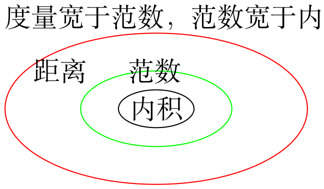
test

李博

July 3, 2019

1 度量空间完备化

- 一个空间的度量对影响这个空间的收敛性, 如下例子:
  $[a,b]$ 上多项式函数空间，如果我定义距离为 $\int_a^b |g(x)-f(x)|\,dx$, 那么显然这个函数空间太小，它不完备。如果把空间换成黎曼可积函数空间，这个空间太大，以至于不满足 $d(f,g)=0, f=g$ 这个条件. 或者说这里的等于号其实是个函数空间等价类，在给定范数相等。
- 度量宽于范数，范数宽于内积。如内积诱导的范数一定是严格凸的，而 L^1 范数不是严格凸的.



- 完备的距离空间，紧性 ⇔ 完全有界[1]
- 欧式闭子集上的连续函数空间，范数为 $max|f-g|$ 它是紧的 ⇔ 函数是一致有界且等度连续
- 内积空间要考虑正交基时，首先需要是完备的内积空间 (Hilbert 空间). 因为一组正交基的定义是
  $$x = \sum < x, e_i >^{2}$$
  右边的极限要存在，必须要有完备性。
  例如 [0,L] 上函数空间，L^2 范数诱导的内积，考虑的函数不能限于连续函数
- 距离空间的同构为等距同构，hilbert 空间的同构为等内积同构
- hilbert 空间的正交基 $e_i, \tilde{e}_i$, 当且仅当存在矩阵 A,B, 使得 $e = A\tilde{e}, \tilde{e} = Be$
- (无限) 矩阵 A 可逆的充分必要条件是不存在非 0 的解 (或者 0 特征值的特征向量), 或者等价于矩阵列满秩 (你可以添加任意行 0 向量)

定义 1.1. *一个度量空间 $(\mathcal{A}, p)$ 是完备的，若对其一个基本列 x_n，存在 $x \in (\mathcal{A}, p)\,, st.p(x, x_n) = 0$,*

定义 1.2. [3] *一个拓扑空间 $(A, \mathcal{F})$ 的子空间 (B) 是稠密的，当且仅当 $\overline{B} = A$*

命题 1.1. *求导变化换是一种特殊的线性变换*

定义 1.3. *对于一个 B^* 空间 B，其上所以线性函数算子组成的空间称为对偶空间。*[4]

命题 1.2. *Hilbert 空间 $\mathcal{X}, < f‘, g > + \overline{< g‘, f >} = 0$*[5]*不一定成立 $< f, g >= 0$, 反之一定成立*[6]

命题 1.3. *导数是特殊的线性变换，满足上式的线性变换矩阵 A，经推倒可得: 需满足 $A = -\overline{A^T}$*

命题 1.4. *线性算子 (线性映射) 只涉及代数运算，而线性连续映射涉及拓扑*

命题 1.5. *线性空间有两个范 2 数，如果这两个范数可比较，则两个范数等价*[7]

---

[1] 这也说明了为什么叫” 紧”, 还有紧性无关收敛，因为紧性讨论 cauchy 列

[2] 这里的等号是范数意义下的等号

[3] 此定义与泛函中的定义等价

[4] 由定义可知对偶空间只跟原空间元素有关，为什么会有 “不同范数下对偶空间不同”? 逻辑应分为，不同泛数影响原空间元素的等价类不同，造成对偶空间不同

[5] 也可以写成 $< f‘, g > + < f, g‘ >= 0$ 假设共轭变换和求导可以交换

[6] ‘代表线性变换，特别注意求导这个线性变换

[7] 由这两个命题可知，一个 B 空间的连续线性泛函，其实与这个 B 空间的范数没有本质关系

命题 1.6. 凸集分离定理蕴涵空间两点可以由对偶空间区分。

命题 1.7. 有限 B 空间，范数都等价。但无限维 B 空间不一定，即不可比较

命题 1.8. 内积最本质的定义微分几何里二阶对称张量

定义 1.4. 一个集合 M, 它的幂集 $\mathcal{F}$, 我定义它的拓扑（领域）为:
给定 $l_1 \in \mathcal{F}$, 当我移动 l_1 的一个元素后，得到新的集合 l_2, 同理移动 l_2 的一个元素后，得到 l_3,.... 如此，$\{l_1, l_2, l_3...\}$ 是 l_1 的一个开集。

命题 1.9. B 空间单位闭球是弱紧的 $\Leftrightarrow$ 有限秩函数是紧算子

定义 1.5. B 是 B^* 空间，$\mathcal{X}$ 是他的对偶空间，对于所有的 $f \in \mathcal{X}, u_n \in B, < u_n, f >$ 是收敛的，则称 u_n 是弱收敛

命题 1.10. 由上知，若 $\mathcal{X}$ 是可分空间，则 B 是弱紧空间

Proof. 假设 $\{x_m\}$ 是 $\mathcal{X}$ 的可数稠密子集，则 $a_{nm} =< u_n, x_m >$, 对于每个固定的 m，a_{nm} 是收敛的，由对角线方法可知存在收敛子列。因为 $\{x_m\}$ 是稠密的，且 u_n 极限维持线性算子特征，所以存在 u 是 u_n 的弱极限 □

推论 1.1. 可分空间的对偶空间一定是 *弱紧的

范数这个东西似乎并不太好，不适合考虑基，跟对偶基，比如基变换下的表达式