

• 研究方法(Research Method) •

认知诊断评估中 Q 矩阵理论及应用*

宋丽红¹ 汪文义² 丁树良²

(¹ 江西师范大学教育学院; ² 江西师范大学计算机信息工程学院, 南昌 330022)

摘要 Q 矩阵是认知心理学与心理计量学结合的重要载体, Q 矩阵在认知诊断中发挥着十分重要的作用。Q 矩阵理论和应用研究近年来取得了重要进展。众多研究者从结构化到非结构化、属性二值到多值、简单到复杂模型、独立到一般结构、0-1 到多级评分方面不断深入和拓展 Q 矩阵理论。Q 矩阵理论也广泛应用于测验构念效度评价、计算机化自适应测验选题策略设计、Q 矩阵学习和标定、认知诊断测验组卷等。与模型无关的 Q 矩阵理论和适合特定认知诊断模型下 Q 矩阵理论, 以及最新 Q 矩阵理论的应用都值得深入研究。

关键词 认知诊断, Q 矩阵, 属性结构, 完备性, 多值属性

分类号 B841

1 引言

认知诊断评价是心理计量学与认知心理学结合的产物。认知诊断评价广泛应用于教育评价(educational assessment)、精神评估(psychiatric evaluation)、疾病病因检测(disease etiology detection)等领域(Gu & Xu, 2020, 2023; Xu, 2017)。研究显示(王立君等, 2020; Toprak, 2021; von Davier & Lee, 2019), 认知诊断在学习系统中学习者弱项诊断、报告反馈与资源推荐, 在大规模评价数据分析与细粒度诊断, 在识别问题解决策略和职业教育, 在教学干预方法或个性化补救教学效果评价等方面都发挥着重要作用。Tatsuoka (1983, 1995, 2009)率先提出了 Q 矩阵, 记为 $Q_{J \times K} = (q_{jk})$, 其元素 $q_{jk} = 1$ 表示被试正确作答项目 j 需要掌握属性 k , $q_{jk} = 0$ 表示项目 j 不考查属性 k 。Q 矩阵用于表示问题解决过程中所需要的潜在认知属性(技能、知识), 它也被视为统计模式识别所需提取的特征(Tatsuoka, 2009)。Q 矩阵是认知模型的形式化表示, 代表需要检验的测验结构假设, 是结构效度的直接证据(Rupp et al., 2010)。

Tatsuoka (2009)提出 Q 矩阵理论, 所解决的核心问题是建立观察反应模式与潜在知识状态之间的数学联系。只有建立两者间的联系, 认知诊断评价才能根据被试在测验上观察作答反应模式推断知识状态。联系建立主要有以下两种方式。第一种方式, 在连接(conjunctive)或非连接(disjunctive)认知假设下, 通过计算理想反应模式作为桥梁建立两者的联系, 包括规则空间模型的布尔描述函数(Boolean description function; Tatsuoka, 1991, 2009), 属性层级方法(attribute hierarchy method, AHM)的期望(理想)反应模式(Leighton et al., 2004), 确定性输入噪音与门(deterministic inputs, noisy and gate, DINA; Haertel, 1989)和确定性输入噪音或门(deterministic inputs, noisy or gate, DINO; Templin & Henson, 2006)模型的潜在反应模式, 非参数化聚类或分类方法中理想反应模式(康春花等, 2017, 2023; 李元白等, 2018; 汪文义, 丁树良等, 2015; Chiu et al., 2008, 2009; Chiu & Douglas, 2013; Chiu & Chang, 2021), 以及知识空间理论的问题函数(problem function, Heller et al., 2015, 2017; Heller, 2022)。第二种方式, 通过一般化认知诊断模型建立知识状态、项目特征与项目反应之间的统计模型, 如拓

收稿日期: 2023-08-18

* 国家自然科学基金(62267004, 62067005, 61967009)和江西省普通本科高校教育教学改革研究课题(JXJG-23-2-6, JXJG-22-2-44)。

通信作者: 汪文义, E-mail: wenyiwang@jxnu.edu.cn

广的 DINA (the generalized DINA, G-DINA; de la Torre, 2011)模型、对数线性认知诊断模型(the log-linear cognitive diagnosis model, LCDM; Henson et al., 2009)和概括化模型(the general diagnostic model, GDM; von Davier, 2008)等。

Tatsuoka (2009)认为,在属性独立时,如果测验 Q 矩阵是 K 阶单位阵或者包含所有 $2^K - 1$ 非零属性向量,通过布尔描述函数计算理想反应模式,可建立 2^K 个知识状态与 2^K 个理想反应模式一一对应关系。Chiu 等人(2009)提出包含单位阵的完备 Q 矩阵概念,并用于认知诊断属性子分数向量聚类分析。与此同时,在属性层级结构下,丁树良等人(2009)提出包含可达矩阵的充要 Q 矩阵概念。Chiu 等人、丁树良等人自此以后一直深入研究 Q 矩阵理论,比如结构化 Q 矩阵(the structured Q-matrix)和非结构化 Q 矩阵(the unstructured Q-matrix)的条件及其相关问题(丁树良 等, 2022; Chiu & Chang, 2021)。Q 矩阵中所有属性向量均符合属性层级结构,称为结构化 Q 矩阵,否则称为非结构化 Q 矩阵。知识空间理论研究团队也一直研究完备 Q 矩阵(Heller, 2022)。除了关注二值 Q 矩阵外,因为学生在同一属性的水平往往呈现不同认知水平,许多研究关注多值 Q 矩阵理论(蔡艳,涂冬波, 2015; 丁树良,罗芬 等, 2015; 丁树良,汪文义 等, 2015; 詹沛达 等, 2016)或多值 Q 矩阵下的认知诊断模型与方法(Chen & de la Torre, 2013; de la Torre et al., 2022; Karelitz, 2004; Ma, 2022; Sun et al., 2013; Zhan et al., 2020, 2023)。

Q 矩阵设计是认知诊断测验设计中十分重要的方面(丁树良 等, 2011, 2019; Liu et al., 2016; Madison & Bradshaw, 2015; Tian et al., 2020; Tu et al., 2019)。设计测验各个题目所测量的属性,即解决 Q 矩阵设计或测验蓝图问题,是认知诊断的核心任务(Leighton et al., 2004)。Tatsuoka (2009)提出充分 Q 矩阵用于指导认知诊断测验编制。完备 Q 矩阵作为一种重要 Q 矩阵设计,对于提高分类准确率具有重要作用。DeCarlo (2011)在分析分数减法数据时发现,不完备 Q 矩阵会引起严重的分类问题,测验 Q 矩阵设计不当,测验为被试在某些属性上带来的信息甚至还不如先验信息。丁树良等人(2011)研究发现,完备 Q 矩阵(至少含一个可达阵)比不完备 Q 矩阵的模式判准率高出 20%以上。Tian 等人(2020)发现完备 Q 矩阵可提高纵向

诊断分类模型的分类准确率。Madison 和 Bradshaw (2015)比较了不同 Q 矩阵设计对分类准确率的影响,相比其他不完备 Q 矩阵,包含每个属性单独测量 1 次或 2 次的 Q 矩阵(完备 Q 矩阵)在参数估计算法收敛性、属性分类准确率和属性信度方面均具有明显优势。Kuo 等人(2016)例子显示,在线性属性层级结构下,基于认知诊断指标或属性诊断指标选择试题,所得测验 Q 矩阵不完备,由此提出了具有更高判准率的组卷方法。

Q 矩阵设计还与认知诊断模型识别问题和参数估计量的一致性密切相关。统计模型可识别,是得到参数一致估计和有效推断结果的必要条件,也是获得可靠且有效结果的基础(Gu & Xu, 2019b)。Q 矩阵不完备会引起知识状态等价类,即造成同一等价类中多个知识状态的概率参数不可识别,还会导致 Q 矩阵估计不可识别。认知诊断模型识别问题早有关关注(DeCarlo, 2011; DiBello et al., 1995; Liu et al., 2013; Maris, 1999; Xu, 2013; Xu, & Zhang, 2016)。在 DINA 模型下, Liu 等人(2013)率先考虑了猜测参数已知时 Q 矩阵可识别的条件。Chen 等人(2015)、Xu 和 Shang (2018)考虑了项目参数已知时 Q 矩阵可识别的充分条件,即 Q 矩阵中需要包含两个单位阵等条件。Xu 等人自 2013 年至今一直专注于认知诊断模型参数识别性问题研究。

Q 矩阵在结构表征、测验设计、模型识别、诊断分类等方面具有重要作用,并且诸多研究者长期深入研究 Q 矩阵理论并取得了大量成果,但目前缺乏相关的文献综述与评论。本文重点梳理近 15 年 Q 矩阵理论和应用,主要涉及理想反应、非参数方法、知识空间理论、模型识别框架下完备 Q 矩阵,及其在测验构念效度评价、计算机化自适应测验选题策略设计、Q 矩阵学习和标定、认知诊断测验组卷等方面的应用,最后讨论与模型无关和新模型下 Q 矩阵理论和应用研究的未来方向。

2 Q 矩阵理论

2.1 理想反应下完备 Q 矩阵

2.1.1 充分 Q 矩阵

在属性间存在先决关系时,如 $1 \rightarrow 2$ 表示要掌握属性 2 必先掌握 1,如果采用结构化 Q 矩阵,考查属性 2 的项目必须包含属性 1,故先决关系

1→2表现在结构化Q矩阵中第1列包含第2列,或第1列 $q_{(1)}$ 中元素均大于等于第2列 $q_{(2)}$ 对应元素,即 $q_{(1)} \geq q_{(2)}$ 。Tatsuoka (1995, 2009)希望Q矩阵可表达属性间先决关系和知识结构,由此提出了充分Q矩阵(sufficient Q matrix)的概念。

定义1 (充分Q矩阵)给定K个属性、属性之间的先决关系及其对应的可达矩阵R,如果矩阵 $Q_{J \times K}$ 的列向量通过包含或大小关系比较可以产生可达矩阵R,则称这个Q阵对所讨论范围内的认知模型的表达是充分的。包含充分Q阵的题库则称为充分题库。

充分Q矩阵可用于指导测验设计和项目开发,使得测验真正测到所要测量的结构和属性,从而提高测验的结构效度。

2.1.2 充分必要Q矩阵

有的Q矩阵会导致若干个不同知识状态对应同一个理想反应模式(Tatsuoka, 2009, p.104),与同一个理想反应模式相对应的知识状态称为等价类。这时分类方法需要在等价类中多个知识状态中进行决策,从而影响诊断准确率,或导致测验项目的增加或施测次数的增加。针对此问题,丁树良等人(2009)开始研究属性层级结构下测验Q矩阵设计问题,用于建立知识状态与理想反应模式一一对应关系。丁树良、毛萌萌等人(2012)以及丁树良等人(2011)认为充分Q矩阵并不能建立知识状态全集与理想反应模式集合一一对应关系。

例如,给定独立属性结构下 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,通过

列包含或大小关系比较可以产生可达矩阵 $R = I$,易知,知识状态(000),(100),(010),(001)在此三个项目上的理想反应模式均为(000)。针对此问题,在属性层级结构和理想反应模式下,丁树良等人提出了充要Q矩阵的概念及其要满足的条件(丁树良等, 2009, 2010; 丁树良等, 2011; 丁树良, 毛萌萌等, 2012; 丁树良, 汪文义等, 2012)。

定义2 (充要Q矩阵)建立知识状态和理想反应模式之间一一对应关系的Q矩阵称为充要Q矩阵。

定理1 测验Q矩阵以可达阵R为子矩阵当且仅当知识状态全集(Qs)中不同的知识状态对应不同的理想反应模式。

如果充要Q阵的行数最少,则称为完备Q阵。例如,给定线性结构 $\mathcal{E} = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3\}$,此时

$$Q = R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 为充要Q矩阵和完备Q阵, 满足}$$

属性层级结构的4种知识状态的理想反应模型各不相同。

丁树良等人(2016)在0-1评分且属性之间不可补偿条件下进一步讨论了定理1,再次证明了可达阵的两种不可替代性:第1个不可替代性是对所有元素为0-1的Q矩阵,当且仅当可达阵转置的行才可以线性表示潜在Q矩阵行向量;第2个不可替代性是定理1的必要性。考虑到可达阵的重要作用 and 以示与充要Q矩阵区别,可达阵作为子矩阵的测验Q矩阵有时也被称为必要Q矩阵(丁树良等, 2017; 王晓庆等, 2019)。因为独立结构下可达阵退化为特殊的单位阵,故定理1是Chiu等人(2009)引理1的推广。

2.1.3 多级评分下完备Q矩阵

对于同时测量多个属性的项目,0-1评分较难提供部分掌握信息,而多级评分所含信息更丰富。鉴于多级评分的优势以及多级评分项目广泛用于主观题的过程评分,丁树良和罗芬等人(2012),丁树良和汪文义等人(2014)以及丁树良和罗芬等人(2014)针对不同属性层级结构探讨了一种多级评价方式下完备Q矩阵的构造方法。采用Tatsuoka (1995),祝玉芳和丁树良(2009),田伟和辛涛(2012)的理想反应模式计算方式,即知识状态 α (行向量)的被试在项目j上的理想得分等于所掌握项目的属性数量,即 $\Gamma_j(\alpha) = q_j \alpha^T$ 。知识状态 α 的被试在整个测验上的理想反应模式 $\Gamma(\alpha) = Q\alpha^T$ 。在属性相互独立时,如果Q矩阵为列满秩,可建立知识状态全集与理想反应模式集之间的一一映射。这里介绍一种证明思路,因为 $\text{rank}(Q) = K$,必存在K阶可逆子矩阵 Q_1 ,不妨设为Q的前K行,故 $\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} \Gamma_1(\alpha) \\ \Gamma_2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \alpha^T =$

$Q\alpha^T$,因 Q_1 可逆,若 $\alpha \neq \alpha'$,则必有 $\Gamma_1(\alpha) \neq \Gamma_1(\alpha')$,故 $\Gamma(\alpha) \neq \Gamma(\alpha')$ 。例如,在属性相互独立时, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,4个知识状态的理想反应模式矩阵为

$$(\Gamma((0,0)), \Gamma((0,1)), \Gamma((1,0)), \Gamma((1,1))) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

在独立结构下, \mathbf{Q} 矩阵为列满秩是知识状态全集与理想反应模式集之间的一一映射的充要条件。因为由矩阵秩的性质, 列满秩 \mathbf{Q} 矩阵的行数必大于等于 K 。但是, 对于存在属性层级结构时, 因为需要排除不符合属性层级结构的知识状态, 列满秩这个要求过高。丁树良, 汪文义和罗芬(2014)给出了根树型下基本完备 \mathbf{Q} 矩阵的行对应于根结点到各个叶结点的路径。通过基本完备 \mathbf{Q} 矩阵的行线性变换(布尔加和乘)和秩(叶结点的个数, 根树型的叶子结点之间无先决关系, 视为不可相互比较属性)的条件还可以生成其他完备 \mathbf{Q} 矩阵。

例如, 给定根树结构 $\mathcal{E} = \{1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3\}$, $\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 4 个知识状态 $\mathbf{a}_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_5^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 在 \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 和 \mathbf{Q}_3 上理想反应模式矩阵分别为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 。知 \mathbf{Q}_1 为基本完备 Q 矩阵, 而 \mathbf{Q}_2 和 \mathbf{Q}_3 为完备 Q 矩阵。此例的根树型仅含两层结点, 可视为 Leighton 等人(2004)文中定义的无结构型。

例如, 根树型若只有一个叶结点, 便成为线型结构, 如 $\mathcal{E} = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3\}$, $\mathbf{Q} = [1 \ 1 \ 1]$, 4 个知识状态 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 在 \mathbf{Q} 上理想反应模式矩阵分别为 $(\Gamma(\mathbf{a}_1), \Gamma(\mathbf{a}_2), \Gamma(\mathbf{a}_3), \Gamma(\mathbf{a}_4)) = (0, 1, 2, 3)$, \mathbf{Q} 为基本完备 Q 矩阵或完备 Q 矩阵。

丁树良和罗芬等(2014)给出了收敛型(视为菱形和线型复合而成)下完备 Q 矩阵构建方法, 并且完备 Q 矩阵的行数正好等于收敛型中不可比较元素个数。菱形可看成是根树型或“倒金字塔型”(invert pyramid)和“金字塔型”(pyramid)的复合(王晓庆 等, 2019; Liu, 2018)。为了便于理解, 将收敛型视为线性(将菱形上所有属性合并为一点)和根树型(去掉菱形下面一条边), 可直接由根树型完

备 Q 矩阵构建方法构建收敛型完备 Q 矩阵。

例如, 收敛型 $\mathcal{E} = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \wedge 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6\}$, 故 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 7 个知识状态

$$\mathbf{a}_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_7^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 上理想反应模式矩阵分别为 } \Gamma =$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, \mathbf{Q} 为完备 Q 矩阵。注意, 收敛型中属性 3 和 4 不可相互比较。

2.1.4 多值充分 Q 矩阵

在学习进阶中, 学生在同一属性的水平往往呈现不同认知水平。Briggs 等人(2006, 2012)定义学生对太阳系中地球的理解分为 5 个递进的认知水平。《义务教育数学课程标准(2022 年版)》中第四学段(7~9 年级)对四边形的内容要求就包含: 了解多边形的相关概念、理解平行四边形的概念及其与其他多边形之间的关系、探索并证明平行四边形的性质定理等。多值属性可以使用顺序编码表示属性各个水平, 如用 0, 1, 2 分别表示了解、理解和探索。

不同项目对同一属性的认知水平要求不尽相同, 如果二值 Q 矩阵不能很好地反映项目中同一属性的难度水平或认知水平高低的差异, 并且复杂问题解决过程中属性粒度定义不能太细(细粒度会导致属性数过多, 并且属性数多时层级结构也更难确定), 这时测验 Q 矩阵就需要采用多值 Q 矩阵。采用专家所定义的多值属性(Chen & de la Torre, 2013), 可以指导测验设计和事先针对性设计和开发测量特定属性水平的项目。受二值完备 Q 矩阵的启发, Sun 等人(2013)在开发多级评分广义距离判别法(GDD-P)时率先提出了多值充分 Q 矩阵。多值充分 Q 矩阵可以用于指导测验设计与开发, 建立知识状态与理想反应模式一一对应关

系(丁树良, 罗芬 等, 2015; 丁树良, 汪文义 等, 2015; Sun et al., 2013), 从而可实现对属性以及属性水平的区分, 进而提高分类准确率与测验结构效度(蔡艳, 涂冬波, 2015)。多值充分 Q 矩阵可基于二值可达阵“膨胀”生成。多值拟可达阵与二值可达阵的转换及其转换影响可参见相关研究(昌维 等, 2018; 丁树良, 罗芬 等, 2015; 詹沛达 等, 2016)。假设两个属性水平均是 0, 1, 2 共三个水平, 下面分别给出独立结构和线性结构多值充分 Q 矩阵例子。

例如, 独立结构 $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_p = Q_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Q_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Q_s^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 其中 Q_2^T

是根据 Sun 等人(2013)提出的方法由 R_p 变化而来, 而知识状态全集可以通过多值扩张算法而得到(丁树良, 罗芬 等, 2015; 丁树良, 汪文义 等, 2015)。

采用理想反应计算公式 $\Gamma_j(\alpha) = \sum_{k=1}^K q_{jk} I_{\{\alpha_k \geq q_{jk}\}}$, 可计

算 $\Gamma_{Q_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $\Gamma_{Q_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 故拟可达阵对应的

Q_1 及其变化而来的 Q_2 都是充分 Q 矩阵。

例如, 线性结构 $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_p = Q_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Q_s^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 仍采用上例理想反应计算公式, 可计算 $\Gamma_{Q_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 知拟可达阵对应的 Q_1 是充

分 Q 矩阵。注意, 学生 Q 阵是引入逻辑约束后的知识状态全集(詹沛达 等, 2017), 即删除了父属性掌握程度低而子属性掌握程度高的知识状态

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 。类似地, R_p 中也没有 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 而只有 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 即项

目 4 中属性 2 要求掌握水平 2, 故对其先决属性(属性 1)的掌握程度要求也应该高于或等于水平 2。

2.2 非参数方法下完备 Q 矩阵

2.2.1 DINA 和 DINO 模型下完备 Q 矩阵

Chiu 等人(2009)在提出认知诊断属性子分数向量聚类分析方法时, 为了保证以属性子分数向量作为输入的聚类方法, 能随着测验长度增加而实现更准确地对被试进行聚类, 这要求不同知识状态下属性子分数的 K 维均值向量不同, 即保证类中心向量不相同。要区分开不同知识状态的期望类中心向量, 需要在无随机成分(失误和猜测)条件下探讨能够识别知识状态的条件, Chiu 等人(2009)从理想反应模式角度提出了完备 Q 矩阵定义与充要条件。

定义 3 如果 $Q_{J \times K}$ 矩阵能够区分不同知识状态的理想反应模式, 则称 $Q_{J \times K}$ 矩阵完备, 即 DINA 模型下测验上理想反应向量 $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha')$ 蕴含 $\alpha = \alpha'$ ($\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha') \Rightarrow \alpha = \alpha'$)。

定理 2 $Q_{J \times K}$ 矩阵完备当且仅当 J 行中包含 e_1, e_2, \dots, e_K 单位行向量, 其中 e_k 表示第 k 个分量元素为 1, 其余分量为 0 的单位向量。

Chiu 等人(2009)在 DINA 模型项目参数单调性约束 ($0 \leq g_j < 1 - s_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, J$) 和 Q 矩阵完备条件下, 证明了任意两个不同知识状态 ($\alpha \neq \alpha'$) 在测验上属性子分数向量的条件期望不相同

$$T(\alpha) = E\left(\sum_{j=1}^J Y_{ij} q_{jk} \mid \alpha\right) \neq E\left(\sum_{j=1}^J Y_{ij} q_{jk} \mid \alpha'\right) = T(\alpha'),$$

并建立了 DINA 模型下认知诊断的渐近分类理论(the asymptotic classification theory of cognitive diagnosis, ACTCD), 即层次聚类方法随着测验长度趋于无穷时, 测验上属性子分数向量的聚类结果以概率 1 与其真实潜在类匹配。

2.2.2 一般化认知诊断模型下完备 Q 矩阵

为了将非参数方法推广用于分析适合一般化认知诊断模型的数据, 而伴随的完备 Q 矩阵概念是在理想反应条件下得到的, 一般化认知诊断模型并没有理想反应而有期望反应, 于是有研究者开始探讨能区分开不同知识状态下项目反应的条件期望向量的条件, 即开始研究一般化认知诊断模型下完备 Q 矩阵的条件。Chiu 和 Köhn (2015a,

2015b)、Köhn 和 Chiu (2017)基于知识状态 α 在测验上期望反应向量 $S(\alpha) = E(Y|\alpha)$, 给出了完备 Q 矩阵的另一种更一般的形式化描述, 即 $S(\alpha) = S(\alpha') \Rightarrow \alpha = \alpha'$ 。在 DINA 模型下测验项目 j 上期望反应 $S_j(\alpha) = E(Y_j|\alpha) = (1-s_j)^{\Gamma_j(\alpha)} g_j^{1-\Gamma_j(\alpha)}$, 特别地, 当所有项目上 $s_j = g_j = 0$, 此时 $S_j(\alpha) = \Gamma_j(\alpha)$ 。Chiu 和 Köhn (2015b)基于完备 Q 矩阵一般性定义和 DINA 与 DINO 模型互为对偶模型事实(Chen et al., 2015; Liu et al., 2011, 2012), 证明了 DINA 与 DINO 模型的单调性约束条件 $0 \leq g_j < (1-s_j) \leq 1$ 下, $Q_{J \times K}$ 矩阵完备当且仅当 J 行中包含 e_1, e_2, \dots, e_K 行向量。同时, 还得到了 DINO 模型下认知诊断的渐近分类理论。

Chiu 和 Köhn (2015b)根据完备 Q 矩阵一般性定义, 深入探讨一般化认知诊断模型(如 G-DINA、LCDM、GDM)或带主效应简化认知诊断模型(如 R-RUM、NIDA 等) Q 矩阵完备的充分条件, 主要针对知识状态的可识别性(identifiability of the proficiency classes), 并且推导一般化认知诊断模型下的渐近分类理论。在三类一般化认知诊断模型下, 测验 Q 矩阵包含单位阵是完备 Q 矩阵的充分条件, 并且有例子显示它不是必要条件(Chiu & Köhn, 2015a; Köhn & Chiu, 2017)。在 G-DINA 模型下项目参数全大于 0 且满足概率规范性时, Q 矩阵完备的充分条件是包含单位

阵, 但并不是必要条件。例如, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 在

G-DINA、LCDM、GDM 模型下具有完备性; 但此 Q 矩阵在仅含交互效应的模型下并不具有完备性, 比如(000), (100), (010), (001)不可识别。此例表明, 测验 Q 矩阵若缺失考查单属性的项目, 模型中主效应参数对于保持 Q 矩阵完备性显得十分重要。

完备 Q 矩阵可使不同知识状态的期望反应向量不同, 但是对于一般化认知诊断模型下的属性子分数向量或类中心仍可能会重叠。网络版附录 1 列出了认知诊断模型下完备 Q 矩阵检查的一种方法(Köhn & Chiu, 2017, 2018)。在 A-CDM 下即使 Q 矩阵完备, 在 $\alpha \neq \alpha'$ 时, 有可能 $T(\alpha) = T(\alpha')$ 。鉴于单位阵对于区分开或分离类中心(条件期望反应向量)的重要作用, 可以采用扩张属性子分数向量进行层次聚类分析(Chiu et al., 2008; Chiu &

Köhn, 2015a, 2015b)。先构造扩充 $J \times 2K$ 的矩阵 $Q_{aug} = (Q, Q_e)$, 若 Q 中第 j 行为单位向量, 则令 Q_e 中第 j 行等于 Q 中第 j 行, 否则令 Q_e 中第 j 行等于零向量。扩张属性子分数向量 $W_{aug} = YQ_{aug}$ 及其期望 $T_{aug}(\alpha) = E(W_{aug}|\alpha) = E((W, W_e)|\alpha) = (T(\alpha), T_e(\alpha))$ 。在 Q 矩阵完备条件下, 因为两个不同知识状态($\alpha \neq \alpha'$)下 $T_e(\alpha) \neq T_e(\alpha')$, 故扩张属性子分数向量的条件期望 $T_{aug}(\alpha) \neq T_{aug}(\alpha')$ 。

2.2.3 属性层级结构下结构化完备 Q 矩阵

区分不同知识状态下项目反应的条件期望向量的方式, 还用于探讨带属性层级结构下 DINA 模型(简记为 DINA-AHM)的完备 Q 矩阵条件。属性掌握之间先决关系可用属性层级结构表示, 属性层级结构中属性直接与间接关系可用可达矩阵 R 表示(Leighton et al., 2004; Leighton & Gierl, 2007)。Köhn & Chiu (2019)先定义了属性 k 及其所有直接和间接先决属性的集合 $\mathcal{H}_k = \{l | \text{属性 } l \text{ 是属性 } k \text{ 的直接或间接先决}\} \cup \{k\}$, 据此再给出了属性层级结构下基本属性向量 $E_k = \bigvee_{l \in \mathcal{H}_k} e_l$ (向量和为对应分量布尔和)。记集合 $\mathcal{F} = \{E_1, E_2, \dots, E_K\}$ 及其基于布尔并得到幂集 $\mathcal{L}_s = \mathcal{P}(\mathcal{F})$, 可以证明 (\mathcal{L}_s, \leq) 是完备格(complete lattice), \mathcal{L}_s 被称为结构化潜在属性空间(the restricted, or “structured” latent attribute space; Köhn & Chiu, 2021)。Cai 等(2018), Köhn 和 Chiu (2019)分别在理想反应模式或期望反应模式下, 证明了 DINA-AHM 下结构化完备 Q 矩阵的充要条件, 即包含可达矩阵或包含所有基本属性向量 E_1, E_2, \dots, E_K 。

2.2.4 无结构化完备 Q 矩阵

翻新测验的 Q 矩阵通常是在测验实施之后分析出来的, 并非在理论属性层级结构指导下设计的, 它很可能不完全符合推测的属性层级结构, 由此出现了无结构化 Q 矩阵。Köhn 和 Chiu (2021)给出了 DINA-AHM 下无结构化 Q 矩阵对 \mathcal{L}_s 完备的充要条件包含行向量 $E_1^*, E_2^*, \dots, E_K^*$ 组成的子矩阵 E^* , 其中 $e_k \leq E_k^* \leq E_k (k=1, 2, \dots, K)$ 。丁树良等人(2022)将 E^* 表示成等价的矩阵形式 $I \leq E^* \leq R^T$ 。在一般化认知诊断模型下, 无结构化 Q 矩阵包含子矩阵 E^* 是其完备的充分条件。记 $R^T - I$ 的所有元素之和 m (本质非零元之和), 并记 $\mu = \{E^* : I \leq E^* \leq R^T\}$, 即满足条件 $I \leq E^* \leq R^T$ 的所有 E^* 的矩阵集合。丁树良等人

(2022)证明了 (μ, \leq) 是布尔格, (μ, \vee, \wedge) 是有界(有补)分配格, 且 (μ, \vee, \wedge) 与 $(\{0, 1\}^m, \vee, \wedge)$ 同构。

2.3 知识空间理论下的一般属性结构的完备 Q 矩阵

Heller (2022)对知识空间理论下的完备 Q 矩阵的相关结论进行了总结与梳理。与前面讨论的独立结构和属性层级结构不同, 知识空间理论下的完备 Q 矩阵适合于更一般属性结构。独立结构和属性层级结构下知识状态全集对交和并运算封闭, 而一般属性结构下只要求对并运算封闭。因为属性结构发生了变化, 完备 Q 矩阵的条件也有所不同。下面先引入一般属性结构的一个例子。给定属性集合 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 和属性结构 $\varepsilon = \{1 \rightarrow 2, 2 \vee 3 \rightarrow 4\}$, 可用 AND-OR 图表示。其对应的所有可能属性模式矩阵 M 和所设测验 Q 矩阵分别为

$$M^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意 M 矩阵的各行对应的集合构成能力结构, 即 $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, S\}$, 能力结构可用偏序集 (\mathcal{C}, \subseteq) 表示。特别注意, 属性层级结构对应的知识状态全集对交和并运算封闭; 而 AND-OR 图所得 \mathcal{C} 仅对并运算封闭, 而对交运算不封闭, 如 $\{1, 2, 4\} \cap \{3, 4\} = \{4\} \notin \mathcal{C}$ 。 Q 的各行向量所对应的项目集合记为 $Q = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, 测验 Q 矩阵对应的技能映射 $\tau: Q \rightarrow 2^S / \{\emptyset\}$, 如 $\tau(a) = \{1\}$, $\tau(b) = \{1, 2\}$, $\tau(c) = \{3\}$, $\tau(d) = \{1, 2, 4\}$, $\tau(e) = \{3, 4\}$, $\tau(f) = \{2\}$, $\tau(g) = \{4\}$ 。问题函数 $p: \mathcal{C} \rightarrow 2^Q$, 在连接性规则下, 若 $C \in \mathcal{C}$, $p(C) = \{q \in Q: \tau(q) \subseteq C\}$, 则有 $p(\emptyset) = \emptyset$, $p(\{1\}) = \{a\}$, $p(\{3\}) = \{c\}$, $p(\{1, 2\}) = \{a, b, f\}$, $p(\{1, 3\}) = \{a, c\}$, $p(\{3, 4\}) = \{c, e, g\}$, $p(\{1, 2, 3\}) = \{a, b, c, f\}$, $p(\{1, 2, 4\}) = \{a, b, d, f, g\}$, $p(\{1, 3, 4\}) = \{a, c, e, g\}$, $p(S) = Q$ 。 $\mathcal{K} = \{p(C): C \in \mathcal{C}\}$ 称为知识结构(knowledge structure), 对应于理想反应模式矩阵。

属性 $s \in S$ 的原子定义为偏序集 (\mathcal{C}, \subseteq) 中 \mathcal{C} 中包含 s 的元素(集合)的极小元(minimal

element)。例如, $s=1$ 的原子为 $\{1\}$, $s=2$ 的原子为 $\{1, 2\}$, $s=3$ 的原子为 $\{3\}$, $s=4$ 的原子为 $\{3, 4\}$ 和 $\{1, 2, 4\}$, 将各个属性对应的各原子转换为行向量, 即得到基本属性模式矩阵 B (the matrix of the basic attribute patterns):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在一般属性结构, B^T 取代可达阵 R 的角色。注意, 在属性层级结构下 B^T 正好与可达阵 R 相等。连接性认知假设下能力模型 $(Q, S, \mathcal{C}, \tau)$ 可识别的充要条件是定义在该模型上的问题函数 $p: \mathcal{C} \rightarrow 2^Q$ 是入射。因为在不同属性结构下要建立入射的条件有所不同, 下面先罗列出 Heller (2022)文中所定义的 5 类条件, 再列出 5 个定理, 介绍不同属性结构下完备 Q 矩阵所要满足的具体条件。

定义 4 在连接性认知假设能力模型 $(Q, S, \mathcal{C}, \tau)$ 下, 定义下列条件:

(1)W-C 条件(the witness condition), 对于任意原子 $A \in \mathcal{C}$, 都存在 $q \in Q$ 满足 $\tau(q) = A$ (题目所测量的属性集合)。

(2)W*-C 条件(the starred witness condition), 对于任意原子 $A \in \mathcal{C}$, 都存在 $q \in Q$ 满足 $\tau^*(q) = A$ (补全先决属性后的属性集合)。

(3)wW-C 条件(the weak witness condition), 对于任意原子 $A \in \mathcal{C}$, 都存在 $q \in Q$ 满足 $\tau(q) \subseteq A$ 。

(4)swW-C 条件(the strict weak witness condition), 对于属性 $s \in S$ 的每个原子 A , 都存在 $q \in Q$ 满足 $s \in \tau(q) \subseteq A$ 。

(5)IC 条件(the identifiability condition), 对于任意 $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, 满足 $\bigcup \{\tau(q): \tau(q) \subseteq C_1, q \in Q\} = \bigcup \{\tau(q): \tau(q) \subseteq C_2, q \in Q\} \Rightarrow C_1 = C_2$ 。

定理 3 在连接性认知假设能力模型 $(Q, S, \mathcal{C}, \tau)$ 下,

(1)设 M 矩阵含所有可能允许的属性模式, 若 Q 矩阵包含了 M 矩阵的基本属性模式矩阵 B (对应 W-C 条件), 则 Q 矩阵完备(充分条件);

(2)设 M 矩阵为关联矩阵(the incidence matrix), 即含有 2^K 行, Q 矩阵完备的充要条件 Q 矩阵包含单位阵(即属性相互独立时的基本属性模式矩阵 B)。

定理 3 中(1)是一般结构下完备 Q 矩阵的充分条件。因为 \mathbf{Q} 矩阵以基本属性模式矩阵 \mathbf{B} 为子矩阵, 即 \mathbf{Q} 矩阵满足 W-C 条件, 此时问题函数 p 为单射, 即可建立 \mathcal{C} 与理想反应模式集合单射关系(即如果所有 $x, y \in A$, 且 $x \neq y$, 都有 $p(x) \neq p(y)$, 则称 f 为由 A 到 B 的单射)。满足 W-C 条件是 Q 矩阵完备的充分条件, 但非必要条件。例如, 在属性层级结构下, 包含单位阵的 \mathbf{Q} 矩阵为完备 Q 矩阵(非结构化 Q 矩阵)。若对 Q 矩阵进行约束, 即 Q 矩阵的列必须满足属性层级结构(结构化 Q 矩阵), 此时为充要条件。记 \mathbf{Q} 的行集合 $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, 因为 \mathbf{Q} 矩阵的前 5 行即为 \mathbf{B} , 满足完备 Q 矩阵的充分条件, 并且两偏序结构 (\mathcal{C}, \subseteq) 与 (\mathcal{K}, \subseteq) 同构, 这说明问题函数 p 建立了从 \mathcal{C} 到 \mathcal{K} 的单射关系。

定理 4 若 \mathbf{M} 矩阵为满足属性层级结构(其可达阵为 \mathbf{R})的所有可能属性模式, \mathbf{Q} 矩阵完备的充要条件 \mathbf{Q} 矩阵对应的稠密矩阵 \mathbf{Q}^* (依据属性层级结构将其所有先决属性补全, 即对应 \mathbf{W}^* -C 条件)包含可达阵转置 \mathbf{R}^T 的子矩阵。

此结论与 Köhn 和 Chiu (2021)给出的 DINA-AHM 下无结构化 Q 矩阵对 \mathcal{L}_s 完备的充要条件相同, 只是变化了另一种表述方式。

定理 5 设 \mathbf{M} 为可能属性模式组成的矩阵(一般结构), \mathbf{B} 为 \mathbf{M} 对应的基本属性模式矩阵, 若 \mathbf{Q} 矩阵完备, 则对 \mathbf{B} 中任意行向量 \mathbf{b}_k , 都存在 $\mathbf{q}_j \in \mathbf{Q}$ 满足 $\mathbf{q}_j \leq \mathbf{b}_k$ (wW-C 条件)。

此结论为一般结构下完备 Q 矩阵的必要条件, 下面引用一个例子(Heller et al., 2017)说明它不是充分条件。例如, $S = \{1, 2, 3, 4\}, Q = \{a, b, c, d\}, \tau(a) = \{2\}, \tau(b) = \{3\}, \tau(c) = \{1, 2, 3\}, \tau(d) = \{2, 3, 4\}, \mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, S\}$, 知 $s=1$ 的原子为 $\{1, 2\}, \{1, 3\}$, $s=2$ 的原子为 $\{1, 2\}$ 和 $\{2, 3\}$, $s=3$ 的原子为 $\{1, 3\}, \{2, 3\}$ 和 $\{3, 4\}$, $s=4$ 的原子为 $\{3, 4\}$, 而 $\tau(a) \subseteq \{1, 2\}, \tau(b) \subseteq \{1, 3\}, \tau(c) \subseteq \{2, 3\}, \tau(d) \subseteq \{3, 4\}$, 即满足 wW-C 条件。但是, 可计算问题函数在 \mathcal{C} 上所得的知识结构为 $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, Q\}$, 因 $p(\{1, 3\}) = p(\{3, 4\}) = \{b\}$, 故问题函数 p 在 \mathcal{C} 上不是单射。

定理 6 若 \mathbf{M} 矩阵为所有可能属性模式且符合级配良好(well-graded)属性结构(其对应的能力结构 \mathcal{C} 满足学习光滑性和学习一致性), \mathbf{Q} 矩阵完备的充要条件 \mathbf{Q} 矩阵满足 swW-C 条件, 即对于

每个属性 k , 记满足条件 $b_{ik} = 1$ 中 \mathbf{B} 的行向量的(任一)极小元记为 \mathbf{b}_i , 都存在 $\mathbf{q}_j \in \mathbf{Q}$ 满足 $\mathbf{q}_{jk} = 1$ 且 $\mathbf{q}_j \leq \mathbf{b}_i$ 。

满足学习光滑性和学习一致性的能力结构 \mathcal{C} 称为能力学习空间(competence learning space), 与能力学习空间相对应的属性结构也可称为级配良好属性结构。学习光滑性(learning smoothness)是指从一种能力状态可以经过有限步骤逐个学会各个技能而达到更高能力状态。学习一致性(learning consistency)是指某一技能可以在某些其他技能学会之前或学会之后进行学习。

例如, 继本节开始例子, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

易验证 $\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 满足 swW-C 条件。能力

结构为 $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, S\}$, 采用 Falmagne 和 Doignon (2011, p. 64)书中定理 4.1.7 中等价条件(iii)可判断 \mathcal{C} 级配良好。在 \mathbf{Q}_1 上由问题函数所得的知识结构为 $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, Q\}$, 知问题函数 p 在 \mathcal{C} 上是单射。易验证

$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 不满足 swW-C 条件, \mathcal{C} 在 \mathbf{Q}_2

上问题函数所得知识结构 $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, Q\}$, 而 $p(\{1, 2\}) = p(\{1, 2, 4\}) = \{a, b\}$, 故问题函数 p 在 \mathcal{C} 上不是单射。

定理 7 若 \mathbf{M} 矩阵为所有可能属性模式(一般结构), \mathbf{Q} 矩阵完备的充要条件是满足 IC 条件, 或对于任意不同行 $\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_l \in \mathbf{M}$, 都存在 $\mathbf{q}_j \in \mathbf{Q}$ 满足 $\mathbf{q}_j \not\leq \mathbf{m}_k, \mathbf{q}_j \leq \mathbf{m}_l$ 或 $\mathbf{q}_j \not\leq \mathbf{m}_k, \mathbf{q}_j \leq \mathbf{m}_l$ 。

例如, $S = \{1, 2, 3, 4\}, Q = \{a, b, c, d\}, \tau(a) = \{2\}, \tau(b) = \{3\}, \tau(c) = \{1, 2, 3\}, \tau(d) = \{2, 3, 4\}, \mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, S\}$, 按照 IC 条件定义, 定义 \mathcal{C} 上映射 $h(\mathcal{C}) = \bigcup \{\tau(q) : \tau(q) \subseteq C, q \in Q\}$, $C \in \mathcal{C}$, 可得 $h(\emptyset) = \emptyset, h(\{1, 2\}) = \{2\}, h(\{2, 3\}) = \{2, 3\}, h(\{3, 4\}) = \{3\}, h(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2, 3\}, h(\{2, 3, 4\}) =$

{2,3,4}, $h(S)=S$, 因为不同能力状态对应不同子集, 知 h 为单射且满足 IC 条件, 知与 τ 相关的问题函数 p 在 \mathcal{C} 上是单射(Heller et al., 2017)。另外, 采用定理 7 后面第二个条件(表 1), 也知 Q 矩阵完备。

表 1 结论 7 后面第二个条件验证

知识状态	\emptyset	{1,2}	{2,3}	{3,4}	{1,2,3}	{2,3,4}	S
\emptyset	-	a	b	b	$a/b/c$	$a/b/d$	$a/b/c/d$
{1,2}		-	b	b	c	b/d	$b/c/d$
{2,3}			-	a	c	d	c/d
{3,4}				-	c	d	c/d
{1,2,3}					-	c/d	d
{2,3,4}						-	c
S							-

注: 行标为 m_k 对应的 C_k , 行标为 m_l 对应的 m_l , 元素为项目标号, -表示相同知识状态无需比较。

2.4 模型识别框架下完备 Q 矩阵

如果不存在两组不相同参数使得测验上任意得分向量的似然函数相等, 则模型可识别。因为直接通过得分向量似然函数判断模型识别性具有一定技术难度(Xu, 2017), 并且不太方便考虑 p 的可识别性。因此, Xu (2017)及相关研究通过引入 T 矩阵考虑参数可识别性问题, 网络版附录 2 中第一部分给出了转换思路。也就是说, 如果给定任意得分向量 $r \in \{0,1\}^J$, 如果 $(\bar{\theta}, \bar{p}) \neq (\theta, p)$, 都有 $T_{r,\cdot}(\bar{Q}, \bar{\theta})p \neq T_{r,\cdot}(\bar{Q}, \bar{\theta})\bar{p}$, 则模型 (θ, p) 可识别。例如, 在 DINA 模型无失误和猜测情况下, 即 $\theta = (s, g) = (0, 0)$, 此时知识状态 α 在项目 j 的正确作答概率 $\theta_{j,\alpha}$ 和理想反应 $\Gamma_{j,\alpha}$, 知 $\theta_{j,\alpha} = \Gamma_{j,\alpha}$ 。如果存在两个不同知识状态 α 和 α' 在测验所有项目 \mathcal{S} 上理想反应均对应相等 $\Gamma_{j,\alpha} = \Gamma_{j,\alpha'}, \forall j \in \mathcal{S}$, 则 $T_{r,\alpha}(\bar{Q}, \bar{\theta}) = T_{r,\alpha'}(\bar{Q}, \bar{\theta})$, 知 $p_{\alpha}, p_{\alpha'}$ 不可估计或不可识别。

2.4.1 DINA、DINO 模型参数严格可识别的充要条件

非参数方法下完备 Q 矩阵结论都是在认知诊断模型项目参数已知情况下得出的, 于是需要在模型识别视角下研究模型未知参数可识别和可估计的条件。Xu 和 Zhang (2016)分别给出了属性独立条件下 DINA 模型参数 (s, g, p) 可识别的充分条

件或必要条件, 但未给出充要条件。在项目参数已知时, Q 矩阵完备是 p 参数可识别的充要条件。包含单位阵的完备 Q 阵是参数 p 可识别的必要条件。但当 Q 矩阵不完备, 即使项目参数已知, 此时 p 参数不可识别。例如, 在 DINA 模型下,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

属性结构为无结构, 此时知识状态 (00),(10) 在两题上具有相同正确作答概率, 故这两个知识状态所占比例不可识别。Xu 和 Zhang (2016)在属性独立条件下给出了 DINA 模型参数 (s, g, p) 可识别的充分条件, 见网络版附录 2 中定理 A1。因为该结论仍较难判断并且不是充要条件, 下面介绍仅依赖于 Q 矩阵并且十分容易验证的充要条件。Gu 和 Xu (2019b)给出了 DINA 模型和对偶模型 DINO 模型参数 (s, g, p) 可识别的充要条件。

定理 8 属性独立条件下 DINA 模型 (s, g, p) 严格可识别的充要条件:

- (1) 测验 Q 矩阵完备, 即 Q 矩阵包含单位阵, 并且记为 $Q = \begin{bmatrix} I_k \\ Q^* \end{bmatrix}$ (完备性);
- (2) 测验 Q 矩阵中每个属性至少考查 3 次(重测性);
- (3) Q^* 中任意两列均不相同(区分性)。

$$\text{例如, } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 满足该定理的所有条件,}$$

可得到模型参数的一致估计(Gu & Xu, 2019a)。以区别于部分识别, 该条件后来被称为 DINA 模型参数严格可识别(strict identifiability)的充要条件(Gu & Xu, 2020)。Gu 和 Xu (2021b)还发现以上三个条件也是 DINA 模型下 (Q, θ, p) 严格可识别的充要条件, 并且发现测验 Q 矩阵不完备时, 会导致 p 不可识别和 Q 不可识别(多个 Q 矩阵不可区分)。

2.4.2 两个项目参数的认知诊断模型部分识别的充分条件

因为许多真实测验的 Q 矩阵并不满足如此强的严格可识别条件, Gu 和 Xu (2020, 2021a)研究

$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 部分识别(partial identifiability), 尝试给出 Q 矩阵更为实用的约束条件。若两参数认知诊断模型的项目参数已知, 总体分布参数可识别的充要条件是理想反应模式矩阵 $\Gamma_{J \times 2^K}$ 可分离(separable)。若两参数认知诊断模型的项目参数已知, 当理想反应模式矩阵 $(J \times 2^K)$ 不可分离, 但知识状态等价类的分布参数可识别。在 DINA 模型下, $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 独立属性结构 $(\mathcal{E}_1 = \emptyset)$, 知识状态全集 $\mathcal{A}(\mathcal{E}_1) = \{0, 1\}^2 = \{(00), (10), (01), (11)\}$, 其在 \boldsymbol{Q} 阵上的理想反应模式矩阵为 $\Gamma(\boldsymbol{Q}, \mathcal{A}(\mathcal{E}_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma(\boldsymbol{Q}, \mathcal{A}(\mathcal{E}_1))$ 第 1、3 列不可分离并且 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_2$ 的猜测参数相等, 从而 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 不可区分而属于同一个等价类, 两个知识状态所占比例 p_{a_0}, p_{a_2} 不可识别。

可以看出, 如果理想反应模式矩阵存在两列相等, 则两参数认知诊断模型的总体分布参数不可识别。这是因为两列相同, 即至少存在一个知识状态等价类中含有两个知识状态, 而在两参数认知诊断模型下, 这两个知识状态正确概率向量相等, 导致 T 矩阵中对应两列相等, 从而造成这两个知识状态的比例不可识别, 即导致总体分布参数不可识别。

再给定属性结构 $\mathcal{E}_2 = \{1 \rightarrow 2\}$, 此时 $\mathcal{A}(\mathcal{E}_2) = \{0, 1\}^2 \setminus \{10\} = \{(00), (10), (11)\}$, 知识状态全集 $\mathcal{A}(\mathcal{E}_2) = \{0, 1\}^2 \setminus \{10\} = \{(00), (10), (11)\}$ 或视为无结构下三个等价类 $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{(00, 01), (10), (11)\}$, 其在 \boldsymbol{Q} 阵上的理想反应模式矩阵 $\Gamma(\boldsymbol{Q}, \mathcal{A}(\mathcal{E}_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可分离, 故三个知识状态等价类所占比例 $v_{a_0}, v_{a_1}, v_{a_2}$ 均可识别。

从以上例子不难发现, 在项目参数已知条件下, DINA 模型知识状态分布参数 \boldsymbol{p} 不能完全识别, 而知识状态等价类分布参数 \boldsymbol{v} 可识别。含两参数 $\boldsymbol{\theta}^+, \boldsymbol{\theta}^-$ 的认知诊断模型 p-部分识别是指 $\boldsymbol{\theta}^+, \boldsymbol{\theta}^-$ 和知识状态等价类分布参数 \boldsymbol{v} 可识别, 而知识状态分布参数 \boldsymbol{p} 不能完全识别。在项目参数未知条件下, Gu 和 Xu (2020)证明了 p-部分识别的充分条件, 见网络版附录 2 中定理 A2。

2.4.3 多参数认知诊断模型严格、一般可识别的充分条件

两参数认知诊断模型往往将知识状态划分为

两类, 而多参数认知诊断模型定义多于两个知识状态上正确作答概率不同, 故可将知识状态划分为多类。考虑模型存在较大差别, Gu 和 Xu (2020, 2021b)特别考虑了多参数认知诊断模型严格识别和一般识别(generic identifiability)条件, 尝试推广到一般化认知诊断模型并且给出更为实用的 Q 矩阵约束条件。

因为 DINA 和 DINO 模型可视为 GDINA 模型的特例, 为保证这两类简化的模型参数可识别, $\Gamma_{J \times 2^K}$ 可分离仍是多参数模型参数严格可识别的条件, 见网络版附录 2 定理 A3 和 A4(Gu & Xu, 2020)。但是, 当 $\Gamma_{J \times 2^K}$ 不可分离时, 多参数模型下理想反应为 0 的知识状态等价类中不同知识状态的正确作答概率可以不相同, 故两参数模型 p-部分识别的结论不能直接应用于多参数模型。故 Gu 和 Xu (2020, 2021b)为多参数认知诊断模型引入了一般性可识别概念, 并证明了网络版附录 2 中定理 A5 以及条件较易验证的下面定理。

定理 9 在多参数模型下, $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 具有一般可识别性的充分条件是:

$$(1) \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{Q}^* \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q}_i = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ * & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 1 \end{pmatrix}, i=1, 2, \text{ 其中}$$

*可为 0 或 1;

(2)在条件 1 的 \boldsymbol{Q}^* 中, 要求每个属性至少被一个项目所考查。

$$\text{例如, 若 } \Gamma^{sub} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma^{S_1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma^{S_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 在给定 } \Gamma =$$

$((\Gamma^{sub})^T, (\Gamma^{sub})^T, (\Gamma^{sub})^T)^T$ 下多参数模型的 $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 严格可识别; 在给定 $\Gamma_{new} = ((\Gamma^{S_1})^T, (\Gamma^{S_2})^T, (\Gamma^{sub})^T)^T$ 下, 多参数模型的 $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 具有一般可识别性。 Γ^{S_1} ,

$$\Gamma^{S_2} \text{ 和 } \Gamma^{sub} \text{ 可在 } \boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 时得到, 即在 } \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{Q}^* \end{pmatrix} \text{ 矩阵下,}$$

$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 具有一般可识别性。

注意 \boldsymbol{Q} 矩阵只要能够通过行或列置换变成上面形式即可。Gu 和 Xu (2021b) 将 \boldsymbol{Q}_i 称为一般完备 \boldsymbol{Q} 矩阵 (generically complete), 完备 \boldsymbol{Q} 阵是一般完备 \boldsymbol{Q} 阵的特例。上面定理是在所有或重要属性模式总体分布参数 \boldsymbol{p} 已知情况下所得结论, 而在高维情况有的属性模式并不会出现的条件下, 上述条件也成为属性模式子集 \mathcal{A}_0 具有一般可识别的充分条件 (Gu & Xu, 2019b)。对于复杂模型的可识别性可参见 (Gu & Xu, 2020)。Gu 和 Xu (2021b) 还证明了以上两个条件也是一般化模型下 $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 具有一般可识别的充分条件。特别地, 当 $K=2$ 时, 以上两个条件成为一般化模型下 $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 具有一般可识别的充要条件。

2.4.4 模型参数和属性层级结构可识别条件

上面叙述的模型严格识别、部分识别、一般识别的结论都是在属性相互独立条件下所给出的, 而属性层级结构下完备 \boldsymbol{Q} 矩阵仍不能保证 $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p})$ 可识别或者直接从数据中估计。Gu 和 Xu (2021a, 2023) 给出了属性结构 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 下 DINA 模型参数及属性层级结构可识别的充分条件 (对偶的 DINO 模型参数及属性层级结构可识别的结论见网络版附录中定理 A6)。

定理 10 属性层级结构 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 下 DINA 模型参数及属性层级 $(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{s}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{p})$ 可识别的充分条件:

(1) \boldsymbol{Q} 矩阵完备, 即 \boldsymbol{Q} 矩阵包含与单位阵 \boldsymbol{I}_K 等价的 \boldsymbol{Q}^0 , 并且记为 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^0 \\ \boldsymbol{Q}^* \end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{I}_K \sim \boldsymbol{Q}^0$ 等价于理想反应矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{I}_K, \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Q}^0, \boldsymbol{\varepsilon})$, 也有 $\boldsymbol{I}_K \sim \boldsymbol{R}$;

(2) 稀疏 \boldsymbol{Q} 矩阵 $\mathcal{S}^\varepsilon(\boldsymbol{Q})$ 每列至少 3 个元素为 1, 即每个属性至少有 3 题测量;

(3) 稠密 \boldsymbol{Q} 矩阵 $\mathcal{D}^\varepsilon(\boldsymbol{Q}^*)$ 任意两列不相等。

例如, 结构 $\boldsymbol{\varepsilon} = \{1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3\}$, $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\mathcal{S}^\varepsilon(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathcal{D}^\varepsilon(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 满足定}$$

理 10 的所有条件。

如果没有属性层级结构, 即 $\boldsymbol{\varepsilon} = \emptyset$, 因独立结构完备 \boldsymbol{Q} 矩阵包含单位阵 $\boldsymbol{I}_K = \boldsymbol{R}$ 且 $\mathcal{S}^\varepsilon(\boldsymbol{Q}) = \mathcal{D}^\varepsilon(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}$, 定理 10 中三个条件成为 DINA 模型下 $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 严格可识别的充要条件, 即变成了定理 8。 \boldsymbol{Q} 满足定理 10 的所有条件且 \boldsymbol{Q} 中包含单位阵 \boldsymbol{I}_K , 则有 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{p})$, $\mathcal{S}^\varepsilon(\boldsymbol{Q})$, $\mathcal{D}^\varepsilon(\boldsymbol{Q})$ 均可识别。虽然这不能保证 \boldsymbol{Q} 可识别, 但 \boldsymbol{Q} 等价类可识别。于是, Gu 和 Xu (2021a, 2023) 通过下面定理给出了 $(\boldsymbol{\theta}, [\boldsymbol{\varepsilon}], [\boldsymbol{p}])$ 可识别的充要条件。

定理 11 属性层级结构 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 下 DINA 模型参数及属性层级 $(\boldsymbol{\theta}, [\boldsymbol{\varepsilon}], [\boldsymbol{p}])$ 可识别的充要条件:

(1) 结构化 \boldsymbol{Q} 矩阵完备, 即 \boldsymbol{Q} 矩阵包含可达阵, 并且记为 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{Q}^* \end{bmatrix}$;

(2) 在稀疏 \boldsymbol{Q} 矩阵 $\mathcal{S}^\varepsilon(\boldsymbol{Q})$ 中, 中间属性 (有先决和后继属性) 至少有 1 题测量, 根节点属性 (仅有后继属性) 和叶节点属性 (仅有先决属性) 分别至少有 2 题测量, 单独属性 (先决和后继属性均无) 至少有 3 题测量。

(3) 对于任意两个单独属性 k, l , 均有 \boldsymbol{Q}^* 中对应两列不相等, 即 $\boldsymbol{Q}_k^* \neq \boldsymbol{Q}_l^*$ 。

其中 $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ 表示属性结构 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的等价类 $[\boldsymbol{\varepsilon}] = \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Q}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\}$ 和 $[\boldsymbol{p}]$ 表示相应的分布参数, $[\boldsymbol{p}]$ 可识别类似于 p-部分识别。

例如, 线性结构下 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 及

$$\text{对应的 } \mathcal{S}^e(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 满足定理 11}$$

的所有条件。

3 Q 矩阵理论的应用

3.1 理论构念效度

给定属性及其层级关系, 用 \mathbf{R} 和 \mathbf{Q} 分别表示对应的可达阵和测验 Q 矩阵, 用 $\text{Aug}(\mathbf{Q})$ 表示由 Q 矩阵按行扩张出来的矩阵, $\#\text{Aug}(\mathbf{Q})$ 表示 $\text{Aug}(\mathbf{Q})$ 的行数。为了度量测验 Q 矩阵和属性层级结构的接近程度, 丁树良和毛萌萌等人(2012)给出了测验 Q 矩阵的理论构念效度(theoretic construct validity, TCV)计算公式

$$\text{TCV}(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) = (\#\text{Aug}(\mathbf{Q}) + 1) / (\#\text{Aug}(\mathbf{R}^T) + 1).$$

例如, 给定线性结构 $\mathcal{E} = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3\}$, 此时

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 由扩张算法对 } \mathbf{R}^T$$

和 \mathbf{Q} 按行扩张仍不变, 故 $\text{TCV}(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) = 3/4$ 。后来 Tang 等人(2021)应用 TCV 评估认知诊断测验设计对分类精度的影响, 研究表明 TCV 是 DINA 模型的诊断分类精度的上限。

3.2 Q 矩阵学习或标定

3.2.1 基于可达阵的 Q 矩阵标定方法

根据拓展 Q 矩阵理论下简化 Q 阵中任意列(非本质列)和可达阵 R 列(本质列)的布尔“或”合成关系(丁树良 等, 2009, 2018), 并在连接性认知假设和潜在反应下, 汪文义等人(2018)提出了得分阵中“本质”潜在反应行(即可达阵 \mathbf{R}^T 行对应项目的潜在反应行向量)与“本质”或“非本质”潜在反应行存在布尔“与”合成关系, 利用这种关系提出了基于可达阵的 Q 矩阵标定方法。下面给出两个例子叙述该方法的基本思想。

$$\text{例 1 给定 } \mathbf{Q}_s^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 在 DINA 模型下 } \mathbf{Q}_s^T \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 上的理}$$

$$\text{想反应矩阵为 } \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{(1)} \\ \mathbf{\Gamma}_{(2)} \\ \mathbf{\Gamma}_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 知 } \mathbf{\Gamma}_{(3)} =$$

$\mathbf{\Gamma}_{(1)} \wedge \mathbf{\Gamma}_{(2)}$ 。注意 \mathbf{Q} 的非本质行第 3 行是本质行第 1 行和第 2 行的布尔“或”, 所以在理想反应条件下, 要对第 3 行对应的题目正确作答, 必须对第 1、2 行对应的题目正确作答。可见, Q 阵非本质行上理想反应行可由可达阵上某些理想反应行的布尔“与”合成表示。

$$\text{例 2 给定 } \mathbf{Q}_s^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 在 DINO 模型下 } \mathbf{Q}_s^T \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 上的理}$$

$$\text{想反应矩阵为 } \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{(1)} \\ \mathbf{\Gamma}_{(2)} \\ \mathbf{\Gamma}_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 知 } \mathbf{\Gamma}_{(3)} =$$

$\mathbf{\Gamma}_{(1)} \wedge \mathbf{\Gamma}_{(2)}$ 。注意 \mathbf{Q} 的非本质行第 3 行是本质行第 1 行和第 2 行的布尔“或”, 所以在理想反应条件下, 要对第 3 行对应的题目正确作答, 必须对第 1 行或第 2 行对应的题目正确作答。可见, Q 阵非本质行上理想反应行可由可达阵上某些理想反应行的布尔“或”合成表示。

上面两个例子提示了 DINA 和 DINO 模型下项目属性向量之间的关系决定了理想反应模式之间关系, 反过来, 可以根据理想反应模式之间关系决定项目属性向量之间的关系。考虑实际观察得分数据中猜测、失误或噪音, 下面介绍基于可达阵的 Q 矩阵标定方法。不妨只考虑一个未标定试题, 其属性向量为 \mathbf{q}_j , 其中 $\mathbf{q}_j \in \mathbf{Q}_r$ 。记测验 Q

$$\text{阵为 } \mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \\ \mathbf{q}_j \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_K \end{pmatrix}, \text{ 对应的得分矩阵为}$$

$\mathbf{U} = [\mathbf{X} \ \mathbf{Y}_j]$ 。如果测验中有 K 个项目的属性向量已经由专家标定, 并且这些属性向量正好组成一个完整的 \mathbf{R}^T , 由观察作答反应, DINA 模型下项目 j 对应的 \mathbf{R}^T 行集合估计 \hat{S}_j 及属性向量估计 $\hat{\mathbf{q}}_j$ 分别为:

$$\hat{S}_j = \underset{S \in \mathcal{P}(\{r_1, r_2, \dots, r_K\}) - \emptyset}{\text{argmin}} (\mathbf{Y}_j - \wedge_{r_k \in S} \mathbf{X}_k)^T (\mathbf{Y}_j - \wedge_{r_k \in S} \mathbf{X}_k),$$

$$\hat{\mathbf{q}}_j = \vee_{r_k \in \hat{S}_j} r_k.$$

同理, DINO 模型下项目 j 对应的 \mathbf{R}^T 行集合估计 \hat{S}_j 及属性向量估计 $\hat{\mathbf{q}}_j$ 分别为:

$$\hat{S}_j = \underset{S \in P(\{r_1, r_2, \dots, r_K\}) - \emptyset}{\operatorname{argmin}} (Y_j - \bigvee_{r_k \in S} X_k)^T (Y_j - \bigvee_{r_k \in S} X_k),$$

$$\hat{q}_j = \bigvee_{r_k \in \hat{S}_j} r_k.$$

3.2.2 基于布尔矩阵分解的 Q 矩阵学习方法

因为 DINA 和 DINO 模型下理想反应矩阵可以分解成知识状态矩阵和测验 Q 矩阵的布尔乘积形式, 故可使用基于布尔矩阵分解的数据驱动式方法学习 Q 矩阵(Sun et al., 2014, 2015; Xiong et al., 2022)。Xiong 等人(2022)发现在 Q 矩阵可识别的充分条件和充要条件下, 布尔矩阵分解方法表现较好; 但在 Q 矩阵不完备条件下, 布尔矩阵分解方法在确定属性数方面表现不太好。下面通过两个例子简要介绍布尔矩阵分解方法的基本思想。

例 3(续例 1)理想反应矩阵 \mathbf{F} 可以分解成测验 Q 矩阵 \mathbf{Q} 和知识状态矩阵补 $\bar{\mathbf{Q}}_s^T$ 的布尔乘积形式

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \circ \bar{\mathbf{Q}}_s^T.$$

例 4(续例 2)理想反应矩阵 \mathbf{F} 可以分解成测验 Q 矩阵 \mathbf{Q} 和知识状态矩阵 \mathbf{Q}_s^T 的布尔乘积形式

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}_s^T.$$

布尔矩阵分解是在一定误差准则下对得分阵 $\mathbf{X}_{N \times J}$ 进行分解, 求得 $U_{N \times K}$ 和 $V_{K \times J}$ 最小化

$d_F(\mathbf{X}_{N \times J} - U_{N \times K} \circ V_{K \times J}) = \|\mathbf{X}_{N \times J} - U_{N \times K} \circ V_{K \times J}\|_F^2$, 其中矩阵的 Frobenius 范数(Sun et al., 2014, 2015)。如果得分阵为 0-1 记分, 而采用布尔矩阵分解, 矩阵的 Frobenius 范数就变成了矩阵的 1 范数(Xiong et al., 2022)。同样用到矩阵分解思想, 汪文义和宋丽红等(2015)提出基于探索性因素分析的 Q 矩阵学习方法。

3.3 计算机化自适应诊断测验选题策略设计

(1) 基于 R 矩阵的初始题选取方法

初始阶段项目选取方法是计算机化自适应诊断测验的重要组成部分, 直接影响测验的判准率和测验长度。依据可达阵是区分 DINA 模型理想反应模式的充分条件(丁树良等, 2009, 2010), 涂冬波等人(2013)把包含可达阵所考核的属性向量矩阵称为“T 阵”, 把计算机化自适应诊断测验的初始题从“T 阵”中选取并同时保证“T 阵”中含有

可达阵的方法称为“T 阵法”。这种方法保证了在自适应测验的初始阶段就尽可能实现对每个属性的诊断, 从而提高自适应测验的诊断准确性。研究表明, 该方法的判准率高于随机法。T 阵法仅主要约束初始题目集的 Q 矩阵包含可达阵, 并没有将项目参数或项目质量标准考虑到初始题选取。高椿雷等人(2017)将两类认知诊断项目区分度指标与可达阵结合, 提出了 4 种新的初始阶段选题方法, 部分方法的表现优于 T 阵法。罗芬等人(2018)应用在线多阶段自适应测验(Zheng & Chang, 2015)的组卷思想, 提出自适应分组认知诊断测验, 首个分组中的项目选自可达阵的每列(对应题目类型)。

(2) 基于 Q 最优准则的初始题选取方法

在线性测验下, 且在 DINA 和 DINO 模型和属性相互独立时, 包含单位阵的完备 Q 矩阵是区分开所有可能知识状态的充要条件。Xu 等(2016)根据计算机化自适应诊断测验选题策略频繁选择的试题属性向量特征, 给出并证明了 DINA、DINO 模型下序贯测验式 CD-CAT 优化 Q 矩阵的充要条件。

在 DINA 和 DINO 模型项目参数满足 $s, g < 0.5$ 时, 含 K 个项目的优化 Q 矩阵的充要条件是对于每个被试序贯施测的 Q 矩阵(可置换列序)满足

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ q_{K-1,1} & \cdots & q_{K-1,K-2} & 1 & 0 \\ q_{K,1} & \cdots & q_{K,K-2} & q_{K,K-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 DINA (DINO)模型需要满足: 如果被试正确作答第 k 个项目 (\mathbf{Q} 矩阵第 k 行), \mathbf{Q} 矩阵的第 k 列主对角线以下 ($k+1 \leq i \leq K$) 元素 $q_{i,k} = 0$ 或 $q_{i,k} = 1$; 如果被试错误作答第 k 个项目, \mathbf{Q} 矩阵的第 k 列主对角线以下 $q_{i,k} = 0$ 。也就是说, 在 DINA 模型下, 计算机化自适应诊断测验频繁选择属性向量与被试真实知识状态相同的项目, 以及频繁选择含被试未掌握属性的单位向量项目; 而 DINO 模型下, 频繁选择考查被试真实未掌握的所有属性的项目, 以及频繁选择含被试掌握属性的单位向量题目。这类似于 Kaplan 等人(2015)模拟研究发现的结论。

(3) 非参数选题方法

Chang 等人(2019)提出的非参数选题方法

(nonparametric item selection, NPS)方法, 为每个被试选择具有最大区分能力的项目, 并采用非参数分类(nonparametric classification, NPC)方法实现知识状态分类。NPS 方法的前 K 题选择采取 Q 最优准则(Xu et al., 2016), NPS 算法中第 1 至 5 步体现了 Q 最优准则:

步骤 1: 初始化题库 $\mathcal{R}^{(0)} = \{1, 2, \dots, J\}$;

步骤 2: 从 $\mathcal{R}^{(0)}$ 中随机选择一个 $\mathbf{q}_j = \mathbf{e}_1$ 的项目 j , 其中 \mathbf{e}_1 是一个单位向量, 即随机选一个仅考察属性为 1 的项目。更新 $\mathcal{R}^{(1)} = \mathcal{R}^{(0)} \setminus \{j\}$;

步骤 3: 给考生分配项目 j , 并将项目反应向量更新为 $\mathbf{y}^{(1)} = (\mathbf{y}^{(1)})$;

步骤 4: 在选择第 k ($1 < k \leq K$) 题时, 从 $\mathcal{R}^{(k-1)}$ 选择一题 j' , 使得 $\mathbf{q}_{j'} = \mathbf{e}_k + \sum_{i=1}^{k-1} B_i \mathbf{e}_i I(\mathbf{y}^{(i)} = 1)$,

其中 B_i 是服从事件发生概率为 0.5 的伯努利随机变量。更新 $\mathcal{R}^{(k)} = \mathcal{R}^{(k-1)} \setminus \{j'\}$ 和 $\mathbf{y}^{(k)} = (\mathbf{y}^{(k-1)}, \mathbf{y}^{(k)})$;

步骤 5: 从第 $K+1$ 题起, 假定 $\hat{\mathbf{a}}^{(t)}$ 和 $\hat{\mathbf{a}}^{(r)}$ 分别是一个被试作答完第 t ($K \leq t$) 题之后的最可能和第二可能(如找不到区分两者项目, 则顺推为后面知识状态), 分别对应于 NPC 算法中最小和次小(更小)的距离, NPS 方法从剩余题库中选择满足 $\Gamma_{j''}(\hat{\mathbf{a}}^{(t)}) \neq \Gamma_{j''}(\hat{\mathbf{a}}^{(r)})$ 的项目 j'' , 同时更新 $\mathcal{R}^{(t+1)} = \mathcal{R}^{(t)} \setminus \{j''\}$ 和 $\mathbf{y}^{(t+1)} = (\mathbf{y}^{(t)}, \mathbf{y}^{(t+1)})$, 重复此步直至测验满足终止规则。

3.4 认知诊断测验组卷方法

源于完备 Q 矩阵可区分不同知识状态的期望反应向量的思想, Wang 等(2021)结合聚类分析和混合整数线性规划, 提出了最大化最小类间距离(maximize the minimum distance between latent classes, MMD)组卷方法。该方法使用相对熵信息量来度量两种知识状态 α_u 和 α_v 在项目 j 上两个作答概率分布 $(1 - P_j(\alpha_u), P_j(\alpha_u))$ 和 $(1 - P_j(\alpha_v), P_j(\alpha_v))$ 的距离:

$$D_{K-L}(\alpha_u, \alpha_v, j) = P_j(\alpha_u) \log \left[\frac{P_j(\alpha_u)}{P_j(\alpha_v)} \right] + (1 - P_j(\alpha_u)) \log \left[\frac{(1 - P_j(\alpha_u))}{(1 - P_j(\alpha_v))} \right].$$

对于每个项目 j 都可得距离矩阵 $\mathbf{D}_j = (D(\alpha_u, \alpha_v, j))$, 为了采用混合线性规划方法进行组卷, 需要对矩阵 \mathbf{D}_j 进行处理: 首先将 \mathbf{D}_j 中按行顺序将所有行向量合并成一行, 同时将原 \mathbf{D}_j 中主对角元上的

元素去掉, 最后将该行向量进行转置得到列向量, 记为 $\mathbf{V}_j = \text{Vec}(\mathbf{D}_j)$; 然后将题库中所有项目 \mathbf{V}_j 组成的矩阵记为 $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_M)$, M 为题库中的题目数。因为删除了主对角线上零元, \mathbf{V} 的大小为 $M * T(T-1)$ 的矩阵, 其中 $T = 2^K$ 。下面给出兼顾测验对所有类的类间距离均值和最大化最小类间距离的混合线性规划模型:

$$\text{Min}(f_1 X + f_2 y),$$

Subject to

$$\mathbf{V} \mathbf{X} + \mathbf{y} \geq \mathbf{b},$$

$$\mathbf{I}^T \mathbf{X} = \mathbf{J},$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots, M,$$

$$y \in R.$$

目标函数中 $\mathbf{f}_1 = -(f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1M})^T$, $f_{ij} = \sum_{v=1}^{T(T-1)} V_{vj} / T(T-1)$, \mathbf{f}_1 中的负号是将最大化所有类间距离变为最小化问题; $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_M)^T$, x_j 为决策变量, 若 $x_j = 1$ 表示第 j 题被选中, 否则未被选中;

中; f_2 为 y 的权重, $f_2 = J \sum_{u=1}^{T(T-1)} \sum_{v=1}^M V_{uv} / (MT(T-1))$; y

刻画了测验对于第 t 对类间距离 $V_{(t)} \mathbf{X}$ 与目标距离 b_t 之间的差异量, 其中 $V_{(t)}$ 表示 \mathbf{V} 的第 t 行。在目标函数中加入 $f_2 y$ 是为了最大化最小类间距离, 若类间距离 $V_{(t)} \mathbf{X}$ 在所有的类间距离中最小, 且小于目标距离 b_t , 那么该类间距离至少加上 $b_t - V_{(t)x}$ 才能满足约束条件, f_2 由于为正且目标距离 b_t 固定, 所以若需 $f_2 y$ 的值最小, 只需最大化 $V_{(t)} \mathbf{X}$ 即可。在约束函数中, \mathbf{b} 表示各类间距离的下限, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{T(T-1)})^T$, 可设置各类间距离的下限 \mathbf{b} 为题库中所有题目的类间距离平均值乘以测验长度, 即 $b_t = J \sum_{j=1}^M (V_{tj}) / M$ 。 $\mathbf{I}^T \mathbf{X} = \mathbf{J}$

为测验长度约束, \mathbf{I} 为长度为 M 的全 1 列向量, J 为测验长度。当 K 增加时, 计算量将迅速增加。为了减少计算量, 可以考虑直接可比较大小关系的知识状态间距离, 从而得到 $M * K 2^K$ 的简化 \mathbf{V} , 这是因为 $\sum_{i=1}^K C_i^{i-1} C_K^i = K 2^{K-1}$ 且考虑距离的非对称性。

4 讨论

在梳理了认知诊断研究领域近 15 年来 Q 矩阵理论研究结果基础之上, 重点介绍了完备 Q 矩

阵核心内容和结合例子解释相关理论结果,并简要叙述了Q矩阵理论的代表性应用研究结果。Q矩阵理论研究趋势如图1所示。完备Q矩阵研究发展过程,透视出完备Q矩阵呈现从独立和属性层级结构到一般结构,从简化的DINA和DINO模型到一般化认知诊断模型,从二值Q矩阵到多值Q矩阵,从二值评分到多级评分,从理想反应模式到期望反应模式等方面不断深入的规律性。

Q矩阵理论的发展也基本引领了认知诊断各方面应用:(1)根据属性层级结构,预先设计基于理想反应模式的完备Q矩阵,可用于指导测验题目编制;(2)评价测验Q矩阵与属性层级结构一致性的理论构念效度指标,可用于测验实施之前Q矩阵设计质量评价;(3)在收集数据之后,可结合数据驱动的Q矩阵标定方法学习测验Q矩阵,可辅助学科专家确定测验所考查的属性数和验证已有Q矩阵。在确定部分项目的Q矩阵之后,尤其是可达阵的测验项目,可以添加未标定Q矩阵的新题进入测验,再收集数据后,采用半监督式Q矩阵标定方法得出新题的Q矩阵;(4)在构建了包含Q矩阵和项目参数的题库基础之上,如果采用计算机化自适应诊断测验,可以针对采用的认知

诊断模型选择相应的初始题选题方法和后续选题方法,实施自适应测验;(5)在构建了包含Q矩阵和项目参数的题库基础之上,可以使用计算机自动组卷,用于线性测验或多阶段测验。

表2详细地列出了Q矩阵特点、满足条件、应用情景和推荐的诊断方法。根据认知机制的分类(von Davier & Lee, 2019),因为连接或非补偿(conjunctive or non-compensatory)、非连接或补偿(disjunctive or compensatory)经常互用,故表2中仅分为连接和非连接。已有文献尚未对所有组合条件进行研究,比如Gu和Xu(2021a, 2023)尚未研究属性层级结构下一般化认知诊断模型可识别的条件,以及Heller(2022)仅给出一般结构下连接机制的结论,故表中并没有穷尽所有组合条件。在表2中,小样本条件下均推荐NPC,这主要有三方面考虑:第一,因为伴随列出的测验Q矩阵要求较低(仅要求包含单位阵或可达阵),这尚不能满足DINA或DINO模型参数严格或部分可识别的条件;第二,样本量500基本上是认知诊断模型获得较高精度时对样本量的最低要求,这是众多研究形成的共识(参见:Sen & Cohen, 2021)。虽然融入先验分布信息的贝叶斯估计方法

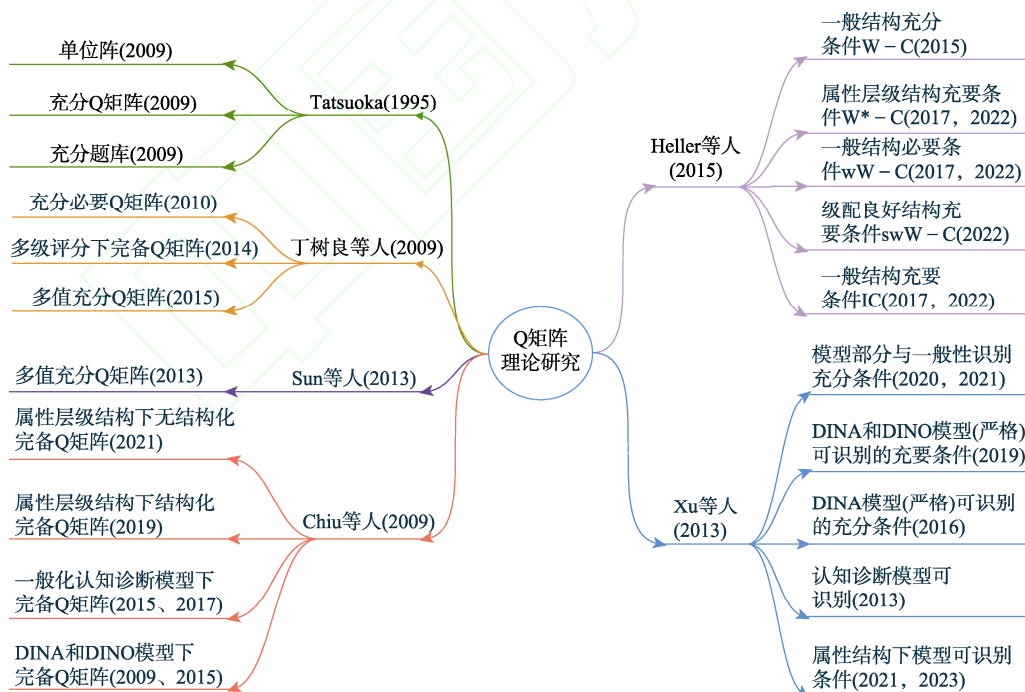


图1 Q矩阵理论研究趋势

表 2 完备 Q 矩阵应用条件

结构	水平	机制	Q 矩阵	理论基础	样本量	诊断方法
层级	二值	连接	Q 矩阵包含单位阵	Chiu (2009)	小	NPC
			Q 矩阵可达阵 R (定理 1)	丁树良等(2010)		
			Q 矩阵包含介于两者之间的 E^* (定理 4)	Köhn 和 Chiu (2019, 2021) Heller (2022)		
		非连接	定理 10 或定理 11 的条件	Gu 和 Xu (2021a, 2023)	中	DINA-AHM
			Q 矩阵包含单位阵(充分条件)	Chiu 和 Köhn (2015b)	小	NPC
			定理 A6	Gu 和 Xu (2021a, 2023)	中	DINO-AHM
独立	二值	连接	原文中定理 3(充分条件)	Gu 和 Xu (2021a, 2023)	中	ACDM/LLTM
			Q 矩阵包含单位阵	Chiu (2009)	小	NPC
			定理 2 或定理 3 的条件	Heller (2022)		
		非连接	定理 8 的条件	Gu 和 Xu (2019b)	中	DINA
			Q 矩阵包含单位阵	Chiu 和 Köhn (2015b)	小	NPC
			定理 8 的条件	Gu 和 Xu (2019b)	中	DINO
			定理 9 的条件	Gu 和 Xu (2020, 2021b)	中	ACDM/LLTM
					大	GDINA LCDM GDM
层级 (含独立)	多值	非连接	Q 矩阵包含拟可达阵	丁树良, 罗芬等(2015) Sun 等人(2013) 蔡艳和涂冬波(2015)	中	GDD-P
一般	二值	连接	Q 矩阵包含基本属性模式矩阵 B 或定理 5、6、7 中条件	Heller (2022)	小	NPC

注: 小样本量 = 0-500; 中样本量 = 500-1000; 大样本量 = 1000 以上; NPC = 非参数方法; GDD-P = 多级属性的广义距离判别法; ACDM = 加性认知诊断模型; LLTM = 线性逻辑斯蒂克模型。

可以加速算法收敛, 但是样本量 500 比样本量 30 或 100 的模式判准率至少高 20%或 10% (Ma & Jiang, 2021); 第三, 根据最新研究(Ma, de la Torre, & Xu, 2023), NPC 和拓广 NPC (the general NPC, GPNC)仍是小样本量下推荐方法。

不同定义下的完备 Q 矩阵, 分别可用于测验不同阶段并发挥不同作用, 以及伴随着推荐的认知诊断模型或方法。基于理想反应模式的完备 Q 矩阵首先可用于指导测验设计, 在给定属性及其层级关系以后, 可以根据属性层级结构设计完备 Q 矩阵, 并用于指导测验题目编制。在收集到实测数据之后, 在小样本量情景下, 可采用非参数认知诊断方法(NPC 或 GNPC); 在样本量中等情景下, 可采用 DINA、DINO、加性认知诊断模型(the additive cognitive diagnosis model, ACDM)或线性逻辑斯蒂克模型(linear logistic test model, LLTM); 在大样本量情景下, 可以选用一般化认

知诊断模型(GDINA、LCDM、GDM), 借助模型可识别条件并结合数据分析, 判断 Q 矩阵、项目参数、分布参数、属性结构等参数的可识别性。

5 展望

与模型无关 Q 矩阵理论和一般化认知诊断模型下 Q 矩阵理论值得深入研究。因为基于理想反应模式所定义的完备 Q 矩阵可应用于测验设计, 这对于指导认知诊断测验开发至关重要, 开展部分识别下与模型无关 Q 矩阵理论研究对于不同粒度诊断具有重要意义。已有研究主要给出了 DINA、DINO 模型下 (θ, p) , (Q, θ, p) , (ε, θ, p) 等可识别的充要条件, 但是对于一般化认知诊断模型主要给出的是充分条件(Culpepper, 2023; Gu & Xu, 2019b, 2021a, 2021b, 2023), 并且相关结论已经用于从数据中学习属性层级结构和 Q 矩阵(Ma, Ouyang, & Xu, 2023; Xiong et al., 2022)。一

般化认知诊断模型 (θ, p) , (Q, θ, p) , (ε, θ, p) 可识别是否存在充要条件, 充要条件是什么, 有的充分条件、严格(一般)可识别及推导过程仍然比较复杂(Culpepper, 2023; He et al., 2023), 能否变化成更为简洁的条件, 这些问题仍值得研究。较多研究关注如何从数据中学习属性结构(Chen & Wang, 2023; Ma, Ouyang, & Xu, 2023; Wang & Lu, 2021)。模型部分识别和一般性识别理论, 对于属性层级结构下 Q 矩阵、结构、属性数、参数学习有何借鉴意义, 有待探讨。多值 Q 矩阵下非结构化完备 Q 矩阵的相应问题也值得探究(丁树良 等, 2022)。

最新认知诊断模型和新开发模型下 Q 矩阵理论及应用也值得拓展。多策略(Ma & Guo, 2019; Wang et al., 2023)、多级评分(Chen & de la Torre, 2018; He et al., 2023; Liu & Jiang, 2018; Ma & de la Torre, 2016)、混合评分(Liu et al., 2022)、属性多级(Bao, 2019; Ma & Jiang, 2021)等模型下, Q 矩阵理论仍值得研究。例如, 已有研究在二值 Q 矩阵下, 采用每掌握一属性计一分的多级评分方式, 得出了完备 Q 矩阵须满足列满秩条件(丁树良, 罗芬 等, 2014; 丁树良, 汪文义 等, 2014)。还有研究在多值 Q 矩阵下, 采用当被试属性掌握水平等于或高于项目所考查属性水平并以考查水平记分的多级评分方式, 得出了完备 Q 矩阵须含拟可达阵的充分条件(Sun et al., 2013)。这两种评分方式有一定的应用场景。对于分小题(类别)评分且小题(类别)可能考查一个、多个属性时, 如果给定各分数类别的属性向量, 也称为约束类别 Q 矩阵(a restricted Q_C -matrix), 在使用约束序贯多级评分模型(the restricted sequential G-DINA model)时(Ma & de la Torre, 2016), 约束类别 Q 矩阵如何设计也值得讨论。在新开发认知诊断模型时, 也要注意 Q 矩阵设计, 以保证新模型各类参数可识别。

有待深入开展 Q 矩阵理论在属性标定、选题策略、组卷方法中的应用研究。Q 矩阵理论中完备 Q 矩阵, 特别是非结构化完备 Q 矩阵的研究, 除指导认知诊断测验设计之外, 对于 Q 矩阵学习标定或验证、选题策略、题库建设、多步骤自适应测验等方面也有着潜在应用价值(丁树良 等, 2022)。Q 矩阵估计或修正方法取得了一定的发展(李佳 等, 2021), 但是属性层级、多级属性、多策略下 Q 矩阵估计和修正尚待研究。在属性层级结

构下 Q 矩阵估计和验证方法中, 少标属性、多标属性对 Q 矩阵估计和验证方法的影响或修正, 都值得进一步研究。一般化认知诊断模型下完备 Q 矩阵, 如何用于计算机化自适应诊断测验序贯优化 Q 矩阵设计与选题策略设计, 怎样改进属性层级结构下组卷方法(唐小娟 等, 2013, 2022), 仍有待考虑。

参考文献

- 蔡艳, 涂冬波. (2015). 属性多级化的认知诊断模型拓展及其 Q 矩阵设计. *心理学报*, 47(10), 1300-1308.
- 昌维, 詹沛达, 王立君. (2018). 认知诊断中多分属性与二分属性的对比研究. *心理科学*, 41(4), 982-988.
- 丁树良, 罗芬, 汪文义. (2012). Q 矩阵理论的扩展. *心理学探新*, 32(5), 417-422.
- 丁树良, 罗芬, 汪文义. (2014). 多级评分认知诊断测验蓝图的设计——独立型和收敛型结构. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 38(3), 265-269.
- 丁树良, 罗芬, 汪文义, 李佳, 熊建华. (2022). 非结构化完备 Q 矩阵的构造与判定. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 46(5), 441-446.
- 丁树良, 罗芬, 汪文义, 熊建华. (2015). 0-1 和多值可达矩阵的性质及应用. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 39(1), 64-68.
- 丁树良, 罗芬, 汪文义, 熊建华. (2019). 0-1 评分认知诊断测验设计. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 43(5), 441-447.
- 丁树良, 毛萌萌, 汪文义, 罗芬, Cui, Y. (2012). 教育认知诊断测验与认知模型一致性的评估. *心理学报*, 44(11), 1535-1546.
- 丁树良, 汪文义, 罗芬. (2012). 认知诊断中 Q 矩阵和 Q 矩阵理论. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 36(5), 441-445.
- 丁树良, 汪文义, 罗芬. (2014). 多级评分认知诊断测验蓝图的设计——根树型结构. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 38(2), 111-118.
- 丁树良, 汪文义, 罗芬, 熊建华. (2015). 多值 Q 矩阵理论. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 39(4), 365-370.
- 丁树良, 汪文义, 罗芬, 熊建华. (2016). 可达阵功能的不可替代性. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 40(3), 290-294+298.
- 丁树良, 汪文义, 罗芬, 熊建华. (2017). Q 矩阵理论探微. *江西师范大学学报(哲学社会科学版)*, 50(1), 71-79.
- 丁树良, 汪文义, 罗芬, 熊建华. (2018). Q 矩阵标定的一种简便方法. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 42(2), 130-133.
- 丁树良, 汪文义, 杨淑群. (2011). 认知诊断测验蓝图的设计. *心理科学*, 34(2), 258-265.
- 丁树良, 杨淑群, 汪文义. (2010). 可达矩阵在认知诊断测验编制中的重要作用. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 34(5), 490-494.
- 丁树良, 祝玉芳, 林海菁, 蔡艳. (2009). Tatsuoaka Q 矩阵理

- 论的修正. *心理学报*, 41(2), 175-181.
- 高椿雷, 罗照盛, 郑蝉金, 喻晓锋, 彭亚风, 郭小军. (2017). CD-CAT 初始阶段项目选取方法. *心理科学*, 40(2), 485-491.
- 康春花, 杨亚坤, 曾平飞. (2017). 海明距离判别法分类准确率的影响因素. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 41(4), 394-400.
- 康春花, 朱仕浩, 宫皓明, 曾平飞. (2023). 一种可融入额外信息的机器学习诊断法. *心理科学*, 46(1), 212-220.
- 李佳, 毛秀珍, 张雪琴. (2021). 认知诊断 Q 矩阵估计(修正)方法. *心理科学进展*, 29(12), 2272-2280.
- 李元白, 曾平飞, 杨亚坤, 康春花. (2018). 一种非参数的多策略方法: 多策略的海明距离判别法. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 42(1), 67-73.
- 罗芬, 王晓庆, 丁树良, 熊建华. (2018). 自适应分组认知诊断测验设计及其选题策略. *心理科学*, 41(3), 720-726.
- 唐小娟, 丁树良, 毛萌萌, 俞宗火. (2013). 基于属性层级结构的认知诊断测验的组卷. *心理学探新*, 33(3), 252-259.
- 唐小娟, 丁树良, 俞宗火. (2022). 题目属性向量平衡策略的认知诊断测验设计. *心理科学*, 45(6), 1466-1474.
- 田伟, 辛涛. (2012). 基于等级反应模型的规则空间方法. *心理学报*, 44(1), 249-262.
- 涂冬波, 蔡艳, 戴海琦. (2013). 认知诊断 CAT 选题策略及初始题选取方法. *心理科学*, 36(2), 469-474.
- 王立君, 唐芳, 詹沛达. (2020). 基于认知诊断测评的个性化补救教学效果分析: 以“一元一次方程”为例. *心理科学*, 43(6), 1490-1497.
- 汪文义, 丁树良, 宋丽红. (2015). 认知诊断中基于条件期望的距离判别方法. *心理学报*, 47(12), 1499-1510.
- 汪文义, 宋丽红, 丁树良. (2015). 基于探索性因素分析的 Q 矩阵标定方法. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 39(2), 138-144+170.
- 汪文义, 宋丽红, 丁树良. (2018). 基于可达阵的一种 Q 矩阵标定方法. *心理科学*, 41(4), 968-975.
- 王晓庆, 丁树良, 罗芬. (2019). 认知诊断中的 Q 矩阵及其作用. *心理科学*, 42(3), 739-746.
- 詹沛达, 边玉芳, 王立君. (2016). 重参数化的多分属性诊断分类模型及其判准确率影响因素. *心理学报*, 48(3), 318-330.
- 詹沛达, 丁树良, 王立君. (2017). 多分属性层级结构下引入逻辑约束的理想掌握模式. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 41(3), 289-295.
- 祝玉芳, 丁树良. (2009). 基于等级反应模型的属性层级方法. *心理学报*, 41(3), 267-275.
- Bao, Y. (2019). *A diagnostic classification model for polytomous attributes* (Unpublished doctoral dissertation). University of Georgia.
- Briggs, D., Alonzo, A., Schwab, C., & Wilson, M. (2006). Diagnostic assessment with ordered multiple-choice items. *Educational Assessment*, 11(1), 33-63.
- Briggs, D. C., & Alonzo, A. C. (2012). The psychometric modeling of ordered multiple-choice item responses for diagnostic assessment with a learning progression. In A.C. Alonzo, & A.W. Gotwals (Eds.), *Learning progressions in science* (pp. 293-316). Rotterdam, Sense Publishers.
- Cai, Y., Tu, D., & Ding, S. (2018). Theorems and methods of a complete Q matrix with attribute hierarchies under restricted Q-matrix design. *Frontiers in Psychology*, 9, Article 1413.
- Chang, Y. P., Chiu, C. Y., & Tsai, R. C. (2019). Nonparametric CAT for CD in educational settings with small samples. *Applied Psychological Measurement*, 43(7), 543-561.
- Chen, J., & de la Torre, J. (2013). A general cognitive diagnosis model for expert-defined polytomous attributes. *Applied Psychological Measurement*, 37(6), 419-437.
- Chen, J., & de la Torre, J. (2018). Introducing the general polytomous diagnosis modeling framework. *Frontiers in Psychology*, 9, Article 1474.
- Chen, Y., Liu, J., Xu, G., & Ying, Z. (2015). Statistical analysis of Q-matrix based diagnostic classification models. *Journal of the American Statistical Association*, 110(510), 850-866.
- Chen, Y., & Wang, S. (2023). Bayesian estimation of attribute hierarchy for cognitive diagnosis models. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 48(6), 810-841. <https://doi.org/10.3102/10769986231174918>.
- Chiu, C.-Y., & Chang, Y. (2021). Advances in CD-CAT: The general nonparametric item selection method. *Psychometrika*, 86(4), 1039-1057.
- Chiu, C.-Y., & Douglas, J. (2013). A nonparametric approach to cognitive diagnosis by proximity to ideal response patterns. *Journal of Classification*, 30, 225-250.
- Chiu, C.-Y., Douglas, J. A., & Li, X. D. (2008). *Cluster analysis for cognitive diagnosis: Theory and applications* (Unpublished doctoral dissertation). University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Chiu, C.-Y., Douglas, J. A., & Li, X. (2009). Cluster analysis for cognitive diagnosis: Theory and applications. *Psychometrika*, 74(4), 633-665.
- Chiu, C.-Y., & Köhn, H.-F. (2015a). A general proof of consistency of heuristic classification for cognitive diagnosis models. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 68(3), 387-409.
- Chiu, C.-Y., & Köhn, H.-F. (2015b). Consistency of cluster analysis for cognitive diagnosis: The DINO model and the DINA model revisited. *Applied Psychological Measurement*, 39(6), 465-479.
- Culpepper, S. A. (2023). A note on weaker conditions for identifying restricted latent class models for binary responses. *Psychometrika*, 88(1), 158-174.
- Decarlo, L. T. (2011). On the analysis of fraction subtraction data: The DINA model, classification, latent class sizes, and the Q-matrix. *Applied Psychological Measurement*, 35(1), 8-26.
- Dibello, L. V., Stout, W. F., & Roussos, L. A. (1995). Unified cognitive psychometric diagnostic assessment

- likelihood-based classification techniques. In P. D. y *Diagnostic Assessment* (pp. 361–39). Nichols, S. F. Chipman, & R. L. Brennan (Eds.), *Cognitive*0). Routledge.
- de la Torre, J. (2011). The generalized DINA model framework. *Psychometrika*, 76(2), 179–199.
- de la Torre, J., Qiu, X. L., & Santos, K.C. (2022). An empirical Q-matrix validation method for the polytomous G-DINA model. *Psychometrika*, 87(2), 693–724.
- Falmagne, J.-C., & Doignon, J.-P. (2011). *Learning spaces: Interdisciplinary applied mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Gu, Y., & Xu, G. (2019a). Learning attribute patterns in high-dimensional structured latent attribute models. *Journal of Machine Learning Research*, 20(115), 1–58.
- Gu, Y., & Xu, G. (2019b). The sufficient and necessary condition for the identifiability and estimability of the DINA model. *Psychometrika*, 84(2), 468–483.
- Gu, Y., & Xu, G. (2020). Partial identifiability of restricted latent class models. *The Annals of Statistics*, 48(4), 2082–2107.
- Gu, Y., & Xu, G. (2021a). Identifiability of hierarchical latent attribute models. Retrieved July 15, 2023, from <https://arxiv.org/abs/1906.07869>.
- Gu, Y., & Xu, G. (2021b). Sufficient and necessary conditions for the identifiability of the Q-matrix. *Statistica Sinica*, 31(1), 449–472.
- Gu, Y., & Xu, G. (2023). Identifiability of hierarchical latent attribute models. *Statistica Sinica*, 33, 1–31.
- Haertel, E. H. (1989). Using restricted latent class models to map the skill structure of achievement items. *Journal of Educational Measurement*, 26(4), 301–321.
- He, S., Culpepper, S. A., Douglas, J. (2023). A sparse latent class model for polytomous attributes in cognitive diagnostic assessments. In L.A. van der Ark, W.H.M. Emons, & R.R. Meijer (Eds.), *Essays on Contemporary Psychometrics* (pp. 413–442). Springer.
- Heller, J. (2022). Complete Q-matrices in conjunctive models on general attribute structures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 75(2), 522–549.
- Heller, J., Anselmi, P., Stefanutti, L., & Robusto, E. (2017). A necessary and sufficient condition for unique skill assessment. *Journal of Mathematical Psychology*, 79, 23–28.
- Heller, J., Stefanutti, L., Anselmi, P., & Robusto, E. (2015). On the link between cognitive diagnostic models and knowledge space theory. *Psychometrika*, 80(4), 995–1019.
- Henson, R. A., Templin, J. L., & Willse, J. T. (2009). Defining a family of cognitive diagnosis models using log-linear models with latent variables. *Psychometrika*, 74(2), 191–210.
- Kaplan, M., de la Torre, J., & Barrada, J. R. (2015). New item selection methods for cognitive diagnosis computerized adaptive testing. *Applied Psychological Measurement*, 39(3), 167–188.
- Karelitz, T. M. (2004). *Ordered category attribute coding framework for cognitive assessments* (Unpublished doctoral dissertation). University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Köhn, H.-F., & Chiu, C.-Y. (2017). A procedure for assessing the completeness of the Q-matrices of cognitively diagnostic tests. *Psychometrika*, 82(1), 112–132.
- Köhn, H.-F., Chiu, C. -Y. (2018). How to build a complete Q-matrix for a cognitively diagnostic test. *Journal of Classification*, 35, 273–299.
- Köhn, H.-F., & Chiu, C.-Y. (2019). Attribute hierarchy models in cognitive diagnosis: Identifiability of the latent attribute space and conditions for completeness of the Q-matrix. *Journal of Classification*, 36, 541–565.
- Köhn, H.-F., & Chiu, C.-Y. (2021). A unified theory of the completeness of Q-matrices for the DINA model. *Journal of Classification*, 38(3), 500–518.
- Kuo, B.-C., Pai, H.-S., & de la Torre, J. (2016). Modified cognitive diagnostic index and modified attribute-level discrimination index for test construction. *Applied Psychological Measurement*, 40(5), 315–330.
- Leighton, J., & Gierl, M. (2007). *Cognitive diagnostic assessment for education: Theory and applications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Leighton, J. P., Gierl, M. J., & Hunka, S. M. (2004). The attribute hierarchy method for cognitive assessment: A variation on Tatsuoaka's rule-space approach. *Journal of Educational Measurement*, 41(3), 205–237.
- Liu, J., Xu, G., & Ying, Z. (2012). Data-driven learning of Q-matrix. *Applied Psychological Measurement*, 36(7), 548–564.
- Liu, J., Xu, G., & Ying, Z. (2013). Theory of self-learning Q-matrix. *Bernoulli*, 19(5A), 1790–1817.
- Liu, R. (2018). Misspecification of attribute structure in diagnostic measurement. *Educational and Psychological Measurement*, 78(4), 605–634.
- Liu, R., Huggins-Manley, A. C., & Bradshaw, L. (2016). The impact of Q-matrix designs on diagnostic classification accuracy in the presence of attribute hierarchies. *Educational and Psychological Measurement*, 77(2), 220–240.
- Liu, R., & Jiang, Z. (2018). Diagnostic classification models for ordinal item responses. *Frontiers in Psychology*, 9, Article 2512, <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02512>.
- Liu, R., Liu, H., Shi, D., & Jiang, Z. (2022). Diagnostic classification models for a mixture of ordered and non-ordered response options in rating scales. *Applied Psychological Measurement*, 46(7), 622–639.
- Liu, Y., Xu, G., & Ying, Z. (2011). *Learning item-attribute relationship in Q-matrix based diagnostic classification models*. Retrieved July 15, 2023, from <http://arxiv.org/pdf/1106.0721v1.pdf>.
- Ma, C., Ouyang, J. & Xu, G. (2023). Learning latent and hierarchical structures in cognitive diagnosis models.

- Psychometrika*, 88(1), 175–207.
- Ma, W. (2022). A higher-order cognitive diagnosis model with ordinal attributes for dichotomous response data. *Multivariate Behavioral Research*, 57(2-3), 408–421.
- Ma, C., de la Torre, J. & Xu, G. (2023). Bridging parametric and nonparametric methods in cognitive diagnosis. *Psychometrika*, 88(1), 51–75.
- Ma, W., & de la Torre, J. (2016). A sequential cognitive diagnosis model for polytomous responses. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 69(3), 253–275.
- Ma, W., & Guo, W. (2019). Cognitive diagnosis models for multiple strategies. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 72(2), 370–392.
- Ma, W., & Jiang, Z. (2021). Estimating cognitive diagnosis models in small samples: Bayes modal estimation and monotonic constraints. *Applied Psychological Measurement*, 45(2), 95–111.
- Madison, M. J., & Bradshaw, L. P. (2015). The effects of q-matrix design on classification accuracy in the log-linear cognitive diagnosis model. *Educational and Psychological Measurement*, 75(3), 491–511.
- Maris, E. (1999). Estimating multiple classification latent class models. *Psychometrika*, 64(2), 187–212.
- Rupp, A. A., Templin, J., & Henson, R. (2010). *Diagnostic measurement: Theory, methods, and applications*. New York, NY: Guilford Press.
- Sen, S., & Cohen, A. S. (2021). Sample size requirements for applying diagnostic classification models. *Frontiers in Psychology*, 11, Article 621251. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.621251>.
- Sun, J., Xin, T., Zhang, S., & de la Torre, J. (2013). A polytomous extension of the generalized distance discriminating method. *Applied Psychological Measurement*, 37(7), 503–521.
- Sun, Y., Ye, S., Inoue, S., & Sun, Y. (2014). Alternating recursive method for Q-matrix learning. In J. C. Stamper, Z.A. Pardos, M. Mavrikis, & B. M. McLaren (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Educational Data Mining* (pp. 14–20). London, UK.
- Sun, Y., Ye, S., Sun, Y., & Kameda, T. (2015). Improved algorithms for exact and approximate Boolean matrix decomposition. In *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Data Science and Advanced Analytics* (pp.1–10). Paris, France.
- Tang, X., Duan, H., Ding, S., & Mao, M. (2021). A simplified method for predicting pattern match ratio. *Frontiers in Psychology*, 12, Article 704724. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.704724>.
- Tatsuoka, K. K. (1983). Rule-space: An approach for dealing with misconceptions based on item response theory. *Journal of Educational Measurement*, 20(4), 345–354.
- Tatsuoka, K. K. (1991). *Boolean algebra applied to determination of the universal set of knowledge states* (ONR- Tech. Rep. No. RR-91-44). Princeton, NJ: Educational Testing Services.
- Tatsuoka, K. K. (1995). Architecture of knowledge structures and cognitive diagnosis: A statistical pattern recognition and classification approach. In P. D. Nichols, S. F. Chipman, & R. L. Brennan (Eds.), *Cognitively diagnostic assessment* (pp. 327–361). Erlbaum.
- Tatsuoka, K. K. (2009). *Cognitive assessment: An introduction to the rule space method*. New York: Routledge Taylor & Francis group.
- Templin, J. L., & Henson, R. A. (2006). Measurement of psychological disorders using cognitive diagnosis models. *Psychological Methods*, 11(3), 287–305.
- Tian, W., Zhang, J., Peng, Q., & Yang, X. (2020). Q-matrix designs of longitudinal diagnostic classification models with hierarchical attributes for formative assessment. *Frontiers in Psychology*, 11, Article 1694. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01694>.
- Toprak, T. E. (2021). An international comparison using cognitive diagnostic assessment: Fourth graders' diagnostic profile of reading skills on PIRLS 2016. *Studies In Educational Evaluation*, 70(6), 101057. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101057>.
- Tu, D., Wang, S., Cai, Y., Douglas, J., & Chang, H.-H. (2019). Cognitive diagnostic models with attribute hierarchies: Model estimation with a restricted Q-matrix design. *Applied Psychological Measurement*, 43(4), 255–271.
- von Davier, M. (2008). A general diagnostic model applied to language testing data. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 61(2), 287–307.
- von Davier, M., & Lee, Y.-S. (2019). *Handbook of diagnostic classification models: Models and model extensions, applications, software packages*. Springer.
- Wang, C., & Lu, J. (2021). Learning attribute hierarchies from data: Two exploratory approaches. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 46(1), 58–84.
- Wang, D., Ma, W., Cai, Y., & Tu, D. (2023). A general nonparametric classification method for multiple strategies in cognitive diagnostic assessment. *Behavior Research Methods*, 56, 723–735. <https://doi.org/10.3758/s13428-023-02075-8>.
- Wang, W., Zheng, J., Song, L., Tu, Y., & Gao, P. (2021). Test assembly for cognitive diagnosis using mixed-integer linear programming. *Frontiers in Psychology*, 12, Article 623077. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.623077>.
- Xiong, J., Luo, Z., Luo, G., & Yu, X. (2022). Data-driven Q-matrix learning based on Boolean matrix factorization in cognitive diagnostic assessment. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 75(3), 638–667.
- Xu, G. (2013). *Statistical inference for diagnostic classification models* (Unpublished doctoral dissertation). Columbia University, New York.
- Xu, G. (2017). Identifiability of restricted latent class models

- with binary responses. *The Annals of Statistics*, 45(2), 675–707.
- Xu, G., & Shang, Z. (2018). Identifying latent structures in restricted latent class models. *Journal of the American Statistical Association*, 113(523), 1284–1295.
- Xu, G., Wang, C., & Shang, Z. (2016). On initial item selection in cognitive diagnostic computerized adaptive testing. *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 69(3), 291–315.
- Xu, G., & Zhang, S. (2016). Identifiability of diagnostic classification models. *Psychometrika*, 81(3), 625–649.
- Zhan, P., Liu, Y., Yu, Z., & Pan, Y. (2023). Tracking ordinal development of skills with a longitudinal DINA model with polytomous attributes. *Applied Measurement in Education*, 36(2), 99–114.
- Zhan, P., Wang, W. C., & Li, X. (2020). A partial mastery, higher-order latent structural model for polytomous attributes in cognitive diagnostic assessments. *Journal of Classification*, 37, 328–351.
- Zheng, Y., & Chang, H. H. (2015). On-the-fly assembled multistage adaptive testing. *Applied Psychological Measurement*, 39(2), 104–118.

Q-matrix theory and its applications in cognitive diagnostic assessment

SONG Lihong¹, WANG Wenyi², DING Shuliang²

(¹ School of Education, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

(² School of Computer and Information Engineering, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: The Q-matrix helps bridge the gap between cognitive psychology and psychometrics, and thus it plays a very important role in cognitive diagnostic assessment. Significant progress has been made in the Q-matrix theory and its applications in recent years. Numerous researchers have made significant contributions to the Q-matrix theory from structured to unstructured matrices, binary to polytomous attributes, simple to complex models, independent to general structures, and dichotomous to polytomous item responses. Following the introduction of the Q-matrix theory, four examples were presented to illustrate its applications in the theoretical validity criterion of diagnostic tests, the design of item selection methods in computerized adaptive test, the methods for Q-matrix learning and specification, and test construction for cognitive diagnosis. Model-free or model-based Q-matrix theory, and the applications of the latest Q-matrix theory needs to be further investigated.

Keywords: cognitive diagnosis, Q-matrix, attribute structure, complete, polytomous attributes

附录 1: 完备 Q 矩阵的检查过程

Köhn 和 Chiu (2017)探讨了不同认知诊断模型下 Q 矩阵完备的条件: 对于 DINA 和 DINO 模型, Q 矩阵完备当且仅当 Q 矩阵中包含单位阵; 对于不含主效应的认知诊断模型, 任何 Q 矩阵均不完备; 对于仅含主效应或同时主效应和交互效应的认知诊断模型, 采用反证法证明了完备 Q 矩阵其秩一定为列满秩; 对于仅含主效应的认知诊断模型, 若 Q 矩阵为列满秩, 则相互可比较但不相等的知识状态上的期望反应向量一定不相等。从而得出了一般性结论, Q 矩阵包含单位阵是 Q 矩阵完备的充分条件。因为相互不可比较的知识状态上的期望反应向量不嵌套, 若列满秩 Q 矩阵仍可导致相互不可比较的知识状态上的期望反应向量相同, 故 Q 矩阵为列满秩不一定为完备 Q 矩阵。Köhn 和 Chiu (2018)还给出了构建完备 Q 矩阵中的一种方法, 并认为混合模型下完备 Q 矩阵判断仍值得深入研究。基于以上结论, 提出了完备 Q 矩阵检查的一种方法(Köhn & Chiu, 2017, 2018):

- (1)检查 Q 矩阵中是否包含 e_1, e_2, \dots, e_K 行向量。如果是, Q 矩阵完备, 如果否, 转步骤(2);
- (2)若采用 DINA 或 DINO 模型拟合数据, 则 Q 矩阵不完备, 如果采用其他模型拟合数据, 则转步骤(3);
- (3)若 Q 矩阵的秩小于属性数 K , 则 Q 矩阵不完备, 如果 Q 矩阵的秩等于属性数 K , 则转步骤(4);
- (4)考虑相互不可比较的任意两个知识状态 ($\alpha \not\prec \alpha', \alpha' \not\prec \alpha$), 检查对应的期望反应向量 $S(\alpha), S(\alpha')$ 是否存在不同, 即判断是否存在项目 j , 使得 $S_j(\alpha)$ 与 $S_j(\alpha')$ 所包含的项目参数集合是否具有真包含关系。若不可比较的两两知识状态上的期望反应向量不相同, 则 Q 矩阵完备, 否则 Q 矩阵不完备。

附录 2: 认知诊断模型可识别的概念与条件

(1) 认知诊断模型参数可识别概念

定义 A1 对于任意得分向量 $\mathbf{r} \in \{0, 1\}^J$, 如果不存在 $(\bar{\theta}, \bar{p}) \neq (\theta, p)$, 使得 $P(\mathbf{R} = \mathbf{r} | \mathbf{Q}, \bar{\theta}, \bar{p}) = P(\mathbf{R} = \mathbf{r} | \mathbf{Q}, \theta, p)$, 则称认知诊断模型参数

(θ, p) 可识别(identifiable; Xu, 2017)。

若 $\theta = (s, g)$ 和 $\bar{\theta} = (\bar{s}, \bar{g})$, 就变为 DINA 或 DINO 模型可识别条件。直接通过得分向量似然函数判断模型识别性具有一定技术难度(Xu, 2017), 并且不太方便考虑 p 的可识别性。因此, Xu (2017)及相关研究通过引入 T 矩阵考虑参数可识别性问题, 主要借助得分向量的边际分布是否满足 $P(\mathbf{R} \geq \mathbf{r} | \mathbf{Q}, \theta, g) = P(\mathbf{R} \geq \mathbf{g} | \mathbf{Q}, \bar{\theta}, \bar{p})$, 其中 $P(\mathbf{R} \geq \mathbf{r} | \mathbf{Q}, \theta, p) = T_{r, \theta}(\mathbf{Q}, \theta)p = \sum T_{r, a}(\mathbf{Q}, \theta)p_a$, 并且 $T_{0, a}(\mathbf{Q}, \theta) = 1, T_{r, a}(\mathbf{Q}, \theta) = P(\mathbf{R} \geq \mathbf{r} | \mathbf{Q}, \theta, a) = \prod_{j: r_j=1} P(R_j = r_j | \mathbf{Q}, \theta, a) = \prod_{j: r_j=1} \theta_{j, a}$ 。也就是说, 给定 $T(\mathbf{Q}, \theta)p = T(\mathbf{Q}, \bar{\theta})\bar{p}$, 如果能证明 $(\bar{\theta}, \bar{p}) \neq (\theta, p)$, 则模型 (θ, p) 可识别。或者如果给定任意得分向量 $\mathbf{r} \in \{0, 1\}^J$, 如果 $(\bar{\theta}, \bar{p}) \neq (\theta, p)$, 都有 $T_{r, \theta}(\mathbf{Q}, \theta)p \neq T_{r, \theta}(\mathbf{Q}, \bar{\theta})\bar{p}$, 则模型 (θ, p) 可识别。

在 DINA 模型无失误和猜测情况下, 即 $\theta = (s, g) = (0, 0)$, 此时知识状态 α 在项目 j 的正确作答概率 $\theta_{j, a}$ 和理想反应 $\Gamma_{j, a}$, 知 $\theta_{j, a} = \Gamma_{j, a}$ 。如果存在两个不同知识状态 α 和 α' 在测验所有项目 \mathcal{S} 上理想反应均对应相等 $\Gamma_{j, a} = \Gamma_{j, a'}, \forall j \in \mathcal{S}$, 则 $T_{r, \alpha}(\mathbf{Q}, \theta) = T_{r, \alpha'}(\mathbf{Q}, \theta)$, 知 $p_\alpha, p_{\alpha'}$ 不可估计或不可识别。也就是, 在 DINA 模型的理想反应和参数 θ 已知下, Q 矩阵完备是参数 p 可识别的充要条件。在 DINA 模型参数未知时, (s, g, p) 可识别的充要条件是 Q 矩阵完备并且每个属性至少被 3 个题目所考查。

(2) DINA 模型参数严格可识别的充分条件

定理 A1 属性独立条件下 DINA 模型参数 (s, g, p) 严格可识别的充分条件:

- (1)Q 矩阵完备, 形如 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} I_K \\ \mathbf{Q}^* \end{bmatrix}$;
- (2)测验 Q 矩阵中每个属性至少考查 3 次;
- (3)对于每个属性 $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, 在 \mathbf{Q}^* 中存在项目子集 $S_k^+, S_k^- \subseteq \{K+1, \dots, J\}$ 且满足 $\mathbf{0} < \bigvee_{h \in S_k^+} \mathbf{q}_h - \bigvee_{h \in S_k^-} \mathbf{q}_h = e_k$

$$\text{例如, } \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} I_6 \\ I^T \\ I^T \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{Q}^* \end{pmatrix}, \mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。 \mathbf{Q}_1 \text{ 和 } \mathbf{Q}_2 \text{ 均满足}$$

充分条件, 故模型可识别。根据 Gu 和 Xu (2019a) 后来给出的充要条件, 可知 \mathbf{Q}_3 下模型不可识别, \mathbf{Q}_3 仅满足条件 1 和条件 2, 知仅条件 1 和 2 并非模型可识别的充分条件; 而 \mathbf{Q}_4 下模型可识别, 也就意味着条件 3 不必要, 即可以不满足条件 3, 而只需要 \mathbf{Q}^* 任意两列不相同。

(3) 两参数模型 p-部分识别的充分条件

在项目参数未知条件下, Gu 和 Xu (2020) 证明了 p-部分识别的充分条件。在介绍 p-部分识别的充分条件之前, 下面先介绍两个要用到的概念。根据 \mathbf{Q} 矩阵行向量大小关系, 将题目分为非基本题目集 $S_{non} = \{j: \exists h \in \mathcal{S} \setminus \{j\}, q_h \leq q_j\}$ 和基本题目集 $S_{basis} = \mathcal{S} \setminus S_{non}$ 。基本题目集为非基本题目集的补集。项目 j 属于 S_{non} , 即意味着知识状态凡是在项目 j 的理想反应为 1, 在测验项目集 \mathcal{S} 中必含有另外一个项目, 其理想反应也为 1。若存在 $S^+, S^- \subseteq \mathcal{S}$ 且满足 $\mathbf{0} < \bigvee_{h \in S^+} q_h - \bigvee_{h \in S^-} q_h \leq q_j$, 则称项目 j 可被 S 区分 (S -differentiable)。

定理 A2 在属性独立结构和两参数认知诊断模型下, p-部分识别的充分条件:

(1) 重复测量条件, 对于测验项目集合 \mathcal{S} 中每个项目 j , 存在两个互不相交的项目集合 $S_j^1, S_j^2 \subseteq \mathcal{S} \setminus \{j\}$, 且 $q_j \leq \bigvee_{h \in S_j^1} q_h$ 和 $q_j \leq \bigvee_{h \in S_j^2} q_h$;

(2) 序贯区分条件, 从集合 $S_{sep} = S_{non}$ 开始, 将 $\mathcal{S} \setminus S_{non}$ 中所有可被当前 S_{sep} 区分的项目集合并入 S_{sep} , 重复此步, 直到满足 $S_{sep} = \mathcal{S}$ 。

该定理可参见 Gu 和 Xu (2020) 文中推论 3.1, 重复测量条件可以保证所有 θ^+ 和 S_{non} 上 θ^- 参数 (θ^-_{non}) 可识别, 若通过序贯扩张, S_{basis} 全部能并入 S_{sep} , 则可保证 S_{basis} 上 θ^- 参数 (θ^-_{basis}) 也可识别。

例如, 在 DINA 模型下, 可判断 $\mathbf{Q} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 满足 p-部分识别两个条件。因为该 } \mathbf{Q}$$

缺少单独测量属性 3 的题目, 两个知识状态 (0,0,0) 和 (0,0,1) 属于同一等价类, 其他等价类中均只含有一个知识状态, 故 Γ 不分离。从 \mathbf{Q} 可以找出 $(S_1^1, S_1^2) = (\{3\}, \{5\})$, $(S_2^1, S_2^2) = (\{3\}, \{4\})$,

$(S_3^1, S_3^2) = (\{1, 4\}, \{2, 5\})$, $(S_4^1, S_4^2) = (\{3\}, \{2, 5\})$ 和 $(S_5^1, S_5^2) = (\{3\}, \{1, 4\})$, 可以使得各个项目均满足重复测量条件。从 \mathbf{Q} 可知, $S_{sep} = S_{non} = \{3, 4, 5\}$, 分别令 $(S_1^+, S_1^-) = (\{3\}, \{4\})$ 和 $(S_2^+, S_2^-) = (\{3\}, \{5\})$, 知项目 1 和项目 2 均可被 S_{sep} 区分, 即满足序贯区分条件。

若在上面定理中加下 $\Gamma_{J \times 2^k}$ 可分离的条件, 上面两条件就成为在属性独立结构和两参数认知诊断模型下 (θ^+, θ^-, p) 严格可识别的充要条件, 上面两条件也正好等价于测验 \mathbf{Q} 矩阵中每个属性至少考查 3 次和 \mathbf{Q}^* 中任意两列均不相同, 即 Gu 和 Xu (2019a) 定理 3 中条件 2 和 3, 或可参见 Gu 和 Xu (2020) 文中定理 3.4。注意, (θ^+, θ^-, p) 严格可识别时, 随着样本量增大, (θ^+, θ^-, p) 几乎一致收敛。若 $\Gamma_{J \times 2^k}$ 不可分离, 不能得到 p 的一致估计。

(4) 多参数的认知诊断模型可识别条件

引入 $\Gamma_{J \times 2^k}$ 的子矩阵, 对于 $S \subseteq \mathcal{S}$, $\Gamma^S = (\Gamma_{j,a}^S, j \in S, a \in \mathcal{A})$ 。如果对于任意 $j \in S$ 均有 $\Gamma_{j,a}^S \geq \Gamma_{j,a'}$, 则称 $a \geq_S a'$, 由此在 S 上根据 Γ^S 列集合与列向量小于等于关系 (形成偏序关系), 可诱导出 \mathcal{A} 上相同的偏序集 (\mathcal{A}, \geq_S) 。偏序集对应的哈斯图中与全下界 $a_0 = \mathbf{0}$ 直接相连的元素称为基本元或原子, 所有原子 (或称为基本知识状态) 组成的集合记为 \mathcal{B}_S 。

定理 A3 在多参数模型下, (θ, p) 严格可识别的充分条件是 Γ 满足下面两条件:

(1) 存在两个不相交的项目集合 $S^1, S^2 \subseteq \mathcal{S}$, 使得 Γ^{S^1} 和 Γ^{S^2} 均可分离, 并且 Γ^{S^1} 和 Γ^{S^2} 所诱导的两个偏序集相同, 即 $(\mathcal{A}, \geq_{S^1})$ 与 $(\mathcal{A}, \geq_{S^2})$ 相同;

(2) 对于任意满足 $a \geq_{S^1} a'$ 和 $a \geq_{S^2} a'$, 对于任意 $j \in (S^1 \cup S^2)^c$ 均有 $\Gamma_{j,a}^{(S^1 \cup S^2)^c} \neq \Gamma_{j,a'}^{(S^1 \cup S^2)^c}$ 。

此定理条件 1 可强化而条件 2 可被弱化, 由些得到下面定理:

定理 A4 在多参数模型下, (θ, p) 严格可识别的充分条件是 Γ 满足下面两条件:

(1) 存在两个不相交的项目集合 $S^1, S^2 \subseteq \mathcal{S}$, 使得 Γ^{S^1} 和 Γ^{S^2} 均可分离, 并且 Γ^{S^1} 和 Γ^{S^2} 所诱导的两个偏序集相同, 即 $(\mathcal{A}, \geq_{S^1})$ 与 $(\mathcal{A}, \geq_{S^2})$ 相同, 且对任意 $j \in S^1 \cup S^2$, 存在 $a \in \mathcal{B}_{S^1}$ 有 $\Gamma_{j,a} = 1$, 其中 \mathcal{B}_{S^1} 为偏序关系 $(\mathcal{A}, \geq_{S^1})$;

(2) 对于任意 $a \in \mathcal{B}_{S^1}$ 且 $a \neq a_0$, 对于任意 $j \in (S^1 \cup S^2)^c$ 均有 $\Gamma_{j,a}^{(S^1 \cup S^2)^c} \neq \Gamma_{j,a_0}^{(S^1 \cup S^2)^c}$ 。

上面两定理推广 Xu (2017) 的结论, 如果 \mathbf{Q} 矩阵中含有两个单位阵, 上面两个条件就会变成 Xu (2017) 中定理 1 的两个条件。

定理 A5 在多参数模型下, 满足下面条件时 $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ 具有一般可识别性:

(1) 存在两个不相交的项目集合 $S^1, S^2 \subseteq \mathcal{S}$, $\Gamma_{S^1 \cup S^2}$ 中部分元素 0 变为 1 后得到 $\tilde{\Gamma}_{S^1 \cup S^2}$, $\tilde{\Gamma}_{S^1 \cup S^2}$ 满足上面严格可识别的条件 1;

(2) 对于任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{B}_{S_1}$ 且 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a}_0$, 对于任意 $j \in (S_1 \cup S_2)^c$ 均有 $\Gamma_{j, \boldsymbol{a}}^{(S_1 \cup S_2)^c} \neq \Gamma_{j, \boldsymbol{a}_0}^{(S_1 \cup S_2)^c}$ 。

(5) DINO 模型参数及属性结构 \mathcal{E} 可识别的充要条件

定理 A6 给定属性层级结构 \mathcal{E} 的逆, 即 $\mathcal{E}^{inverse} = \{l \rightarrow k : k \rightarrow l \in \mathcal{E}\}$, DINO 模型参数及属性结构 \mathcal{E} 可识别的充要条件是同一 \boldsymbol{Q} 矩阵在 DINA 模型参数及属性结构 $\mathcal{E}^{inverse}$ 可识别。

例如, 属性结构 $\mathcal{E}^{inverse} = \{1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3\}$ 下

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 及对应的 } \mathcal{S}^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 和}$$

$$\mathcal{D}^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 满足 DINA 模型参数及属}$$

$$\text{性结构 } \mathcal{E}^{inverse} \text{ 可识别条件。故 } \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 属}$$

性结构 $\mathcal{E} = \{2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 1\}$ 和 DINO 模型参数可识

$$\text{别。易计算, } \mathcal{A}(\mathcal{E}^{inverse}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 它们在 } \boldsymbol{Q}$$

$$\text{的理想反应矩阵 } \Gamma_{DINA}(\boldsymbol{Q}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{DINO}(\boldsymbol{Q}, \mathcal{E}^{inverse}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$