differential geometry

libo

March 22, 2020

不论是连续映射的定义还是同胚映射的定义都要求定义域 M 和和 $f(M)$ 有自己的拓扑, 或者说这是一个□蕴定义

1 旋度与散度

命题 1.1. *函数 f(t), 若以 dt 为单位基 (即 d dt=0), 那么* $f_{tt}=\frac{d^2f}{(dt)^2}$*, 且对于另一个参数下的有如下变换公式*

Proof.

$$\frac{d^2f}{(dt)^2}$$
$$=\frac{d(f_t dt)}{(dt)^2}=\frac{f_{tt}(dt)^2+f_t d^2t}{(dt)^2}=f_{tt}$$

$$\frac{d^2f}{(dt)^2}$$
$$=\frac{d(f_s dt)}{(dt)^2}=\frac{f_{ss}(ds)^2+f_s d^2s}{(dt)^2}$$
$$=f_{ss}(s_t)^2+f_s\frac{d^2s}{(dt)^2}$$
$$=f_{ss}(s_t)^2+f_s s_{tt}$$

□

定义 1.1. *n 维向量空间, 其存在外积, 其中指向 x_i 轴正方向的楔积为* $(-1)^i dx_1\wedge..\overline{dx_i}\wedge..dx_n$

定义 1.2. *对于矢量场 F, 定义它的散度为* $divF:=\lim\limits_{v\to 0}\frac{1}{V}\oint_{\partial\Omega}F\cdot dS$*。*

定义 1.3 (Rieman 流形上的散度定义)**.** *设 n 维 Rieman 流形 M 上的向量场 r, 那么* $\lim\limits_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial\Omega}<r,n>ds=\lim\limits_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial\Omega}\sum\limits_i r_i dx_1\wedge...\overline{dx_i}..dx_n$

定理 1.1 (gauss 散度定理)**.** *散度的积分等于*

命题 1.2. *不同维流形不同胚*[1]

Proof. 如图 □

定义 1.4. *一个拓扑空间 M 的子空间 N, 则 N 由 M 诱导的拓扑为:U 是 N 的开集当切仅当有, V 是 M 的开集,* $U=V\bigcap M$

定义 1.5 (旋度)**.** *似乎只能定义在 3 维空间上, L 是闭曲线, S 是以 L 为边界的曲面面积,* $\lim\limits_{\triangle S\to 0}\frac{1}{\triangle S}\oint_L vdr=\lim\limits_{\triangle S\to 0}\frac{1}{\triangle S}\oint_L v_x dx+v_y dy+v_z dz$*, 然后应用 stokes 公式得到* $\nabla\times$

命题 1.3. *在直角坐标系下, 散度的等价定义是* $divF:=\nabla\cdot F$

[1] 流形不必是连通的, 两片区域也有可能是流形

Proof. (初等证明): 取立方体区域 $\Omega = \{(-a,a)\times(-a,a)...\}$, $\frac{1}{(2a)^n}\oint_{\partial\Omega}\sum_i (F_i(x_1...a..x_n) - F_i(x_1..-a..x_n))\, dx_1\wedge...\overline{dx_i}\wedge..dx_n$

$$= \frac{1}{(2a)}\sum_i (F_i(\tilde{x_1}..a..\tilde{x_n}) - F_i(\tilde{x_1}..-a..\tilde{x_n}))$$
$$= \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

□

Proof.

$$divF = \frac{1}{V}\oint_{\partial\Omega} F\cdot ndS$$
$$= \frac{1}{V}\oint_{\partial\Omega}\sum_i F_i\cos\theta_i dS$$
$$= \frac{1}{V}\oint_{\partial\Omega}\sum_i F_i\,(-1)^2\, dx_1\wedge..\overline{dx_i}\wedge..dx_n$$
$$= \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$
$$= \nabla\cdot F$$

□

推论 1.1. $\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vdS = \oint_\Omega \Delta uvdx + \oint_\Omega \nabla u\cdot\nabla vdx$

定义 1.6 (laplace-beltrami 算子)**.** 在流形 *M* 上有函数 *f*, 那么 $\lim\limits_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_\Omega \triangle fdV$ 称为流形 *M* 的 *laplace* 算子.

定义 1.7. 如果拓扑空间，能分为两个闭区间的并，称为不连通空间。否则称为连通空间。[2]

命题 1.4. 光滑映射是连续映射

命题 1.5. 连续映射具有保紧致性

命题 1.6. 紧致空间的闭子空间是紧致

命题 1.7. *hausdorff* 空间的紧致集是闭子集。

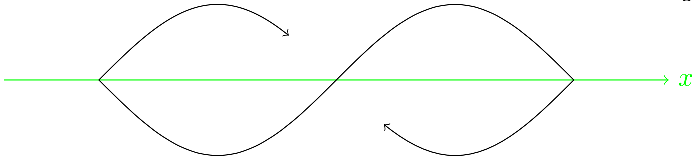
命题 1.8. 闭映射不一定是开映射，但是加上单射条件，结论成立[3]

例 1:
设 $G(t): R\to R^2$, 其中
$G(t) = (2\cos(2\arctan t+\frac{\pi}{2}), \sin 2(2\arctan t+\frac{\pi}{2}))$ 其为嵌入，但不是正则嵌入。

Proof. 易知在 (0,0) 点，不存在与实轴的同胚 □

Proof. 实数轴的开集 $V = [100,+\infty)$ 的像不为开集。即不存在平面的开集 U，使得 $G(V)\bigcap U$ 为开集 □

Figure 1: 图 1



- 嵌入子流行与浸入子流行取决于映射的方式，即映射 ϕ 影响其是否为嵌入
- 正则子流行虽然可以由嵌入子流行来定义，但实际上它是内蕴的，不受映射 ϕ 影响，只与他的像 $\phi(M)$) 有关

[2]与其他定义等价
[3]严格说是双射，但这里我默认像集作为映射的拓扑空间

存在映射 f，使得拓扑一致 (是开映射，也是连续映射), 但不是同胚，这意味着同胚不止是拓扑一致，更是双射旋度，散度推导。分部积分就是 grenn 公式

引理 1.1 (poincare lemma)**.** 对欧式空间中的 r 阶闭形式，它一定是恰当形式

Proof.

$$
\begin{aligned}
&d\left(\omega_{i_1..i_r} dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_r}\right) = \\
&(-1)^{a+1} \frac{\partial \omega_{i_1..\hat{i_a}..i_{r+1}}}{\partial x_{i_a}} dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_{r+1}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

那么构造 r-1 阶微分形式

$$\tau(x) = \sum_{i_1..i_r} \{\int_0^1 t^{r-1} \omega_{i_1..i_r}(tx)\, dx\} \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha+1} x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge .. \wedge d\hat{x}_{i_\alpha} .. \wedge dx_{i_r}$$

接下来演算 $d\tau = \omega$

$$
\begin{aligned}
d\tau = &\sum_i \sum_{i_1..i_r} \{\int_0^1 t^r \frac{\partial \omega_{i_1..i_r}}{\partial x_i}(tx)\, dx\} \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha+1} x_{i_\alpha} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge .. \wedge d\hat{x}_{i_\alpha} .. \wedge dx_{i_r} \\
&+ r \sum_{i_1..i_r} \{\int_0^1 t^{r-1} \omega_{i_1..i_r}(tx)\, dx\} dx_{i_1} \wedge .. \wedge .. \wedge dx_{i_r}
\end{aligned}
$$

对于加式第一项积分号放最外面，积分因子分两种情况讨论

$$i = i_\alpha$$

$$\sum_{i_1..i_r} \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial \omega_{i_1...i_r}}{\partial x_{i_\alpha}} x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_r}$$

$$i \neq i_\alpha$$

$$\sum_{i_1..i_r} \sum_{\alpha=1}^{r}$$

□