notes of group

李博

July 24, 2019

1 群论

命题 1.1. 群的定义 $\iff$ 等价关系[1]

定义 1.1. 格：一个偏序集 S 上定义其幂集 A 的映射 $\vee : A \to S, \wedge : A \to S, \vee$ 代表上确界，$\wedge$ 代表下确界。[2]

推论 1.1. 一个群 G，和子群 H，G/H 的陪集不相交

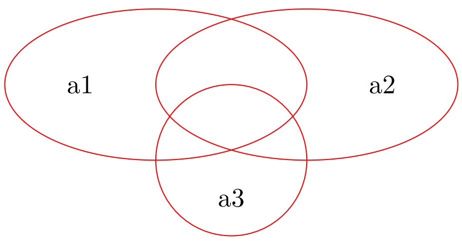
推论 1.2. 群是完备集合（所有元素均可作用，作用值封闭），所以 $|G/H|$=$|G|/|H|$

命题 1.2. 一个群 G,$H \triangleleft G$,$S \triangleleft$ 个共轭变换，保持 $H'\triangleleft G'$,$S'\triangleleft H'$. 但不一定保证 S'=S.

命题 1.3. 含单位元的交换环，若取几个素理想 $P_i|$ 与 $\bigcup_{j\neq i} P_j$ 没有包含关系，我能从这几个理想中各取一个元素 a_i，使得 a_i 生成的理想 I 跳出 $\bigcup P_i$

推论 1.3. 含单位元的交换环，若取几个素理想 $P_i|$ 与 $\bigcup_{j\neq i} P_j$ 没有包含关系，我能从这几个理想中取两个元素 a_i，使得 a_i 生成的理想 I 跳出 $\bigcup P_i$

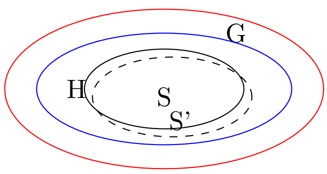
Proof. 如图，断言 a3+a1*a2 跳出这三个集合。 □



命题 1.4. 一个含单位元的交换环 R,P 是 R 的素理想，I_i 是 R 的理想，如果 $P = \bigcap I_i$，那么 $\exists I_i$,$P = I_i$

Proof. 反证法。假设 P 是 I_i 的真子集，取 $a_i \in I_i, \notin P$，那么 $\Pi_i a_i \in \bigcap I_i, \notin P$, 矛盾 □

推论 1.4. 没有包含关系的理想的交，一定是理想但不是素理想。由此知素理想的交一般不是素理想。



命题 1.5. 在局部化 $\frac{R}{S}$ 上，映射 f 是加法同态 $\to$ 映射 f 与代表元选取无关.

命题 1.6. 一个群 G 的中心不是单位元 e，则他的换位子一定不是 G。但是换位子群不一定成立。

命题 1.7. 在环 R 上，一个主理想 (a) [3],a 是素的，那么不存在主理想 (b) 包含 (a)。

定理 1.1. 集合 A 到 B 的映射 f。如果集合 A 有运算 $*$，使得 $(A, *)$ 成为群，B 有运算 . 使得 $(B, .)$ 成为群。且 f 在结构下为同态。那么只需验证 $ker(f) = 0$，则映射 f 为单射。[4]

命题 1.8. 主理想整环 R 上，无挠模 M，总可以找到一个元素 $m \in M$，使得 $M\backslash span\,(m)$ 无挠

Proof. 取 M 中的元素 x，若 $M/span\{x\}$ 有挠，即 $\exists y, s.t.\ r_1 * x = r2 * y$, 易知所有满足上式的 r_1 构成一个理想 $(\bar{r_1})$，同理另一个理想 $(\bar{r_2})$，可证 $\bar{r_1}, \bar{r_2}$ 互素，即存在 $m, n \in R, s.t.\ m * \bar{r_1} + n * \bar{r_2} = 1$，断言 $m * y + n * x = z$，使得 $span\{x\} + span\{y\} \subseteq span\{z\}$.(因为易知，$x \in span\{z\}, y \in span\{z\}$). 这样构造了一个偏序关系，由佐恩引理知，存在 m，满足命题条件 □

[1] 半群不是群
[2] 满足分配律的格称为分配格, 与之有关的 birkhoff's theorem
[3] (a) 等价于 aR
[4] 注意此叙述的逻辑: 群同态是验证单射的工具

定义 1.2. 环 R 的素理想 I 的几个等价定义

- R/I 是整环
- 对任意 $r_1, r_2 \in R - I, r_1 r_2 \in R - I$
- 若 $r_1 * r_2 \in I$, 则 $r_1 \in I$ or $r_2 \in I$

定义 1.3. 主理想整环 R, 两个元素互素的等价条件

- r_1 与 r_2 没有公因子，即不存在 $\tilde{r_1} r = r_1, \tilde{r_2} r = r_2$
- $(r_1) + (r_2) = R$
- $\exists m, n \in R, s.t.\ r_1 * m + r_2 * n = 1$

命题 1.9. 如果一个映射存在逆映射，则此映射必是单射（若两个映射可交换则为双射）

命题 1.10. 有挠模表示一定不唯一，故不是自由摸。主理想整环无挠模一定是自由模

命题 1.11. $N \subset Z \subset Q \subset R$, 其中实数的定义是由拓扑来定义：有理数的收敛极限。

命题 1.12. 含单位元的环 R, 加法群 M, 作为 R-模。M 为单模当且仅当 M 是单群

Proof. 如果 M 不是单群，则存在子群 $G \subset M$, 那么 G，和 RM 是 M 的子群，$G \bigcap RM$ 或者 $G \bigcup RM$ 是 M 的子模（存疑） $\square$

命题 1.13. 主理想环 R, 可交换，则 $Ra \bigcap Rb = Rab$

命题 1.14. *(舒尔引理).* 单模的自同态环 $Hom_R(M)$

Proof. $M \cong R/I$ 其中 I 是极大理想。记 $K = R/I$, 取则 ker(f) $\square$

命题 1.15. 设 G 是一个有限群，K 是一个域，记 $K[G] = \{\sum_{g \in G} a_g g\ a_g \in K\}$, 是以 G 中元素为基的向量空间（维数为 $|G|$）. 定义加法为向量空间的加法，乘法为：$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) * \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} (a_g b_h)(gh)$
则此环有零因子.

Proof. 因为 G 为有限群，则 $g^m = g^k$, 所以 $g^m - g^k = 0$ $\square$

推论 1.5. 取 K=Q,$G = Z/Z_p$,p 是素数。求 $(Q[G], +, *)$ 中所有极小理想为 $Q[G](g-1)^{p-1}$,$Q[G]\left(1 + g + .. + g^{p-1}\right)$,$g$ 为 G 的循环生成元

命题 1.16. n 阶多项式最多只有 n 个根，这个结论是多项式环乘法和加法相互作用的结果。所以用来证明有限域的乘法群是循环群

命题 1.17. 一个群 G, 若 $g \in G, g \neq e$, 则 g 的共轭类一定不是 G。

线性代数的 det(A) 运算可以从外微分解释