了一种相当于微分法的法则. 按照这种方法，当函数经过极值点时，函数的前后两个值将是相等的：

$$f(A+E)-f(A)=0.$$

费马把这个设想的等式称为“准等式”，用 E 去除这个等式，再令 E 消失：

$$\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0.$$

由此求出的 A 就是 $f(x)$ 的极值点. 实际上，这种方法相当于给出了现代微积分中函数取极值的必要条件.

费马未曾说明他的解析几何思想从何而来，但当笛卡儿的《几何学》出版之后，他曾对书中所提出的曲线分类理论提出异议，并指出书中不应该删去极大值和极小值、曲线的切线以及立体轨迹的作图法. 他认为这些内容是值得所有几何学家重视的. 为此，两人曾进行过激烈的争论. 费马在 1660 年的一篇文章中，开诚布公地指出了笛卡儿《几何学》中的错误，又诚恳地表达了自己对笛卡儿天才的钦佩.

笛卡儿和费马研究解析几何的方法大相径庭，表达形式也迥然不同：

首先，费马主要是继承了希腊人的思想，尽管他的工作比较全面系统，正确地叙述了解析几何的基本原理，但他研究的重点放在完善阿波罗尼奥斯的工作上，因此古典色彩浓厚，并且沿用了韦达以字母代表数的思想，因此需要读者对韦达的代数知识有充分的了解. 而笛卡儿则是从批判古希腊的传统出发，走的是革新古代方法的道路. 笛卡儿的方法更具一般性，适用范围也更加广泛.

其次，费马从方程出发研究它的轨迹，笛卡儿则从轨迹开始建立它的方程，这正是解析几何中一个问题的正反两种提法，但各有侧重. 前者是从代数到几何，后者是从几何到代数. 从历史发展来看，笛卡儿的几何学更胜一筹，更具突破性.

总之，笛卡儿和费马共同分享了创立解析几何的殊荣.

四　解析几何的进一步发展

在笛卡儿和费马不约而同、殊途同归地建立解析几何后，解析几何获得了迅猛发展，并广泛地应用到各个数学分支中. 意大利数学家卡瓦列利最先使用极坐标来求阿基米德螺线下的面积. 牛顿则第一个把极坐标看成是确定平面上点的位置的一种方法.

18 世纪，法国数学家克莱罗（A.C.Clairaut，1713—1765）、瑞士的欧拉以及法国的拉格朗日等都讨论了曲面和空间曲线的解析理论. 19 世纪，德国数学家普吕克（J. Plücker，1801—1868）发表了《解析几何的发展》和《解析几何系统》，以优美的方式证明了该领域中的许多结论和定理，在解析几何发展史上占有重要地位.

解析几何学大大推进了微积分的创立和发展，它的直接推广还产生了代数几何分支. 在解析几何中，“坐标”一词是由德国数学家莱布尼茨于 1602 年首先使用的. “纵坐标”也是他在两年后正式使用的. “横坐标”一词则一直到 18 世纪才由德国数学家沃尔夫

(C. von Wolf，1679—1754）首次引进．而“解析几何学”这个名称却是直到 18 世纪末才由法国数学家拉克鲁瓦（S. F. Lacroix，1765—1843）正式采用.

思考题

笛卡儿和费马的解析几何思想有什么异同？解析几何对后世数学发展有何意义？请谈谈你的想法.

第五讲 微积分的诞生——人类精神的最高胜利

17 世纪中叶，数学史上发生了一件具有划时代意义的重大事件，那就是微积分的诞生．微积分是继欧几里得几何学之后数学中最伟大的创造．微积分的诞生掀开了数学乃至整个科学发展史崭新的一页．

一　微积分产生的历史背景

近代微积分的产生经过了半个多世纪的准备与酝酿，有着深刻的社会背景．随着资本主义社会生产力的蓬勃发展，17 世纪上半叶出现了许多重大的科学问题，这些问题的解决需要新的数学工具．

促使微积分产生的科学问题主要有以下四类．

瞬时速度问题

已知物体移动的距离表示为时间的函数的公式，求物体在任意时刻的速度和加速度；反过来，已知物体的加速度表示为时间的函数的公式，求速度和距离，这些问题都是研究运动时不可避免的．那时人们已经知道自由落体运动、炮弹的运动以及许多其他物体的运动都不是匀速运动，如何求这些运动物体的瞬时速度就成为数学家们的一个当务之急．

如果物体的运动是匀速的，那么计算它的瞬时速度就是用运动时间去除运动距离．但是当物体的运动不是匀速时，它的瞬时速度就不能再简单地用运动时间去除运动距离．因为在给定的瞬间，移动的距离和所用的时间都是 0，而 $\frac{0}{0}$ 是没有意义的．但是，物理知识告诉我们，运动的物体在其运动的每一时刻都有速度，这是毫无疑问的．

反之，已知物体的速度公式求运动的距离也遇到同样的问题．因为速度每时每刻都在变化，所以不能用任意时刻的速度乘运动的时间来求移动的距离．求变速运动物体的瞬时速度或运动距离可以说是微分或积分概念最基本的现实原型之一．

切线问题

这是一个纯几何问题，而且对于科学应用有巨大的重要性．光学成为 17 世纪非常重要的研究领域，直接激起了法国数学家笛卡儿、费马、荷兰数学家惠更斯（C. Huygens，1629—1695）以及牛顿等人的兴趣．要研究光线通过透镜的通道，必须知道光线射入透镜的角度以便应用反射与折射定律，而重要的角是光线与镜面曲线法线（过曲线的切点与切线垂直的直线）的夹角（见图 5-1），法线是垂直于切线的，所以问题在于求法线或切线．

另一个涉及曲线的切线的科学问题出现在运动的研究中，运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向，是轨迹的切线方向.

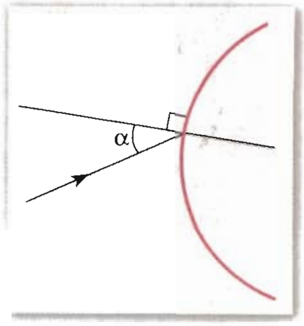
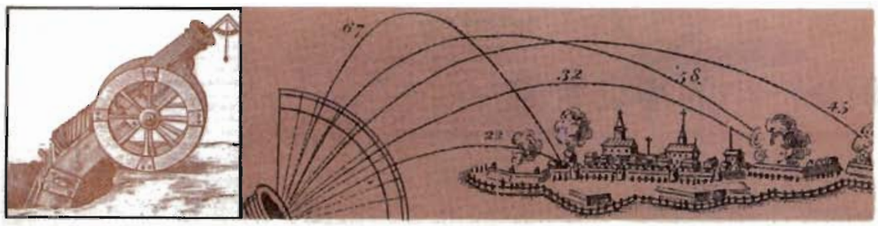


图 5-1　光线与法线

函数的最值问题

早在 16 世纪，西欧各军事强国的火炮制造技术就已经非常先进. 人们注意到，炮弹从炮口里射出，其运行的水平距离，即射程，和炮筒对地面的倾斜角，即发射角有关. 那么，一个现实的问题就是，发射角多大时炮弹获得最大射程. 17 世纪初，意大利科学家伽里略（Galileo Galilei，1564—1642）认识到炮弹弹道的抛物线性质，并断言，在不考虑空气阻力的情况下，当发射角为 45°时炮弹的射程最大. 此外，他还得到了发射角变化时炮弹所能达到的最大高度. 研究行星的运动也涉及到求最大、最小值问题，比如求行星离太阳最远和最近的距离.



炮弹轨迹

面积、体积、曲线长、重心和引力的计算

面积与体积计算问题古来有之：如曲线围成的面积；曲面围成的体积. 17 世纪上半叶，随着天文学的长足进步，这方面的问题变得更为突出，比如德国天文学家开普勒（J. Kepler，1571—1630）在 1619 年给出了行星运动三大定律，但是并未给出严格的数学证明. 开普勒三大定律及其他许多天文学问题都涉及到行星运行的轨道、行星矢径扫过的面积以及物体重心与引力等计算.

古希腊人曾用穷竭法计算出一些面积和体积，尽管他们只是对于比较简单的面积和体积应用了这个方法，但也必须加上很多技巧，所以这个方法缺乏一般性. 这些长度、面积和体积计算问题就成为积分学的基本来源.

在微积分诞生之前，有众多数学家为解决上述问题做出过不懈努力. 例如，1615 年，为了研究旋转体的体积，开普勒引入了无穷大和无穷小概念，并指出：圆是由无数个顶点在圆心的三角形构成，圆周是由这些三角形的无穷小底边构成，把无限小的弧看成直线，把无限窄的面看成直线，把无限薄的体看作面. 意大利数学家卡瓦列利系统地运用无穷小方法计算面积和体积. 他假定：线是由无穷多个点组成，面是由无穷多条线组成，体是由无穷多个面组成. 卡瓦列利用几何方法巧妙地求得若干曲边图形的面积，还证明了旋转体的表面积和体积公式. 法国的笛卡儿、费马、帕斯卡（B. Pascal，1623—1662）以及英国的巴罗（I. Barrow，1630—1677）和沃利斯（J. Wallis，1616—1703）则在求曲线切线或函数极值方面做出过独特贡献.

虽然众多数学家的研究工作为微积分的诞生做了积极的准备，但他们的方法粗糙且缺

乏一般性．当时还无人认识到求面（体）积、求极值、求瞬时速度和求切线四者之间的内在联系，更未能意识到微分与积分之间的互逆关系．历史的发展需要伟人的推动，对数学来说也是如此．此时此刻，亟需具有深邃洞察力的人高屋建瓴地做出决定性的工作．在时代的召唤下，牛顿与莱布尼茨脱颖而出，担负起这项艰巨而伟大的历史任务．

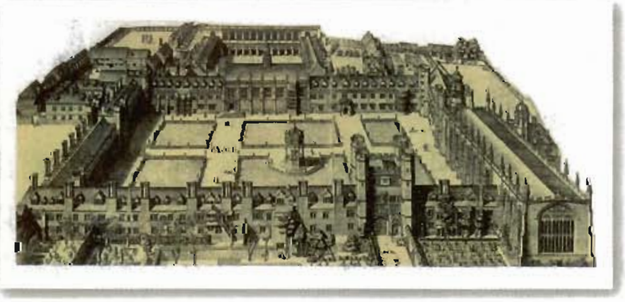
二 科学巨人牛顿的工作

如果列举出有史以来三位最伟大的数学家，牛顿当仁不让必居其一，而另两位则是阿基米德和欧拉．牛顿的出现极大地改变了数学发展的历史进程．

1. 牛顿与微积分

牛顿（I. Newton，1643—1727）出生在英格兰的一个家境小康的农民家庭．1655 年，牛顿进入中学．牛顿的学习成绩平平，谈不上是一个神童，但他特别喜欢阅读，可以称得上是博览群书，从中学开始，他养成了作读书笔记的习惯．牛顿后来一直保持着这一习惯，今天剑桥大学图书馆还保存有一本又大又厚的牛顿读书笔记，其中记载了他早年研究万有引力与微积分的心得，是牛顿早期数学发现的重要见证．

牛顿像

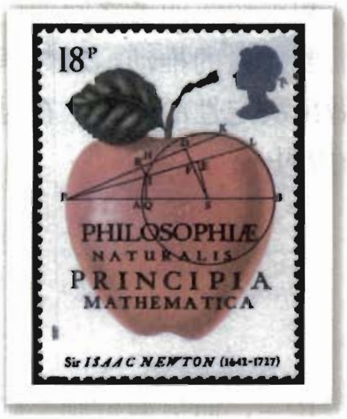


剑桥大学三一学院鸟瞰图

1661 年 6 月，牛顿以优异成绩考入剑桥大学．在数学上，牛顿幸运地得到巴罗教授的悉心指导．后来牛顿追溯流数概念的来源时回忆说："巴罗博士当时讲授关于运动学的课程，也许正是这些课程促使我去研究这方面的问题．"

1665 年初，牛顿获得剑桥大学的文学学士学位．在这一年里，伦敦爆发了鼠疫并殃及剑桥．8 月份剑桥被迫关闭，牛顿回到了家乡伍尔索普村．在家乡度过的这段时间是牛顿一生的重要转折点，也可以说是他科学生涯中的黄金岁月．牛顿一生的三大发明：流数术（即微积分）、万有引力定律和光学分析基本都完成于 1665 年至 1667 年在家乡躲避瘟疫期间，这时牛顿年仅 23 岁，家喻户晓的"苹果落地"的故事就发生在这个时候．他在手稿里曾写到："就在这一年，我开始想象把重力伸展到月球的轨道上……由此，我把使月球在轨道上运行的力与地面上的重力相比较，发现它们差不多相密合．这一切都是在瘟疫年 1666 年成功的．因为在那些日子里，我正处于发明旺盛的时代，对于数学和哲学的热心，比以后任何时代更甚．"

1667 年，牛顿返回剑桥，但他并未宣布自己的重大发现．返回剑桥两年后，牛顿的学识达到了一个新的水平，他撰写微积分和光学论文并协助修改巴罗的《几何与光学讲义》．



牛顿苹果邮票

牛顿的才华得到巴罗的高度评价和赏识. 1669 年，巴罗坦然宣称牛顿的学识已经超过自己，当年 10 月，他把卢卡斯教授❶的职位让给牛顿，当时牛顿年仅 26 岁. 巴罗让贤成为数学史上的一段佳话.

❶ 卢卡斯曾就读于剑桥圣约翰学院，代表剑桥出任过国会议员. 根据他的遗嘱，在剑桥设一个数学教授职位，年薪仅低于学院的院长，当时为 100 英镑，由其捐助土地的收入资助，巴罗是第一任卢卡斯教授.

1684 年，数学家、天文学家哈雷（E. Halley，1656—1743）专程到剑桥拜访牛顿，向他请教行星轨道方面的问题. 牛顿很快得到答案并写成论文寄给皇家学会，这篇论文是《自然哲学之数学原理》（简称《原理》）的初稿. 在随后的两年多时间里，牛顿全身心地投入到《原理》的创作之中，到 1687 年春，《原理》的第三卷“宇宙体系”完成. 在哈雷的资助下这本书在当年夏天正式出版.《原理》的出版具有划时代的意义，是微积分创立的重要标志之一，对欧洲立即产生了巨大的影响，奠定了牛顿在科学史上的不朽地位.

2. 牛顿的“流数术”

关于微积分，牛顿总结了已经由许多人发展了的原始思想，继而建立起成熟的方法，并且提出了前面叙述的四类主要问题之间的内在联系.

牛顿对微积分的研究始于 1664 年秋，当时他认真研究了笛卡儿的《几何学》，对笛卡儿求切线的方法很感兴趣并且试图找到更好的方法. 在家乡躲避瘟疫期间，牛顿对微积分的研究取得了突破性进展. 据牛顿自述，他在 1665 年 11 月发明正流数术（微分法），翌年 5 月建立反流数术（积分法）. 此后，牛顿开始整理前两年的研究成果，同年 10 月写出了一篇总结性论文. 这篇文章当时并未发表，但在牛顿的朋友和同事间传阅. 此文现在以《1666 年 10 月流数简论》（简称《流数简论》）闻名于世，它是数学史上首篇系统的微积分文献.

从《流数简论》可以看出牛顿微积分的运动学背景，该文事实上以速度的形式引入了流数，即导数的概念. 牛顿将自古希腊以来求解无限小问题的各种特殊技巧统一为两类普遍的算法——正、反流数术，即微分与积分，并证明了两者之间的互逆关系，也就是微积分基本定理，正是从这个意义上说牛顿发明了微积分.

《流数简论》标志着微积分的诞生，但它在许多方面还不够成熟. 尽管牛顿在 1667 年从家乡返回剑桥后并未宣扬自己的发现，但是从那时起到 1693 年的大约 25 年的时间里，他始终不渝地努力完善和改进自己的微积分学说，先后写了三篇微积分论文，它们分别是：《分析学》（1669）、《流数法》（1671）和《求积术》（1691）. 这三篇论文反映了牛顿微积分学说的发展过程，并且从中可以看出，牛顿对于微积分的基础先后给出了不同的解释.

第二篇论文《流数法》与《流数简论》一脉相承，牛顿对以物体速度为原型的流数概

念作了进一步的提炼，并首次正式引入“流数”（flucxion）这一术语. 流数语言使牛顿的微积分算法在应用方面获得了更大的成功. 牛顿发明的这门新兴学科就被称作“流数术”或“流数法”.

第三篇论文《求积术》是牛顿最成熟的微积分著作，书中首次引入了流数记号：$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 表示 x，y，z 的一次流数（导数），$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$ 表示 x，y，z 的二次流数，$\dddot{x}$，$\dddot{y}$，$\dddot{z}$ 表示 x，y，z 的三次流数，等等.

牛顿对发表自己的科学著作态度非常谨慎. 除了两篇光学著作，其他的大多数著作都是在朋友的再三催促下才拿出来发表的. 上述三篇论文发表得都很晚，其中《分析学》发表于 1711 年，而《流数法》迟至 1736 年才正式出版，当时牛顿早已撒手人寰. 牛顿微积分学说的最早公开表述出现在 1687 年的力学名著《原理》中. 因此《原理》（图5-2）在数学史上具有划时代的意义.

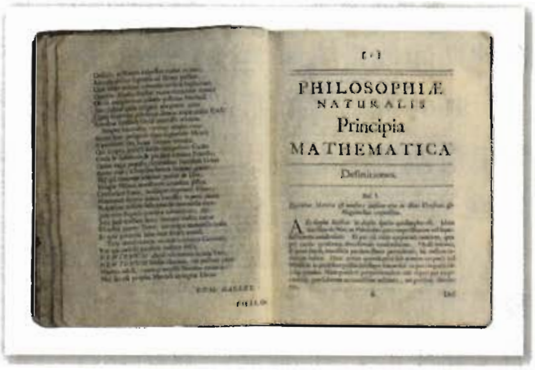


图 5-2 《原理》书影

《原理》被大科学家爱因斯坦（A. Einstein，1879—1955）盛赞为“无比辉煌的演绎成就”. 全书从牛顿的三大力学定律出发，运用微积分工具，严格地证明了开普勒行星运动三大定律以及万有引力定律在内的一系列结论，并且还将微积分应用于流体运动、声、光、潮汐、彗星乃至宇宙体系，充分显示了这门新兴数学工具的强大威力.

牛顿的贡献是多方面的，在数学方面除了创立微积分外，牛顿的研究还涉及代数、解析几何、综合几何、代数几何、数值分析、概率论等. 而在物理学、光学和天文学方面的贡献与数学相比也毫不逊色.

毋庸置疑，牛顿是一位伟大的天才. 但是不管别人如何看待他，牛顿却总是谦逊地将自己的科学发现归功于前人的启示. 在谈到他的光学成就时，牛顿说过这样的名言：“如果我看得更远些，那是我站在巨人肩膀上的缘故.”临终前他对友人说：“我不知道世人将怎样看我. 我自己不过是一个在海边玩耍的小孩，偶然拣到一些比平常更光滑的卵石或更美丽的贝壳并因此沾沾自喜. 而在我面前，却仍是一片未知的真理的海洋.”牛顿的谦逊态度，孜孜不倦、精益求精的钻研精神无不令后人敬仰. 在剑桥三一学院，立有牛顿的全身雕像供后人瞻仰.

三 莱布尼茨的“微积分”

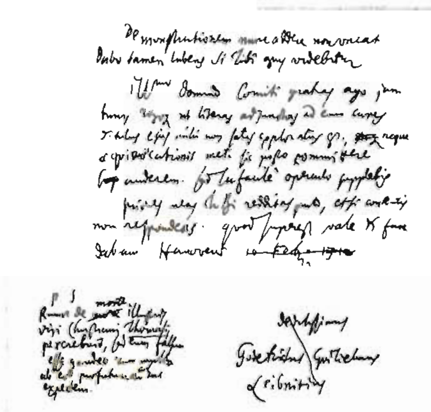
数学或科学中的巨大进展，几乎总是建立在几十乃至上百年中做出一点一滴贡献的许多人的工作之上，而且需要有一个人走那最高最关键的决定性的一步. 这个人要有足够深邃和敏锐的眼光，能够拨开迷雾、去伪存真，在纷繁复杂的表象中找出真实. 在微积分的创立方面，这个人除了上述的牛顿还有莱布尼茨.

莱布尼茨像

伟大的数学家、逻辑学家莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716）出生于德国莱比锡的一个书香世家．莱布尼茨 8 岁进入莱比锡的尼古拉学校，学习拉丁文、希腊文、修辞学、算术、逻辑、音乐等．14 岁时对逻辑学产生了浓厚的兴趣．1661 年进入莱比锡大学学习法律，广泛阅读并研究了大量哲学和科学著作，其中包括培根（F. Bacon，1561—1626）、伽里略、开普勒、霍布斯（T. Hobbes，1588—1679）、笛卡儿等人的著作．1663 年 5 月获得学士学位．同年夏季进入耶拿大学并在次年 1 月获得硕士学位，在此期间他系统地学习了解析几何．

1666 年，莱布尼茨完成一篇题目为“组合的艺术”的论文．他以这篇论文向莱比锡大学申请博士学位，但是遭到拒绝，翌年 2 月，他以这篇论文获得阿尔多夫大学的法学博士学位．

1672 年，莱布尼茨作为一名外交官出使巴黎，在巴黎居留期间开始了自己的学术生涯．当时，巴黎是欧洲的文化中心，在那里，他结识了大量的数学家和科学家，特别是与惠更斯的交往，激起了他对数学的浓厚兴趣．



莱布尼茨的手稿

莱布尼茨出使巴黎的四年可以与牛顿避祸家乡的两年相媲美．他在这一时期完成或奠定了包括微积分在内的许多重大成就的基础．莱布尼茨走上数学生涯在很大程度上是受惠更斯的影响．通过惠更斯的介绍，莱布尼茨研读了卡瓦列利、巴罗、帕斯卡以及沃利斯等人的著作．受此启发，他也投身到求曲线的切线、求曲边图形面积这类当时方兴未艾的课题之中．

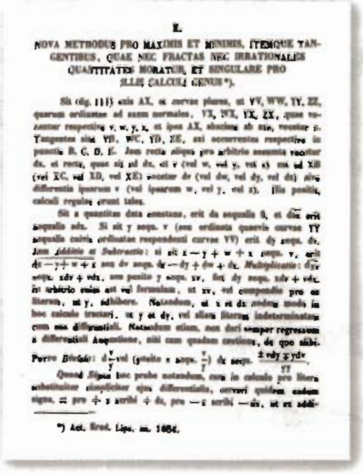
莱布尼茨从 1684 年起开始发表微积分论文，但是，他的许多成果以及他的思想的发展，都包含在他从 1673 年起写的成百页的笔记中．尽管笔记很混乱，但它确实揭示了一个伟大天才，如何为了达到理解和创造新事物而付出的不懈努力．1673 年左右，莱布尼茨看到了求曲线的切线的正问题和反问题的重要性，他也完全相信，反方法等价于通过求和来求面积和体积．早在 1675 年末，莱布尼茨给出了微积分基本定理，即后世所称的牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(b) - f(a),$$

但是直到 1693 年才给出此定理的证明．这个定理说明：作为求和过程的积分是微分的逆运算．这个公式把微积分的两个方面——微分和积分联系起来．

莱布尼茨发明的微积分与牛顿发明的流数术本质上是一致的．两人都使微积分成为普遍适用的算法，同时又都明确建立了面积问题与求切线问题的互逆关系．两人创立微积分的目标是一致的，并且也确实殊途同归都达到了目标，使文艺复兴以来科学家们普遍关注和竭力攻克的瞬时速度、切线、极值和求积等问题有了统一的解决途径和锐利武器．

当然，莱布尼茨的微积分与牛顿的流数术相比各有特色．例如：他们各自的着眼点不同，牛顿从物理或运动角度出发，而莱布尼茨则主要从几何角度出发；莱布尼茨比较注意微积分的形式运算法则和符号系统，牛顿则更看重微积分方法的直接应用，等等．特别是，在引进新的符号系统这点上，实践表明莱布尼茨精心选择的符号要比牛顿的更优越、更富有启示性，比如他引入“$\int$”（是英文单词 Sum（和）的第一个字母“S”的拉长）作为求积符号，用 $\mathrm{d}x$ 表示微分，都被学术界广泛接受．在现代的微积分书籍和课本中采用的基本是莱布尼茨的符号系统．


I.
NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS *).

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

莱布尼茨的论文

莱布尼茨的第一篇微积分的论文于 1684 年发表在《教师学报》杂志上，这是历史上最早公开发表的微分学文献．鉴于牛顿开始微积分的研究早于莱布尼茨，而莱布尼茨发表微积分论文早于牛顿，所以两人分享了创立微积分的殊荣．

莱布尼茨是一位多能的大师，数学只不过是他显示出杰出天才的许多领域之一．莱布尼茨在法律、宗教、管理事务、历史、文学、逻辑学、形而上学和思辩哲学方面都做出了卓越的贡献．莱布尼茨在数学和哲学方面的著作位列世界上最优秀的著作之中．他曾提出过二进制思想，据说，他曾经研究过中国的八卦，并得出这样的结论：中国的八卦是世界上最早的二进制．莱布尼茨还曾致信康熙皇帝，建议在中国设立科学院．

在牛顿和莱布尼茨之前，微分与积分被当作两种数学运算、两类数学问题分别加以研究．卡瓦列利、巴罗和沃利斯等人在这方面得到了一系列的重要成果，但这些成果都是孤立的．虽然沟通微分与积分的关系也曾进入人们的考虑范围，甚至巴罗曾隐约地感觉到它们似乎是互逆关系，但是终未能有人明确地认识到这一点．只有牛顿和莱布尼茨（各自独立地）将微分与积分真正沟通起来，明确地找到了两者内在的直接的联系：微分与积分是互逆的两种运算．而这正是建立微积分学的关键所在．只有确立了这一基本关系，才能在此基础上构建系统的微积分学．

牛顿和莱布尼茨开拓了微积分这片广袤而丰饶的科学新大陆，而进一步开发、耕耘与建设新大陆的艰巨任务，就落到了后来数学家的肩头上．

在整个 18 世纪，微积分进一步深入发展，这种发展与应用紧密交织在一起，刺激和推动了许多新的数学分支的产生，从而形成了“数学分析”这个新兴的数学领域．18 世纪的所有数学家几乎都毫无例外地涉足过微积分的研究，他们把微积分应用到流体力学、天体力学等各种领域．这个世纪可以说是数学分析的时代，也是近代数学向现代数学过渡的重要时期．

牛顿和莱布尼茨创立了微积分大厦，但由于时代的限制，他们没来得及对这幢大厦的基础进行深入的研究．两人都未能把微积分的基本概念，即导数和积分弄清楚，更不用说严密了．早期微积分在严密性方面的缺陷曾被某些唯心主义者所利用，作为攻击科学、维护神学的借口．这就导致了数学史上的第二次数学危机，由此引发了数学界甚至哲学界长达一个半世纪的争论．

直到 19 世纪，又经过法国数学家柯西（A-L. Cauchy，1789—1857）和德国数学家魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass，1815—1897）的努力，微积分学才达到了现在这样严密的程度.

由于牛顿和莱布尼茨两位奠基人不约而同的努力，使得微积分作为一门独立学科建立起来，开辟了数学史的新纪元. 微积分如同一把钥匙，靠着它，近代数学家揭开了众多科学问题和自然界的奥秘. 它同时又像一扇通向金矿的大门，刺激了许多新的数学学科的兴起. 作为一种震撼心灵的智力奋斗的结晶，微积分这门学科达到今天这样精美严密和威力巨大的程度，乃是众多数学家两个多世纪前赴后继、辛勤耕耘的结果. 因而微积分的创立，被恩格斯誉为“人类精神的最高胜利”.

思考题

1. 请你谈谈微积分创立的社会背景.
2. 在微积分的创立过程中，牛顿、莱布尼茨的贡献是什么？

第六讲 近代数学两巨星
——欧拉与高斯

17 世纪中叶，在两位天才数学家牛顿和莱布尼茨不约而同的努力之下，人类精神的最高胜利——微积分诞生了．这是一项里程碑式的数学成就，数学历史由此掀开了崭新的一页．

在整个 18 世纪，众多数学家以极大的热情投身于微积分的研究工作，对微积分及其应用倾注了毕生精力．由于数学家们艰苦卓绝的努力，微积分很快朝着严密化迈进，并以此为核心发展成为一个新的数学领域——数学分析．

一　分析的化身——欧拉

在为微积分的发展做出杰出贡献的数学家中，被誉为“数学英雄”的瑞士数学家欧拉是其中的佼佼者．18 世纪，欧拉是欧洲数学界的灵魂人物，他是继牛顿之后最伟大的数学家之一．在欧拉的工作中，数学紧密地和其他科学的应用、各种技术应用以及公众的生活联系在一起．它常常为解决力学、天文学、物理学、航海学、地理学、大地测量学、流体力学、弹道学、保险业和人口统计学等问题提供数学方法．

作为一位数学家，欧拉把数学应用到整个物理领域中去，他总是首先试图用数学形式表示物理问题，为解决物理问题而提出一些数学思想，并系统地发展和推广这一思想．因此，后世才可以用数学语言系统地阐述欧拉在这一领域的杰出成就．

1. 数学英雄

欧拉（L. Euler，1707—1783）出生在瑞士巴塞尔（Bassel）．1720 年秋，年仅 13 岁的欧拉进入巴塞尔大学文科，成为微积分权威约翰·伯努利的忠实听众，并逐渐与伯努利建立了深厚的友谊．约翰·伯努利后来曾这样称赞青出于蓝而胜于蓝的学生：“我介绍高等分析时，它还是个孩子，而你将它带大成人．”两年后的夏天，欧拉获得巴塞尔大学的学士学位，次年，欧拉又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位．1725 年，欧拉开始了他的数学生涯．

欧拉像

当时，俄国新组建的圣彼得堡科学院正求贤若渴，百业待兴．1726 年，欧拉受聘于圣彼得堡科学院，开始了他的新生活．既要搞数学研究，又要在科学院的附属大学讲课；既要负责科学院的各种事务性工作，又要完成俄国政府指派的各项攻关任务，此时的欧拉是繁忙而充实的．在圣彼得堡科学院的头 14 年里，欧拉以不可思议的效率在分析学、数论、力学等领域作出了辉煌的成果．这一切为他赢得了名望．由于劳累过度，欧拉在 1738 年的一场疾病后右目失明．但不幸未能击垮顽强的欧拉，他仍然一如既往地、全身心地投入到数学研究中．

1741 年 7 月，欧拉受聘柏林科学院．他一方面负责科学院的各项行政事务，另一方面还要担任政府顾问．在欧拉的努力下，科学院的各项事业蓬勃发展、蒸蒸日上．在柏林，欧拉的科学研究达到了颠峰．期间，欧拉的研究领域包括天文学、力学、光学、电磁学、火炮和弹道学以及航海等许多领域，完成了大约 380 篇（部）论著，其中 275 种获得出版．

欧拉在 1766 年携家人回到阔别 25 年的俄国．不久，灾难接踵而至．1771 年，欧拉双眼完全失明；是年，他的住所和财产全都在一场大火后荡然无存；两年后，欧拉的夫人辞世．尽管遭受一系列不幸的沉重打击，但欧拉的科学活动丝毫没有减少，他孜孜不倦的研究精神一直保持到生命的最后一刻．欧拉的记忆力和心算能力是罕见的，心算不仅限于简单的运算，高等数学同样可以心算．欧拉在完全失明前，还能朦胧地看到一些东西，他抓紧这最后的时刻，在一块大黑板上写下他发现的公式，然后口述其内容，由他的学生特别是长子约翰（J. A. Euler，1734—1800）笔录．在失明后的 17 年里，欧拉还解决了许多分析问题．有人曾赞美说："欧拉计算好像一点也不费力，正像人呼吸空气，或者老鹰乘风飞翔一样．"

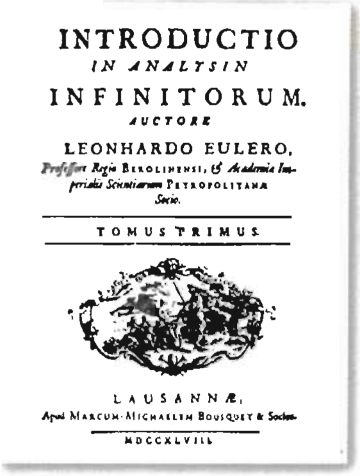
2. 欧拉的丰功伟绩

数学分析

在欧拉所有的数学工作中，首屈一指的应是对分析学的研究，这与当时的时代潮流有关．微积分正处在生机勃勃的发展时期，自然科学的发展也对微积分提出了更高的要求．再者，作为约翰·伯努利的得意门生，欧拉继承老师的衣钵也是顺理成章的事．在微积分学方面，欧拉所做的工作包括：整理由伯努利家族继承下来的莱布尼茨学派的微积分学说的内容，为 19 世纪的数学发展奠定了基础；把微积分学发展到复数范围；开创微分方程、变分法、椭圆函数论等新领域；引进了许多一直使用至今的数学符号．

欧拉的三本书《无穷分析引论》（1748），《微分学》（1755）和《积分学》（共三卷，1768—1770）成为微积分发展史上里程碑式的著作．三部著作中包含了欧拉本人在分析领域的大量创造，在很长时间里被作为分析课本的典范而普遍使用，并被当时欧洲的微积分学习者奉为经典．欧拉在这些著作中详尽系统地解说了当时的微积分方法．他在《无穷分析引论》中给出了著名的极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$



《无穷分析引论》之扉页

其中 e 为自然对数的底.

欧拉给出了等式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，如果将 $\theta=\pi$ 代入其中，就有 $e^{i\pi}=-1$. 这个简洁的等式包含了数学中最重要的四个数：圆周率 π，自然对数的底 e，虚数单位 i 和数字的基本单位 1. 在《微分学》一书中，欧拉给出了大量初等函数的微分. 鉴于欧拉为分析的发展做出的卓越贡献，人们将他誉为“分析的化身”.

函数概念

函数在数学中是一个至关重要的概念，“函数概念是近代数学思想之花”. 高中阶段的数学可以说是以函数为中心的. 那么，函数的概念是怎样产生和发展的呢？

17 世纪是从常量数学进入变量数学的过渡时期，笛卡儿发明的解析几何是函数概念新发展的标志. 欧拉对函数概念的深化，是他对分析学发展做出的一项重大贡献. 1748 年，在《无穷分析引论》中，欧拉彻底地研究了函数概念. 在继承老师约翰·伯努利思想的基础上，欧拉提出了自己的函数概念：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式构成的解析表达式.”

用函数的解析式定义函数也有很大的局限性. 比如某些变量之间的对应关系不能用解析式来表示，那么根据欧拉的函数定义，这种对应关系就不能称为函数关系. 但是，西欧已经逐渐走进工业革命，由于科技发展的需要，正确规定函数概念变得空前紧迫. 1755 年，欧拉在他的专著《微分学原理》中再一次扩张了他的函数概念：“如果某些变量，以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随之变化，则将前面的变量称为后面变量的函数.”这个函数概念朴素地体现了“自变”到“因变”的过程，因此被认为是科学的函数概念的雏形. 此后，经过众多数学家一百多年的发展和完善，才得到了现在的函数概念.

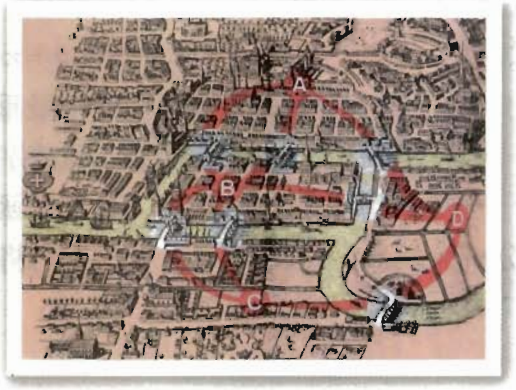
“哥尼斯堡七桥”问题

东普鲁士的首府哥尼斯堡（现属俄罗斯，更名为加里宁格勒）是一个风景宜人的旅游胜地，城中有一条河叫布勒格尔河，该河横贯城区. 它有两条支流，分别称为新河和旧河，两条支流在城中心汇合，成为一条主流（大河）. 在新旧两河交汇处有一个岛，这是繁华的商业中心. 这种分布，把全城分为北、东、南及中央岛四个区域，这四个区域分别由七座桥相连.

当地流传着许多与这七座桥有关的传说，其中一个是这样的：能否不重复地走遍这七座桥？把这个问题转化为数学问题就是：

把东、南、北及中央岛四区看成四个点，连接它们的七座桥看成七条通路，以 B 代表岛区，A，C，D 分别代表北、南、东三区，把这四个点和连接它们的代表七座桥的通路在图上画出来，就得到图 6-1. 现在问题可以叙述为：以 A，B，C，D 这四点中的任一点为起点，能否不重复地用一笔将上面的图形画出来.

这个问题被人们称为哥尼斯堡七桥问题. 欧拉曾仔细研究过这个问题并完满地对它作了解答，因此，后来人们又称此问题为欧拉七桥问题.



哥尼斯堡鸟瞰图

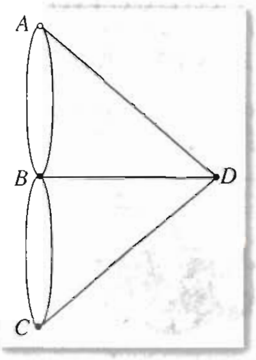


图 6-1 数学抽象图

欧拉思考这个问题的方法是这样的：一个图如果能够不重复地一笔画成，那么它必须有一个起点和一个终点.

如果起点与终点是同一个点，那么从这点出发的路线条数与回来的路线条数是一样多的，而且这些通路又不能重复使用，因此与此点相连的通路有偶数条. 同样，中间经过的点进去和出来的通路也应该是偶数条. 具有这种性质的点称为**偶点**. 如果起点与终点不相同，按照上面的推理知道，连接这两个点的通路应该是奇数条. 这样的点称为**奇点**.

于是，如果一个图能不重复地一笔画成，那么它必须具有的奇点数或者是 0，或者是 2. 这是因为中间点都是偶点，只有起点和终点才可能是奇点. 由于哥尼斯堡数学抽象图的四个顶点 A，B，C，D 都是奇点，因此一笔画是不可能的.

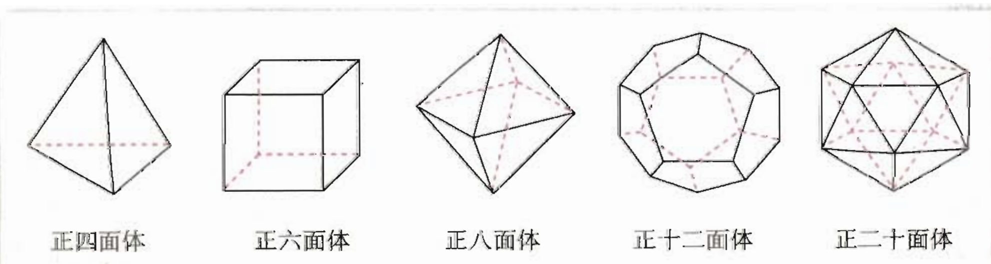
欧拉不愧为数学上的天才，他的思维如此巧妙，不能不令后人为之折服. 欧拉对“哥尼斯堡七桥”问题的深入研究，产生了一门新的学科——图论.

欧拉示性数

1750 年，欧拉在给哥德巴赫（C. Goldbach，1690—1764）的一封信中列举了多面体的一些性质，其中的一条是：如果用 V，E 和 F 表示闭的凸多面体的顶点数、棱数和面数，则有如下关系：

$$V-E+F=2.$$

第二年，他给出了这条性质的一个证明. 100 年后，人们发现笛卡儿早就知道这个性质，但第一个认识到这个关系的重要意义的人却是欧拉. 他之所以对这个性质感兴趣，是要用它来给多面体分类. 欧拉示性数 $V-E+F=2$ 是现代拓扑学的主要不变量之一.



正多面体

数学符号

欧拉的数学贡献还在于，在自己的三部专著《无穷分析引论》、《微分学》以及《积分学》中，他引入了许多简单明了的符号：用 $f(x)$ 表示函数；用 e 代表自然对数的底；用 Δy，$\Delta^2 y$，…表示有限差分；用 $\sum$ 表示求和；用 i 表示虚数单位 $\sqrt{-1}$；现代的三角函数符号也是欧拉最早使用的．这些符号一直沿用至今．

欧拉的研究范围涵盖了当时的大量学科．比如数论、代数、无穷级数、单复变函数、分析学、微分方程、变分法、微分几何、图论以及拓扑学等等．在数学领域内，18 世纪可以称为欧拉的世纪．

欧拉是历史上最多产的数学家，他从 18 岁开始数学研究到 76 岁辞世，平均每天要写一页半大四开纸的东西．他在生前共发表了 560 多篇（部）著作与论文，身后还留下大量遗稿．欧拉曾说，他未发表的论文足够圣彼得堡科学院用上 20 年，结果直到他去世 80 年后的 1862 年，圣彼得堡科学院院报上还在刊登欧拉的遗作．特别需要说明的是，欧拉还有许多手稿在 1771 年的圣彼得堡大火中不幸化为灰烬．

鉴于欧拉坚韧不拔的意志、孜孜不倦的精神以及无与伦比的数学贡献，数学史家把阿基米德、牛顿、欧拉和高斯并称为“数学四杰”．由于欧拉身残志坚、百折不挠的精神，数学家纽曼（J. R. Newman）称欧拉为“数学英雄”．

二　数学王子——高斯

18 世纪，尽管微积分的逻辑基础还不严密，但这并未阻碍以微积分为代表的数学获得迅猛发展．就这样，数学带着 18 世纪的余音进入了 19 世纪．19 世纪是倍受数学史家瞩目的世纪，古典数学在这一世纪里蜕变为现代数学的形态．新旧交替，万象更新，数学基本形成了现代的格局，因此可以说 19 世纪是数学史上最重要的时期．这个时期，最杰出的代表人物是被称作“数学王子”的德国数学家高斯．

1. 高斯的故事

高斯（C. F. Gauss，1777—1855）出生在德国不伦瑞克一个贫苦的家庭．高斯很小就显露出数学天赋．有一天，父亲计算工薪账目，他算了半天才算完，在一旁观看的高斯却说：“爸爸，你算错了，应该是……”核对之后，果然高斯是对的．

青年高斯像

高斯 10 岁时，数学教师要求学生将 100 以内的数加起来．高斯很快就把有答案的石板交了上去，并且答案正确，而其他学生则用了很长时间才完成计算，而答案却是错的．实际上，高斯并没有像其他同学那样急于直接计算 $1+2+\cdots+99+100$，而是仔细地观察、思考，当他发现 $1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=$

101，…，50+51=101 总共有 50 个 101 时，他立刻得到

$$1+2+\cdots+99+100=101\times50=5\ 050.$$

由于家境贫寒，高斯几乎被迫中断学业．但高斯凭着自己的聪颖、好学和朴实赢得了人们的资助，不仅完成了中学学业，而且还进入家乡的卡洛琳学院学习．在大学的三年里，高斯全身心地投入数学学习和思考，取得了一系列的重要发现．最重要的是，在这一时期，贯穿高斯一生的研究风格的一个重要方面已趋于成熟：不停地观察和实例剖析，从经验性质的研究中获得灵感和猜想．

18 岁那年，高斯到哥廷根大学就读．这所大学之所以受到高斯的青睐，原因有三：其一，它的办学方式追随英国的牛津大学和剑桥大学，资金充裕，学术自由；其二，它有一个藏书极为丰富的图书馆；其三，它有锐意改革、重视科学的崇高声誉．

1796 年是高斯学术生涯的第一个转折点：他敲开了自欧几里得时代起就困绕着数学家的尺规作图难题的大门，证明了正十七边形可以用直尺和圆规作出来，这是欧几里得以来悬而未决的问题．这一成功使高斯极为兴奋，也使他真正认识到自己的天赋是数学．高斯的数学生涯开始了．为了纪念这个发现，高斯去世之后，他家乡的人在不伦瑞克的纪念碑上刻了一个正十七边形．

从解决十七边形作图的 1796 年到 1801 年，是高斯学术创造力最旺盛的时期．在这 6 年中，他提出的猜想、定理、证明、概念、假设和结论，平均每年不少于 25 项．

2. 高斯的学术成就

高斯是科学史上的一位通才，他的研究领域非常广阔，但总的来说，其数学成就最令人瞩目．高斯被后人誉为“数学王子”，这种赞誉是恰如其分的．他是数学史上一个转折时期的杰出代表人物，起着承上启下的作用．18 世纪的数学处在由微积分的创立而促成的分析学蓬勃发展的时代，当时的代表人物往往并不顾及推理的严格性而得到大量的分析学成果．而高斯则强调，数学作为一门严谨的科学，必须追求明确的定义、清晰的假设、严格的证明以及研究成果的系统化，倡导了至今已延续了 200 年的现代数学传统．

在纯数学方面，高斯对数论最感兴趣．他在 19 岁时就证明了二次互反律．这是他的得意之作，也称为“黄金律”．高斯的数论研究总结在 1801 年出版的《算术探究》一书中．该书奠定了近代数论的基础，它不仅是数论方面划时代的著作，而且可以列为历史上最有代表性的数学著作之一．高斯曾说：“数学是科学之王，数论是数学之王．它常常屈尊去为天文学和其他自然学科效劳，但在所有的关系中，它都堪称第一．”

在代数方面，高斯的贡献也毫不逊色．1797 年，他证明了 n 次代数方程在复数域内有 n 个根，这就是著名的代数基本定理．此外，高斯还研究了复数，提出了所有复数都可以用复平面上的点来表示，所以后人把“复平面”也称作高斯平面．高斯还利用平面向量与复数之间的一一对应关系，阐述了复数的几何加法与乘法，为向量代数学奠定了基础．此外，高斯在微分几何方面也造诣颇深，将微分几何大大推进了一步，并确定了这一学科发展的基本方向．高斯还在 1816 年发现了非欧几何原理，成为非欧几何的创始人之一．那么，什么是非欧几何呢？

两千多年来，人们认为欧几里得几何空间是唯一反映现实世界的几何空间，所以一直把欧几里得几何奉为金科玉律. 19 世纪二、三十年代，非欧几何的诞生把人们从这一思想禁锢中解放了出来. 在数学史上，能像非欧几何那样对人类的思想和认识产生如此深刻影响的数学分支真是凤毛麟角. 人们常常将非欧几何在数学上引起的思想变革与哥白尼的天文学革命相比拟.

欧几里得的《原本》的全部内容是以开篇的五个公设为出发点展开的，也就是说这五个公设是欧几里得几何学体系的基石. 其中的第五公设是这样叙述的：同一平面内，一条直线与另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角之和小于两个直角，则这两条直线无限延长后在这一侧相交.

《原本》诞生后，第五公设引起了数学家的极大关注，这是因为，公设应尽可能地简单明了，而第五公设却并非如此. 多年以来，许多数学家前赴后继试图从其他公理、公设中把它推导出来，结果都以失败而告终. 在努力的过程中唯一取得的一点进展就是找到了与第五公设等价却更加简单的陈述形式：通过直线外一点能且只能作一条平行线. 当时代进入 19 世纪，一种革命性的几何观念在酝酿：欧几里得几何不是唯一描述物质空间的几何学，在不同的公理基础上可以建立不同的几何学体系. 最早认识到这一点的就是高斯.

早在 1792 年，年仅 15 岁的高斯就已经思考过第五公设. 到 1816 年左右，他已经有了非欧几何的基本思想，确信存在着不同于欧氏几何的另一种几何学，而且进一步考虑到这种新几何的现实性. 尽管高斯对几何学的本质问题有着深刻的理解，但他一直将自己的这一发现秘而不宣. 原因是高斯过于谨慎，他有一句名言：“宁要少些，但要好些”. 高斯深知，这种新思想对欧几里得几何学两千年的权威会造成极大的冲击，而且与人们的常识相悖，尤其是构成了对当时盛行于欧洲的康德哲学信条的强烈挑战，这必然会遭到世人的攻击和耻笑.

比高斯稍晚，俄国数学家罗巴切夫斯基（Н. И. Лобачевский，1792—1856）和匈牙利数学家波尔约（J. Bolyai，1802—1860）也开始了非欧几何的研究并走出了决定性的一步. 罗巴切夫斯基大约在 1816 年开始研究平行公理问题，经过 10 年锲而不舍的艰苦努力，非欧几何的研究终于取得突破. 1826 年 2 月 23 日，罗巴切夫斯基第一次公开了他的非欧几何思想，这个思想促使人类思维从直接经验的狭小范围内解放出来，激起了关于现实空间可能具有非欧几何性质的大胆设想. 这一天被公认为非欧几何的诞生日.

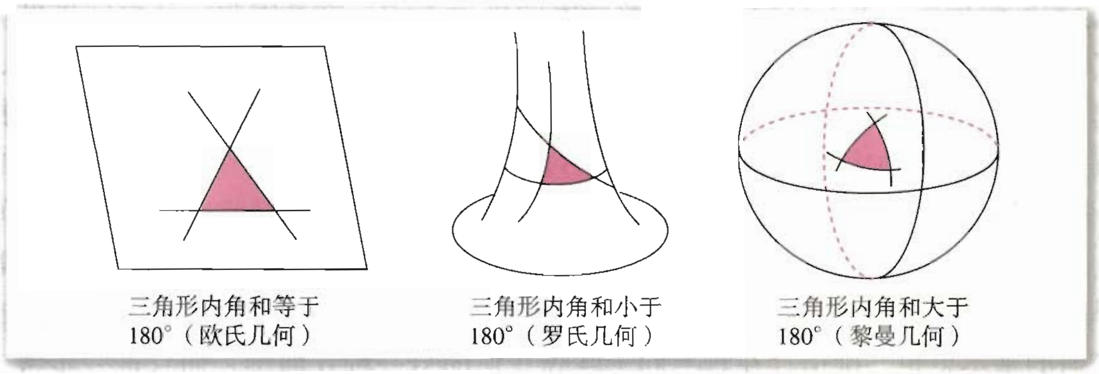
罗氏像

波尔约像

1823 年，几乎与罗巴切夫斯基同时，匈牙利的波尔约也独立发现了非欧几何. 1832 年，波尔约将自己的研究成果以附录的形式随父亲的几何学著作一起出版. 同年，老波尔约还把儿子的附录寄给自己的同学和朋友高斯征求意见，高斯在回信中写道：“关于你儿子的工作，当我一开始就说我不能赞美他时，你一定会感到震惊……因为称赞他就等于称赞我自己，文章所有内容，

你儿子采取的思路、方法及所得结果，和我 30 至 35 年前已开始的一部分工作完全相同……但我本来就是不愿发表的……”因此，高斯、罗巴切夫斯基和波尔约被并列看作非欧几何的创始人.

在上述的非欧几何里，用“同一平面上任何两条直线都不相交”代替欧氏几何中的第五公设，一般称为罗巴切夫斯基几何，简称罗氏几何. 在罗氏几何中，三角形的内角和小于 180 度. 1854 年，德国数学家黎曼（G. F. B. Riemann，1826—1866）又提出了一种既不是欧氏几何又不是罗氏几何的几何，这种几何采用“同一平面上任何两条直线一定相交”代替欧氏几何中的第五公设，这种新几何称为黎曼几何. 在黎曼几何中，三角形的内角和大于 180 度.



不同几何中的三角形内角和

非欧几何被后世誉为“十九世纪最有启发性、最重要的数学成就”. 它与这一时期创立的近世代数一起，改变了人们处理数学问题的观点和方法，迎来了数学发展的新时期.

除了数学领域，高斯在许多与数学联系紧密的其他领域也有很深的造诣. 比如在天文学中，高斯在 24 岁时创立了行星轨道椭圆法，成功地解决了如何根据有限的观测数据来确定新行星的轨道这个难题. 在当时的欧洲，天文学是科学界最关注的课题，高斯的这一成果立时引起了轰动.

高斯对电磁学和光学也有很大贡献. 1883 年，他和韦伯（W. E. Weber，1804—1891）共同发明了电磁电报. 后来为纪念高斯，磁通量强度的单位就以高斯的名字命名. 此外，高斯还是大地测量学卓越的理论家和实践者.

高斯知多言少，虽一生发表了 155 篇论文，但还有大量的创作没有发表出来. 除了上述的非欧几何，还有复变函数等等. 高斯总是等到作品尽善尽美的时候才公布出来. 呈现在人们面前的只是完美无瑕的结果，而省略了分析和思考的过程，一般的学者很难掌握他的思想方法. 如果具有超群洞察力的高斯不那么过于谨慎，及早地发表他的真知灼见，对数学发展的贡献将会更加巨大.

图 6-2 高斯塑像

高斯是近代数学奠基人之一，在数学史上的影响之大，使得他与阿基米德、牛顿、欧拉并称为“数学四杰”. 高斯去世后，哥廷根大学建立了高斯的塑像以资纪念（图 6-2）. 德国政府为了纪念这位数学巨匠，还发行过印有高斯头像的 10 马克钞票.

思考题

1. 欧拉为什么被誉为“数学英雄”？他有哪些数学功绩？
2. 高斯进行数学思考和研究的方法对你的数学学习有什么启示吗？
3. 非欧几何与《原本》的第五公设有什么关系，非欧几何是如何诞生的？

第七讲 千古谜题——伽罗瓦的解答

我们知道，早在古巴比伦时代，人们就已经掌握了解（一元）二次方程的方法，但是直到公元 9 世纪，才有阿拉伯数学家花拉子米（Al-Khowarizmi，约 780—850）开始对二次方程的一般解法进行系统的、理论性的研究，并给出了求根公式. 中世纪的阿拉伯数学家把代数学看成是解代数方程的学问，从此以后直到 19 世纪，解方程一直是代数学的中心课题.

一　三次、四次方程求根公式的发现

1. 三次、四次方程问题

在花拉子米发现二次方程的求根公式之后，数学家们自然联想到三次、四次方程的求根公式问题. 事实上，三次、四次方程并不比二次方程产生得晚，但通常只有一些特殊的三次、四次方程能根式求解.

公元前 3 世纪，阿基米德曾用图象法解出一些特殊的三次方程，但与一般求根公式相去甚远. 后来的阿拉伯数学家也曾遇到一些三次方程问题，但他们没有把注意力放在求根公式的研究上.

公元 1 世纪，我国的《九章算术》中就已经出现了像 $x^3=1\ 860\ 867$ 这样特殊的三次方程的解法. 公元 630 年左右，唐代的王孝通（公元 7 世纪初）在他的《辑古算经》中给出了更一般的三次方程的解法，他是世界上最早给出三次方程代数解的人，但他没有给出一般公式. 宋元时期的秦九韶、李冶以及朱世杰等人都在三次、四次方程的求解方面作出过突出贡献. 但中国古代的努力方向主要放在求方程的数值解上，尽管能够求得三次、四次甚至更高次的代数方程任意精度的数值解，但始终未能获得求解三次、四次方程的一般公式.

总而言之，在 16 世纪之前，数学家们对三次、四次方程的求根公式的研究都以失败告终.

2. 世界上最早的数学竞赛

1500 年，意大利波伦亚大学教授费罗（S. Ferro，1465—1526）在寻求三次方程求根公式方面首先取得突破性进展，他发现了 $x^3+px=q$（p，q 为正数）的公式解法，但没有

公开发表，而是在1510年左右将其传授给自己的学生菲奥尔（A. M. Fior）等人. 由于受当时欧洲保密风气的影响，他们也未将其公布于世.


塔尔塔利亚像

20多年后，意大利出现了一个研究三次方程的高手，他就是塔尔塔利亚（N. Tartaglia，1499—1557）. 1530年，意大利布雷西亚一位名叫科拉（Colla）的教师向塔尔塔利亚发起挑战，提出两个三次方程的问题：如何求解 $x^3+3x^2=5$ 和 $x^3+6x^2+8x=1\ 000$. 经过钻研，塔尔塔利亚求出了这两个题的正实根，但对解法却秘而不宣. 菲奥尔闻知此事，深感不服，随即也宣称会解三次方程，并向塔尔塔利亚提出挑战. 两人遂相约于1535年在米兰进行公开竞赛，一决高下.

当塔尔塔利亚获悉菲奥尔确实身怀绝技，心里产生了极大的忧虑，因为他深知自己的方法没有普遍性，要想赢得比赛的胜利，必须掌握更完善的解法. 为此塔尔塔利亚废寝忘食，夜以继日地冥思苦想，终于在比赛前夕得到了 $x^3+px=q$（p，q 为正数）这一类方程的解法. 从而在世界上最早的数学竞赛中大获全胜.

此后，塔尔塔利亚再接再厉，继续深入研究，终于在6年后获得成功，得到了三次方程的一般解法. 但当时他没有公开发表自己的成果，而是准备将来著书立说. 可是令塔尔塔利亚始料不及的是，自己用辛勤汗水浇灌出来的硕果却被另一个数学家卡尔达诺摘了去.

3. 张冠李戴

塔尔塔利亚竞赛获胜的消息不胫而走，很快传到了卡尔达诺（G. Cardano，1501—1576）耳朵里. 卡尔达诺是数学史上有名的怪人，享有学者盛名. 当时，他在撰写一部名为《大术》的代数著作，正为收集资料而发愁，这个消息令卡尔达诺十分高兴. 他千方百计地得到了塔尔塔利亚的解法口诀，然后从各方面研究了这种方法，并以此为线索，得到了各种类型三次方程的解法.


卡尔达诺像

1545年，卡尔达诺的名著《大术》终于完成，书中第一次公布了一般三次代数方程的求根公式. 这是不久前他从塔尔塔利亚那里以守密誓约得到的结果，其中也加入了自己的证明和见解. 卡尔达诺在本书的一开始就申明："费罗约在30年前发现了这一法则并传授给菲奥尔，后来曾与宣称也发现该法则的塔尔塔利亚竞赛. 塔尔塔利亚在我的恳求下将方法告诉了我，但没有证明. 在这种情况下，我克服了很大困难，找到了证明，现陈述如下……" 虽然卡尔达诺写明了方法的来源，但失信行为仍然使塔尔塔利亚义愤填膺，两人又展开了争论. 最后由于《大术》的影响，该方法最终张冠李戴地以"卡尔达诺公式"流传后世.

另外，《大术》中还记载了他的学生费拉里（L. Ferrari，1522—1565）发现的一般四次方程的解法. 费拉里出身贫寒，14岁被送到卡尔达诺家做家奴，不久才华显露，成为卡尔达诺的助手. 1540年，18岁的费拉里在米兰接替卡尔达诺开设数学课程. 费拉里的主

要贡献是在卡尔达诺三次方程解法的基础上发现了四次方程的公式解法.

二 高次方程可解性问题的解决

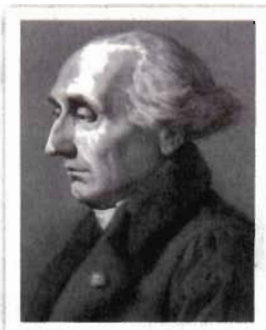
从花拉子米算起，经过数学家们 700 多年的艰苦努力，三次、四次方程的公式求解问题终于在 16 世纪被意大利数学家圆满解决. 接下来，数学家们自然地把目光投向了下一个研究目标：一般的五次或更高次的方程是否也能像二次、三次、四次方程那样公式求解. 也就是说，对于形如

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0=0\ (n\geqslant 5) \qquad (\mathrm{I})$$

的代数方程，它的解能否通过只对方程的系数作加、减、乘、除和求整数次方根等运算得到呢?

1. 初步的尝试

在解出三次、四次方程后整整两个半世纪内，很少有人怀疑五次或五次以上方程公式求解的可能性，但是所有寻求这种公式解法的努力都无功而返. 18 世纪下半叶，法国著名数学家拉格朗日 (J. L. Lagrange，1736—1813) 也加入了代数方程的研究工作，他冷静面对严峻的形势，分析前人的经验教训后，另辟蹊径，提出了不同的解题思路.


拉格朗日像

拉格朗日从二次、三次和四次方程的解法分析入手，从中发现这些方法如何能求出根来，然后再看能否为四次以上方程的解法提供借鉴. 为此，他引进了“预解式”概念及相应的方程解法. 他的新方法对于解决二次、三次、四次方程很奏效，可是用到五次方程时，却发现需要首先解一个尚不知如何求解的六次方程. 拉格朗日的研究工作陷入了困境. 当时，在拉格朗日的头脑中也曾闪现过“四次以上的方程也许根本不存在求根公式”这样的念头，但很快他就否定了自己的想法. 在屡次失败之后，拉格朗日无奈地慨叹道：“它好像在向人类智慧提出挑战.”

尽管拉格朗日未能如愿地解决这个问题，但是他的学生鲁菲尼 (P. Ruffini，1756—1822) 却走出了意义重大的一步. 鲁菲尼是数学的业余爱好者，但他在数学方面做出了许多重要工作. 1799 年，鲁菲尼证明了：当 $n\geqslant 5$ 时，方程 (I) 不能用公式法求解. 他的方法基于三次和四次方程解的关系及 3 个和 4 个元素的置换，这里的“置换”实质上相当于现在的“群”. 鲁菲尼对置换群理论的产生和代数学的发展做出了重要贡献.

2. 中学生数学家取得的突破

时间又过去了 20 多年，高次方程公式求解问题仍然悬而未决，困扰着众多数学家.

这时，一位来自北欧挪威的小青年阿贝尔勇敢地站出来迎接挑战，严格证明了如下事实：如果方程的次数 $n \geqslant 5$，并且系数 a_1，a_2，…，a_n 看成字母，那么任何一个由这些字母组成的公式都不可能是方程的根．这样，一般的五次和高于五次方程的公式求解问题就由阿贝尔解决了．这个定理后人称为鲁菲尼—阿贝尔定理．


阿贝尔像

阿贝尔（N. H. Abel，1802—1829）出生在挪威南部一个基督教牧师家庭，家境贫苦，短暂的一生充满不幸与坎坷．幸运的是，阿贝尔在上中学时遇到一位优秀的教师霍尔姆伯（B. M. Holmboé，1795—1850）．在一次课堂上，霍尔姆伯讲述了困扰数学家 200 多年的五次方程公式求解问题后，阿贝尔下定决心要攻克这个未解之谜．而其他的学生不但自己摇头叹息而且还嘲笑、讽刺阿贝尔“数学殿堂还没跨进，就想进攻难题了”“中学还没毕业，真是自不量力”……令阿贝尔欣慰的是，老师霍尔姆伯给予他极大的肯定、支持和鼓励，在他耐心细致的指导下，阿贝尔自学了许多名家的数学工作，努力了解当时数学的前沿课题．霍尔姆伯在校长和同事面前常常夸奖阿贝尔“将成为世界上最伟大的数学家”．

在学校的最后两年里，阿贝尔以年轻人特有的“初生牛犊不怕虎”的热情，对求解五次方程的问题发起了冲击．在即将毕业的前一年，阿贝尔宣称发现了五次方程的求解公式．他把自己的论文交给老师霍尔姆伯，霍尔姆伯看不懂．又将论文转送奥斯陆大学教授汉斯丁（C. Hansteen），他也看不出所以然．

最后，阿贝尔只好把论文寄给丹麦哥本哈根的数学家德根（F. Degen），德根也未能发现论证本身的任何错误，但是他认为这样一个许多数学家束手无策的问题，怎么会被一个中学生这么轻松地解决呢．于是他写信给阿贝尔，希望他用实例验证一下结果是否正确，信中最后写道：“即使你得到的结果最后被证明是错误的，也显示出你是一个有数学才能的人．”并建议他：“把注意力放在一门对于分析和力学会有重大影响的数学……一个用功和有才能的研究者不会只局限在具有美丽性质的函数，而且会从海峡驶入广阔无边的分析海洋．”阿贝尔遵照德根的指导，经过实例验证发现自己的结果果然是错的．但是他毫不气馁，因为德根的鼓励给予了他巨大的力量．

1821 年秋，不名一文的青年阿贝尔在几位教授的资助下进入奥斯陆大学学习，大学期间，他的数学几乎全部是自学的，他把精力放在进一步的研究上，写出了许多有价值的论文．两年后，在热心的拉斯穆森（S. Rasmussen）教授的资助下，阿贝尔有幸到丹麦拜见德根和其他数学家．德根对他甚为赏识，并对他的研究不吝赐教．阿贝尔返回奥斯陆后再次把目光放在了五次或五次以上方程的求解问题上．这一次他采取了相反的观点，终于获得成功．

1824 年，阿贝尔证明了，五次或五次以上的代数方程没有一般的求根公式．该证明写进了“论代数方程——证明一般五次方程的不可解性”的著名论文中，从而终结了人们公式求解一般高次代数方程的企图．这么难的问题竟然被一个无名小卒解决了，这简直是天方夜谭，结果没有一家杂志愿意发表阿贝尔的论文．但是，阿贝尔本人深知其论文的价值，别无选择，只有自费出版．为了节约资金，他把论文压缩成 6 页，1824 年以小册子的

形式出版．也许由于他的论文过于简略，以至有许多人难以看懂．阿贝尔把小册子寄给包括高斯在内的许多大数学家，可是一直没有得到这些数学大师的反应．后来得知，“数学王子”高斯看了论文的题目，觉得用如此寥寥几页就解决了这个世界难题，令人难以置信，并说：“太可怕了，竟然写出这种东西来！”连正文都没看就把论文扔到了书堆里．这一系列冷遇极大地伤害了阿贝尔．

阿贝尔塑像

1825 年，阿贝尔大学毕业了，可是社会却没有给这位年轻的天才数学家提供用武之地，他决定申请经费出国继续深造和谋求职位．是年夏，阿贝尔首先到达德国柏林，在那里他认识了一位工程师出身的数学爱好者克雷尔（L. Creile），两人结为好友．在阿贝尔的建议及朋友的赞助下，克雷尔在 1826 年创办了著名的《纯粹与应用数学杂志》，简称《克雷尔杂志》（该杂志一直出版到现在，是历史最悠久的杂志之一）它的第一卷刊登了 7 篇阿贝尔的文章，其中一篇就是有关一般五次方程不能公式求解那篇．此后，又陆续刊登了阿贝尔的许多论文，这时才开始有人注意阿贝尔．反过来，阿贝尔出色的论文后来也为《克雷尔杂志》赢得了永恒的声誉．

翌年，阿贝尔从柏林来到巴黎，在那里他结识了当时法国最有名的数学家勒让德以及柯西等人．他写了一篇论文提交给法国科学院，但仍未获重视．直到阿贝尔去世后，那篇论文才于 1841 年被发表出来．失望的阿贝尔又重返柏林，雪上加霜的是，他在那里染上了致命的肺结核病．幸运的是，好友克雷尔帮助了他，请他担任克雷尔杂志的编辑，同时还为他谋求教授职位而奔波，可是这一切努力仍然是竹篮打水．

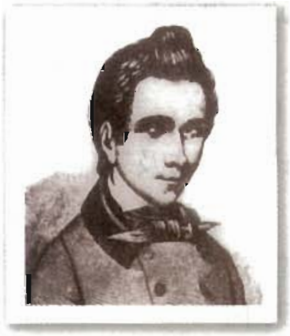
1827 年 5 月，心灰意冷、经济拮据的阿贝尔回到了奥斯陆，而国内的情形丝毫没有好转，找到职位的希望仍然渺茫．他不得不靠作家庭教师维持生计．即使在这种饥寒交迫，贫病夹击的逆境中，阿贝尔仍然坚持研究，取得了许多重大成果．1828 年，四位法国科学院院士曾经联名上书挪威国王，请他为这位天才安排一个合适的职位．又过了一年，满怀着强烈的求生欲望，满怀着继续为科学事业做贡献的伟大理想，阿贝尔在病魔侵袭的凄凉中，在怀才不遇的抑郁中与世长辞．就在他去世两天后，克雷尔来信告知，柏林大学已经认识到他的才华并任命他为数学教授，只可惜好消息来得太迟了．

阿贝尔证明了一般的五次或五次以上的方程不能公式求解，但是这并不妨碍人们去寻找能够公式求解的特殊方程．事实上，阿贝尔本人已经深入研究了这个问题，并发现了一些能公式求解的特殊方程，这样的方程称为阿贝尔方程．于是就产生了这样的问题：到底应该用什么标准来判断一个代数方程能不能用公式求解？这个问题阿贝尔未及完全解决就去世了．不久，另外一个人肩负起阿贝尔未竟的事业，这个人就是法国年轻的数学家伽罗瓦．他完成了阿贝尔未能完成的历史使命，并成为一门新学科——群论的开山祖师．

三 伽罗瓦与群论

1. 伽罗瓦的传奇人生

伽罗瓦（É. Galois，1811—1832）出生于巴黎近郊的一个小村庄里．他自幼聪颖好学，思维敏捷，逐渐显露出擅长数学的天赋．12 岁时，伽罗瓦进入巴黎的一所公立中学，并从 16 岁开始自学了勒让德、拉格朗日、高斯以及柯西等当时最了不起的数学家们的经典著作和论文．伽罗瓦的一位老师这样评价他：他被数学的鬼魅迷住了心窍．



伽罗瓦像

1828 年，由于伽罗瓦过分投入到数学而忽略了其他学科，导致他首次报考巴黎综合工科学校失败．同年，伽罗瓦从初级数学班升到里查德（L. P. E. Richard）的数学专业班，里查德是一位年富力强，才华横溢的教授，并且是一位善于发现千里马的伯乐．他发现伽罗瓦是一个极具数学天赋，只宜在数学的尖端领域中工作的人．

从这一年起，年仅 17 岁的伽罗瓦在里查德的指导下，开始着手关于方程理论的研究．此后，他引进了“群”的概念，获得了现在称为伽罗瓦理论的许多重要结果．五次和五次以上代数方程公式可解性的判别准则终于宣告彻底解决，阿贝尔遗留下来的问题迎刃而解．

伽罗瓦后来回忆说，他在研究之初，也犯了与阿贝尔多年前所犯的同样错误，以为自己解出了一般的五次方程．好在很快悬崖勒马，并重新研究方程理论，直到用群论阐明这个具有普遍性的问题．1829 年，伽罗瓦先后把两篇关于群的初步理论的论文呈送法国科学院，科学院请柯西做论文的主审．由于伽罗瓦的论文新概念较多而且过于简略，因此柯西建议他做一些修改．第二年，伽罗瓦把修改过的论文重新提交科学院，不巧的是，这时柯西出国未归，于是科学院决定由傅里叶负责主审．傅里叶将论文拿到家里，不久就谢世了，而伽罗瓦的论文也不翼而飞．两次挫折令伽罗瓦义愤填膺，他写信质问科学院的权威们：“第一因为我叫伽罗瓦，第二因为我是大学生……而预先就断定我对这个问题无能为力．”鉴于伽罗瓦对科学院轻慢“小人物”的不满，科学院请他把论文再写一份．1831 年，伽罗瓦第三次将论文呈交科学院，这次是热心的泊松（S. D. Poisson，1781—1840）和拉克鲁瓦审查了这篇命运多舛的论文．经过半年之久的仔细审查，两人仍然是莫名其妙，得出了“完全无法理解”的结论．他们在给科学院的报告中写道：“我们已经尽了最大努力来研究伽罗瓦的证明，他的推理显得不很清楚，迄今为止，因为我们尚未找到有说服力的证据，无法对它作出正确评价．因此，在本报告中我们甚至不能给出他的证明思想．”这篇具有创新和超时代思想的不朽论文就这样被打入了冷宫．

好在伽罗瓦于 1830 年在著名的数学杂志《数学科学通报》上先后两次发表了三篇论文，其中第一篇论文题目为“关于方程代数解法论文的分析”．柯西和泊松也在这个杂志

发表论文，这说明伽罗瓦在数学界已经赢得声誉.

1829 年，伽罗瓦再次参加巴黎综合工科学校的入学考试，由于他拒绝采用主考官建议的解题方法，结果仍是名落孙山. 无奈之下，他只好报考了高等师范学院，并在 10 月被录取. 正当年轻的伽罗瓦有机会大展宏图做出卓越贡献的时候，法国历史上有名的“七月革命”（1830 年）爆发了. 轰轰烈烈的革命狂潮激发了伽罗瓦这个勇敢追求真理的共和主义战士的斗志. 他反对学校的苛刻校规，批评校长在“七月革命”期间的两面派行为. 为此，伽罗瓦惹恼了学校当局，最后被开除学籍.

但是，伽罗瓦并没有退缩，他继续投身政治活动. 1831 年 7 月 14 日，伽罗瓦因率众上街游行示威而被捕. 在监狱中，伽罗瓦仍然顽强地进行数学研究，一面修改他关于方程论的论文及其他数学工作，一面为将要出版的著作撰写序言.

次年 5 月 30 日，伽罗瓦不幸英年早逝. 在去世的前一天晚上，伽罗瓦仍然奋笔疾书，总结他的学术思想，整理、概述他的数学工作. 希望有朝一日自己的研究成果能大白于天下.

伽罗瓦在写给共和主义者朋友的绝笔信的开头写道：“我在解析学中，创造出了许多新成果……我想把这些没有解决的问题全部解决，展现在人们面前……”

2. 伽罗瓦的群论

伽罗瓦最主要的贡献是提出了“群”（group）的概念，用群论彻底解决了代数方程可解性的问题. 为了纪念他，把用群论的方法研究代数方程公式解的理论称为伽罗瓦理论，它已成为近世代数的最有生命力的理论.

伽罗瓦提出的“群”是近代数学中最重要的概念之一，它不仅对数学的许多分支有深远的影响，而且在近代物理、化学中也有许多重要应用. 群的概念经过进一步严格化，发展成为一般的抽象定义：

设 G 是一个集合，集合内的元素之间定义一个二元运算 $*$. 如果 G 满足如下的四条性质：

i（封闭性）集合中任意两个元素的积仍属于该集合；

ii（结合性）运算满足结合律，即 $(a*b)*c=a*(b*c)$；

iii（存在单位元）集合中存在单位元 e，对集合中任意元素 a 满足 $e*a=a*e=a$；

iv（存在逆元）对集合中任一元素 a，存在唯一元素 a^{-1}，使得 $a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$，

则 G 连同它的运算 $*$ 称为一个群，记作 $(G,\ *)$.

按照群的定义可以判断，整数集连同数的加法构成一个群，其中单位元是零，每个整数 a 都有逆元 $-a$；去掉零的实数集连同数的乘法也是一个群，其中单位元是 1，每个实数 a 都有逆元 $\frac{1}{a}$.

其实群是一种数学结构，除了在数学中，日常生活中也会遇到，如：

由四个动作构成的集合 $G=\{$向右转 R，向左转 L，向后转 H，不动 $I\}$，若以接连动作 $*$ 表示两种动作的运算关系，则 $(G,\ *)$ 是群，I 是单位元，$L^{-1}=R$，$R^{-1}=L$，

$H^{-1}=H$.

所以集合 G 里的元素并不一定是数字，这里所定义的运算也未必是加、减、乘、除.

伽罗瓦不仅研究具体的数学问题，而且研究能概括这些具体成果并决定数学长期发展及人们思维方式转变的新理论——群论，由此还发展出域（field）论. 德国大数学家希尔伯特曾把伽罗瓦的理论称为“一个明确的概念结构的建立”. 这种理论，对于代数学、化学的发展，甚至对 20 世纪结构主义哲学都产生了巨大影响. 正如贝尔（E. T. Bell）所说：“无论在什么地方，只要应用群论，从一切纷乱混淆中立刻结晶出简洁与和谐，群的概念是近代科学思想的出色的新工具之一.”

伽罗瓦的奠基工作及其群论思想充满了理性思维和开创精神，他的思想太深奥、太超前了，因而未能得到他同时代人的充分理解. 伽罗瓦去世十几年之后，有些杂志陆续出版了他的部分文章. 到 1870 年，法国数学家若尔当（M. E. C. Jordan，1838—1921）出版了《置换和代数方程专论》一书，全面介绍了伽罗瓦的理论. 从此，群论和伽罗瓦的全部工作终于像金子一样大放异彩，真正被归入数学的主流.

在伽罗瓦提出群论，解决了代数方程求解问题之后，人们赫然发现，使用伽罗瓦群这个强有力的工具，萦绕人们心头的、两千多年悬而未决的古希腊三大几何问题竟然也可以迎刃而解.

四　古希腊三大几何问题的解决

我们知道，雅典素有民主的传统，所以政治清明，经济繁荣，学术自由，百家争鸣，创造了灿烂的古代文明. 当时出现了许多学派，巧辩学派就是其中之一，该学派的数学研究中心是如下的三大几何问题：

I. 化圆为方，即求作一个正方形与给定的圆面积相等.

II. 三等分角，即把任意角分成三等份.

III. 倍立方，即求作一个正方体，使其体积是已知正方体体积的两倍.

这些问题的难度在于，作图只能用直尺和圆规. 在数学史上很难找到其他问题能像这三个问题那样具有经久不衰的魅力.

1. 三大几何问题的由来

圆和正方形都是最常见的几何图形，很自然地会想到可否作一个正方形与已知的圆面积相等，这就是化圆为方的问题. 它相当于用尺规作出 π 的值. 用尺规二等分角是轻而易举的，提出三等分角也是顺理成章的事. 对于一些特殊的角，如 90°，120°，180°，三等分并不难，那么是否所有的角都可三等分呢？如果 60°的角也能三等分，那么正九边形就能作出，相应的正十八边形自然能作出. 在历史上，三等分角问题就是由求作正多边形这一类问题引起的.

倍立方问题的起源涉及到一些古老的传说. 埃拉托塞尼在他的《柏拉图》一书中曾记

载了一个古希腊神话：有一年，鼠疫袭击了提洛岛，一个先知说已经得到神谕，必须将正方体祭坛的体积加倍，灾难方可停息．但建筑师们不知道如何加倍，于是去请教哲学家柏拉图．柏拉图对他们说："神的真正意图并非在于祭坛加倍，而是想使希腊人为忽视几何学而羞愧．"

此外，埃拉托塞尼还记载了古代一位诗人所讲述的故事，说克里特的米诺斯（Minos）王为格劳科斯修造坟墓，他嫌建造的坟墓太小，命令将其扩大一倍，并说只要将每边扩大一倍即可．埃拉托塞尼指出这种做法当然是错误的．

此类问题激发了整个古希腊时代数学家的研究兴趣．由于古希腊人限制了作图工具，因此这些问题变得难以解决并富有理论魅力．

2. 解决三大几何问题的早期努力

最早研究化圆为方问题的是安纳萨哥拉斯（Anaxagoras，约公元前 500—前 428），但具体细节不详．公元前 5 世纪下半叶开奥斯（Chios）地方的希波克拉底（Hippocrates）解决了与化圆为方有关的化月牙形为方．如图 7-1，设以 O 为圆心的大圆直径为 1，则直角弧$\overset{\frown}{AB}$所对的弦 AB 长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，以 AB 为直径的小圆的面积应为大圆面积的一半．特别地，以 AB 为直径的半圆面积等于 AO 与 BO 所夹四分之一大圆的面积．由此可知：大圆之外、小圆之内的月牙形区域的面积等于$\triangle AOB$ 的面积．这说明由圆弧围成的区域的面积可以与一个正方形的面积相等．这一结果朝解决化圆为方的目标迈进了一步．希波克拉底证明了一系列特殊月牙形的化圆为方．但每次都利用了两个圆的相减，对于单个圆的化圆为方，最终并未解决．

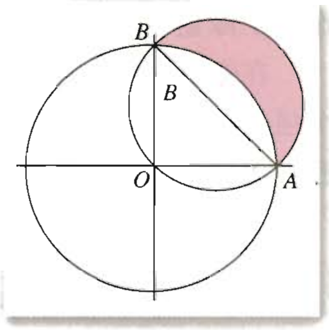


图 7-1

值得一提的是巧辩学派的代表人物安蒂丰，他首先提出用圆的内接正多边形逼近圆面积的方法来化圆为方．亚里士多德的《物理学》记载，安蒂丰从圆的内接正方形（或三角形）出发，将边数逐步加倍到正八边形，正十六边形……无限重复这个过程，随着圆面积的逐渐"穷竭"，将得到一个边长极微小的圆内接正多边形．安蒂丰认为这个内接正多边形将与圆重合．既然我们能作出一个等于任何已知多边形的正方形，那么事实上我们就能够作出等于一个圆的正方形．这种推理当然没有真正解决化圆为方问题，但安蒂丰却无心插柳柳成荫，提出了求圆面积近似值的方法，成为古希腊穷竭法的始祖，为阿基米德计算圆周率提供了先导．

关于倍立方问题，一个关键的进展是希波克拉底对这一问题的简化．希波克拉底指出，倍立方问题可以转化为求一线段与它的二倍长线段之间的双重比例中项问题：

$$a:x=x:y=y:2a,$$

这样求出的满足 $x^3=2a^3$ 的 x 即为倍立方的解．但是希波克拉底还是没能从几何上作出这样的比例中项线段．

比希波克拉底稍晚，有一些希腊数学家借助某些特殊曲线作出了可作为倍立方问题解

图 7-2　圆锥曲线

的比例中项线段，其中最重大的成就是柏拉图学派的门奈赫莫斯（Menaechmus，公元前4世纪中叶）为解决倍立方问题而发现了圆锥曲线．事实上，上述的比例中项关系等价于方程

$$x^2=ay,\ y^2=2ax,\ xy=2a^2.$$

因此，量 x，y 应为两条抛物线的交点或一条抛物线与一条双曲线的交点的坐标．当然，当时门奈赫莫斯还没有抛物线、双曲线的名称，更不知道坐标概念为何物，但他确实使用了圆锥曲线的交点来解决倍立方问题．他引进圆锥曲线的方法是：用垂直于圆锥面一母线的平面与锥面相截，当圆锥的顶角为直角、锐角与钝角时，就得到后来所称的抛物线、椭圆和双曲线．现在，人们通常用一个垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，当改变平面与圆锥轴线的夹角时，就得到如图 7-2 所示的圆锥曲线．

此外，为了解决三大几何问题，古希腊人还利用多种其他曲线．比如，巧辩学派的希比亚斯（Hippias，约公元前 400 年）为了等分任意角而发明了“割圆曲线”等等．尽管不时有人宣称解决了三大几何问题，但所有的解答无一例外都没有严格遵守尺规作图的限制．

3. 三大几何问题的最后解决

2 000 多年来，三大几何问题因其独特的魅力吸引了无数数学家投入其中，百折不挠，虽屡战屡败仍前赴后继．古希腊人的巧思，阿拉伯人的学识，西方文艺复兴时期大师们的睿智，都曾倾注于此，但最终还是没有解决．

不是因为这些数学家不够聪明，也不是因为他们不够睿智，实在是因为当时的条件还不成熟．就像再锋利的刀也削不到自己的柄一样，一个学科的问题，往往需要借助其他学科的知识才能解决．笛卡儿的解析几何创立之后，尺规作图的可能性才有了准则．这样，许多几何问题就可以转化为代数问题来研究．因为用圆规、直尺作图的每一步都需要找一个交点，这个点或者是属于两条直线的，或者是一条直线和一个圆的．由于引进了解析几何，人们认识到，用代数术语说，这样的步骤就意味着同时求解两个线性方程，或一个线性和一个二次方程，或两个二次方程．

到 19 世纪中叶，由于新的数学工具的应用，数学家终于明白三大几何问题实际上是不可解的．首先取得突破的是法国数学家旺策尔（P. L. Wantzel，1814—1848），他在 1837 年给出了三等分任意角及倍立方不可能用尺规作图的严格证明．1882 年，德国数学家林德曼（C. L. F. Lindemann，1852—1939）证明了 π 的超越性，所谓超越性就是说 π 不可能是任何整系数代数方程的根．化圆为方的不可能性也得以证明．

在伽罗瓦建立群论之后，人们发现，除了化圆为方，把伽罗瓦理论应用到另两个问题时也非常奏效．化圆为方与另两个问题性质不同，它涉及到一个超越数 π．与旺策尔的证明相比，伽罗瓦的理论更具一般性：不仅完全回答了哪些方程可以用代数运算求解，而且

给出了一个一般的判别法来判定几何图形是否可以用直尺和圆规来作图.

思考题

1. 你对群的思想有哪些认识？
2. 什么是古希腊三大几何作图问题？它们与高次方程公式可解性有怎样的联系？

第八讲 对无穷的深入思考——康托尔的集合论

全体自然数❶与它们的平方数，哪个多哪个少？这是意大利著名科学家伽利略在 1638 年提出的一个问题.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots \end{array}$$

❶ 当时的自然数集合指的是正整数集合，现在规定 0 也属于自然数集.

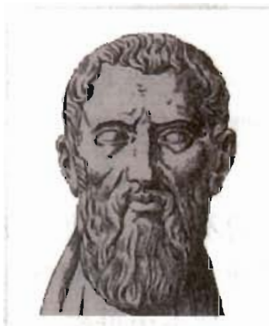
就人们的常识来说，自然数的平方仍是自然数，这样自然数平方的集合 N_1 应该是自然数集的一个真子集，所以自然数集中元素的个数应该多于集合 N_1 中元素的个数. 但是从另一个角度讲，不管自然数还是自然数的平方数都是无穷个，它们的个数应该是相同的，或者两者根本就是不可比的.

伽利略本人对这个问题困惑不解，同时代的其他科学家也甚为迷惘，不知道如何作答，因为不管如何回答都会自相矛盾. 后来人们把这个问题称为伽利略悖论. 所谓“悖论”就是自相矛盾的命题. 谁能料想，正是从解决类似的“悖论”出发，200 多年后诞生了一门成为整个数学基础的学科——集合论.

一　古代的无穷观念

如果让我们比较一下 {1，2，3，4，5，6} 和 {1，2，3，4，5，6，7} 哪个集合中的元素多，很显然我们的答案是第二个. 这两个集合的元素都是有限（或有穷）个，可以一个个地数出来，对有限集合的元素个数进行比较的问题，人们解决起来可谓轻车熟路.

可是伽利略提出的问题中却涉及到两个这样的集合：{1，2，3，4，5，6，…} 和 {1，4，9，16，25，36，…}. 它们的元素有无数个，这样的集合称为无穷集合（infinite set），显然无法知道其元素的确切个数. 所以当面对与无穷有关的问题时，人们有些无能为力.



芝诺像

其实，早在古希腊时代，无穷集合就已经引起数学家和哲学家的注意了. 其中，芝诺（Zeno of Elea，约公元前 490—前 430）提出的悖论可能是与无穷有关的最早记录，下面是其中的两个：

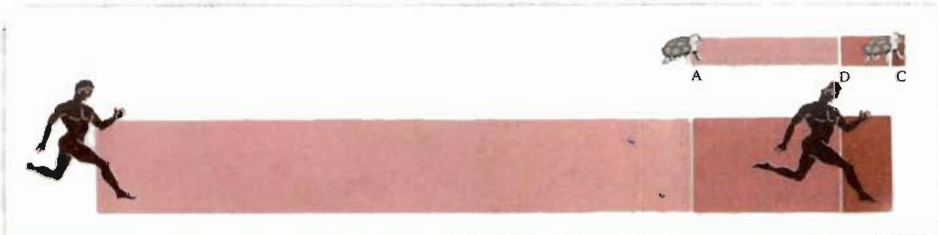
二分说

一个物体从 A 地到 B 地，永远不能到达. 因为欲从 A 到 B，必先通过道路的二分之一；但要通过二分之一必先通过二分之一的

二分之一，即全程的四分之一；欲通过四分之一必先通过八分之一，这样分下去，永无止境．由此芝诺得出结论，此物根本不能运动，因为它被道路的无限分割阻碍着．

阿基里斯追龟说

阿基里斯（Achilles）是荷马史诗《伊利亚特》中的英雄，以擅跑闻名．芝诺说阿基里斯永远追不上乌龟．比如，龟在阿基里斯前面的 100 码，阿基里斯的速度是龟的十倍．当阿基里斯跑到龟的出发点时，龟已前进 10 码；阿基里斯再追 10 码，龟又前进了1 码；再追 1 码，龟又前进了十分之一码，这样永远隔着一段距离，总也追不上．



阿基里斯追龟

芝诺的这些悖论是亚里士多德作为批判的对象记录下来的，芝诺提出这些悖论的目的是什么不得而知．毕竟，他把数学中的重大问题以悖论的形式揭露出来，迫使人们去思考，对数学的发展起到了毋庸置疑的影响．

亚里士多德本人也考虑过无穷集合．例如整数集合，但他不承认一个无穷集合可以作为固定的整体而存在．对他来说，集合只能是潜无穷（potentially infinite）而不可能是实无穷（actual infinite）．

为欧几里得的《原本》作过注释的古希腊数学家普罗克洛斯（Proclus，410—485）注意到这样一个现象：圆的一根直径把圆分成两半，由于直径有无穷多个，所以必有直径个数两倍那么多的半圆．普罗克洛斯说，这在许多人看来是一个矛盾．但他用如下的方法解决这个矛盾：任何人只能说很大很大数目的直径或半圆，不能说一个实实在在无穷多的直径或半圆．换言之，普罗克洛斯也是接受亚里士多德的潜无穷而不接受实无穷．这样就回避了两倍无穷大等于一个无穷大的问题．

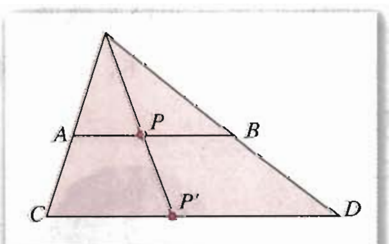


图 8-1

在古代中国很早就有无穷的观念，比如“苦海无边”“学海无涯”，以及《庄子·天下篇》中的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，都蕴涵着无穷的观念．

伽利略在他的《两门新科学》中注意到：两个不等长的线段 AB 与 CD 上的点可以构成一一对应（见图8-1），从而可以想象它们含有同样多的点．加之他注意到前面的正整数可以和它的平方数构成一一对应，这就会导致无穷大的不同的“数量级”．伽利略说这是不可能的：所有的无穷大量都一样，不能比较大小．他确实与无穷集合作过斗争，但却因为它们不可理喻而放弃了．

整个中世纪，关于是否有实实在在无穷多个元素的集合这个问题，哲学家们仍然是各执一辞，众说纷纭．当时人们已经注意到这样的事实：把两个同心圆上的点用公共半径连

起来，就构成两个圆上的点之间的一一对应关系，但大圆的周长却比小圆的长，人们对这样的问题无法解释.

甚至德国哲学家康德（Kant，1724—1804）也被无穷困扰过，他说："无穷像一个梦，一个人永远看不出前面还有多少路要走，看不到尽头，尽头是摔了一跤或者晕倒下去. 但是，尽管摔了一跤或者晕倒下去，也不可能达到无穷的尽头."

在古代，一方面由于人们的认识有限，没有深层次认识无穷的能力，另一方面人类知识体系本身发展还处于开始阶段，对正确的无穷观念的需求尚不强烈，所以人们把"无穷"看成神秘的、不可捉摸的东西，总是抱着回避态度，不敢深究，无穷成为数学家们敬而远之的"禁区".

如果从芝诺时代算起，扑朔迷离的无穷问题困扰了数学家两千多年. 即使到了微积分创立的时候，无穷仍旧是一个棘手的难题，这时人们仍然采取回避的态度，这是因为，当时的数学知识对于建立古典的数学分析足够了.

但是，微积分的创立却成为解决无穷问题的催化剂，因为微积分本身是不严密的，人们在为微积分寻找严密基础时发现，数学本身的严密化也是个问题. 正是在这样的情况下，关于无穷集合的许多问题就再也无法回避了. 19 世纪末，一位年轻的德国数学家用无与伦比的超人智慧拨去笼罩在无穷集合上的重重迷雾，终于使人们看清了"无穷"的真面目，他就是建立"无穷集合论"的德国数学家康托尔（G. Cantor，1845—1918）.

二　无穷集合论的创立

1. 建立集合理论的最早尝试

早在康托尔之前，捷克数学家波尔查诺（B. Bolzano，1781—1848）就已经为建立集合理论做出了努力. 在波尔查诺去世三年后，他的遗作《无穷悖论》一书出版. 该著作表明，他是第一个向着建立集合明确理论的方向采取积极步骤的人. 波尔查诺支持实无穷集合的存在，并且强调了两个集合等价的概念，这就是后来所说的两个集合元素之间的一一对应关系. 这个等价概念，适用于有限集合，同样也适用于无穷集合. 他注意到无穷集合的一部分或子集可以等价于整体，他坚持必须接受这个事实. 他举出了这样的例子：0 到 5 之间的实数通过公式 $y=\frac{12x}{5}$，可以与 0 到 12 之间的实数构成一一对应，虽然第二个集合包含了第一个集合. 波尔查诺还指出，对于无穷集合，可以指定一种数叫超限数，使不同的无穷集合有不同的超限数，这样就使得无穷集合也可以比较元素的多少. 不过，根据后来康托尔的理论，波尔查诺关于超限数的指定是不正确的.

2. 康托尔的集合论思想

康托尔的集合论思想分散在许多文章中，这些文章从 1874 年开始分别发表在《克雷尔数学杂志》和《数学年鉴》上. 下面我们简要地介绍一下他的思想.

康托尔给出了集合论中的一系列概念，首先是集合（set）概念，他称集合为一些确定的、不同的东西的总体（collection），这些东西人们能意识到，并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体．康托尔指出，那些认为只有潜无穷集合的人是错误的，如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应，它就是无穷的．虽然康托尔考虑的主要是直线上的点集或实数集合，但他却把提出的集合论概念推广到了 n 维欧几里得空间的点集．

康托尔接着寻求像“大小”这样的概念来区分无穷集合，认为一一对应关系是基本的原则．两个元素能够一一对应的集合，称为是等价的或具有相同的“势”（power），后来“势”这个名词改成了“基数”（cardinal number）．两个集合可以有不同的势，如果在 M 与 N 两个集合中，N 能与 M 的一个子集构成一一对应，而 M 不可能与 N 的任何子集构成一一对应，就说 M 的势大于 N 的势．“势”的概念当然可以应用于有限集合，如果两个有限集合的元素个数相同，就可以说它们是等价的或等势的．

自然数集是数学家最钟爱的集合，所以康托尔用数集来阐明他关于等价或势的概念．他引进了“可数”（enumerable）这个词，对于凡是能和自然数集构成一一对应的任何一个集合都称为可数或可列集合，并且是最小的无穷集合．

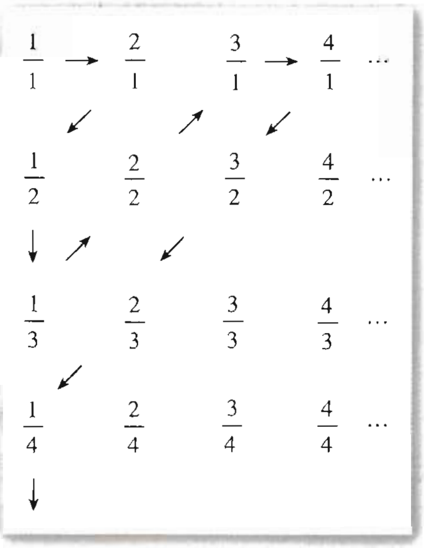


图 8-2

首先，康托尔证明了全体有理数集合是可数的．这与直觉有很大出入，因为有理数是“稠密的”，即在任何两个不同的有理数之间都存在另一个有理数（事实上有无穷个），而正整数却不是．对于这个结论，康托尔曾给出两个证明，其中第二个证明是现在普遍采用的：

把正有理数排列成如图 8-2 形式的阵列．其中，第一行依大小次序包括所有以 1 为分母的正分数，即全体正整数；第二行依大小次序包括所有以 2 为分母的正分数；第三行依大小次序包括所有以 3 为分母的正分数……显然，每个正有理数都出现在这个阵列中．必须注意的是，其中有些有理数是重复出现的．现在我们从 $\frac{1}{1}$ 开始，按照箭头所示的方向依次指定 1 对应 $\frac{1}{1}$，2 对应 $\frac{2}{1}$，3 对应 $\frac{1}{2}$，4 对应 $\frac{1}{3}$……每一个有理数必将在某一步对应于一个被指定的有限的自然数．于是，上面列出的有理数集合与自然数集合构成一一对应．把重复的去掉后，这个有理数集合仍然是一个无穷集合．从而必然是可数的，因为可数集合是最小的无穷集合．这个事实表明，我们不能过分相信直觉．

按照康托尔的这个理论可以推知很多结果：自然数与其平方数一样多，偶数与自然数一样多，负整数与整数一样多，等等．其实它们都是可数的．更令人震惊的是，康托尔证明了，所有代数数（即可以成为代数方程的解的数）构成的集合也是可数的．1873 年，在和自己的好友德国数学家戴德金（J. W. R Dedekind，1831—1916）的一次通信中，康托尔提出了这样一个问题：实数集合是否能和自然数集合构成一一对应．几个星期之后，他自己用巧妙的方法证明了：实数集合不能和自然数集合构成一一对应，也就是说实数集合是

不可数的.

康托尔关于实数不可数的发现，是为建立无穷集合论而迈出的真正有意义的一步. 此后，他开始考虑这样的问题：在自然数和实数两个不同的无穷集合之外，是否还有更大的无穷.

1874 年，康托尔考虑一条直线上的点和整个 n 维空间内的点的对应关系，并试图证明这两个集合不可能构成一一对应关系. 经过三年多的努力，他出乎意料地发现，一条直线上的点与一个平面上的点构成一一对应；一条直线上的点与空间中的点也构成一一对应. 他写信给戴德金说："我看到了它，但我简直不能相信它."

按照康托尔的这个观点，可以推得许多看似"荒谬绝伦"的结论：有限线段上的点与无限直线上的点一样多；一米长的线段上的点与地球表面上的点一样多❶；地球表面上的点与地球内部的点"一样多"；两个球内的点与其中一个球内的点也"一样多"；等等. 而伽利略的那个 $1=2$ 的矛盾就可以解释为：线段 CD 上的点与线段 AB 上的点"一样多". 他明确指出：实数比有理数多，无理数比有理数多，在数轴上，有理数点与无理数点相比少得几乎可以忽略不计，等等.

❶ 举例来说，当 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\tan\alpha\in(-\infty,\ \infty)$，说明 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $(-\infty,\ \infty)$ 上的点一样多.

康托尔的集合论揭开了笼罩在无穷上的神秘面纱，终于使隐藏在无穷后面的千古之迷水落石出. 康托尔认为，数学理论必须肯定无穷是确实存在的，但是不能把有限所具有的性质强加于无穷，同时康托尔还认为，尽管人类的认识能力有限，但是有限的认识能力却可以认识无穷.

康托尔从数学上严格证明了"无穷"也是有差别的，并非所有的无穷集合都有相同的大小，而且无穷的大小也是可以比较的. 最令人不可思议的结果是，无穷集合的整体可以与自身的部分一一对应，这就打破了统治数学界 2 000 多年的欧几里得的金科玉律"部分少于整体". 在无穷的世界里，康托尔推翻了欧几里得在有限范围内这条天经地义，颠扑不破的真理.

3. 不朽的康托尔

康托尔出生在俄国圣彼得堡，11 岁时移居德国的法兰克福. 他对数学表现出强烈兴趣和非凡天才，数学成了他的终身事业.

康托尔像

15 岁那年，在外读书的康托尔收到父亲的一封书信，信中写到："你的父亲，或者说你的父母以及在俄国、德国、丹麦的其他家人都在注视着你，希望你将来成为科学地平线上升起的一颗明星."这封信成为他一生勤奋学习，刻苦钻研的一个动力.

1862 年，康托尔考入苏黎士大学学工，翌年转入柏林大学攻读神学和数学，师从库默尔（E. E. Kummer，1810—1893）、魏尔斯特拉斯和克罗内克（L. Kronecker，1823—1891）等著名数学家，三年后获得博士学位.

1869 年，康托尔开始了在哈雷大学的任教生涯．他担任过柏林数学会主席（1864—1865），还组建了德国数学协会并担任第一任会长．此外，康托尔还高瞻远瞩地意识到各国数学家之间交流的重要性，曾致力于国际数学家大会的筹建工作．这一切说明，康托尔不但有超群的数学智慧，而且具有非凡的远见卓识和优秀的组织才能．

康托尔最初的工作重点放在数论方面，博士毕业后，在魏尔斯特拉斯的直接影响下，他的注意力转向严格的分析理论研究，不久便崭露头角．集合论的创立是数学史上的大事，也是康托尔对数学的最伟大贡献．

在 19 世纪，集合对数学家们来说是非常熟悉的数学概念．但是人们通常所研究的都是有限集合．虽然神秘的无穷集合问题两千年来一直有人不断提及但对其进行深入的研究却一直没能提到议事日程上来．到康托尔时代，由于数学本身的发展，无穷集合的问题已经成为数学前进道路上的拦路虎，彻底解决无穷集合问题已经成为数学家们再也无法回避的历史任务．康托尔以史无前例的大无畏精神勇敢地接受挑战，并最终取得成功．1874 年，29 岁的康托尔在《克雷尔数学杂志》上发表了论文“关于一切代数实数的一个性质”．这是他关于无穷集合论的第一篇革命性论文，它的发表标志着集合论的诞生，康托尔的集合论思想开始广为人知，闻名遐迩．而他的这篇具有历史意义的论文，也曾使《克雷尔数学杂志》的编辑产生怀疑，迟迟不敢发表．但为了探讨真理，有胆识的编辑还是将它公布于世．

康托尔的无穷集合理论给数学的发展带来了一场革命．然而由于康托尔的理论超越直观，虽然解决了许多长期悬而未决的问题，但也颠倒了许多前人根深蒂固的想法，因此很难被人立即接受．他的许多结论，如有理数与实数相比是微不足道的，部分可以等于整体，无穷本身也是有大小的，等等，都令当时许多数学家甚至是最具权威性的大数学家们无法接受．

康托尔本人也承认他的理论违背了传统，他说：“我十分清楚，在采取这样一步后，我把自己放到了关于无穷大的流行观点以及关于数的性质的公认意见的对立面去了．”但是，他坚信自己的研究是数学向前发展的必然结果，因此，他说：“我希望在这样的情况下，把一些看起来奇怪的思想引进我的论证中是可以理解的，或者，如果必要的话，是可以谅解的．”

然而，康托尔的创新精神没能得到世人的理解与支持，集合理论一问世，各种诽谤、嘲讽和责难便纷至沓来．几何学家克莱因（C. F. Klein，1849—1925）对康托尔的思想大加鞭笞毫不留情，数学家外尔（H. Weyle，1885—1955）称康托尔的集合论是“雾中之雾”，法国数学家庞加莱（H. Poincare，1854—1912）称集合论是“病态数学”．要知道，这些都是当时世界数学界叱咤风云的人物．在康托尔的众多反对者中，还包括他的老师克罗内克（L. Kronecker，1823—1891）．

后来，康托尔由于用脑过度和不被理解，再加上家庭生活的经济压力，于 1884 年患上抑郁症，最终导致精神失常并被送进医院．但病情一好转，他便立即投入到集合论的研究中，并充满信心地说：“我的理论坚如磐石，任何想要动摇它的人都将搬起石头砸自己的脚．”1918 年，康托尔带着诸多遗憾和无限的苦闷离开了人世．

尽管康托尔的集合理论在当时没能获得世人的理解与支持，而且遭受了一批人的责难

与攻击，但也有一些有远见的数学家，如戴德金和魏尔斯特拉斯等，看到了康托尔集合论中蕴涵的智慧之光. 瑞典数学家米塔—列夫勒（M. G. Mittag-Leffler，1846—1927）在自己创办的国际性数学杂志《数学学报》上，把康托尔的论文翻译成法文在国际上传播.

康托尔集合论的最忠实的信徒和最强有力的捍卫者是德国大数学家希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943），他把康托尔的开拓性的无穷集合理论比喻为数学的一个乐园，他呼吁“没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园中开除出去”. 他赞扬康托尔的超限算数理论为“数学思想最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”，“数学精神最令人惊羡的花朵，人类智慧活动最漂亮的成果”.

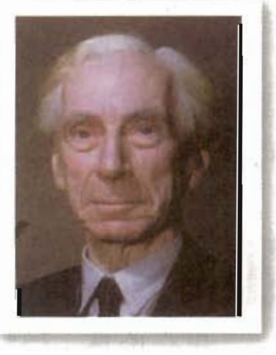
真理的光辉终究会大放异彩. 在许多数学家的努力下，康托尔的集合论思想逐渐被越来越多的人所接受，并终于成为数学发展道路上的一座里程碑，甚至可以说引起了人类思维的一次革命. 现在，集合论已经成为一门独立的数学分支，并且成为整个数学的理论基石.

三 集合论的进一步发展与完善

进入 20 世纪，集合论已经得到人们的普遍接受，并成为全部数学的基础. 英国的逻辑学家罗素（B. A. W. Russell，1872—1970）曾对集合论大加赞赏，把康托尔的工作描述为“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”. 不过，罗素发现集合论并不完善.

1. 罗素悖论

1902 年，罗素提出了一个悖论：设 $R=\{x \mid x \notin x\}$，那么 $R \in R$ 的充要条件就是 $R \notin R$.



罗素像

这个悖论如何解释呢？通俗来说，就是：所有的集合分成两类，一类称为非常集，这种集合的自身也是该集合的一个元素. 例如，“一切集合所组成的集合”当然是自身的元素，因为它也是一个集合. 另一类集合称为正常集，其本身不是它的一个元素. 例如“有理数集”，它本身不是有理数，所以有理数集合不是有理数集的一个元素. 按照排中律，任意一个集合，它不是正常集就是非常集，不会出现第三种情况.

如果 S 是一切正常集的集合，则 S 属于哪一类？假设 S 是非常集，则 S 为其自身的一个元素，而由 S 的定义，S 的每一个元素都是正常集，所以 S 是正常集. 假定 S 是正常集，而一切正常集都已包含在 S 之中了，所以 S 一定包含在 S 中，则按定义 S 是非常集. 这样不管从哪个假定出发都会推出矛盾的结果，这就是一个悖论.

其实，早在 1895 年，康托尔就发现过一个悖论：任意集合的所有子集构成的集合（即幂集）的元素个数大于原来集合的元素个数（康托尔定理）. 按此推理，康托尔考虑“所有集合构成的集合”的元素个数. 这个集合是最大的集合，因为任何集合都只能与它

的一个子集对等，所以它具有最大的基数，但按康托尔定理，它的所有子集构成的集合，应该具有更大的基数．这又是一个悖论．

康托尔发现的悖论虽然使人们感到震惊，但它们似乎仅涉及到集合论中一些技术性问题，人们认为只要作一些适当的技术改正，集合论仍不失为数学的基础．但是，罗素的悖论却动摇了集合论，从而震撼了当时的数学基础．因为罗素的悖论只涉及到几个最基本的集合论概念．它的提出说明集合论本质上是包含矛盾的，因此以集合论为基础的数学体系就不可能是完美无缺的．同时，这个悖论也揭示了数学中所采用的逻辑也是有问题的，这使当时的数学界和逻辑学界同时感到问题的严重性，这就是数学史上的第三次危机．

1919 年，罗素为他的悖论发表了一个通俗版，更使悖论成为一种众所周知的逻辑问题，这就是著名的“理发师悖论”：

村里有一个理发师，他为自己立了一条规矩：他只给村里不给自己刮脸的人刮脸．那么，按照这条店规，他该不该给自己刮脸？如果他不给自己刮脸，那么，他属于“不给自己刮脸”的那一类村民，按规定，他应该给自己刮脸；如果他给自己刮脸，那么他属于“给自己刮脸”的那一类村民，按规定，他不应给自己刮脸．

这个悖论涉及的“技术性”更少，几乎只涉及康托尔构造集合的原则——概括原则：具有某种性质的元素可以构成一个集合．

罗素悖论使整个数学大厦动摇了．无怪乎德国数学家弗雷格（F. L. G. Frege，1848--1925）在收到罗素的信之后，在他即将出版的《算术基本规律》第 2 卷末尾写道：“一位科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之时，它的基础却垮掉了，当本书等待印出的时候，罗素先生的一封信把我置于这种尴尬的境地．”

实际上，这些悖论与一个古老的逻辑悖论——说谎者悖论，有同样的构成．这个悖论可以说是所有逻辑悖论的始祖，但却有着最简单的形式：

我说的这句话是谎话．

这句话是真话还是假话？说它是真话，则它是假话；说它是假话，则它是真话．逻辑学中的二值原理表明：一个命题非真即假，或两个互相矛盾的命题不可能同时为真，也不可能同时为假．但是按照二值原理却无法判断说谎者悖论的真假．

2. 消除悖论的初步成功

集合论是一切数学的基础．首先，多数数学理论的表述体系中都是以“集合”作为第一个或称初始概念，其他概念都是在集合的基础上定义的；此外，在数学证明中，人们通常把集合论的若干结果，如定理、公理，尤其是概括原则等作为自己证明的前提．

由于集合论对数学有如此重要的基础意义，基础中出现问题必然引起整个数学大厦的动摇，因此人们对集合论中出现的矛盾是不能容忍的．事实上，发现集合论悖论的同时，人们就开始了与悖论的不懈斗争．

集合论的主要思想之一就是概括原则，正是由于这个原则，才在数学中引入了无穷．但是，人们很快发现，集合论中的这个概括原则却是悖论产生的主要症结．因为在数学定义中就应用了概括原则思想，即所规定的具有相应条件的集合是允许的．这样就不可避免

地要出现矛盾：一方面，使集合论中包含了“可以戳穿一切盾的矛”，即由任一个集合 S，都可以得到更大的集合，比如它的幂集，这种集合的扩展是没有限制的、无条件的；另一方面，又使集合论中包含了一个“可以抵挡一切矛的盾”，即在集合论中可以有一个包含一切集合的集合，即最大的集合．这种矛盾必然会出现在康托尔的集合论中．比如，那个最大的集合的幂集是否比那个最大的集合还要大？

综上可知，消除悖论的策略有两个：要么弃矛保盾，要么弃盾保矛．通常，人们会采取第二个策略，即对概括原则进行限制，不允许“所有集合的集合”这种可以抵挡一切的盾存在．在排除悖论的诸多努力中，比较成功的是通过对概括原则加以限制而产生的公理集合论．

1908 年，德国数学家策梅罗（E. F. F. Zermelo，1871—1953）首先提出了公理集合论的思想，方法是：对“集合”作一些必要的限制，排除诸如“所有集合的集合”那种过大的集合，从而排除矛盾．他提出了 7 条公理，构成一个集合必须满足这几个公理．后来经过许多人，特别是德国数学家弗兰克尔（A. Fraenkel，1891—1965）和挪威数学家斯科朗（T. Skolem，1887—1963）的修改和完善，成为比较严格的形式化公理体系．所以，改造后的公理集合论通常称为 ZF 系统或 ZFS（三人名字的首字母）系统．

ZF 系统的公理集合论可以为数学建立严格的基础，即 ZF 系统的无矛盾性保证了数学的无矛盾性．但是，ZF 系统自身的无矛盾性并没有得到证明，所以还不能保证它永远不会出现悖论．因此庞加莱形象地评论到：“为了防狼，羊群已经用篱笆圈起来，但却不知道圈内有没有狼．”

1931 年，年仅 25 岁的奥地利数学家哥德尔（K. Gödel，1906—1978）证明了后来所称的“哥德尔不完全性定理”．该定理表明：任何形式系统都不能完全刻画数学理论，总有某些问题从形式系统的公理出发不能解答．

在数学上，哥德尔不完全性定理是属于某种否定性的结果，但这个否定性结果揭示了形式化方法的不可避免的局限性，带来了 20 世纪数学基础研究的划时代变革．

首先，哥德尔不完全性定理破天荒地第一次分清了数学中“真”与“可证”是两个不同的概念．可证明的命题固然是真的，但真的命题却未必一定可证．这一切突破了人们对数学真理的传统理解，永远地改变了数学家们的真理观，使数学真理的认识走向了新高度．

思考题

1. 你能用自己的语言表述一下“可数”与“不可数”这两个概念吗？
2. 请构造一个图形，使有限长度线段上的点与无限长度直线上的点一一对应．

第九讲 中国现代数学的开拓与发展
——暨现代数学家小传

中国创造了灿烂的古代数学，当时的许多成果，如对正负数的认识、π 的计算、孙子定理、高次方程数值解法等在世界上都遥遥领先. 但令人遗憾的是，中国的古代数学从明代开始却未能续写往日的辉煌，而是逐渐黯然最终反被西方超过. 从明朝晚期（17 世纪初）到清朝末期（19 世纪末）的约 300 年时间，是中国传统数学缓慢发展和西方数学传入的过渡时期，在此期间出现了两次西学东渐的高潮.

第一次高潮是从 17 世纪初到 18 世纪初，标志性事件就是欧几里得《原本》前六卷的首次翻译. 但《原本》的翻译并未给中国的数学带来实质性的重大影响和改变，不能不说这是一件令人十分遗憾的事. 第二次高潮是从鸦片战争到辛亥革命，这一时期主要是翻译西方书籍.

西方数学在中国的早期传播，对中国现代数学的形成起了一定的作用，但由于中国当时整个社会环境与科学基础的制约，特别是“中学为体，西学为用”指导原则的桎梏，总的来说其功效并不显著. 到清朝末年，中国的数学水平已经落后世界 200 年以上.

直到 20 世纪初，在高涨的科学与民主的时代洪流中，一些中国数学家终于勇敢地踏上了学习并赶超西方先进数学的旅途，旅途虽然充满坎坷与艰辛，但却不能阻挡他们振兴祖国现代数学的拳拳之心.

一 中国现代数学发展概观

中国现代数学的真正开拓是在辛亥革命以后，一方面改革国内的数学教育，另一方面派遣留学生出国学习西方数学，这两条途径的较好结合强有力地推动了中国现代数学的奠基与发展. 迄今为止，中国的现代数学大致经历了两个发展时期，而两个时期的分水岭就是新中国的建立.

1. 奠基阶段

从民国初年到新中国诞生是中国现代数学所处的第一个发展阶段——奠基阶段.

早在 20 世纪初，就已经有一大批有志青年远涉重洋去国外留学，其中就有许多人专攻数学. 这些人中有 1904 年京师大学堂（北京大学前身，1918 年戊戌变法时建立，也是戊戌变法的唯一遗迹.）派赴日本的 31 名留学生之一的冯祖荀（1880—1940），就读于京都帝国大学. 冯祖荀回国后于 1912 年主持成立了我国第一个大学数学系——北京大学数

学系，他是迄今所知出国专攻数学最早的留学生之一.

稍后的还有郑之蕃和胡明复，他们分别于 1907 年和 1910 年先后赴美国康乃尔大学学习数学. 1917 年，胡明复获得哈佛大学博士学位，成为第一个获得博士学位的中国数学家.

辛亥革命后，更多年轻有为的热血青年怀着“科学救国”“教育救国”的远大理想走出国门学习数学，有的东渡日本，有的西赴欧美. 如熊庆来（1893—1969）三赴法国，陈建功（1893—1971）和苏步青（1902—2003）留学日本，华罗庚和许宝騄（1910—1970）先后出访英美. 这些爱国青年都没有被国外优越的工作环境和生活待遇所吸引，毕业后毅然回归祖国，为中国现代数学的发展贡献了自己毕生的精力.

许多数学家学成归国后，纷纷在各大学创办数学系，为发展中国现代高等数学教育立下了汗马功劳. 在这一时期，产生了一系列先进的数学成果，其中最具代表性的是华罗庚、陈省身和许宝騄的工作. 世界最负盛名的斯普林格出版社一共出版过 36 名数学家的选集，其中就包括上述三人.

经过老一辈数学家披荆斩棘的努力，20 世纪 30 年代开始，中国现代数学不仅拥有了一定水平的科研队伍，而且出现了全国性的学术组织和发表成果的数学杂志，中国的现代数学可以说初具规模，并呈上升之势，这种势头一直延续到 40 年代，即使在抗日战争的艰苦岁月中，也仍然坚持下来并有所发展. 不过，总体上来说，此时我国数学研究还限于经典数学范围，与当时世界数学的主流和前沿相比还有很大差距.

2. 发展时期

建国伊始，党和政府制定了许多发展科学事业，关心人才培养和使用的政策. 在新中国的召唤下，许多身在海外的中国科学家抛弃国外的优厚待遇和良好的工作条件，义无返顾地返回祖国. 1952 年，中国科学院数学研究所在数学家华罗庚的主持下成立，并陆续建立了许多数学学科的研究室，各大学的数学系也广泛开展了科研工作，并先后开始招收研究生.

老一辈的数学家成为学科研究的带头人和辛勤的教育家，他们从无到有开创了我国现代数学许多新的分支和研究方向，培养了大批数学人才，形成了一支生气勃勃的科研和教学队伍. 这一时期，我国在现代数学的某些领域（如函数论、数论、微分几何以及拓扑学等）不同程度地取得了一些显著成果，有些达到了国际水平.

在 1956 年国家评定的自然科学奖的获得者中，数学家占了大部分. 其中华罗庚和吴文俊获得了一等奖，苏步青获得二等奖. 由此可见数学在当时中国科学中的成就和地位. 建国后到文革前的这 17 年里，经过中国数学家们的共同努力，极大地缩小了我国数学水平与当时国际水平的差距，某些分支学科已经做出了相当出色的成就. 但就在数学家们雄心勃勃地准备大展宏图的时候，文化大革命开始了.

十年浩劫给中国带来了深重灾难，给祖国的科学和教育事业造成沉重打击，数学也不能幸免. 在文革的 10 年中，科研机构被取消，数学组织被解散，科研人员被下放，数学研究基本上处于停滞状态. 这使我国数学与国际数学业已缩小的差距又拉大了.

但令人欣慰的是，即使在文革的险恶环境中，一些数学家也没有停止自己的追求，仍然以振兴中国数学为己任，默默无闻地坚持数学研究，并取得了世界一流水平的成就. 其中尤

以陈景润在哥德巴赫猜想研究上做出的工作最为令人瞩目，且迄今无人超越．此外，华罗庚还致力于数学的实际应用，以他为代表的数学家们积极在全国各地推广“优选法”和“统筹法”等等．在那百业凋零的年代里，他们的工作像黑暗中火烛的光辉，显得尤其难能可贵．

文革结束后，迎来了科学的春天，数学发展也迎来了解放．1977 年，国家制定了新的数学发展规划，恢复了全国各地的数学组织，加强基础理论和应用数学的研究工作，中国数学进入了蓬勃的发展时期，新的成果不断涌现．我国从 1956 年到 1989 年一共颁发了四次自然科学奖，其中数学获奖数接近十分之一．

改革开放以后，中国数学迎来了前所未有的良好的发展机遇，国际交流不断，中国学者在国内外杂志上发表的论文空前增加，在国外出版的专著也稳步上升．特别是涌现了一批优秀的、活跃于世界数学前沿的青年数学家．与此同时，中国还设立了许多以数学家名字命名的数学奖，用以奖励那些投身数学、工作出色的数学家，对我国数学的发展起到了独特的促进作用．

ICM 2002 开幕式

1986 年，中国数学会成为国际数学联盟（IMU）的成员；2002 年，国际数学家大会（ICM）在中国的北京胜利召开．这一切都说明，中国数学取得的成就已经得到国际数学界的普遍认可．回顾历史，中国取得今天的数学成就，是几代不甘落后的中国数学家整整一个世纪艰苦奋斗、共同拼搏的结果．

尽管我国数学已经取得了举世瞩目的长足进步，不过总体来说，我国的数学水平与世界一流水平还有一定的差距．但是，我们一定不能妄自菲薄，我们一定会迎头赶上，正如几何大师陈省身所说：“要有信心，千万把自卑的心理放弃．要相信中国会产生许多国际一流的数学家，也没有理由说中国不能产生牛顿、高斯级的数学家．”我们坚信，“21 世纪数学大国”的宏伟目标一定会实现．

在中国现代数学的发展进程中，留下了许多数学家感人肺腑的动人事迹．他们高度的民族自强精神、卓越的科学创造能力以及身处逆境而百折不挠的坚强意志无不令后人铭记在心，永志不忘．

二 人民的数学家——华罗庚

华罗庚像

提起华罗庚的名字，在中国可谓家喻户晓，科学爱好者更是对他耳熟能详．他自学成才的故事曾鼓舞了无数有志青年勇攀科学高峰；他写的课外读物曾是中学生们打开数学殿堂的神奇钥匙；他曾为推广优选法与统筹法走遍祖国的大江南北；他培养的新一代数学家成为新中国数学事业的中流砥柱；他给我们留下了许多传奇故事．

1. 小荷才露尖尖角

华罗庚（1910—1985）出生在浙江省金坛县，他非常聪明，尤其喜欢数学. 一天老师出了一道数学题："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？""23！"老师的话音刚落，华罗庚的答案就脱口而出，老师连连点头称赞他的运算能力. 可当他从金坛中学初中毕业后，由于家境贫寒，未能进入高中继续学习. 经过努力，华罗庚考取了两年制的上海中华职业学校商科，不幸的是，华罗庚再次因为家贫仅差一个学期未能毕业.

辍学的华罗庚只好无限惋惜地回家充当"帐房先生"，帮助父亲打理小杂货店. 幸运的是，华罗庚的初中老师王维克对这名聪明好学，数学才能尤其出众的学生极为赏识，鼓励他继续学习数学. 这样，华罗庚在记帐之余，就沉浸在数学王国之中. 他到处托人借来一本《大代数》、一本《解析几何》和一本只有五十页的《微积分》. 他每天要花十几小时钻研数学，经常学习至深夜. 他还尝试着写些论文，投寄到《科学》、《学艺》等刊物上.

在华罗庚十八岁那年，他的初中老师王维克当上了金坛县初级中学的校长，王老师非常喜欢品学兼优的华罗庚，于是就请他到学校当会计兼事务. 就在这一年，华罗庚不幸罹患伤寒，卧床达半年之久，病愈后左腿留下残疾. 但他身残志坚，誓言："我要用健全的头脑，代替不健全的双腿！"

1919 年，华罗庚在《科学》上发表了他的第一篇论文"Sturm 氏定理之研究". 有一次，华罗庚借了一本名叫《学艺》的杂志，他发现其中苏家驹教授所写的"代数的五次方程式之解法"一文有误. 于是在王维克校长的鼓励下，写了一篇指出苏教授错误的论文"苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由"，并在上海的《科学》杂志上发表，那时华罗庚才十九岁. 然而，这只是他向数学高峰迈进的第一步！

2. 出类拔萃赴英伦

清华大学数学系主任熊庆来见到了华罗庚在《科学》杂志上发表的这篇论文，从文章中他看到了作者的数学才华，便问周围的人："是在哪国留学的？在哪所大学任教？"熊教授对一个自学青年能写出这样高水平的文章，感到十分震惊和欣赏，在知道他身残志坚时更是深受感动.

熊庆来是慧眼识英雄的"伯乐"，他主动把华罗庚请到清华大学. 由于华罗庚没有学位，所以就先安排他在图书馆做管理员. 其实最重要的是可以让他和大学生们一起听课，熊庆来还在课后亲自指导他.

华罗庚在清华如鱼得水，如鸟投林，他仅用了一年半时间就旁听完了数学系的全部课程，打下了坚实的现代数学基础. 他花了四个月时间自学英语就可以阅读英文数学文献了. 在杨武之（1896—1973，诺贝尔物理学奖获得者杨振宁之父）教授的指导下，两年时间里，华罗庚写出了一批有质量的论文. 他用英文写了三篇论文，寄到国外，全部发表了. 凭藉自己的超人天赋和雄厚的学术实力，1933 年，清华大学破格提升他为助教. 一个乡下青年，只有初中文凭，居然能登上中国最高学府的讲坛，不能不说是一个奇迹.

华罗庚的成就是刻苦勤奋的结果．著名科学家钱三强曾回忆道：“为了赶上功课，我每天很早就起来读书．”有人问他：“那你是不是最用功的人?”答：“不是，当我起来学习的时候，有人已经学完了，他就是华罗庚．”

1934 年至 1936 年间，华罗庚在杨武之等教授的关心下，深入研究了数论．他阅读了许多数论权威的著作，写出了 20 余篇高质量的论文，多数发表在国外的数学杂志上．在此期间，美国数学家维纳（N. Wiener，1894—1964）和法国数学家阿达马（J. Hadamard，1865—1963）相继来华讲学，维纳对华罗庚尤为赏识，于是把他推荐给当时最负盛名的数学家之一——英国的哈代（G. H. Hardy，1877—1947），并由中华文化教育基金会资助去剑桥大学深造，专攻解析数论．

1936 年，26 岁的华罗庚怀着对祖国母亲的无限眷恋，以访问学者的身份远赴英伦．刚到剑桥大学，哈代就预言，“华在两年内可望获得学位”．在剑桥两年多的时间里，华罗庚很快就掌握了英语并相继写出了至少 15 篇论文，每一篇都可以作为博士论文，引起英国数学界的注意．但是由于学费十分昂贵，他为了节省开支始终没有正式注册读学位．对此华罗庚坦然说：“我是来学数学的，不是来读学位的．”

直到 1980 年，由于其卓越的数学贡献，华罗庚才在法国南锡大学第一次接受荣誉博士学位．此后香港中文大学和美国伊利诺伊大学也相继授予他荣誉博士学位．

3. 艰苦岁月创辉煌

1937 年，抗日战争爆发．中华民族处在水深火热之中，以至于偌大的华北已容不下一张书桌了．由于时局所迫，当时一些主要大学都迁移至大后方．清华大学、北京大学和南开大学迁至昆明，成立了“西南联合大学”．第二年，华罗庚挥别剑桥，风尘仆仆来到昆明，执教于西南联大．华罗庚越过讲师、副教授被直接晋升为教授．

抗日战争时期，生活十分艰苦，连一间房子都难以找寻．后来著名诗人闻一多（1899—1946）将住所腾出一间，华罗庚一家六口才有了栖身之所．就在这样的艰苦环境下，华罗庚奋笔疾书，连续奋斗三年写出了数论巨著《堆垒素数论》，并在苏联用俄文出版（新中国建立后，又在国内出版）．

1945 年，华罗庚应邀到苏联作学术访问．翌年秋前往美国，来到世界著名的数学中心——普林斯顿高级研究所作访问研究员．随即又被美国伊利诺伊大学聘为终身教授．在这段时间里，华罗庚的研究领域从数论拓展到方程论、典型群、域论等学科，硕果累累．与此同时，他指导的学生以后皆成为职业数学家．

4. 报效祖国攀高峰

新中国成立后，华罗庚毅然放弃优厚的待遇和高级职位，怀着报效祖国的无限忠诚，于 1950 年返回中国，从此全心全意地投入到建设伟大祖国的时代洪流中．回国伊始，华罗庚即重组中国数学会并奉命筹建中国科学院数学研究所．1952 年，数学所成立后，华罗庚被任命为第一任所长．他继续向数学高峰攀登，获得丰硕成果，其中《典型域上的多元

复变函数论》荣获 1955 年中国自然科学一等奖. 学术研究之外，华罗庚把工作重心放在数学研究后备力量的培养上. 他带领青年人开创新的研究领域，亲自给他们上课，并指导他们修改论文，为了祖国的教育事业可以说是呕心沥血，不遗余力.

毛主席接见华罗庚

除了数学研究和教育工作，华罗庚还十分重视数学的普及和应用. 他是中国最早把数学理论研究和生产实践紧密结合、并做出巨大贡献的科学家. 1964 年，华罗庚给毛主席写了一封信，建议在生产实践中推广优选法和统筹法，认为可以提高管理水平和效率. 毛主席的回信是十几个苍劲有力的大字：壮志凌云，可喜可贺. 受此巨大鼓舞，他在近二十年间走遍了祖国的山山水水，足迹遍及27 个省市自治区，深入到工厂、矿山，冒酷暑、顶严寒，用深入浅出的语言向工人和农民介绍优选法和统筹法，创造了巨大的物质财富和经济效益. 毛主席后来又一次给华罗庚复信说："你不为个人而为人民服务，十分欢迎."

5. 独具慧眼识英才

提起华罗庚必然会让人想起由他提携进入数学殿堂的数学家——陈景润. 由于青年时代受到过"伯乐"——熊庆来的知遇之恩，所以华罗庚对于人才的培养格外重视，他发现和培养陈景润的故事更是成为数学界的一段佳话.

陈景润（1933—1996）出生于福建福州的一个贫寒家庭，在上高中时受到数学老师的影响对数学产生浓厚兴趣，尤其对充满奇妙问题的数论情有独钟. 1949 年，陈景润考入厦门大学数学系，1953 年以优异成绩毕业，并被分配到北京的一所中学任教.

由于他性格内向，不善交往，语言表达能力不强，因而对中学教师工作很不适应. 当时的厦门大学校长王亚南非常了解自己的学生，当他获悉陈景润的困难处境和他希望献身于数学研究的志向后，即于 1954 年通过有关部门将陈景润调回厦门大学担任助教.

从这个时候起，陈景润开始走上了研究哥德巴赫猜想的坎坷旅程. 经过几年的刻苦钻研，通过对华罗庚以及苏联数学家的专著的深入钻研，他对一些重要的数论方法有了更深刻的理解和掌握，并很快写出了一篇数论论文. 陈景润的这篇论文得到了华罗庚的赏识. 历史是如此的相似，当年的熊庆来发现了他，现在他又发现了陈景润.

1957 年，经华罗庚的亲自推荐，陈景润被调到中科院数学研究所任实习研究员. 为了实现自己的梦想，多年来，陈景润始终过着普通人难以忍受的艰苦生活，脚踏实地，坚持不懈地从事着他所钟爱的数学事业. 无论是在"十年浩劫"中遭受批斗打击的时候，还是在遭受病痛折磨的时候，他从来没有停止过自己的追求，他关于哥德巴赫猜想的著名结果，就是 1973 年在"文化大革命"的炼狱中磨练出来的.

由于常年累月的营养不良和超负荷工作，陈景润不幸患上了帕金森氏综合症，这种疾病经治疗虽得到控制，但却无法彻底治愈. 陈景润深受其害，最终由于该病发作，于 1996 年不幸离开了人世.

从 1958 年到 1990 年，陈景润一共发表了 50 余篇论文. 因为关于哥德巴赫猜想的杰出研究成果，他于 1982 年荣获国家自然科学一等奖.

6. 老骥伏枥志千里

其实陈景润只是华罗庚培养出来的众多学生中的一个，万哲元、陆启铿、王元、潘承洞等（数学家）都是在华罗庚的悉心培育下成长起来的，受过华罗庚影响的数学家就更多了. 除了数学研究，华罗庚还对我国的基础教育事业十分关心，50 年代初他亲自主持编写了我国第一套中学数学教材. 此外，他还是我国中学生数学竞赛的首创者，从 1956 年到 1978 年间，他亲自担任竞赛委员会主任，还写了大量中学生课外数学读物，为培养优秀数学人才倾注了大量心血.

1985 年 6 月 12 日，华罗庚在日本东京一个国际学术会议上作学术报告. 他先用中文，后改用英语演讲. 日本学者被他精彩的报告深深吸引，原定 45 分钟的报告在经久不息的掌声中被延长到一个多小时. 当他满头大汗结束讲话时，突然心脏病发作倒在讲台上与世长辞. 他用行动实践了自己的诺言："最大的希望就是工作到生命的最后一刻."

华罗庚是国际上享有盛誉的数学家，在解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论等广泛数学领域中都做出了卓越贡献. 更重要的是，华罗庚为新中国培养了一大批数学研究的后备力量，为他钟爱的数学事业奉献了毕生的精力与汗水.

三　当代几何大师——陈省身

1984 年，一位华人数学家以其出色的工作站在了该年度沃尔夫（Wolf）数学奖的领奖台上，而沃尔夫数学奖被视作数学界的诺贝尔奖. 这个人就是迄今获得该奖项的唯一华人、微分几何大师——陈省身.

1. 少年时代

陈省身（Chern Shiing-shen，1911—2004）在辛亥革命那一年出生在浙江嘉兴一个书香门第，在父亲的熏陶下很小就接触到了数学并与之结下了不解之缘. 陈省身很喜欢数学，做了许多数学题，以至于他没上过初小就在 9 岁时直接考进了小学五年级. 1922 年，11 岁的陈省身随父亲来到天津并进入扶轮中学，此时他仍然对数学情有独钟，觉得它既容易又有趣.


陈省身像

1926 年，15 岁的陈省身考入天津南开大学学习数学，他的老师是毕业于美国哈佛大学的数学博士姜立夫（1890—1978）教授. 当时的中国数学界是非常贫弱的，数学博士更是凤毛麟角，以数学为主科在国外获得博士学位的只有胡明复和姜立夫（均在哈佛）. 姜立夫人格高尚，教学严

谨，循循善诱，使学生感到读数学有无限的乐趣和远大的前途．姜立夫对陈省身的读书态度产生了很大的影响．

2. 清华岁月

清华园

在 20 世纪 30 年代，许多在国外获得博士学位的留学生陆续回国任教．尽管各大学数学系的数学水平颇有提高，陈省身还是觉得当时的教学制度僵化，很少鼓励学生创新，如果自己想在学术上有所进步就必须出国深造．但家里已经没有能力供陈省身出国，所以他只好求助于公费．

恰好在陈省身毕业那一年，清华大学决定办研究院，并规定，毕业后成绩优秀者可公派留学．鉴于此，陈省身决定报考清华研究院．在孙光远先生的指导下，陈省身在《清华理科报告》上发表了第一篇研究性论文，以后又继续写了两篇这方面的论文，均发表在日本《东北数学杂志》上．清华的四年，陈省身把微分几何学确定为自己的研究方向．微分几何的出发点是微积分在几何学上的应用，有 300 多年的历史．微分几何的正确方向是所谓的“大范围微分几何”，其系统的研究刚刚起步．这是陈省身在清华时憧憬的方向，但未曾入门．陈省身后来说，那时的心情就像远望着一座美丽的高山，却不知攀登的路径．

当时，清华数学系最引人注目的人就是身残志坚，自学成才的华罗庚，他因突出的数学才能被数学系聘为图书管理员．华罗庚虽然名义上是图书管理员，实际上却等于是个研究生．陈省身和他时常往来，上同样的课，那是一段很愉快的学生生活．

3. 留学欧洲

1934 年夏天，陈省身从清华研究院毕业，获得硕士学位并获得两年公费留学的机会．清华的公费留学普遍赴美，但陈省身却获得特许留学德国汉堡大学．

早在南开时，陈省身听过姜立夫开的空间曲线、曲面的课程，用的是德国数学家布拉施克（W. J. E. Blaschke，1885—1962）的书，他觉得这门课程深奥奇妙，所以当布拉施克在 1932 年到北京访问的时候，陈省身听了他的全部演讲．受布拉施克影响，当陈省身有留学机会时就决定到布拉施克所在的汉堡大学．

陈省身刚到汉堡，布拉施克就交给他自己刚写好的几篇论文，不到一个月陈省身就找出了一篇论文中的一个漏洞，布拉施克非常高兴，于是叫他想法补救．陈省身很快就做到了，仅用两个月的时间就写出了汉堡的第一篇论文，发表在 1935 年《汉堡大学学报》上．这个来自中国的聪明勤奋的学生给布拉施克留下了美好而深刻的印象．

1936 年夏，陈省身的两年公费期满并获得博士学位，随即接到了来自清华大学和北京大学的聘约．当时陈省身恰好又得到中华文化基金会的补助，可在国外多留一年，于是在

布拉施克先生的推荐下，陈省身到法国巴黎随当代几何大师嘉当（É. J. Cartan，1869—1951）工作一年. 对于嘉当，陈省身已经向往很久了. 在巴黎的十个月中，陈省身全力以赴准备每周一次的与嘉当的会面，所以工作努力而精神愉快. 在此期间陈省身共发表三篇论文，但工作范围远远超过这些论文的内容. 与嘉当共事的十个月，陈省身受益匪浅.

4. 抗日烽火

1937 年夏，陈省身受聘于清华大学，但未及离开巴黎就传来了发生卢沟桥事变、抗日战争全面爆发的消息. 国难当头，时局动荡，清华大学要陈省身改道去长沙临时大学任教. 1938 年 1 月，日寇逼近长沙，陈省身随大学迁往昆明.

当时，北京大学、清华大学和南开大学在昆明合并而成为西南联大. 时局虽然艰难，但西南联合大学的师资力量却很强. 比如华罗庚当时也在西南联大任教，与陈省身一起度过了峥嵘岁月. 陈省身在西南联大有很多好学生，其中就有后来获得诺贝尔物理学奖的杨振宁，而在清华时，杨振宁的父亲杨武之教授是陈省身的老师.

由于抗战吃紧，昆明与外界完全隔绝，而且物资极度匮乏，大学根本谈不上图书设备. 幸好嘉当寄给陈省身许多自己的论文，可以研读. 嘉当一生所写论文有 6 000 多页，陈省身至少读了十之七八. 在抗日烽火的艰难岁月里，陈省身心无旁骛，只争朝夕努力工作，继续发表论文.

这时候，陈省身开始逐渐蜚声海内外，但是对于自己的工作成就，他却深感不满，希望有新的机会充实自己. 所以当维布伦（O. Veblen，1880—1960）因欣赏陈省身的工作在 1942 年邀请他到美国普林斯顿高级研究院做研究员时，陈省身不顾二战正酣，毅然决定前往.

陈省身到普林斯顿立刻做了一个极其重要的工作，这就是“高斯—博内公式”的新证明. 两年的时间，陈省身发表了几篇在微分几何学方面精心独诣的文章，所谓“陈示性类”理论都是在那个时候做出来的. 当时的大几何学家霍普夫（H. Hopf，1894—1971）评价陈省身的一篇文章说：“微分几何进入一个新时代了.”去普林斯顿是陈省身一生中最重要的决定之一，因为在普林斯顿这两年里进行的研究是最创新的工作，具有最深远的影响.

5. 定居美国

1946 年，为了促使中国早日成为数学强国，陈省身回到国内并承担了中央研究院数学研究所的筹备工作. 陈省身着重于“训练新人”，从全国各大学挑选了最好的大学毕业生到上海，由他每周讲 12 小时的拓扑学. 由此培养了一批新的拓扑学人才，其中就有国家最高科技奖获得者，中科院院士吴文俊.

1948 年，陈省身受普林斯顿高级研究院院长奥本海默（R. Oppenheimer，1904—1967）的邀请再度赴美. 他知道自己无法很快回国，需要一个长期的职位养家，于是在 1949 年夏应聘成为芝加哥大学教授. 当时杨振宁恰好也在芝加哥，1954 年又同在普林斯顿. 他们是好友，时常谈论自己的工作，却不知道他们的工作有紧密联系，直到 20 年后才知道他们所研究的是同一个“大象”的两个不同部分. 杨振宁曾赠陈省身一首诗，最后

两句是：千古寸心事，欧高黎嘉陈. 最后一句是指欧几里得、高斯、黎曼、嘉当和陈省身. 在芝加哥的 11 年，陈省身培养出 10 位杰出的博士生.

1960 年，陈省身离开芝加哥大学去加州大学伯克利分校，一直工作到 1979 年退休. 在陈省身的努力下，加州大学数学系成为世界著名的几何学中心，他的讲稿从 50 年代起就已经成为学习微分几何学的经典，因此可以说世界各地的几何学家几乎都受到过他的影响. 1979 年以后，陈省身仍然退而未休，继续在加州大学任教到 1984 年，并成为伯克利数学研究所的首任所长.

在加州大学伯克利分校，陈省身又培养了 31 名博士生，其中最著名的是丘成桐（1949— ），他获得 1982 年的菲尔兹（Fields）奖，这是世界数学的另一个最高奖，每 4 年一次，由国际数学家会议颁发，颁发对象是 40 岁以下的青年数学家.

陈省身晚年的一项重要贡献是筹建了美国的国家数学研究所，这个研究所的建立是为了不要把最优秀的数学人才都集中在普林斯顿. 研究所在 1981 年建成，由陈省身任首任所长（1981—1984）.

6. 崇高荣誉

以色列总理贺索为陈省身颁奖

陈省身是 20 世纪最伟大的几何学家之一，在微分几何方面的成就尤为突出，是高斯、黎曼和 E. 嘉当的继承者与拓展者. 他证明了一般的高斯—博内公式；建立微分纤维丛理论，并引入陈示性类，由此创立了整个微分几何；引进了几何的 G 结构，研究其等价问题；为广义的积分几何奠定了基础，等等.

陈省身被誉为创立现代微分几何学的大师，他引进的一些概念、方法和工具，已远远超过微分几何与拓扑学的范围，成为整个现代数学中的重要组成部分. 陈省身还是一位杰出的教育家，培养了大批优秀数学家，而他自己因出色的工作荣获诸多荣誉. 他曾应邀在国际数学家大会（ICM）上作三次报告，国际数学家大会每四年召开一次，同一个人被邀请作两次以上的演讲实属罕见. 他在 1975 年获得美国国家科学奖并被许多大学授予荣誉博士学位；1983 年，获美国数学会斯蒂尔（Steele）奖；陈省身的最高荣誉就是在 1984 年获得当代数学的最高奖之一——沃尔夫数学奖❶，获奖证书文字为："此奖授予陈省身，因为他在整体微分几何上的卓越成就，其影响遍及整个数学."

❶ 1976 年元旦，德裔古巴慈善家、外交家沃尔夫（Wolf）捐款 1 000 万美元设立了沃尔夫基金会. 因其任古巴驻以色列大使，所以基金的总部设在以色列. 基金会的宗旨是"促进科学和艺术的发展以造福于人类"，由于该奖项的获奖者都是世界上做出卓越贡献的数学家，这些科学家的巨大声誉使该奖广为人知. 因沃尔夫奖是像诺贝尔奖一样的终身成就奖，所以人们把沃尔夫数学奖看作数学界的诺贝尔奖.

7. 落叶归根

陈省身一直希望中国数学能跻身于世界数学领先地位，1972 年，陈省身回到了阔别 22 年的祖国，此后，他常常回国讲学、主持会议或组织各种活动以培养中国年轻一代的数学家.

陈省身从加州大学伯克利数学研究所彻底退休后（1984 年），回国筹办南开大学数学研究所，并接受教育部的聘请担任所长，翌年研究所成立. 南开数学研究所与普林斯顿研究院类似，目的是为了让中国各大学的数学教师或研究生有机会到这里专心致志从事研究工作，并且有机会与中外数学家进行讨论和交流，也希望创造一个好的环境吸引国外的数学人才回国工作.

邓小平接见陈省身及夫人郑士宁女士

1985 年，陈省身为《数学教学》杂志题词："21 世纪的数学大国"，从中可以看出这位数学大师对发展我国数学事业的殷切期望.

2000 年，陈省身回南开定居，并以 90 岁高龄给学生演讲，2004 年 12 月，陈省身在南开走完了他的数学人生，永远停止了美丽的计算，他的数学，至美、至纯；他的人生，至简、至定. 陈省身的一生，为中国现代数学的发展可谓殚精竭虑，死而后已，他的"21 世纪数学大国"的愿望一定会实现.

思考题

谈谈华罗庚、陈省身两位数学大师的生平事迹对你的启发.

学习总结报告

作为人类智慧的结晶，数学不仅是人类文化的重要组成部分，而且始终是推动人类文明进步的重要力量，数学伴随着人类从远古走到现代.

通过本专题的学习，同学们初步了解了数学产生、发展与繁荣的历史，以及重要数学思想的演变进程. 学习过程中，你是否体会到，数学的发展进程并非一帆风顺，它是众多数学先贤前仆后继、辛勤耕耘的奋斗过程，也是克服困难、战胜危机的斗争过程. 比如，数学史上的“三次数学危机”充分体现了这个过程，而危机的出现正是新的数学思想萌芽和产生的契机.

正如数学发展的历程一样，数学学习的过程也会遭遇各种困难和挫折，但我们要学习数学家那种孜孜不倦、顽强拼搏的精神与勇气，经过思考和探索获得真知. 同时，我们也要学习数学家的怀疑精神和创新意识，因为怀疑与创新是世界发展的灵魂. 如果没有对欧几里得第五公设的怀疑就不会有非欧几何的最终产生，如果没有锐意创新的勇气就不会有康托尔集合论的创立……

了解数学史，对于同学们把握数学知识之间的关系和联系，领会数学知识所内含的数学思想方法大有好处. 学习数学史可以有力地促进同学们的数学学习.

请你写一篇学习总结报告，建议包括下列三方面的内容：

1. 知识的总结

如本专题中各个时期数学发展的主要内容，重要数学思想以及这些思想对数学发展的影响等.

2. 拓展

通过查阅资料，独立思考，认识不同时代数学发展的特点，进一步明晰数学思想的演变历史.

3. 学习体会

通过本专题的学习，谈谈你对数学发展进程的认识，再谈谈你对数学家拼搏精神、创新意识以及科学精神的感受等.

如果条件允许，可以在查阅资料、调查研究的基础上就自己感兴趣的历史事件与人物写一篇研究报告. 如本专题中涉及到的“无理数的起源”“第五公设问题”“π 的计算简史”，或本书中未详细提到的“0 的起源”“计算工具的演变”，等等.