

编号（学号）： 201809140337

# 西華師范大學

## 本 科 毕 业 论 文

题 目 : 基于牛顿近似模型分析 LIGO 引力波数据

学 院 : 物理与天文学院

专 业 : 物理学（师范）

年级班级 : 2018 级 3 班

学生姓名 : 吴洁

学 号 : 201809140337

指导教师 : 吴迪 职称/学历 : 讲师/博士

教务处 制



## 基于牛顿近似模型分析 LIGO 引力波数据

吴洁

物理与天文学院物理学（师范）专业 2018 级 指导教师：吴迪

**摘要：**2015 年 9 月 14 日，LIGO 成功探测到第一个引力波事件 GW150914，这次探测的成功一方面证明了广义相对论的正确性，另一方面提供了一种全新的探测手段，揭开了引力波天文学新的序幕，对物理学和天文学的研究有着重要的意义。目前对于引力波的数据处理和分析，一般是采用滤波匹配的方式，将预制的引力波模板与探测到的数据匹配分析，来计算引力波波源的相关参数。

在引力波的数据分析中，引力波模板理论模型的重要性不言而喻，通常使用后牛顿近似、数值相对论等方法构建引力波模型。本文提供的牛顿近似模型，旨在通过简单的低阶近似分析双星系统的实际情况，分析 LIGO 引力波数据，计算双星系统啁啾质量参数。

本文主要由以下三个部分构成：

第一部分阐述了本文的研究背景，主要是引力波的历史背景和研究现状，涵盖了引力波相关的信息，确定本文所研究引力波的类型和性质。

第二部分阐述了本文的核心讨论内容，包括第 2 章到第 4 章：第 2 章主要推导牛顿近似模型，分析理论模型的相关性质；第 3 章主要在于基本的数据处理，从 LIGO 引力波数据中寻找引力波信号，同时进行时频分析；第 4 章主要是将牛顿近似模型应用到实际的数据分析中去，与数值相对论和引力波事件拟合分析。

第三部分阐述了本文的总结和展望，主要总结本文各章内容，提出下一步的研究计划。

本文采用的牛顿近似模型，有利于学习和理解广义相对论以及引力波的相关知识，对系统进行基本拟合和数据分析，以及快速确定系统演化和相关参数。本文通过牛顿近似模型的建立，处理分析 LIGO 探测的数据，最终将模型与实际数据相结合来分析系统啁啾质量参数，验证牛顿近似模型的准确性和可行性。

**关键词：**引力波；LIGO；双星系统；牛顿近似模型；数据分析



## An Analysis of the LIGO Gravitational Waves Data Based on Newtonian Approximate Model

Wu Jie

School of Physics and Astronomy, Physics, Grade 2018, Instructor: Wu Di

**Abstract:** On September 14, 2015, LIGO successfully detected the first gravitational wave event GW150914. On the one hand, the success of this exploration proved the correctness of General Relativity, on the other hand, it provided a new detection method, opened a new prelude to gravitational-wave astronomy, and is of great significance to the research of physics and astronomy. At present, the data processing and analysis of gravitational waves generally adopts the way of filtering to match the prefabricated gravitational waves templates with the detected data, so as to calculate the relevant parameters of gravitational waves sources.

In the data analysis of gravitational waves, the importance of the theoretical model of gravitational waves templates is obvious. The gravitational waves model is usually constructed by Post-Newtonian Approximation, Numerical Relativity and other methods. The Newtonian Approximate Model provided in this paper aims to analyze the actual situation of binary system through simple low-order approximation, analyze LIGO gravitational waves data and calculate the chirp mass parameters of binary system.

This paper mainly consists of the following three parts:

The first part describes the research background of this paper, mainly the historical background and research status of gravitational waves, covers the information related to gravitational waves, and determines the types and properties of gravitational waves studied in this paper.

The second part expounds the core discussion content of this paper, including Chapter 2 to Chapter 4: Chapter 2 mainly deduces the Newtonian Approximate Model and analyzes the relevant properties of the theoretical model; Chapter 3 mainly focuses on the basic data processing, looking for the gravitational waves signal from LIGO gravitational waves data, and doing time-frequency analysis at the same time; In Chapter 4, the Newtonian Approximate Model is applied to the actual data analysis,



---

---

which is fitted with Numerical Relativity and gravitational waves events.

The third part expounds the summary and prospect of this paper, which mainly profiles the contents of each chapter and puts forward the next research plan.

The Newtonian Approximate Model used in this paper is conducive to learning and understanding the relevant knowledge of General Relativity and gravitational waves, basic fitting and data analysis of the system, and rapid determination of system evolution and related parameters. Through the establishment of the Newtonian Approximate Model, this paper processes and analyzes LIGO gravitational waves data, and finally combines the model with the actual data to analyze the chirp mass parameters of the system, so as to verify the accuracy and feasibility of the Newtonian Approximate Model.

**Key words:** Gravitational wave; LIGO; Binary system; Newtonian Approximate Model; Data analysis



## 目 录

摘要.....	I
Abstract .....	II
第 1 章 绪论.....	1
1.1 引力波概述.....	1
1.2 研究背景及现状.....	2
1.3 研究意义.....	4
1.4 本文的结构安排.....	5
第 2 章 牛顿近似模型.....	6
2.1 双星系统.....	6
2.2 线性理论.....	7
2.3 引力辐射能.....	8
2.4 引力波波形.....	13
2.5 椭圆轨道.....	15
第 3 章 LIGO 数据处理.....	18
3.1 LIGO 数据特性.....	18
3.2 噪声基本性质.....	18
3.3 傅里叶变换.....	19
3.4 小波变换.....	20
第 4 章 数据对比分析.....	22
4.1 数值相对论对比分析.....	22
4.2 引力波事件对比分析.....	24
4.3 牛顿近似模型的局限性.....	28
总结与展望.....	30
参考文献.....	32
致 谢.....	35



## 第1章 绪论

### 1.1 引力波概述

#### 1.1.1 爱因斯坦与广义相对论

二十世纪初，爱因斯坦发表了论文《论动体的电动力学》<sup>[1]</sup>，提出了狭义相对论，十年后又成功将引力相互作用纳入，借助弯曲时空的黎曼几何，建立了可以精确描述引力相互作用的广义相对论<sup>[2]</sup>。通过广义相对论，爱因斯坦成功解决了水星近日点的进动这个天文界的百年难题，而预言的引力场导致光线偏折的现象也在 1919 年得到验证，广义相对论也成为 20 世纪最伟大的物理理论之一！

在广义相对论提出的第二年，爱因斯坦发现，场方程所描述的引力场，在微扰的思想下，通过线性的弱场近似条件，场方程存在波动解，其传播速度为光速，并且会对外辐射能量，由此预言了引力波<sup>[3, 4]</sup>。但是引力波振幅极其微小，即使是黑洞级别的天体所产生的引力波，其振幅也及其微小，所以引力波一直也被认为是难以通过实验验证的。英国天文学家爱丁顿认为：引力波的传播在不同参考系中存在差异，在特定的坐标系中甚至不传递能量，任何实验都无法检测到，引力波不是客观存在的，没有实际的物理意义<sup>[5]</sup>。1957 年教堂山会议举办<sup>[6]</sup>，人们对于引力波是否有物理意义的争论终于达成共识：引力波会携带能量，是客观存在的，并不只是数学的变换，可以通过实验验证。

广义相对论成功地预言和解释了很多现象，各项实验和观测在不同的尺度上验证了广义相对论的正确性，同时人们也将广义相对论进行不断地推广，并将其应用于不同的领域，取得了极大的成功。随着基本理论的逐步完善和实验仪器的不断升级，科学家们开始尝试通过实验验证引力波的预言，直到引力波被提出的百年之后，人们才正式探测到了引力波。

#### 1.1.2 引力波的发现

2015 年 9 月 14 日，美国激光干涉引力波天文台（LIGO），通过地面引力波激光干涉仪第一次探测到了引力波<sup>[7]</sup>，这一发现引起学术界轰动，仅仅一年之后就荣获了诺贝尔物理学奖。

第一次引力波事件 GW150914，其引力波信号由 440 Mpc 外的两个恒星级黑洞合并产生，信号频率从 35 Hz 增长到 250 Hz，信号振幅最高达到为  $1 \times 10^{-21}$ ，这次信号的信噪比达到了 24，其显著性也超过了  $5.1\sigma$ ，它与广义相对论相关模型预测的波形相符合。

至此之后，LIGO 逐步观测到近百个引力波事件，双星系统合并的种类也有



所不同：双黑洞合并、双中子星合并、黑洞和中子星合并等<sup>[8, 9]</sup>，谱写了多信使天文学观测的新篇章，宣告了引力波天文学时代的到来<sup>[10]</sup>。

## 1.2 研究背景及现状

### 1.2.1 引力波探测历史

引力波是加速运动的大质量物体产生的时空曲率扰动，以波的形式从波源向外光速传播，以引力辐射的形式向外传输能量。在引力波的概念被提出之后，开始不断有科学家尝试设计不同的实验去验证引力波，近半个世纪后，才不断解决了引力波在理论和实验上的困难，开始尝试设计实验验证引力波。

1962 年，美国物理学家韦伯及其研究小组经过多年研究，提出了探测引力波的实验方案，设计并建立了第一个共振棒引力波探测器<sup>[11]</sup>，该探测器也被称为韦伯棒。韦伯棒迈出了探测引力波的第一步，随后通过多次实验和分析判断，韦伯对外宣布，其研究小组成功探测到了引力波信号，全世界有多个研究小组开始重复韦伯的实验。随着理论和实验的发展，越来越多的科学家发现了问题，没有实验能够重复探测到韦伯探测到的引力波信号，韦伯棒的探测逐渐陷入低潮。虽然韦伯棒没有直接验证引力波，但是在验证引力波的实验探索，尤其是在噪声分析、隔震技术等方面，为后来的激光干涉仪探测器奠定了坚实的基础。

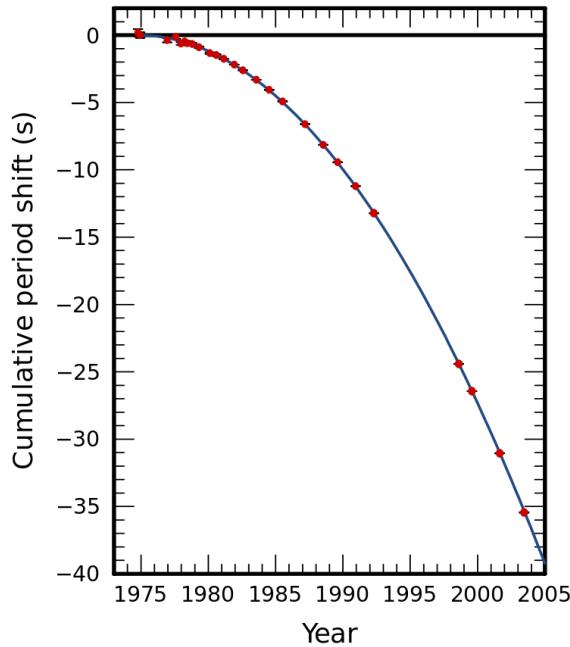


图 1.1 PSR1913+16 周期累积移动观测值与广义相对论计算值对比

1974 年，美国普林斯顿大学的泰勒和赫尔斯使用射电望远镜长期观测脉冲双星 PSRB1913+16，通过分析观测到的周期性射电脉冲信号，发现了双星系统



的周期在逐渐变小，观测结果与广义相对论所计算的结果相同<sup>[12]</sup>，如图 1.1 所示，证明了双星系统会不断损耗能量，间接地在观测上验证了引力辐射的存在，两人也因此成为 1993 年的诺贝尔物理学奖得主。

到二十一世纪初，人们建成了一系列激光干涉探测器<sup>[13, 14]</sup>，包括美国的 LIGO 和欧洲的 Virgo 在内的多个探测器，这些探测器进行了多次联合观测，并且逐渐发展成为一个全球范围的观测网络。2015 年，LIGO 和 Virgo 完成了升级<sup>[15, 16]</sup>，开始进行观测，同年就探测到了首个引力波事件 GW150914。

### 1.2.2 引力波波源及分类

宇宙中存在数以亿计的大质量天体，这些天体的运动、变化以及相互作用都有可能存在引力辐射，这些都是天然的引力波源，是引力波探测的对象。对于不同波源的引力波，其频率和强度都有一定的差异，需要设计了不同类型的探测器来进行探测，具体的信息如表 1.1 所示<sup>[17-19]</sup>。

表 1.1 引力波探测器及对应的频段和波源

类型	任务	发起者	探测频带	引力波波源
地面激光干涉仪	GEO600	英国、德国		
	TAMA300	日本		致密双星系统
	KAGRA	日本	1 Hz~20 kHz	超新星爆发
	VIRGO	欧洲		旋转的中子星
	LIGO	美国		
空间探测器	LISA	欧洲		致密双星系统
	天琴计划	中国	$10^{-7}$ Hz~1 Hz	超大质量黑洞
	太极计划	中国		超大质量双黑洞
脉冲星测时阵列	PPTA	澳大利亚		
	NANOGrav	美国	$10^{-14}$ Hz~ $10^{-7}$ Hz	毫秒脉冲星
	EPTA	欧洲		
宇宙微波背景 极化成像	BICEP2	美国	$10^{-17}$ Hz~ $10^{-16}$ Hz	宇宙微波背景
	阿里计划	中国		原初引力波

同时，也有一些频带的引力波并没有受到太多的关注，例如在宇宙学范围和高能天体物理过程中产生的高频引力波<sup>[20]</sup>。本文所关注的是 LIGO 研究小组所探测的双星系统合并产生的中频引力波。

### 1.2.3 参数估计

随着引力波探测的精度逐渐提升，在引力波数据处理方面也提出了许多分析



方法。文献<sup>[21, 22]</sup>指出了一些常见的分析方法：波形分析法、时间—频率分析、蒙特卡罗模拟、复合分析法、模板分析法、脉冲星计时分析法、匹配过滤器、 $\chi^2$ 检验、贝叶斯分析等引力波数据分析方法。

通常情况下，数据处理采用多种分析方式共同分析处理，在噪声中提取引力波信号，对系统的参数进行拟合估计。对于双星系统，目前对其结构和作用机制是比较清楚的，通过构建精确的引力波模型，与接收到的信号进行滤波匹配分析，能够极大地提高数据分析的效率和准确性。匹配滤波器可以优化探测到的信号，近似估计系统参数，为了得到更加精确的参数，会使用基于广义相对论的不同模型，考虑自旋、进动以及红移等效应的影响，并对每个模型执行相干贝叶斯分析，以推导出双星系统的参数分布。

除此之外，也有通过普通物理进行简单的分析以确定参数的方法。美国凯斯西储大学 Harsh Mathur 在《American Journal of Physics》上发表了相关论文<sup>[23]</sup>，在普通物理的框架下，对各项参数进行量纲分析，使用处理电磁波的方法来处理引力波，对 LIGO 的引力波数据进行简单的分析，通过简单的参数估算分析双星系统，可以在数量级上基本符合实际观测数据。

虽然文献<sup>[24]</sup>的方法在数量级上与实际接近，但是不够精确，对其他的引力波事件符合不太好，对频率的分析也只是从 LIGO 的时频图中近似选取前后两点，误差和随机性较大，只能定性的进行简单的分析，存在较大的局限性。

### 1.3 研究意义

引力波模型是精确分析引力波信号的基础，建立正确适合的引力波模型，有利于定性定量地分析系统的整个运动过程，正确地分析系统的相关参数。本文采用弱引力场下的场方程波动解，并且使用牛顿理论分析双星系统，来构建牛顿近似引力波模型。

对 LIGO 的数据进行分析，有助于发现新的引力波信号，从而可以配合模型进行参数分析。本文采用的是经典的数据处理方法，通过在噪声中提取引力波信号，来分析系统参数以及验证牛顿近似引力波模型的精确性。

通过简单的近似模型，并通过数据拟合分析其参数，不仅可以较容易地了解其产生引力波背后的物理机制，来分析双星系统合并的各个阶段，直观了解其中的物理图像，而且可以较准确地计算相关参数，与数据分析结合构成一个完整的引力波分析系统，有利于学习和理解广义相对论以及引力波的相关知识，对系统进行基本拟合和数据分析，以及对快速确定系统演化和相关参数。



#### 1.4 本文的结构安排

在第 1 章中，系统地介绍了探测引力波的历史发展和不同频带的引力波探测方案，阐述了引力波波源的分类和 LIGO 参数估计的方法，而本文的基本思路就是牛顿近似模型与 LIGO 引力波数据数据处理相结合，分析双星系统的各项参数。

在第 2 章中，通过线性弱场近似，推导场方程的波动解，将双星系统视作牛顿力学下的单体问题进行化简，通过 TT 规范、坐标变换等步骤求得牛顿近似下的引力波模型，并且讨论了椭圆轨道下双星系统的轨道圆化。

在第 3 章中，主要讨论如何处理 LIGO 的原始数据，通过快速傅里叶变换将数据由时域转化到频域，使用滤波限制和数据白化来剔除噪声，提取其中的引力波信号，通过连续小波变换将信号转化到时频图进行分析。

在第 4 章中，将前两章中的牛顿近似模型与处理后的 LIGO 数据进行拟合分析，从频率曲线拟合分析系统的啁啾质量，尤其对 GW150914 事件进行具体分析，将分析结果与 LIGO 提供的参数进行误差分析，验证模型的准确性。

在总结与展望中，对本文进行总结，并对未来的研究工作提出进一步的设想。



## 第2章 牛顿近似模型

### 2.1 双星系统

双星系统是引力波探测中最常见的情况，目前 LIGO 探测到的引力波信号都是由双星系统合并产生的。产生引力波的双星系统由致密天体组成，通常为成对的黑洞（BH-BH）或中子星（NS-NS），还有一个黑洞和一个中子星（BH-NS）构成的系统。致密双星系统合并的过程如图 2.1 所示<sup>[25, 26]</sup>。

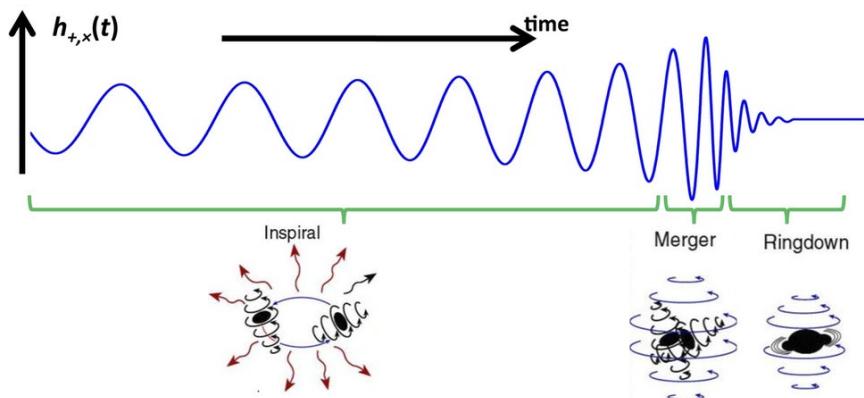


图 2.1 致密双星系统合并各阶段示意图

致密双星系统的合并具体可以分为三个阶段：旋近阶段（Inspiral）、合并阶段（Merger）以及铃宕阶段（Ringdown），接下来简要介绍三个阶段的物理过程及其常用的理论模型：

#### (一) 旋近阶段

当致密双星处于旋近阶段时，双星相距较远，它们的轨道运动速度相对较慢，并且会发出微弱的引力波，这些引力波从系统中带走能量，使得系统对外产生引力辐射而损耗总能量，双星进入半径更小的轨道。随着这个过程的继续，双星的轨道半径越来越小，运动速度越来越快，发出的引力波产生越来越多的引力辐射，能量损耗越来越大，这也导致系统收缩得更快。在旋近阶段，引力波的波形看起来像一个振荡函数，其振幅和频率都随时间增加，这一阶段通常使用后牛顿近似构建引力波模型。

#### (二) 合并阶段

当致密双星处于合并阶段，双星距离靠得足够近，轨道运动速度相对更快，碰撞在一起合并为一体，这个阶段发射最强的引力波，系统会损失大量能量和质量，以引力波的形式对外辐射。在合并阶段，引力波的波形是非线性的，需要通过数值相对论的计算和超级计算机的模拟来构建模型。



### (三) 铃宕阶段

当致密双星处于铃宕阶段，合为一体的系统迅速衰减，对外辐射的引力波逐渐减弱，时空结构逐渐转化为克尔黑洞的状态。在铃宕阶段，引力波的波形看起来像一个具有指数衰减幅度的振荡函数，通过克尔黑洞的微扰模型描述，并且需要使用数值相对论计算获得的参数作为初始值构建模型。

本文所构建的牛顿近似模型，在旋近阶段和合并阶段前期基本符合，但是在合并阶段后期阶段并不符合，并且趋近于无穷大，在铃宕阶段不存在。牛顿近似具体是在计算时将双星系统视作单体问题，而在合并阶段后期和铃宕阶段，双星系统无法视作单体问题，牛顿近似模型自然失效。

## 2.2 线性理论

### 2.2.1 弱场近似

广义相对论指出，引力相互作用可以被视作时空曲率的变化，这种变化通过爱因斯坦场方程描述<sup>[27]</sup>：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2-1)$$

通过解场方程(2-1)可以得到描述时空的度规  $g_{\mu\nu}$ ，在弱场近似的条件下，时空是近似平坦的，使用带有微小扰动的闵可夫斯基度规描述，具体是闵可夫斯基度规  $\eta_{\mu\nu}$  和微扰项  $h_{\mu\nu}$  线性叠加而成，也就是所谓的线性理论<sup>[28, 29]</sup>：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2-2)$$

通过线性叠加后的度规，可以计算克里斯托菲符号  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ ，由于引力波性质只在弱引力场中才有研究意义，所以本文只考虑最低阶扰动，忽略二阶及以上的小量，代入黎曼张量  $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$ ，通过缩并计算里奇张量  $R_{\mu\nu}$  和里奇标量  $R$ ，为了形式的简洁，定义  $\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h / 2$ ，并且使用达朗贝尔算符  $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha$ ，则爱因斯坦场方程可以重新表述如下：

$$\square \overline{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \overline{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \overline{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \overline{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2-3)$$

为了进一步化简方程，采用洛伦兹规范： $\partial^\nu \overline{h}_{\mu\nu} = 0$ ，则式(2-3)左边的后三项都消失，并且将对称矩阵  $h_{\mu\nu}$  的 10 个独立分量减少至 6 个独立分量，场方程简化为<sup>[30]</sup>：

$$\square \overline{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2-4)$$



### 2.2.2 引力波方程

由式(2-4)可以得到真空中的波动方程为:

$$\square \overline{h_{\mu\nu}} = 0 \quad (2-5)$$

式(2-5)存在平面波解  $\overline{h_{\mu\nu}} = A_{\mu\nu} \cos(k_\alpha x^\alpha)$ , 选择横向无迹规范(TT 规范)<sup>[31]</sup>:

$$h^{0\mu} = 0 \quad h^i_i = 0 \quad \partial^j h_{ij} = 0 \quad (2-6)$$

通过 TT 规范, 矩阵  $h_{\mu\nu}$  从 6 个独立分量减少至 2 个独立分量, 将这 2 个独立分量分别定义为  $h_+$  和  $h_\times$ , 同时使用  $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$  来表示 TT 规范后的度规, 选定坐标轴  $z$  轴为波的传播方向, 平面波解写作<sup>[32]</sup>:

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \quad (2-7)$$

由此可以得到在微扰线性叠加下的闵可夫斯基度规对应的线元为<sup>[33]</sup>:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + \left\{1 + h_+ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\right\} dx^2 + \left\{1 - h_+ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\right\} dy^2 + 2h_\times \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] dxdy \quad (2-8)$$

同时, 对于两个独立分量  $h_+$  和  $h_\times$  的具体形式为:

$$h_+ = h_{11}^{\text{TT}} = \frac{h_{11} - h_{22}}{2} \quad h_\times = h_{12}^{\text{TT}} = h_{12} \quad (2-9)$$

引力波方程的形式与电磁场中的泊松方程  $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$  形式一样, 那么式(2-4)应该有对应的推迟势的解<sup>[34, 35]</sup>:

$$\overline{h_{\mu\nu}} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}\left(\mathfrak{R}', t - \frac{|\mathfrak{R} - \mathfrak{R}'|}{c}\right)}{|\mathfrak{R} - \mathfrak{R}'|} dV' \quad (2-10)$$

因为场源距离观测值极远, 所以近似的将场源看作质点, 并且使用 TT 规范, 则对应的推迟势的解应该写作:

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int T_{\mu\nu} dV \quad (2-11)$$

### 2.3 引力辐射能

#### 2.3.1 引力四极矩

为了进一步求解和化简推迟势解式(2-11)的具体表达形式, 联合洛伦兹规范式和引力波方程式(2-4)可以得到<sup>[36, 37]</sup>:  $\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$ , 将时间和空间部分展开为两



个式子：

$$\partial_i T_{ik} + \partial_0 T_{0k} = 0 \quad (2-12)$$

$$\partial_i T_{i0} + \partial_0 T_{00} = 0 \quad (2-13)$$

对时间部分式(2-12)两端分别乘以  $x^j$ ，并且对空间坐标进行积分：

$$\int \partial_i T_{ik} x^j dV + \int \partial_0 T_{0k} x^j dV = 0 \quad (2-14)$$

式(2-14)进一步化简：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \int T_{0k} x^j dV &= - \int \partial_i T_{ik} x^j dV \\ &= - \left[ \int \partial_i (T_{ik} x^j) dV - \int T_{ik} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} dV \right] \\ &= - \oint T_{ik} x^j dS + \int T_{jk} dV \end{aligned} \quad (2-15)$$

对式(2-15)右边第一项使用高斯定理，对于无穷远边界条件，式(2-15)右边第一项可以化作 0，通过  $\eta_{ij}$  式(2-15)得到：

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int T_{0k} x_i dV = \int T_{ik} dV \quad (2-16)$$

同理，对式(2-13)的两端分别乘以  $x^k x^j$ ，并且对空间坐标进行积分，然后用同样的方法化简，可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int T_{00} x_i x_k dV = \int (T_{0k} x_i + T_{0i} x_k) dV = 2 \int T_{0k} x_i dV \quad (2-17)$$

结合式(2-16)和式(2-17)，可以得到：

$$\int T_{kj} dV = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \int T_{00} x_k x_j dV \quad (2-18)$$

引入能量  $T_{00} = \rho c^2$  和坐标  $x^0 = ct$ ，化简式(2-18)后代入式(2-11)得到：

$$h_{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho x_i x_j dV \quad (2-19)$$

对于双星系统，应该使用折合质量  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ，将双星系统的两体问题化作单体问题，并且定义引力四极矩：

$$Q_{ij} = \int \rho x_i x_j dV = \mu x_i x_j \quad (2-20)$$

那么式(2-19)和式(2-9)可以化作：



$$h_{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij} \quad (2-21)$$

$$h_+ = \frac{G}{c^4 r} (\ddot{Q}_{11} - \ddot{Q}_{22}) \quad h_\times = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{12} \quad (2-22)$$

### 2.3.2 坐标变换

为了计算四极矩，可以通过坐标变换，将观测者坐标系和双星系统的坐标系进行联系，在第一次坐标变换中，两个坐标系通过引力波的传播方向 $\vec{n}$ 相互关联，其矢量 $\vec{n}$ 在观测者坐标系 $x^\mu$ 和双星系统坐标系 $x'^\mu$ 的具体情况如图 2.2 所示。

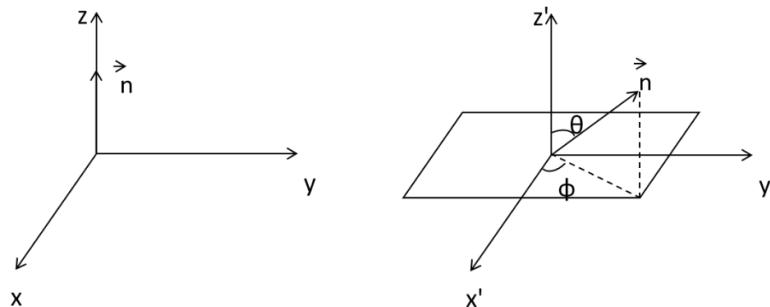


图 2.2 观测者坐标系 $x^\mu$ 和双星系统坐标系 $x'^\mu$

波的传播方向在观测者坐标系 $x^\mu$ 中为 $z$ 轴正方向，双星系统在双星系统坐标系 $x'^\mu$ 的 $x' O' y'$ 平面上，对于单位矢量 $\vec{n}$ ，在两个坐标系中的表达式如下：

$$x^\mu \rightarrow (0, 0, 1) \quad x'^\mu \rightarrow (\sin \phi \sin \theta, \cos \phi \sin \theta, \cos \theta) \quad (2-23)$$

两者可以通过旋转矩阵相互变换 $n'_i = R_{ij} n_j$ ：

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2-24)$$

对于引力四极矩而言，应该作如下变换：

$$\ddot{Q}_{ij}' = R_{il} R_{jk} \ddot{Q}_{lk} \quad \ddot{Q}_{ij} = (R^T Q' R)_{ij} \quad (2-25)$$

在第一次坐标变换后，式(2-22)写作：

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{G}{c^4 r} [\ddot{Q}_{11}' (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta) + \ddot{Q}_{22}' (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\ &\quad - \ddot{Q}_{33}' \sin^2 \theta - \ddot{Q}_{12}' \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) \\ &\quad + \ddot{Q}_{13}' \sin \phi \sin 2\theta + \ddot{Q}_{23}' \cos \phi \sin 2\theta] \\ h_\times &= \frac{G}{c^4 r} [(\ddot{Q}_{11}' - \ddot{Q}_{22}') \sin 2\phi \cos \theta + 2\ddot{Q}_{12}' \cos 2\phi \cos \theta \\ &\quad - 2\ddot{Q}_{13}' \cos \phi \sin \theta + 2\ddot{Q}_{23}' \sin \phi \sin \theta] \end{aligned} \quad (2-26)$$



然后进行第二次坐标变换，将双星系统坐标系  $x'^\mu$  与相对双星静止的随动坐标系  $x''^\mu$  相联系，在两个坐标系的情况如图 2.3 所示（只考虑双星所在平面，图中忽略  $z$  轴）。

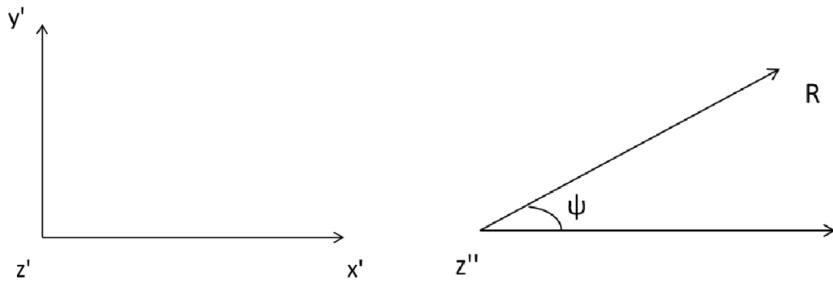


图 2.3 双星系统坐标系  $x'^\mu$  和随动坐标系  $x''^\mu$

随动坐标系中的  $\psi$  是双星转动的角度，其中  $\psi = \omega t$ ，两个坐标系的变换关系如下：

$$\begin{cases} x' = R \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y' = R \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ z' = z'' \end{cases} \quad (2-27)$$

式(2-27)中加入  $\pi/2$  是为了后面的计算更加简洁，不影响坐标系的变换。结合式(2-27)和式(2-20)，坐标变换后的四极矩各分量表达式：

$$\begin{cases} Q'_{11} = \mu R^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \\ Q'_{22} = \mu R^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \\ Q'_{12} = \mu R^2 \frac{\sin 2\omega t}{2} \end{cases} \quad (2-28)$$

并且其余分量都为 0，式(2-28)对时间求二阶导数得到  $\ddot{Q}_{ij}$ ，代入式(2-26)进行化简，得到第二次坐标变换后的形式：

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{4\omega^2 G \mu R^2}{c^4 r} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\omega t + 2\phi_0) \\ h_\times &= \frac{4\omega^2 G \mu R^2}{c^4 r} \cos \theta \sin(2\omega t + 2\phi_0) \end{aligned} \quad (2-29)$$

其中  $\phi_0$  是初相位，并且可以看出，引力波的频率是双星系统旋转频率的两倍。从式(2-29)可以看出，引力波的波形是标准的正余弦函数，这是因为没有考虑能量损耗，在实际过程中，双星系统会不断对外辐射引力能，系统的能量不断损耗，导致轨道减小最终合并。



### 2.3.3 引力辐射功率

引力场的能量表述方式有不同的形式，但是没有完全通用的表述，要根据需要选择合适的表述，本文使用的是 Landau-Lifshitz 表述，忽略高阶小量，引力波向任意方向辐射，那么旋转体的引力辐射功率应该为<sup>[38]</sup>:

$$P = \frac{G}{5c^5} \left( \ddot{Q}_{ij}^2 + \frac{1}{3} \ddot{Q}_{kk}^2 \right) \quad (2-30)$$

假设双星系统是绕 $z$ 轴旋转，将第二次坐标变换的随动坐标系换做直角正交坐标系，如图 2.4 所示:

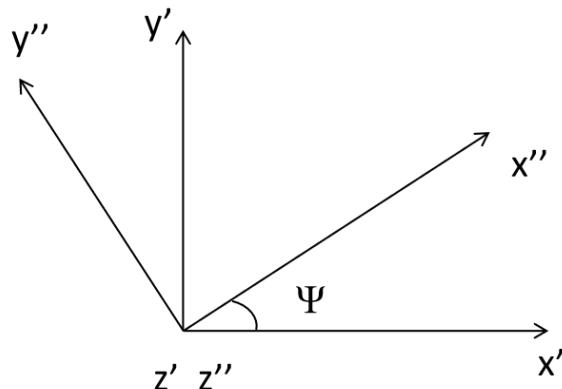


图 2.4 随动坐标系示意图

两个坐标系的变换如下，其中 $\Psi = \omega t$ :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (2-31)$$

在 $x'^{\mu}$ 坐标系中的四极矩和在 $x''^{\mu}$ 坐标系中的转动惯量分别是:

$$Q'_{ij} = \int \rho x'^i x'_j dV \quad I_{ij} = \int \rho x''^i x''_j dV \quad (2-32)$$

并且转动惯量矩阵一定可以化作对角矩阵 $I_{ij} = \text{diag}(I_{11}, I_{22}, I_{33})$ ，由式(2-32)和式(2-31)可以将四极矩和转动惯量相联系<sup>[39]</sup>:

$$Q'_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) - \frac{1}{2}(I_{22} - I_{11}) \cos 2\omega t & \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \sin 2\omega t & 0 \\ \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \sin 2\omega t & \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) + \frac{1}{2}(I_{22} - I_{11}) \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \quad (2-33)$$

将式(2-33)代入式(2-30)得到引力辐射功率:



$$P = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} w^6 I^2 e^2 \quad (2-34)$$

将双星系统的相关参数  $\omega^2 = (m_1 + m_2)/R^3$ ,  $I = \mu R^2$ ,  $e = 1$  代入式(2-34), 可以得到双星系统的引力辐射功率:

$$P = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{R^5} \quad (2-35)$$

可以看出, 随着轨道的逐渐减小, 双星系统对外辐射的引力辐射功率也会逐渐增大, 而且质量越大的系统, 引力辐射功率越大, 损耗的能量也越多。

## 2.4 引力波波形

### 2.4.1 喇叭质量

在引力波的讨论中, 关于质量最常使用的不是总质量或者折合质量, 而是使用喇叭质量(chirp mass), 同时引力波的角频率是双星系统旋转角频率的两倍, 现在对喇叭质量  $M_c$  和引力波角频率  $\omega_{gw}$  的定义如下:

$$M_c = \mu^{\frac{3}{5}} m^{\frac{2}{5}} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}} \quad \omega_{gw} = 2\omega \quad (2-36)$$

将式(2-36)代入式(2-35)中可以得到:

$$P = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left( \frac{GM_c \omega_{gw}}{2c^3} \right)^{\frac{10}{3}} \quad (2-37)$$

双星系统的动能与势能之和构成系统总能量  $E = -Gm_1 m_2/(2R)$ , 通过开普勒第三定律  $R^3 = Gm_1 m_2/\omega^2$ , 消除能量表达式中的轨道半径  $R$ , 用喇叭质量和引力波角频率表达总能量:

$$E = - \left( \frac{G^2 M_c^5 \omega_{gw}^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2-38)$$

对于引力辐射功率, 损耗的能量是系统总能量, 两者满足  $P = -dE/dt$ , 将式(2-37)和式(2-38)代入其中, 求解关于引力波角频率  $\omega_{gw}$  的微分方程得到:

$$\omega_{gw} = 2^{-2} \cdot 5^{\frac{3}{8}} \tau^{-\frac{3}{8}} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{-\frac{5}{8}} \quad (2-39)$$

其中,  $\tau = t_0 - t$ ,  $\tau$  是距离合并的时间,  $t_0$  是合并的时间, 将式(2-39)代入式(2-37)以及开普勒第三定律, 可以得到双星系统轨道半径  $R$  和引力辐射功率  $P$  关于时间  $t$  的表达式:



$$\begin{aligned} R &= 2^2 5^{-\frac{1}{4}} (Gm)^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{1}{4}} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{\frac{5}{12}} \\ P &= 2^{-5} 5^{\frac{1}{4}} \frac{c^5}{G} \tau^{-\frac{5}{4}} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{\frac{5}{4}} \end{aligned} \quad (2-40)$$

### 2.4.2 引力波波形图

考虑到角频率  $\omega_{gw}$  变成了关于时间  $t$  的函数，那么式(2-31)中的旋转角度  $\Psi = \omega t$  应该从相乘变换为积分：

$$\Psi_{gw} = \int \omega_{gw}(t) dt = -2(t_0 - t)^{\frac{5}{8}} \left( \frac{5GM_c}{c^5} \right)^{-\frac{5}{8}} \quad (2-41)$$

将式(2-40)和式(2-41)代入式(2-29)得到引力波的波形表达式：

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{1}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{4}} \left( \frac{5}{c\tau} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos \left[ -2 \left( \frac{5GM_c}{c^3} \right)^{-\frac{5}{8}} \tau^{\frac{5}{8}} + \Psi_0 \right] \\ h_\times &= \frac{1}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{4}} \left( \frac{5}{c\tau} \right)^{\frac{1}{4}} \cos \theta \sin \left[ -2 \left( \frac{5GM_c}{c^3} \right)^{-\frac{5}{8}} \tau^{\frac{5}{8}} + \Psi_0 \right] \end{aligned} \quad (2-42)$$

同时也能得到关于引力波频率的表达式  $f = \omega_{gw}/2\pi$ ，为了方便计算和讨论，将式(2-42)中的常数全部转化为数值，且将距离和质量用天文学中常用的单位进行计算，最终得到：

$$\begin{aligned} h &= 3.37 \times 10^{-21} \frac{a M_c^{\frac{5}{4}}}{r} \tau^{-\frac{1}{4}} \cos \left( -1517 M_c^{-\frac{5}{8}} \tau^{\frac{5}{8}} + \Psi_0 \right) \\ f &= 150.33 M_c^{-\frac{5}{8}} \tau^{-\frac{3}{8}} \end{aligned} \quad (2-43)$$

其中  $a$  为 0.5~1 之间的常数， $h_+$  和  $h_\times$  统一使用余弦形式，正弦通过初相位  $\Psi_0$  中添加  $\pi/2$  变换为余弦形式，表达式(2-43)中距离  $r$  使用百万秒差距 Mpc 作为距离单位，啁啾质量  $M_c$  使用太阳质量  $M_\odot$  作为质量单位，通过式(2-43)绘制图像。

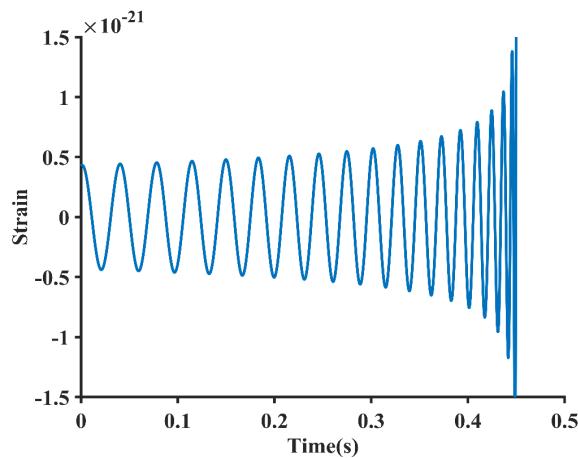


图 2.5 牛顿近似模型波形图

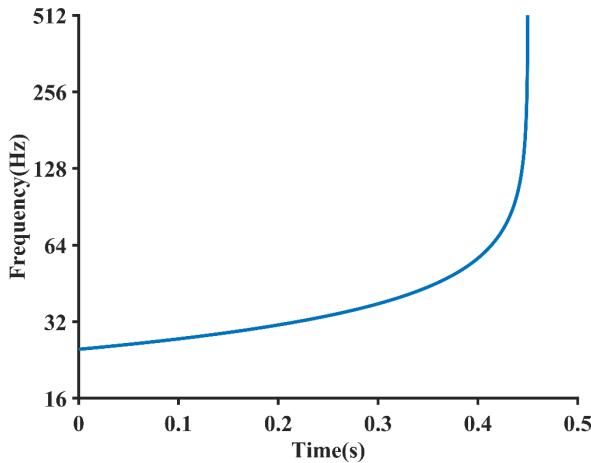


图 2.6 牛顿近似模型时频图

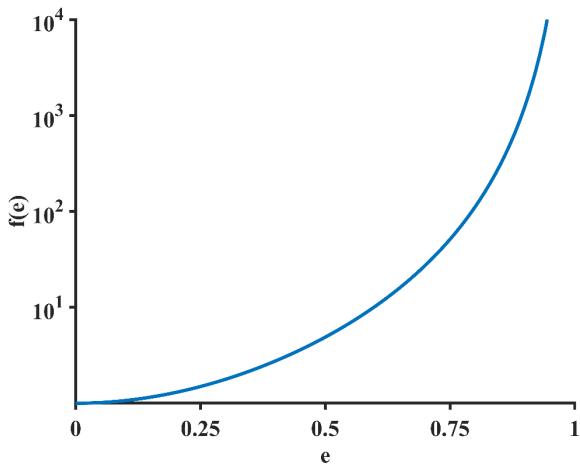
通过图 2.5 和图 2.6 可以看出，引力波的振幅随时间不断增大，频率也随时间不断增大，周期逐渐减小，在接近合并时刻，振幅和频率都急剧增加，趋于无穷大，然后在铃宕阶段不存在波形。通过式(2-43)可以看出，在牛顿近似模型中，对于不同参数的系统，引力波的频率只与双星系统的啁啾质量  $M_c$  有关，而波形和振幅只与双星系统的啁啾质量  $M_c$  和距离  $r$  有关，这也是本文通过牛顿近似模型和 LIGO 数据拟合分析双星系统相关参数的依据和可行性。

## 2.5 椭圆轨道

本节将讨论天体运行中更一般的情况，天体的运行轨道一般为椭圆，只是其离心率  $e$  极小。椭圆轨道的引力辐射与圆轨道不同，两者之间相差一个  $f(e)$ ，具体形式如下<sup>[40]</sup>:

$$\begin{aligned} P &= \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} f(e) \\ f(e) &= (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \end{aligned} \quad (2-44)$$

从式(2-44)可以看出，相同质量构成的双星系统的引力辐射功率与离心率  $e$  相关。对于圆轨道， $e = 0$ ，则  $f(e) = 1$ ，与式(2-35)相同；对于椭圆轨道， $f(e)$  随着离心率的增大而增大，具体变化如图 2.7 所示，所以引力辐射功率也随之增大。

图 2.7  $f(e)$  随着离心率的变化图像

通过对椭圆轨道的分析计算，使用牛顿力学的近似，只是从圆轨道换做椭圆轨道，联合开普勒定律和椭圆轨道的方程，可以得到椭圆轨道半长轴 $a$ 和离心率 $e$ 对时间 $t$ 导数的符合关系，具体形式如下：

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu m^2}{c^5 a^3} (1-e^2)^{-\frac{7}{2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{9b}e^4\right) \quad (2-45)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 \mu m^2}{c^5 a^4} e (1-e^2)^{-\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{121}{304}e^2\right) \quad (2-46)$$

式(2-45)和式(2-46)构成一个一阶非线性微分方程组，一般情况下这种方程组是不存在解析解的，所以本文只有求得数值解，使用的是四阶五级 Runge-Kutta 算法<sup>[41, 42]</sup>，通过 Matlab 中的 ode45 求解该非线性微分方程组，绘制椭圆轨道在不同的半长轴和离心率的情况下，其轨道离心率随时间变化的函数图像，具体情况如图 2.8 和图 2.9 所示。

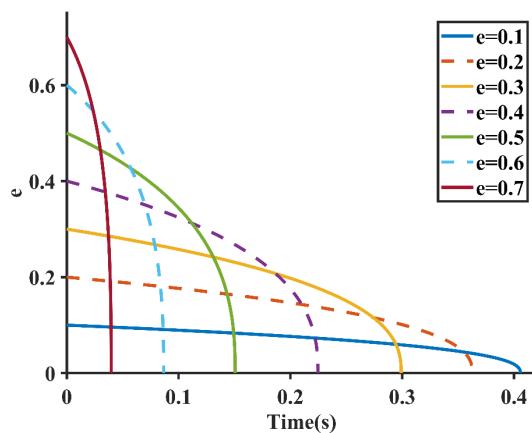


图 2.8 初始离心率不同情况下离心率随时间的变化图

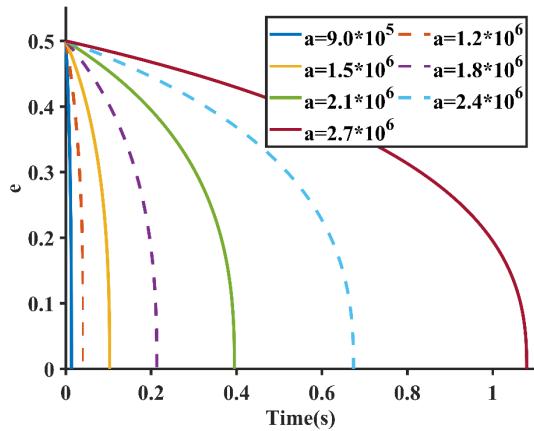


图 2.9 初始半长轴不同情况下离心率随时间的变化图

通过图 2.8 和图 2.9 可以看出，随着时间变化，离心率都会逐渐趋近 0，也就是轨道会随着时间变化而逐渐从椭圆趋于圆形，这种情况称为轨道的圆化。

对于相同半长轴的双星系统，离心率越大，也就越快趋于 0，对外辐射的能量也就越大，也就越快趋于圆形；对于初始离心率相同的轨道，半长轴越小，就越快趋于圆形，可以看作是半长轴越小，具有的能量也就越小，也就越快辐射完能量。

虽然在牛顿近似模型中，轨道圆化的时间极短，这与实际情况存在一定的差异，但是可以定性的分析，双星系统的轨道最终都会趋于圆形轨道，那么对应的引力波的波形及各项参数也应该和圆形轨道相一致，所以本文讨论的双星系统的理论模型，不论是圆形轨道还是椭圆轨道，最后的处理方法都是一样的，都是按圆形轨道进行理论分析和数据拟合，不再单独讨论椭圆轨道的情况。



## 第3章 LIGO 数据处理

### 3.1 LIGO 数据特性

通过引力波进行观测已经成为一种了解宇宙的新手段，LIGO 科学合作小组和 Virgo 合作小组(LVC)已经发表了一系列的发现，从 2015 年第一个被探测到的双星黑洞合并事件 GW150914，2017 年第一次双星中子星合并 GW170817，直到现在总计探测并且确认发现引力波事件有近百个，所有探测到的引力波事件及其细节都已经发表在不同目录中。本文所使用的是由 LIGO、Virgo、KAGRA 合作维护的一组引力波目录(GWTC)，在线的 GWTC 包含来自多个数据发布的可靠检测事件，包括 GWTC-1、GWTC-2、GWTC-2.1 和 GWTC-3<sup>[43, 44]</sup>。

LIGO 和 Virgo 的第二代激光干涉仪引力波探测器对引力波引起的时空应变以及等效的地面上的位移噪声非常敏感，这些都会导致旋臂的长度发生变化，相对臂长的差异变化产生了干涉仪输出的功率变化，并且将其转化为电信号，作为引力波读数和误差信号<sup>[45]</sup>。

对于 GWTC，其对外发布的引力波数据已经是经过了一定的处理分析的，保留了存在引力波信号的一部分，其数据文件主要包含了这些信息：

(一)数据文件中提供了相关时间信息，以 timeline 的形式，使用 GPS 统一时间，例如 GW150914 双黑洞合并的时间为 1126259462.4。

(二)文件中提供的应变信息，记录干涉仪双臂的相对长度的应变信息，其量级大约在  $10^{-19}$  左右，第二代激光干涉仪引力波探测器的灵敏度达到了  $10^{-22}$  左右，应变信息和时间信息结合构成最基本的信号。

(三)关于信号数据的采样率，LIGO 的采样率达到了 16384 Hz，为了方便处理数据，本文使用的是简化版的数据，其采样率为 4096 Hz，只有原始数据采样率的四分之一。

(四)包含探测器的标识信息，表明数据的来源，探测器代码：H1 代表 LIGO 汉福德，L1 代表 LIGO 利文斯顿，V1 代表 Virgo，G1 代表 GEO。本文所使用的数据来源于 LIGO 的 L1 和 H1。

### 3.2 噪声基本性质

噪声会影响 LIGO 探测器灵敏度，分析噪声对于探测引力波信号和推断产生引力波信号的天体物理源的特性至关重要。文献<sup>[46, 47]</sup>指出，地面引力波激光干涉仪所记录到的信号中包含了多种噪声，主要包括热噪声、量子噪声、震动噪声和引力梯度噪声等，这些噪声的大小和频率各不相同，共同构成影响探测器的噪声。



探测器中所有的噪声构成一个时间序列  $n(t)$ ，假设噪声与探测器输出信号  $d(t)$  还有引力波信号  $h(t)$  存在线性关系  $d(t) = n(t) + h(t)$ 。实际情况中这个序列应该是离散的，与探测器的采样率相关，构成离散时间序列  $n_i = n(t_i)$ ，在傅里叶域中为  $\tilde{n}_i = \tilde{n}(f_i)$ 。假设噪声是平稳的高斯分布，通过噪声功率谱密度  $S_n(f)$  表征噪声分布，具体关系如下<sup>[48]</sup>：

$$\mathbb{E}[\tilde{n}^*(f)\tilde{n}(f')] = \frac{1}{2}\delta(f-f')S_n(f) \quad (3-1)$$

噪声功率谱密度的单位为  $\text{Hz}^{-1}$ ，在频域里绘制振幅谱密度 (ASD)  $\sqrt{S_n(f)}$ ，如图 3.1 所示。

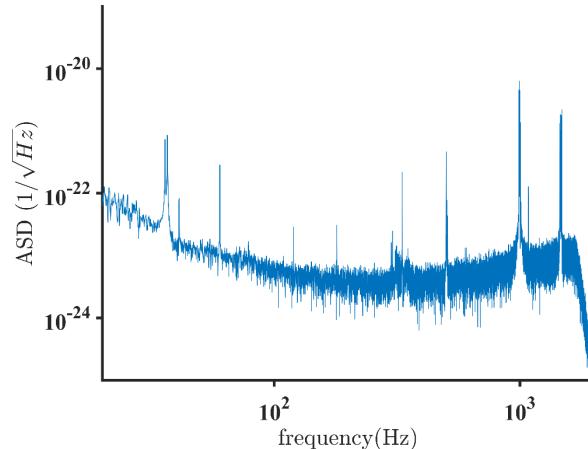


图 3.1 振幅谱密度 ASD

LIGO 探测器平均测量到的噪声振幅在 100 Hz 处大约在  $10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$ ，而探测器的目标灵敏度在 100 Hz 处到达  $4 \times 10^{-24} \text{ Hz}^{-1/2}$ 。LIGO 设计的减震极限在 10 Hz，基本上 20 Hz 以下的信号无法分辨；根据采样定理，设备的采样率必须大于信号采样率的两倍，才能完整保留原始信号中的信息，本文使用的采样率为 4096 Hz，保留完整信息的只有 2048 Hz 以下部分，所以本文选取的是 20 Hz ~ 2 kHz 部分的 ASD。

### 3.3 傅里叶变换

LIGO 探测器中的噪声是近似平缓的，可以很容易地在频域进行表征。分析数据的第一步是使用快速傅里叶变换 (FFT) 将时域的原始数据变换到频域中；通过将傅里叶变换后的数据除以噪声振幅谱密度，对数据进行白化；然后通过滤波器保留 35 Hz ~ 350 Hz 部分的通带，去除了低频的地面震动噪声，以及高频的量子传感噪声，增强了该频带信号的可见性；最后通过快速傅里叶逆变换 (iFFT)，将频域中处理好的信号重新转化到时域中。具体的流程如下<sup>[49, 50]</sup>：



$$d(t) \xrightarrow{\text{FFT}} \tilde{d}(f) \xrightarrow[\text{Band Pass}]{\text{Whiten}} \tilde{d}_w(f) = \frac{\tilde{d}(f)}{\sqrt{S_n(f)}} \xrightarrow{\text{iFFT}} d_w(t) \quad (3-2)$$

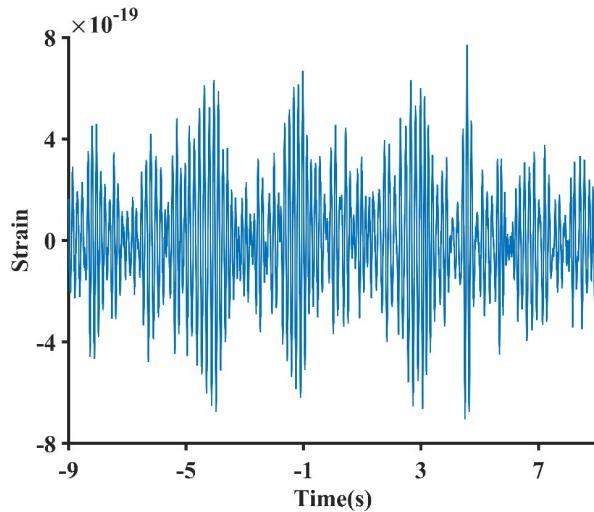


图 3.2 GW150914 原始数据

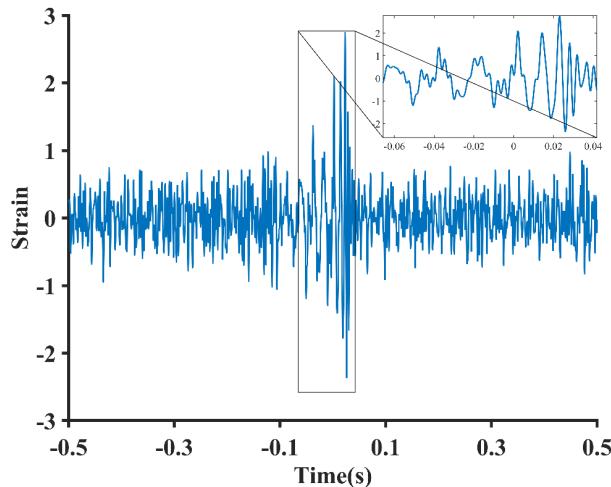


图 3.3 GW150914 处理后数据

其中，图 3.2 和图 3.3 中分别为 GW150914 原始数据及其处理后的数据，原始数据的数量级在  $10^{-19}$  左右，因为在数据白化的过程中有归一化的操作，所以白化后的数据显示的是相对应变强度，其本身的应变为  $10^{-21}$ 。

### 3.4 小波变换

小波变换同傅里叶变换一样，在信号分析和数据处理中经常使用，其基础思想和短时傅里叶变换（STFT）的加窗类似，而且其窗口大小会自适应变化，也就是所谓的小波，使用有限长而且会衰减的小波基，解决了 STFT 的缺点，替换了 STFT 中无限长的三角函数基，更加利于对信号的时频分析<sup>[51-53]</sup>。



在 2.4.2 的引力波波形图中, 通过式(2-43)可以看出, 牛顿近似引力波模型中, 引力波的频率随时间的变化关系只与啁啾质量有关, 可以通过将模型中的频率变化与实际的频率变化对比分析, 从而分析双星系统啁啾质量。上一节中数据处理后的数据是时域中的, 需要通过变换到时频图中才能进行对比分析, 本文使用的是连续小波变换(CWT), 其中 LIGO 的数据处理中使用的是 Sin-Gaussian 小波, 为了方便进一步的操作和数据处理分析, 本文采用的是最广泛的 Morse 小波, 将图 3.3 所示的数据进行 CWT 变换为图 3.4。

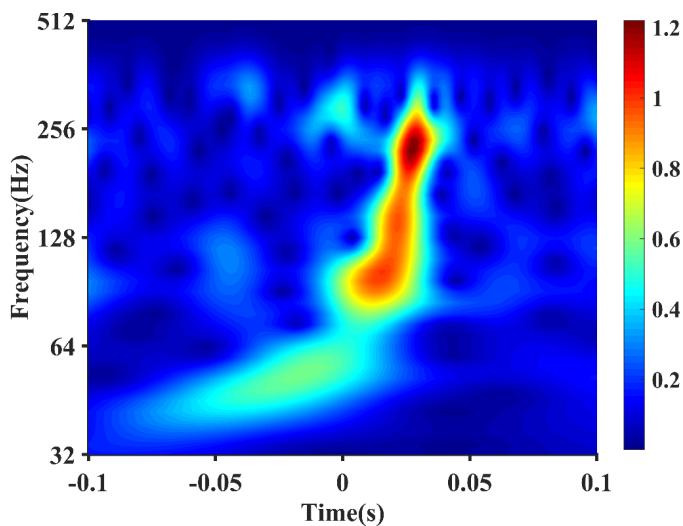


图 3.4 引力波信号通过 CWT 变换后的时频图

通过图 3.4 可以看出, 引力波信号在时频图上非常明显, 其频率从 35 Hz 迅速上升到 350 Hz, 总时间仅不到 0.1 s, 这极短的信号称为啁啾信号, 这是来自十亿光年外双黑洞合并所引起的时空涟漪。在第 4 章中, 将通过本章的数据处理方法, 对一系列引力波事件进行处理分析, 同时结合第 2 章中的牛顿近似引力波模型, 对比分析这些引力波事件波源的啁啾质量参数。



## 第4章 数据对比分析

### 4.1 数值相对论对比分析

为了验证牛顿近似模型的正确性,本节将牛顿近似模型(NA-model)与 LIGO 的数值相对论(NR)所模拟的波形和时频等各项参数进行对比分析,对于相同的致密双星系统,采用不同的模型会有不同的波形图像,通过数值相对论和牛顿近似模型绘制的图像如图 4.1 和图 4.2 所示。

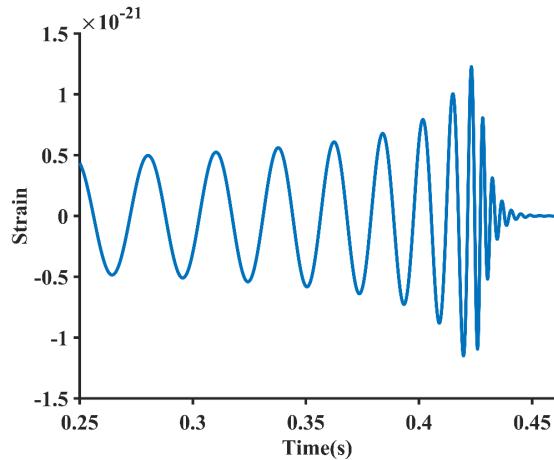


图 4.1 数值相对论模拟波形图

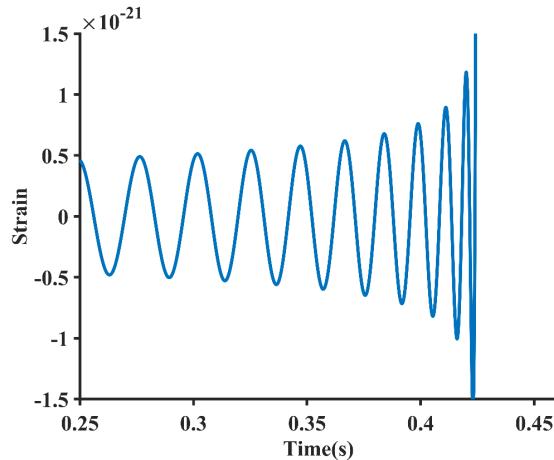


图 4.2 牛顿近似模型模拟波形图

由图 4.1 和图 4.2 可以看出,在波形方面,数值相对论和牛顿近似模型十分接近,两者在振幅和相位上几乎一致。不同的是,牛顿近似模型只是低阶近似,在双星系统无法视作质点时失效,所以在合并阶段会趋于无穷大,并且在合并后没有图像,而数值相对论不仅绘制了完整的合并阶段,还绘制了铃宕阶段引力波振幅逐渐趋于 0 的过程,而且没有出现无穷大的突变。总体上看,牛顿近似模型



在旋近阶段和合并阶段前期，与数值相对论模拟的图像基本吻合，但是在合并阶段后期和铃宿阶段不符合。对于系统的间距以及速度等参数的模拟如图 4.3 所示。

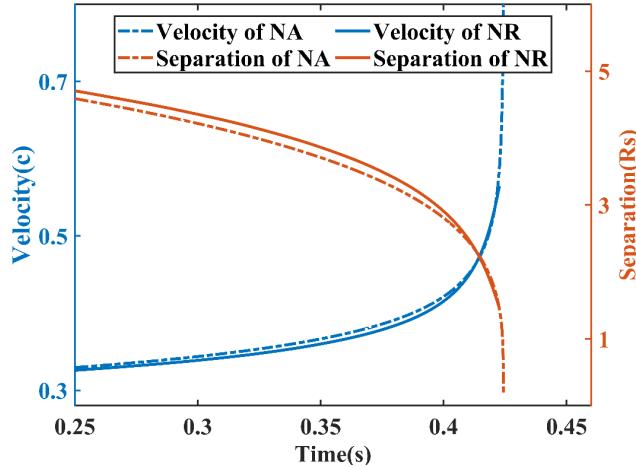


图 4.3 数值相对论和牛顿近似模型模拟的相对速度和距离

在图 4.3 中，相对速度是指系统的线速度相对于光速  $c$  的比值，而相对距离是双星系统的间距相对其施瓦西半径  $R_s$  的比值，具体表达如下：

$$\text{Velocity} = \frac{v}{c} = \sqrt[3]{\frac{Gm\pi f}{c^3}} \quad \text{Separation} = \frac{R}{R_s} = \frac{Rc^2}{2Gm} \quad (4-1)$$

对于相对速度，牛顿近似模型模拟的参数曲线比数值相对论模拟的略高一点；对于相对距离，牛顿近似模型模拟的参数曲线比数值相对论模拟的略低一点。在相对速度和相对距离的交点处，二者基本重合，之后数值相对论模拟的图像在有限值处停止，而牛顿近似模型的图像，相对速度和相对距离在合并处分别趋于无穷大和 0。总体上看，同波形图一样，牛顿近似模型在旋近阶段和合并阶段前期，与数值相对论模拟的图像基本吻合，但是在合并阶段后期和铃宿阶段不符合。

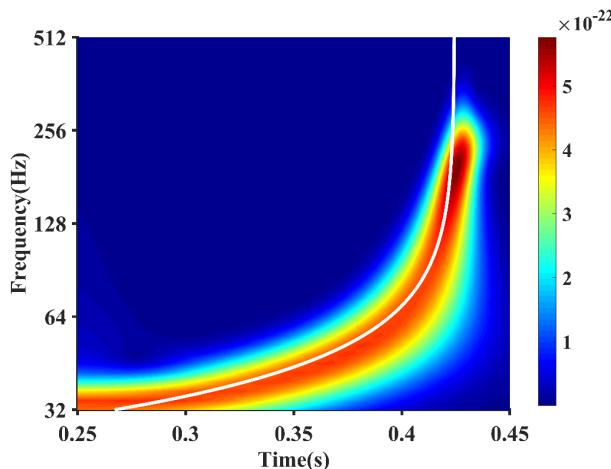


图 4.4 CWT 变换后的数值相对论波形与牛顿近似模型拟合



图 4.4 是将图 4.1 中数值相对论模拟的波形图, 通过 3.4 中的 CWT 变换到时频图中, 与牛顿近似模型的频率曲线(2-43)拟合。

可以看出, 两者的频率都随着时间而升高, 在接近合并时刻, 数值相对论的频率达到最大值后归零, 而牛顿近似模型则是趋于无穷大。两者的图像大致吻合, 在频率变化上, 牛顿近似模型可以近似的模拟数值相对论的频率变换。

总体而言, 不论是波形图、相对速度和距离, 还是时频图, 牛顿近似模型在一定程度上都和数值相对论模拟的图像吻合, 尤其是在旋近阶段和合并阶段前期。虽然在合并阶段后期和铃宕阶段, 牛顿近似模型会出现无穷大、0 或者不存在的情况, 但是总体上不影响参数分析, 特别是在时频图中, 可以很好地符合图像, 有利于最终与实际数据的对比分析。

## 4.2 引力波事件对比分析

### 4.2.1 GW150914

通过与数值相对论模拟的图像对比, 可以在一定程度上验证牛顿近似模型的准确性, 在本节中, 将进一步验证其准确性, 将牛顿近似模型与 LIGO 研究小组所探测到的引力波事件对比分析。此次对比所使用的是 GW150914 事件, 系统相关参数如表 4.1 所示<sup>[54]</sup>, 绘制事件对应的波形图 4.5 和时频图 4.6。

表 4.1 GW150914 事件相关参数

参数	数据
啁啾质量 $M_c$	$28.6 M_{\odot}$
总质量 $m$	$66.2 M_{\odot}$
距离 $r$	440 Mpc

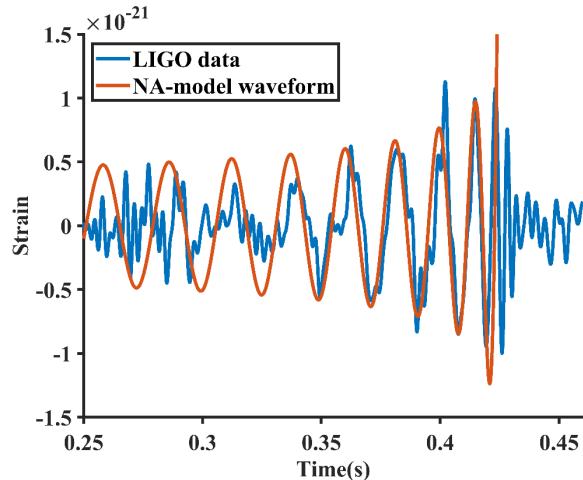


图 4.5 GW150914 与牛顿近似模型波形拟合

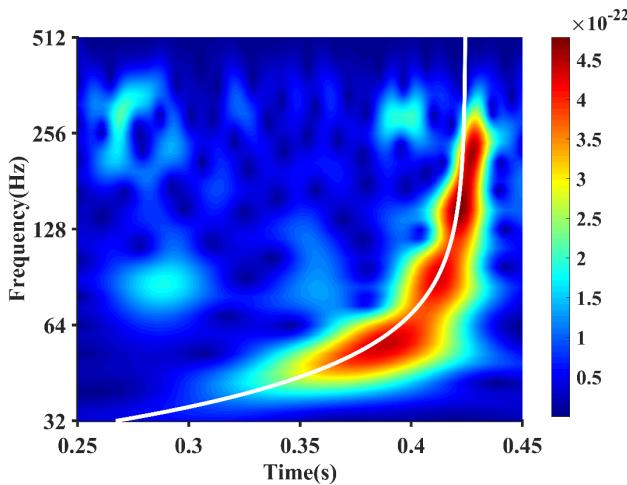


图 4.6 GW150914 与牛顿近似模型时频拟合

在图 4.5 中, 显示了 LIGO 在双星系统合并前后时刻的探测数据, 在残余的噪声中基本可以看出引力波信号。将基本参数代入式(2-43), 绘制牛顿近似模型的波形图, 并且与实际数据中的引力波信号进行拟合, 可以很好的符合实际信号。在合并阶段前期, 引力波信号振幅增大, 相对背景噪声更加明显, 与模型拟合很好, 在振幅和相位上几乎重合, 在合并阶段后期, 同样因为出现无穷大的情况, 模型并不能很好的符合实际数据。

在图 4.6 中, 将图 4.5 中 LIGO 探测到的引力波信号, 通过 CWT 变换, 变换到时频图中。在时频图中, 引力波信号在背景噪声中十分突出, 在合并时刻有一个明显的爆发。牛顿近似模型所绘制的频率曲线可以很好地符合信号, 在合并时刻趋于无穷大。而在合并前较远处, 引力波信号不够强, 淹没在残余的噪声背景中, 无法分辨出信号。

总体而言, 牛顿近似模型所模拟的波形和频率曲线, 与 GW150914 引力波事件的实际数据符合较好, 虽然在旋近阶段引力波信号淹没在背景噪声中, 并且在合并时刻趋于无穷大, 但是在合并前符合的很好, 不论是波形的振幅和相位, 还是频率曲线, 都可以通过牛顿近似模型近似描述。

#### 4.2.2 LIGO 数据对比分析

通过与 GW150914 引力波事件实际数据对比分析, 在一定程度上验证了牛顿近似模型应用到 LIGO 引力波数据分析的可行性和准确性。在本节中, 选取了 18 个 LIGO 研究小组所探测到的引力波事件, 通过牛顿近似模型进行拟合分析, 计算双星系统的啁啾质量参数, 并且与 LIGO 给出的系统参数进行误差分析。

LIGO 探测并且确认的引力波事件已有近百个, 本节中所使用的 18 个引力波事件, 均是信噪比大于 15 的事件, 如果信噪比过低, 在时频图中引力波信号



会淹没在噪声背景中，不能通过本文所使用的方法进行分析。同时在对 LIGO 数据处理的过程中，数据白化有归一化的操作，导致最后的应变显示的是相对应变，不能得到引力波实际的应变，也就无法得到对应的振幅，无法通过振幅计算距离，所以本节中只是通过时频图拟合频率曲线，拟合分析双星系统的啁啾质量，对 18 个引力波事件的时频图拟合如图 4.7 所示。

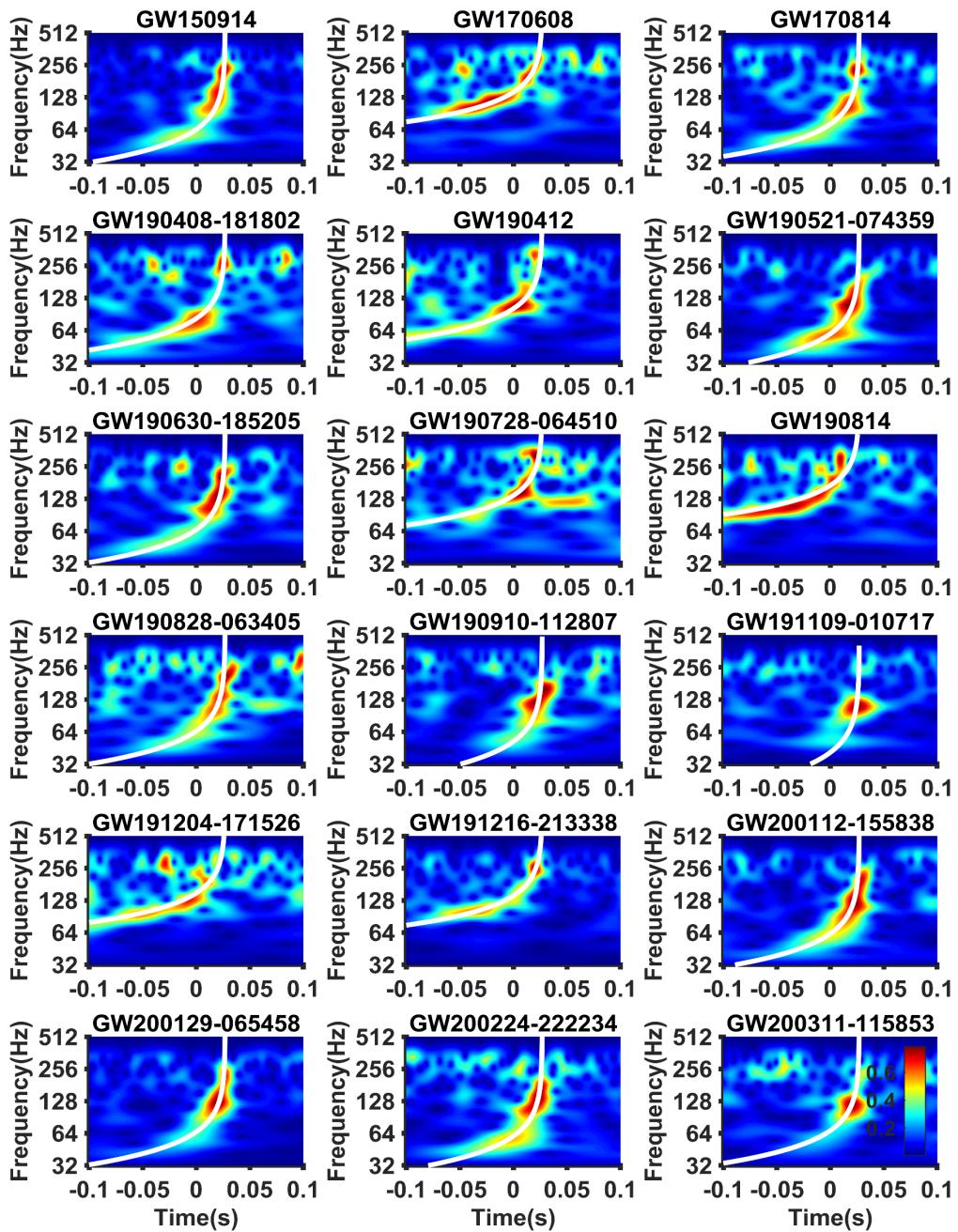


图 4.7 牛顿近似模型与 LIGO 引力波数据时频拟合

在图 4.7 中，将 18 个引力波事件的数据进行处理，提取引力波信号并且通过 CWT 变换到时频图，拟合牛顿近似模型的频率曲线，图中的颜色表示的是信



号相对强度，对应引力波信号的相对应变强度。

可以看出，引力波信号在背景噪声中十分明显，与频率曲线拟合的较好，可以通过曲线进一步分析双星系统的啁啾质量，因为牛顿近似模型只是比较低阶的近似，所以通过对应的频率曲线拟合分析参数，比 LIGO 的参数浮动范围更大，具体的参数情况如表 4.2 所示。

表 4.2 LIGO 参数和牛顿近似模型拟合参数

引力波事件	LIGO 参数/M <sub>☉</sub>	NA-model 参数/M <sub>☉</sub>
GW150914	28.6 <sup>+1.7</sup> <sub>-1.5</sub>	27 <sup>+7</sup> <sub>-6</sub>
GW170608	7.9 <sup>+0.2</sup> <sub>-0.2</sub>	8.5 <sup>+1.5</sup> <sub>-1.5</sub>
GW170814	24.1 <sup>+1.4</sup> <sub>-1.1</sub>	23 <sup>+6</sup> <sub>-3</sub>
GW190408_181802	18.3 <sup>+1.9</sup> <sub>-1.2</sub>	19 <sup>+7</sup> <sub>-4</sub>
GW190412	13.3 <sup>+0.4</sup> <sub>-0.3</sub>	14 <sup>+2</sup> <sub>-2</sub>
GW190521_074359	32.1 <sup>+3.2</sup> <sub>-2.5</sub>	30 <sup>+14</sup> <sub>-7</sub>
GW190630_185205	24.9 <sup>+2.1</sup> <sub>-2.1</sub>	26 <sup>+6</sup> <sub>-6</sub>
GW190728_064510	8.6 <sup>+0.5</sup> <sub>-0.3</sub>	9 <sup>+2</sup> <sub>-1</sub>
GW190814	6.09 <sup>+0.5</sup> <sub>-0.3</sub>	6.5 <sup>+2.5</sup> <sub>-1</sub>
GW190828_063405	25 <sup>+3.4</sup> <sub>-2.1</sub>	26.5 <sup>+7.5</sup> <sub>-5.5</sub>
GW190910_112807	34.3 <sup>+4.1</sup> <sub>-4.1</sub>	36 <sup>+12</sup> <sub>-10</sub>
GW191109_010717	47.5 <sup>+9.6</sup> <sub>-7.5</sub>	49 <sup>+23</sup> <sub>-31</sub>
GW191204_171526	8.55 <sup>+0.38</sup> <sub>-0.27</sub>	7.9 <sup>+1.6</sup> <sub>-0.4</sub>
GW191216_213338	8.33 <sup>+0.22</sup> <sub>-0.19</sub>	8.6 <sup>+1.4</sup> <sub>-1.6</sub>
GW200112_155838	27.4 <sup>+2.6</sup> <sub>-2.1</sub>	28 <sup>+10</sup> <sub>-7</sub>
GW200129_065458	27.2 <sup>+2.1</sup> <sub>-2.3</sub>	26 <sup>+12</sup> <sub>-6</sub>
GW200224_222234	31.1 <sup>+3.2</sup> <sub>-2.6</sub>	29.5 <sup>+11.5</sup> <sub>-6.5</sub>
GW200311_115853	26.6 <sup>+2.4</sup> <sub>-2</sub>	25 <sup>+25</sup> <sub>-10</sub>

表 4.2 展示了 18 个引力波事件中，LIGO 给出的参数范围和牛顿近似模型给出的参数范围。引力波事件之间差异较大，所以通过计算其相对啁啾质量和相对误差来比较两者。

相对啁啾质量和相对误差的计算如下：

$$\text{Relative chirp mass} = \frac{\text{Mass}}{\text{Mass of LIGO}} \quad (4-2)$$

$$\text{Relative error} = \frac{|\text{Mass} - \text{Mass of LIGO}|}{\text{Mass of LIGO}} \times 100\% \quad (4-3)$$



计算相对啁啾质量和相对误差，均是以 LIGO 给出的最终值为参考计算，具体误差分析如图 4.8 所示。

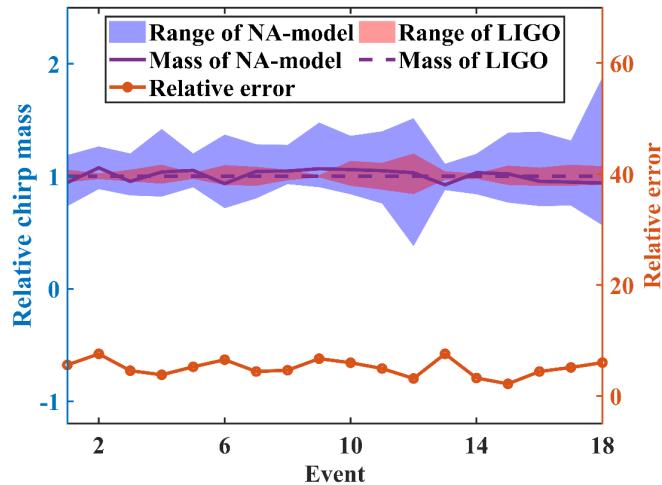


图 4.8 相对啁啾质量与相对误差分析

图 4.8 显示了相对啁啾质量和相对误差分析的结果，可以看出牛顿近似模型的在拟合分析双星系统参数方面的准确性。

对于相对啁啾质量，LIGO 和牛顿近似模型都给出了一个范围，其中红色部分是 LIGO 给出的范围，蓝色部分是牛顿近似模型拟合分析给出的范围。可以明显看出，牛顿近似模型的范围比 LIGO 的范围更广，这主要是因为牛顿近似模型只是一个比较低阶的近似，在估算上误差更大，在时频图的拟合上，只能通过确定相对强度来确定范围。同时因为图像的  $y$  轴是对数化的，图像并不是等间距的，所以在拟合分析的时候，其正向范围一般比负向范围更大。虽然牛顿近似模型的范围比 LIGO 的范围更大，但是也基本都包含其中，没有偏差很大的情况。

对于相对误差，分析 LIGO 和牛顿近似模型给出的最终值的相对误差。牛顿近似模型在拟合频率曲线的时候，以信号相对强度最大的中间为准，拟合结果与 LIGO 的最终值相符合，相对误差基本都在 10% 以内，由此可以说明牛顿近似模型对于分析 LIGO 引力波数据的精确性和可行性。

### 4.3 牛顿近似模型的局限性

经过前两节的分析，可以说明牛顿近似模型在处理双星系统合并的情况下，有着很好地近似，可以进行精准地分析，但是同时也存在着比较大的局限性，主要有以下几个方面的问题：

#### (一) 引力波信号的信噪比必须大于 12

由于牛顿近似模型在时频图中拟合频率曲线时，需要拟合信号的最大强度，如果其相对强度不够大，就会导致信号淹没在背景噪声中，无法进行拟合分析。



经过笔者的实验分析，牛顿近似模型的拟合分析要求 LIGO 探测的引力波信号的信噪比在 12 以上，信噪比低于 12 的引力波信号，在时频图中会淹没在噪声背景中，无法进一步与频率曲线拟合分析，必须通过其它的方法来处理和分析。

### (二)存在许多未考虑的影响

一方面是因为在对 LIGO 的数据处理中，有许多近似的处理，且采用的信号采样率为 4096 Hz，只有实际信号采样率的四分之一，所以会有信息的损失；另一方面在做 CWT 变换时，本文采用的是最广泛的 Morse 小波，LIGO 使用的是 Sin-Gaussian 小波，两者存在一定的区别。最重要的还是因为牛顿近似模型只是作为一个低阶近似，与实际有一定偏差，没有考虑自旋、红移、进动及其它效应对波形的影响。

### (三)波形在合并阶段后期和铃宕阶段不符合

牛顿近似模型的波形，在合并阶段后期趋于无穷大，在铃宕阶段没有波形，主要还是因为牛顿近似模型的低阶近似，仅能在旋近阶段和合并阶段前期符合，虽然波形上有差异，但是对于拟合分析没有太大影响。可以通过高阶后牛顿近似分析更加符合实际的波形，或者采用 LIGO 通过数值相对论模拟的波形。

### (四)不能通过引力波振幅拟合分析距离等参数

理论上牛顿近似模型可以应用于对引力波振幅的分析，但是在对 LIGO 的数据处理中，数据白化过程中有归一化的操作，使得信号展现出相对振幅，没有实际信号的数量级，无法通过振幅分析距离等参数。

### (五)不能直接从日常数据中寻找引力波信号

本文在数据处理中为了简化操作，并没有做过多的处理，而是事先知道引力波事件具体的时间，再对事件附近的时间段进行分析，如果采用滤波匹配的方式进行数据分析，理论上也是可以通过匹配牛顿近似模型寻找引力波信号，但是这会需要大量分析处理 LIGO 原始信号，连续多次分段通过各种变换操作，对计算机的要求较高，并且数据分析也不是本文的重点，所以本文作了一定的精简，目的是为了验证牛顿近似模型的准确性和可行性。

综上所述，牛顿近似模型虽然在一定程度上可以符合实际情况，但是也存在不少的局限性，与真实情况有一定的偏差，但是在本文的讨论范围内，这些局限性也基本可以忽略，并不会影响本文中对双星系统的参数分析。



## 总结与展望

本文的主要结果是通过构建牛顿近似模型和分析处理 LIGO 引力波数据来拟合分析双星系统的啁啾质量参数，从而验证牛顿近似模型在处理 LIGO 引力波数据的精确性和可操作性。

本文首先在第 1 章中介绍了引力波的历史研究情况，从引力波的理论诞生到实际探测引力波，阐述了引力波相关研究背景，包括引力波探测方案，引力波波源及其分类，还有一般的引力波数据处理方案和参数估计方法，最后说明了本文的研究意义和全文的结构安排。

在第 2 章中，本文首先介绍了双星系统的具体模型，随时间变化各个阶段的情况，然后引入线性理论，通过弱场近似求解爱因斯坦场方程对应的波动解，引入引力四极矩求解引力辐射能，通过坐标变换求解带有引力辐射能损耗的引力波波形图和频率曲线，同时定性的通过数值解分析椭圆轨道的情况，由于其轨道圆化的特点所以一并视作圆轨道进行分析讨论。

在第 3 章中，本文主要讨论处理 LIGO 引力波数据，简要介绍 LIGO 的数据特性和噪声基本性质，通过 FFT 变换将数据变换到频域上，经过 ASD 分析和数据白化操作，再通过 iFFT 变换回时域来获取引力波信号，通过 CWT 变换将信号在时频图中显示。

在第 4 章中，首先将牛顿近似模型与 LIGO 的数值相对论模拟的双星系统相关图像进行对比分析，然后与 GW150914 引力波事件进行波形拟合和时频拟合，最后将牛顿近似模型应用于 18 个引力波事件进行拟合分析并且讨论了相对误差，验证模型准确性和可行性，最后讨论了模型的局限性。

本文所研究的牛顿近似模型，在一定程度上可以定性和定量地分析致密双星系统的具体情况和物理图像，并且可以拟合分析双星系统的相关参数，本文的后续工作打算进一步分析 LIGO 引力波数据：一方面进一步优化模型，学习研究更加精确的模型，例如后牛顿高阶近似模型或者是 LIGO 的引力波模型；另一方面是优化数据处理方法，完整地学习滤波匹配相关处理方法，在完整的数据中提取引力波信号并且进一步处理分析，使用更加精确的方法去分析系统的参数。在数据处理上，希望可以使用更加创新的方法，比如通过新型的算法来处理数据，降低对计算机的要求，用更少的资源分析引力波数据，学习研究不同形式的引力波，不只是局限于双星系统的中频引力波，希望有机会进一步突破创新。

从引力波理论的提出，到引力波的实际探测，经历了百年的时间，通过引力



波探测，人们对于宇宙的理解更深一步。相比于射电天文学，引力波天文学有着许多的优势，不被物质吸收，没有传统观测的窗口限制。引力波探测有着巨大的研究空间，等待着人们去探索发现，衷心希望未来对引力波的研究越来越深入！



## 参考文献

- [1] A. Einstein. On the electrodynamics of moving bodies[J]. Annalen der Physik, 1905,17: 891-921.
- [2] A. Einstein. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie[J]. Math.Phys, 1915: 778-786.
- [3] A. Einstein. Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation[J]. Math.Phys, 1916: 688-696.
- [4] A. Einstein. Über Gravitationswellen[J]. Math.Phys, 1918: 154-167.
- [5] A. S. Eddington. The propagation of gravitational waves[J]. Proc.Roy.Soc.Lond.A, 1922,102: 268-282.
- [6] P. R. Saulson. Josh Goldberg and the physical reality of gravitational waves[J]. General Relativity and Gravitation, 2011,43: 3289 – 3299.
- [7] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger[J]. Physical Review Letters, 2016,116(6): 061102.
- [8] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral[J]. Physical Review Letters, 2017,119(16): 161101.
- [9] R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, et al. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2020,896(2): L44.
- [10] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger[J]. Astrophysical Journal Letters, 2017,848(2): L12.
- [11] J. Weber. Evidence for discovery of gravitational radiation[J]. Physical Review Letters, 1969,22(24): 1320-1324.
- [12] R. A. Hulse, J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system[J]. Astrophysical Journal, 1975,195: L51-L53.
- [13] A. Abramovici, W. E. Althouse, R. W. P. Drever, et al. LIGO: The Laser interferometer gravitational wave observatory[J]. Science, 1992,256: 325-333.
- [14] 吴世臣. 光强涨落关联引起的LIGO后镜光热散粒噪声[D]. 武汉: 华中科技大学, 2007.
- [15] J. Aasi, B. P. Abbott, R. Abbott, et al. Advanced LIGO[J]. Classical and Quantum Gravity, 2015,32(7): 074001.
- [16] F. Acernese, M. Agathos, K. Agatsuma, et al. Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector[J]. Classical and Quantum Gravity, 2015,32(2):



- 024001.
- [17] 吴树范, 王楠, 龚德仁. 引力波探测科学任务关键技术[J]. 深空探测学报, 2020,7(2): 118-127.
- [18] 赵文, 张星, 刘小金, 等. 引力波与引力波源[J]. 天文学进展, 2017,35(3): 316-344.
- [19] 唐孟希, 李芳昱, 赵鹏飞, 等. 引力波、引力波源和引力波探测实验[J]. 云南天文台台刊, 2002(3): 17.
- [20] 李芳昱, 文毫, 方祯云. 高频引力波与现代宇宙学[J]. 物理, 2012,41(10): 5.
- [21] 胡一鸣, 梁正程, 范会敏. 引力波数据处理技术[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2021,60(1): 11.
- [22] 王小鸽, Lebigot ERIC, 都志辉, 等. 引力波数据分析[J]. 天文学进展, 2016,34(1): 50-73.
- [23] H. Mathur, K. Brown, A. Lowenstein. An analysis of the LIGO discovery based on introductory physics[J]. American Journal of Physics, 2017,85(9): 676-682.
- [24] H. Mathur, K. Brown, A. Lowenstein. 基于普通物理分析LIGO引力波数据[J]. 大学物理, 2018,37(6): 7.
- [25] 蔡荣根, 曹周键, 韩文标. 并合双星系统的引力波理论模型[J]. 科学通报, 2016,61(14): 1525-1535.
- [26] 王玉诏. 后牛顿自旋致密双星拉格朗日动力学[D]. 南昌: 南昌大学, 2011.
- [27] 赵峥, 刘文彪. 广义相对论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.
- [28] 冯嘉茜. 引力波的传播及其对修改引力模型的观测限制[D]. 南昌: 南昌大学, 2021.
- [29] 赵宗华. 引力波事件GW150914的弱等效原理研究[D]. 信阳: 信阳师范学院, 2017.
- [30] 温伯格. 引力和宇宙学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [31] 王龑. 引力波天文学及数据处理相关问题[D]. 南京: 南京大学, 2013.
- [32] 冯中文. 黑洞的演化与引力波的相关问题研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2017.
- [33] R. Cai, Z. Cao, Z. Guo, et al. The gravitational-wave physics[J]. National Science Review, 2017,4(5): 687 - 706.
- [34] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [35] 赵峥, 刘文彪, 张轩中. 引力波与广义相对论[J]. 大学物理, 2016,35(10): 10.
- [36] Л. Д. 朗道, E M. 栗夫希兹. 场论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [37] W 泡利. 相对论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [38] 李芳昱. 引力辐射的多级展开和引力-电磁多极辐射的对偶性[J]. 重庆大学学报, 1987(1): 118-128.
- [39] 刘辽, 赵峥. 广义相对论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.



- [40] M. Maggiore. Gravitational waves. Volume 1: theory and experiments[M]. Oxford University Press, 2007.
- [41] 张德丰. MATLAB数值计算方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [42] 胡庆婉. 常微分方程初值问题的数值求解及MATLAB实现[J]. 科技信息, 2012(7): 2.
- [43] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs[J]. Physical Review X, 2019,9(3): 031040.
- [44] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the First Half of the Third Observing Run[J]. Physical Review X, 2021,11(2): 021053.
- [45] 王运永. 引力波探测[M]. 北京: 科学出版社, 2020.
- [46] 王运永, 朱宗宏. 激光干涉仪引力波探测器的噪声和灵敏度[J]. 现代物理知识, 2019(3): 7.
- [47] 严宇钊, 杨明, 姜万录. 引力波探测器的噪声及噪声处理综述[J]. 电子测量技术, 2019,42(24): 8.
- [48] S. A. Usman, A. H. Nitz, I. W. Harry, et al. The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence[J]. Classical and Quantum Gravity, 2016,33(21): 215004.
- [49] L. Tsukada, K. Cannon, C. Hanna, et al. Application of a zero-latency whitening filter to compact binary coalescence gravitational-wave searches[J]. Physical Review D, 2018,97(10): 103009.
- [50] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. A guide to LIGO-Virgo detector noise and extraction of transient gravitational-wave signals[J]. Classical and Quantum Gravity, 2020,37(5): 055002.
- [51] 刘文华. 基于Matlab的图像小波变换仿真[J]. 集成电路应用, 2020,37(10): 22-24.
- [52] 冯毅, 王香华. 小波变换降噪处理及其Matlab实现[J]. 数据采集与处理, 2006,12 Suppl: 37-39.
- [53] 李晟. 小波与频谱分析[D]. 上海: 上海交通大学, 2009.
- [54] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. Properties of the Binary Black Hole Merger GW150914[J]. Physical Review Letters, 2016,116(24): 241102.



## 致 谢

转瞬之间，四年的大学生活已经临近尾声，我也即将踏入下一个阶段的学习和研究，值此毕业论文完成之际，我谨向给与过我指导和帮助的老师、同学以及亲友致以衷心的祝愿和诚挚的感谢！

首先，感谢我的指导老师吴迪老师，从论文选题到最终成稿，吴老师一直耐心地帮助我，一字一句地指导我修改论文，鼓励我深入自己感兴趣的课题，给我了许多重要的建议，让我对未来的规划更加明确，吴老师丰富渊博的知识和严谨求精的态度，无时无刻地影响着我，让我受益匪浅。感谢我的班主任李国平副教授，李老师四年来自予了我无数的帮助，在考研期间鼓励我努力坚持下去，在关键时刻给我方法和建议。感谢中国科学院大学汤勇副教授，汤老师在科创计划中给予我帮助，指导我完成课题项目。感谢物理与天文学院所有给予我帮助的老师，让我在这四年学到了无数专业的知识和为人处世的道理。

感谢校青志协的各位同学，两年的部门经历让我学习到很多东西，结交了很多志同道合的朋友。感谢同学肖尧、向宇在校期间给予我的帮助，四年同窗生活终身难忘。感谢大学四年给予我关心和帮助的同学和朋友，希望各位都能在未来更上一层楼。

感谢爷爷奶奶对我理解和关心，他们虽然并不了解我的专业，但是仍然相信我的选择，支持和鼓励我不断前行，希望他们平安健康。感谢我的母亲对我学业的支持，对我的包容和理解，给我无微不至的关怀。感谢妹妹曹润艺对我的关心和鼓励，与我分享生活中的趣事，疏解内心的烦恼。感谢所有帮助、鼓励、支持和关心我的家人。

最后感谢我自己，在大学期间完成了自己计划的各项事务，没有荒废四年的时光，达到了自己理想的目标，真正地提升了自己的专业素养和思想态度。本文既是本科四年的结束，也是未来新征程的开始，希望在以后的道路上，我能够坚定自己的选择不断前行。

不忘初心，走好自己的路，继续努力，追寻自己的梦想！

吴洁

2022年4月