《电动力学》题库

吴　克　迪

深圳大学

请注意，本题库中的题目和题型仅供参考。如果对题库内容有任何问题，请及时提出讨论。十分感谢！附加题不在题库中。

§1.　单项选择题

1. 对于任意三个矢量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，以下哪个矢量三重积恒等式是正确的?

   A. $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B}$
   B. $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
   C. $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$
   D. $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B})$

2. 对于一个标量函数 $f(x, y, z)$，梯度 ∇f 在物理上代表的含义是:

   A. 标量 f 在空间中的最大变化率及其方向。
   B. 标量 f 的通量。
   C. 矢量场 ∇f 的源。
   D. 标量 f 的环量。

3. 对于一个矢量场 $\boldsymbol{v}$，其散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ 在物理上代表的含义是:

   A. 矢量场在某一点旋转的程度。
   B. 矢量场在某一点的流量（通量）密度或源密度。
   C. 矢量场沿闭合路径的积分。
   D. 矢量场的最大变化率。

4. 对于任意一个定义明确的标量场 f，以下哪个矢量恒等式恒成立?

   A. $\nabla \cdot (\nabla f) = 0$
   B. $\nabla \times (\nabla f) = 0$
   C. $\nabla(\nabla \cdot f) = 0$
   D. $\nabla \times (\nabla \times f) = 0$

5. 考虑一个单位矢量 $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$，其中 r 是球坐标中的径向距离。在三维空间中，以下哪个关系式是正确的?

A. $\nabla\cdot(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2})=0$

B. $\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=3$

C. $\nabla\times\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

D. $\nabla\cdot(\boldsymbol{r})=3$

6. 根据矢量微积分的基本定理，对于任意标量函数 $f(\boldsymbol{r})$ 和任意两点 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的路径 P，以下哪个关系式是正确的?

A. $\int_P(\nabla f)\cdot d\boldsymbol{l}=0$

B. $\int_P(\nabla f)\cdot d\boldsymbol{l}=f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})$

C. $\oint(\nabla f)\cdot d\boldsymbol{l}=f(\boldsymbol{b})$

D. $\int_P(\nabla f)\cdot d\boldsymbol{l}=\nabla f(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}-\nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}$

7. 泊松方程 $\nabla^2V=-\rho/\epsilon_0$ 的基本解可以表示为 $V(\boldsymbol{r})\propto 1/r$ 的叠加。这与狄拉克 δ 函数有何关系?

A. $\nabla^2(1/r)=0$

B. $\nabla^2(1/r)=-4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$

C. $\nabla^2(1/r)$ 在原点外是 $4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$

D. $\nabla^2(1/r)=\frac{1}{r^2}$

8. 对于一个矢量场 $\boldsymbol{v}$，斯托克斯定理（Stokes' Theorem）描述了以下哪种关系?

A. $\oint_S\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{v})d\tau$

B. $\oint_C\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{a}$

C. $\int_V\nabla f d\tau=\oint_S f d\boldsymbol{a}$

D. $\nabla\times(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0$

9. 空间中存在一个矢量场 $\boldsymbol{v}=y\hat{\boldsymbol{x}}+z\hat{\boldsymbol{y}}+x\hat{\boldsymbol{z}}$。计算其旋度 $\nabla\times\boldsymbol{v}$。

A. $\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}}$

B. $-\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{y}}-\hat{\boldsymbol{z}}$

C. $x+y+z$

D. 0

10. 当描述一个沿着 z 轴均匀分布且与 ϕ 角无关的物理量时，最合适的坐标系和对应的微分元素是什么?

A. 球坐标系；体积元素 $d\tau=r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

B. 柱坐标系；体积元素 $d\tau=sdsd\phi dz$

C. 笛卡尔坐标系；线元素 $d\boldsymbol{l}=dx\hat{\boldsymbol{x}}+dy\hat{\boldsymbol{y}}+dz\hat{\boldsymbol{z}}$

D. 球坐标系；面积元素 $d\boldsymbol{a}=r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\boldsymbol{r}}$

11. 在静电学中，以下哪组麦克斯韦微分方程是完全独立的、互不相关的?

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$

B. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$

C. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$

D. $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$

12. 对于一个处于静电平衡的完美导体，以下哪一性质是错误的?

A. 导体内部的净电荷密度 ρ 处处为零。

B. 导体内部的电势 V 处处为零。

C. 导体表面上的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 必须垂直于表面。

D. 导体是一个等势体，其表面和内部的电势相等。

13. 空间中存在一个静电场 $\boldsymbol{E}$。如果电场线在某处收敛（即电场线趋于集中），这表明该处:

A. 电势 V 存在一个最大值。

B. 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿流管法向分量的散度为负。

C. 存在正的净电荷 $\rho > 0$。

D. 电势 V 随空间变化率最小。

14. 对于任意给定的电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$,其产生的静电势 $V(\boldsymbol{r})$ 的形式 $V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d\tau'$ 自动满足以下哪个条件?

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$

B. $\nabla^2 V = 0$

C. $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$

D. $V(\boldsymbol{r})$ 只有在 $r \to \infty$ 时才为零。

15. 静电场中，从无穷远处将电荷 q 移动到电场强度为 $\boldsymbol{E}$ 的某点 $\boldsymbol{r}$ 处，所做的功 W 的正确表达式是:

A. $W = q \int_{\infty}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$

B. $W = -q \int_{\infty}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$

C. $W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$

D. $W = \frac{q}{\epsilon_0} \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{a}$

16. 两个等量异号的点电荷 q 和 $-q$ 相距 d 构成电偶极子。在垂直平分线上，距离中心 r 处 $(r \gg d)$ 的电势 V 为:

A. $V \propto 1/r$

B. $V \propto 1/r^2$

C. $V = 0$

D. $V \propto 1/r^3$

17. 在静电学中，如果电场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式形式为 $\boldsymbol{E} = A(y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}})$, 其中 A 是常数，那么该电场:

A. 是一个可能的静电场，且其电势 $V = -Axy + \text{const}$。

B. 不是一个可能的静电场，因为 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} \neq 0$。

C. 是一个可能的静电场，但它必须由自由电荷产生。

D. 不是一个可能的静电场，因为 $\nabla \times \boldsymbol{E} \neq 0$。

18. 麦克斯韦应力张量 $\boldsymbol{T}$（其分量为 T_{ij}）在静电场中的物理意义是:

A. 电场作用在单位体积电荷上的力。

B. 储存在单位体积电场中的能量密度。

C. 穿过单位面积的电场能量流。

D. 穿过单位面积的电磁动量流或电磁力。

19. 对于一个带电导体球壳（内半径 a，外半径 b），总电荷为 Q。当球壳达到静电平衡时，其体电荷密度 ρ 和表面电荷密度 σ 的分布是:

A. ρ 均匀分布在 $a < r < b$ 区域，$\sigma = 0$。

B. $\rho = 0$ 处处为零，$\sigma = Q/(4\pi b^2)$ 仅分布在外表面 $r = b$ 上。

C. $\rho = 0$ 处处为零，$\sigma = Q/(4\pi a^2)$ 仅分布在内表面 $r = a$ 上。

D. $\rho = 0$ 处处为零，σ 分布在 $r = a$ 和 $r = b$ 两个表面上。

20. 静电场能量 $W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$ 公式积分的区域是:

A. 仅包含电荷分布的区域。

B. 仅包含导体内部的区域。

C. 包含电荷和电场存在的所有空间区域。

D. 仅包含导体表面的区域。

21. 静电学第一唯一性定理指出，在一个由导体和电荷分布包围的体积 V 内，如果已知边界 S 上的什么条件，则 V 内的电势 $V(\boldsymbol{r})$ 是唯一的?

A. 边界 S 上的电荷密度 σ。

B. 边界 S 上的电势 V。

C. 边界 S 上的电场强度 $\boldsymbol{E}$。

D. 边界 S 上的电流密度 $\boldsymbol{J}$。

22. 在一个没有自由电荷的空间区域内，电势 $V(\boldsymbol{r})$ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 V = 0$。根据拉普拉斯方程的性质，以下哪个结论是错误的?

A. V 不可能在区域内部取到极值。
B. V 的最大值和最小值不一定出现在边界上。
C. 如果 V 在区域边界上为常数，则 V 在整个区域内部为常数。
D. 区域内任意一点的电势等于以该点为球心、完全处于该区域内任意球面上电势的平均值。

23. 对于一个包含自由电荷 ρ 的体积 V，电势 V 满足的微分方程是:

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
B. $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$
C. $\nabla^2 V = 0$
D. $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

24. 考虑一个由多个电荷组成的系统。在远离电荷源的区域 ($r \gg$ 电荷系统尺寸) 内，电势 $V(\boldsymbol{r})$ 的渐近展开式中，第一项非零贡献（单极项）与什么成正比?

A. 电偶极矩 $\boldsymbol{p}$
B. 系统总电荷 Q
C. 四极矩张量 $\boldsymbol{Q}$
D. $1/r^3$

25. 如果电势 $V(\boldsymbol{r})$ 在某一区域内满足 $\nabla^2 V = 0$，并且在边界 S 上已知 $\frac{\partial V}{\partial n}$（电场 $\boldsymbol{E}$ 的法向分量），根据静电学第二唯一性定理，要保证解 $V(\boldsymbol{r})$ 唯一确定，还需要知道什么?

A. 边界 S 上的电势 V 必须为零。
B. 区域内的总电荷必须为零。
C. 区域内的电势 V 必须在某个参考点上被指定。
D. 边界 S 上的切向电场 $\boldsymbol{E}_{||}$。

26. 静电场中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电势 V 之间的基本关系是:

A. $\boldsymbol{E} = -\nabla V$
B. $\boldsymbol{E} = \nabla \cdot V$
C. $V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$
D. $\boldsymbol{E} = \nabla \times V$

27. 静电势 V 的基本表达式 $V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d\tau'$ 满足以下哪个物理原理?

A. 能量守恒定律
B. 动量守恒定律
C. 毕奥-萨伐尔定律

D. 线性叠加原理

28. 在多极展开中，如果电荷系统的单极矩 $Q = 0$，但偶极矩 $\boldsymbol{p} \neq 0$，则在远处 (r)，电势 $V(\boldsymbol{r})$ 主要由哪一项决定?

A. $V(\boldsymbol{r}) \propto 1/r$
B. $V(\boldsymbol{r}) \propto 1/r^2$
C. $V(\boldsymbol{r}) \propto 1/r^3$
D. $V(\boldsymbol{r}) \propto r$

29. 对于一个由自由电荷分布 ρ 产生的静电场，静电能 W 的体积积分表达式是:

A. $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int V^2 d\tau$
B. $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$
C. $W = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} d\tau$
D. $W = \frac{1}{2\epsilon_0} \int \rho^2 d\tau$

30. 镜像法能够求解电势问题的条件是:

A. 仅适用于无限大接地导体平面。
B. 仅适用于电荷分布与导体相距无穷远的情况。
C. 必须找到一组替代电荷，使其在原问题导体边界上产生的电势满足原问题的边界条件。
D. 镜像电荷必须与原电荷具有相同的大小和符号。

31. 在一个被极化的电介质中，极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的定义是:

A. 单位体积内净束缚电荷的总量。
B. 物质中自由电荷密度 ρ_f 的体积分。
C. 物质中电偶极矩的总和。
D. 单位体积内的净电偶极矩。

32. 某电介质的极化强度为 $\boldsymbol{P}$。其体束缚电荷密度 ρ_b 和表面束缚电荷密度 σ_b 的正确表达式是:

A. $\rho_b = \nabla \cdot \boldsymbol{P}, \sigma_b = \boldsymbol{P} \times \hat{\boldsymbol{n}}$
B. $\rho_b = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}, \sigma_b = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$
C. $\rho_b = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}, \sigma_b = \boldsymbol{P} \times \hat{\boldsymbol{n}}$
D. $\rho_b = \nabla \cdot \boldsymbol{P}, \sigma_b = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$

33. 辅助电场 $\boldsymbol{D}$ 场与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 场和极化强度 $\boldsymbol{P}$ 场的基本关系是:

A. $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}$

B. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + \epsilon_0 \boldsymbol{P}$

C. $\boldsymbol{D} = \epsilon_0(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})$

D. $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$

34. 边界条件下，以下哪个量在两种电介质的交界面上，其法向分量是连续的?

A. 电场强度 $\boldsymbol{E}$

B. 极化强度 $\boldsymbol{P}$

C. 辅助电场 $\boldsymbol{D}$ (假设交界面上没有自由表面电荷 σ_f)

D. 电势 V 的法向导数

35. 麦克斯韦方程组中，关于辅助电场 $\boldsymbol{D}$ 的高斯定律微分形式是:

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$

B. $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_b$

C. $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$

D. $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f + \rho_b$

36. 对于一个各向同性的线性电介质，其相对介电常数 ϵ_r 和电极化率 χ_e 之间的关系是:

A. $\epsilon_r = 1/\chi_e$

B. $\epsilon_r = 1 + \chi_e$

C. $\chi_e = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$

D. $\epsilon_r = \epsilon_0 \chi_e$

37. 将一个均匀极化的无限大平板插入一个由自由电荷产生的均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，如果平板的极化方向与 $\boldsymbol{E}_0$ 方向相同，则平板内部的总电场 $\boldsymbol{E}$ 的大小:

A. 等于 $\boldsymbol{E}_0$

B. 大于 $\boldsymbol{E}_0$

C. 小于 $\boldsymbol{E}_0$

D. $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{P}/\epsilon_0$

38. 如果电介质 1 (介电常数 ϵ_1) 和电介质 2 (介电常数 ϵ_2) 在交界面上无自由电荷，$\boldsymbol{E}_1$ 与界面法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ (指向介质 2) 的夹角为 θ_1。则 $\boldsymbol{E}_1$ 与 $\boldsymbol{E}_2$ 之间的折射定律为:

A. $\epsilon_1 \tan\theta_1 = \epsilon_2 \tan\theta_2$

B. $\epsilon_1 \sin\theta_1 = \epsilon_2 \sin\theta_2$

C. $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$

D. $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$

39. 电介质中静电能的能量密度 u 的正确表达式（适用于线性电介质）是:

A. $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$
B. $u = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{P}$
C. $u = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$
D. $u = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{P})$

40. 在一个非均匀极化的电介质中，其内部的束缚电荷 ρ_b 的存在意味着:

A. 介质内部存在自由电荷。
B. 介质内部的电场 $\boldsymbol{E}$ 恒为零。
C. 介质内部的辅助电场 $\boldsymbol{D}$ 恒为零。
D. 介质内部的净电荷密度 $(\rho_f + \rho_b)$ 不为零。

41. 静磁学中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 场满足的两个基本麦克斯韦方程是:

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$
B. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho/\epsilon_0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$
C. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
D. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_m/\mu_0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}$

42. 磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的定义 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 保证了哪个基本定理的自然成立?

A. 高斯磁定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
B. 毕奥-萨伐尔定律
C. 麦克斯韦-安培定律
D. 动量守恒定律

43. 在静磁学中，磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 在库仑规范 $(\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0)$ 下满足的微分方程是:

A. $\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{J}$
B. $\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$
C. $\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0$
D. $\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$

44. 考虑一个无限长直导线上的稳恒电流 I，其磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向由安培定律确定。如果电流方向反向，那么 $\boldsymbol{B}$ 场将发生什么变化?

A. $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向都不变。
B. $\boldsymbol{B}$ 的方向反向，大小减半。
C. $\boldsymbol{B}$ 的方向反向，大小不变。
D. $\boldsymbol{B}$ 的大小减半，方向不变。

45. 洛伦兹力对作匀速圆周运动的带电粒子做功是多少?

A. $q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}$
B. $q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}$
C. 零
D. $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$

46. 对于一个空间任意分布的稳恒电流 $\boldsymbol{J}$，在远离电流源的区域 ($r \gg$ 电流源尺寸) 内，磁矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的第一项非零贡献（磁偶极项）与什么量成正比?

A. $1/r$
B. $1/r^2$
C. $1/r^3$
D. $\boldsymbol{r}$

47. 磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中所受的力 $\boldsymbol{F}$ 和力矩 $\boldsymbol{N}$ 分别为:

A. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}, \boldsymbol{N} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})$
B. $\boldsymbol{F} = 0, \boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$
C. $\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}), \boldsymbol{N} = 0$
D. $\boldsymbol{F} = 0, \boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$

48. 安培定律 $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$ 的有效性条件是:

A. 只有在电流是恒定且均匀时才成立。
B. 必须是稳恒电流，即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$。
C. 必须是稳恒电流，且积分路径必须是圆形。
D. 在任何有电流的系统中都成立。

49. 在一个电流分布的边界上，磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的哪个分量是连续的?（假设电流密度 $\boldsymbol{J}$ 是有限的）

A. 只有法向分量 $\boldsymbol{A}^{\perp}$
B. 只有切向分量 $\boldsymbol{A}^{\parallel}$
C. 法向和切向分量都连续
D. 只有在 $\boldsymbol{J} = 0$ 时才连续

50. 根据毕奥-萨伐尔定律，一个无限小电流元 $Id\boldsymbol{l}$ 在空间产生的磁场 $d\boldsymbol{B}$ 的方向总是:

A. 沿着电流元 $d\boldsymbol{l}$ 的方向。
B. 沿着电流元 $d\boldsymbol{l}$ 与位置矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 的叉积方向。
C. 沿着位置矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 的方向。
D. 垂直于 $d\boldsymbol{l}$ 且指向 $d\boldsymbol{l}$。

51. 在一个被磁化的物质中，磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的定义是:

A. 物质中自由电流密度 $\boldsymbol{J}_f$ 的体积分。

B. 物质中磁偶极矩的总和。

C. 单位体积内的净磁偶极矩。

D. 辅助磁场 $\boldsymbol{H}$ 的旋度。

52. 对于一个均匀磁化的有限物体，其体束缚电流密度 $\boldsymbol{J}_b$ 的表达式 $\boldsymbol{J}_b = \nabla \times \boldsymbol{M}$ 恒为：

A. 零

B. $\boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$

C. $\boldsymbol{M}$ 的梯度

D. $-\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}$

53. 磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 场与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 场的基本关系是：

A. $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{M})$

B. $\boldsymbol{H} = \mu_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{M}$

C. $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$

D. $\boldsymbol{B} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$

54. 麦克斯韦方程组中，关于 $\boldsymbol{H}$ 场旋度的方程是：

A. $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

B. $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f$

C. $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_b$

D. $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f - \boldsymbol{J}_b$

55. 边界条件下，以下哪个量在两种介质的交界面上，其切向分量是连续的？

A. 磁化强度 $\boldsymbol{M}$

B. 束缚电流密度 $\boldsymbol{K}_b$

C. 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$

D. 辅助磁场 $\boldsymbol{H}$ (假设交界面上没有自由表面电流 $\boldsymbol{K}_f$)

56. 对于一个各向同性的线性磁介质，磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的关系是 $\boldsymbol{M} = \chi_m\boldsymbol{H}$，其中 χ_m 为磁化率。如果该介质是抗磁性的，那么 χ_m 的数值特性是：

A. $\chi_m \gg 1$

B. $\chi_m < 0$ 且 $|\chi_m| \ll 1$

C. $\chi_m > 0$ 且 $|\chi_m| \ll 1$

D. $\chi_m = 0$

57. 在一个均匀磁化的长螺线管内部，如果其磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 沿螺线管轴向，则其内部的束缚电流分布为:

   A. 均匀分布的体束缚电流 $\boldsymbol{J}_b$。
   B. 仅存在表面束缚电流 $\boldsymbol{K}_b$。
   C. 均匀分布的体束缚电流 $\boldsymbol{J}_b$ 和表面束缚电流 $\boldsymbol{K}_b$。
   D. 内部磁场 $\boldsymbol{B}$ 恒为零。

58. 某线性磁介质的相对磁导率 $\mu_r = 1000$。如果将该介质视为真空 (μ_0) 和磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的叠加效应，那么 $\boldsymbol{M}$ 对 $\boldsymbol{B}$ 的贡献大约是总 $\boldsymbol{B}$ 场的:

   A. 0.1%
   B. 1%
   C. 99.9%
   D. 1000 倍

59. 经典电动力学认为所有磁现象均源于电流（安培观点）。引入 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的主要物理动机是:

   A. 简化麦克斯韦方程组的代数形式。
   B. 将物质的响应（束缚电流）从方程中分离出来，使方程仅由自由电流 $\boldsymbol{J}_f$ 决定。
   C. 严格区分抗磁性和顺磁性物质。
   D. 为磁单极子的存在提供理论基础。

60. 在一个均匀的线性磁介质中，由静自由电流 $\boldsymbol{J}_f$ 产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 场，与真空情况下的 $\boldsymbol{B}_{vac}$ 场之间的关系是:

   A. $\boldsymbol{B} = \mu_r \boldsymbol{B}_{vac}$
   B. $\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_r} \boldsymbol{B}_{vac}$
   C. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{vac} + \mu_0 \boldsymbol{M}$
   D. $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}_{vac}$ 之间没有简单的比例关系。

61. 在一般（非静止）介质中，描述电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与电磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 关系的欧姆定律（微分形式）是:

   A. $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$
   B. $\boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$
   C. $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}/\rho$
   D. $\boldsymbol{J} = \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

62. 连续性方程（电荷守恒定律的微分形式）在电动力学中是:

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$
B. $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$
C. $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
D. $\nabla \times \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

63. 麦克斯韦修正项（位移电流密度 $\boldsymbol{J}_D$）的引入，使得修正后的安培定律 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_D)$ 的散度 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$ 满足恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0$。这等价于要求：

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
B. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$
C. $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{total} = 0$
D. $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$

64. 法拉第电磁感应定律的微分形式是：

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$
B. $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
C. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
D. $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

65. 在一个线性、均匀、各向同性、无源（$\rho_f = 0$）的非导电介质中（$\sigma = 0$），麦克斯韦方程组的安培-麦克斯韦定律微分形式简化为：

A. $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f$
B. $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
C. $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$
D. $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$

66. 在均匀导电介质中，自由电荷密度的衰减方程 $\rho(t) = \rho(0)e^{-t/\tau}$ 中的弛豫时间 $\boldsymbol{\tau}$ 表达式为：

A. $\tau = \epsilon_0/\sigma$
B. $\tau = \sigma/\epsilon_0$
C. $\tau = \epsilon/\sigma$
D. $\tau = \sigma\epsilon$

67. 考虑一个由理想导体构成的闭合回路在时变磁场中运动。回路中的总电动势 $\mathcal{E}_{total}$ 是多少？

A. $\mathcal{E}_{total} = \oint(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l}$
B. $\mathcal{E}_{total} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
C. $\mathcal{E}_{total} = 0$

D. $\mathcal{E}_{total} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$

68. 在麦克斯韦方程组中，哪个定律的微分形式不能直接从某个矢量场的散度恒为零或旋度恒为零的恒等式得到?

A. 高斯电场定律（$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$）
B. 磁场的高斯定律（$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$）
C. 法拉第电磁感应定律（$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$）
D. 安培-麦克斯韦定律（$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$）

69. 动生电动势 $\mathcal{E}_{motional}$ 的物理来源是:

A. 随时间变化的磁场产生的感生电场 $\boldsymbol{E}_{induce}$。
B. 导体内部自由电荷所受的洛伦兹磁力 $\boldsymbol{F}_m = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$。
C. 导体内部的静电场 $\boldsymbol{E}_{static}$。
D. 导体运动产生的位移电流。

70. 麦克斯韦对安培定律的修正（引入位移电流）表明，在时变场中，磁场的旋度 $\nabla \times \boldsymbol{B}$ 是由以下哪两项共同决定的?

A. 仅由传导电流 $\boldsymbol{J}$。
B. 仅由位移电流 $\boldsymbol{J}_D$。
C. 传导电流 $\boldsymbol{J}$ 和磁通量变化率 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$。
D. 传导电流 $\boldsymbol{J}$ 和电场变化率 $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$。

71. 对于一个电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ 随时间变化但无传导电流的区域 ($\boldsymbol{J} = 0$)，根据连续性方程和高斯定律，$\nabla \cdot (\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t})$ 应该等于:

A. 0
B. $\frac{\partial \rho}{\partial t}$
C. $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$
D. ρ/ϵ_0

72. 自感系数 L 的定义式 $\Phi = LI$ 中的磁通量 Φ 是指:

A. 产生电流 I 的外部磁场通过电路的磁通量。
B. 由电流 I 自身产生的磁场通过电路的磁通量。
C. 仅与电路几何形状和磁导率有关的常数。
D. 外部磁场和自身磁场通过电路的总磁通量。

73. 如果一个无限大理想导体的表面电荷密度 σ_0 发生变化，电荷在导体内部弛豫的速度:

A. 非常慢，因为 $\sigma \to \infty$ 导致 $\tau \to 0$。

B. 瞬间完成，因为 $\sigma \to \infty$ 导致 $\tau \to 0$。
C. 非常慢，因为 $\sigma \to \infty$ 导致 $\tau \to \infty$。
D. 无法确定，因为理想导体内部没有电荷。

74. 在电磁感应现象中，楞次定律本质上是哪个基本物理定律在电磁学中的体现？

A. 电荷守恒定律
B. 动量守恒定律
C. 能量守恒定律
D. 角动量守恒定律

75. 麦克斯韦方程组的完整微分形式（在真空中）共有几个独立的方程？

A. 2 个
B. 4 个
C. 6 个
D. 8 个

76. 对于一个具有均匀电导率 σ 和介电常数 ϵ 的介质，其内部的传导电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与位移电流密度 $\boldsymbol{J}_D$ 之比 $|\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}_D|$ 的量级关系决定了该介质对电磁波的响应。如果 $|\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}_D| \gg 1$，该介质可被视为：

A. 理想介质（非导电）
B. 理想导体
C. 具有良好导电性的良导体
D. 磁性物质

77. 根据法拉第电磁感应定律的微分形式 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$，以下哪个结论是错误的？

A. 时变的磁场产生感生电场。
B. 感生电场是一个无旋场。
C. 感生电场是一个非保守场。
D. 感生电场的场线可以是闭合的。

78. 耦合电路中，互感系数 M_{21} 与 M_{12} 的关系是：

A. $M_{21} = M_{12}$
B. $M_{21} = -M_{12}$
C. $M_{21} = M_{12}^{-1}$
D. $M_{21} \neq M_{12}$

79. 麦克斯韦方程组中的 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 两个方程，使得电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 可以通过哪个势函数来统一描述？

A. 仅标量势 V

B. 仅矢量势 $\boldsymbol{A}$

C. 标量势 V 和矢量势 $\boldsymbol{A}$

D. 仅磁化矢量 $\boldsymbol{M}$

80. 假设一个导体内自由电荷的运动满足 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$。如果此导体处于一个电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ 中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 满足哪个方程？（忽略 $\boldsymbol{B}$ 场的影响）

A. $\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$

B. $\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

C. $\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$

D. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$

81. 连续性方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J}$ 表达了电荷的局域守恒。它在电动力学中是:

A. 独立于麦克斯韦方程组的基本假设。

B. 麦克斯韦方程组的推论，但不要求电场和磁场必须同时存在。

C. 只有在 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ 的稳恒电流条件下才成立。

D. 麦克斯韦方程组的固有属性，可通过对安培-麦克斯韦定律取散度并结合高斯定律推导得出。

82. 波印廷定理 $\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u \, d\tau - \oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{a}$ 中的 $\frac{dW}{dt}$ 项代表的物理量是:

A. 电磁场对体元 $\mathcal{V}$ 内电荷做功的功率。

B. 储存在体元 $\mathcal{V}$ 内的电磁场能量的增加率。

C. 通过表面 $\mathcal{S}$ 流出体元 $\mathcal{V}$ 的电磁能量。

D. 电荷产生的机械功与电磁场功之和。

83. 在一个没有自由电荷和电流 $(\rho = 0, \boldsymbol{J} = 0)$ 的区域内，电磁能量的守恒形式为:

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0$

B. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

C. $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$

D. $\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{S}$

84. 波印廷矢量 $\boldsymbol{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$ 的物理意义是:

A. 空间中电磁场的能量密度。

B. 垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 方向上的电磁场力。

C. 单位时间内、单位面积穿过表面积的电磁能量流密度（能流密度）。

D. 电磁场对电荷做功的功率密度。

85. 在电动力学中，牛顿第三定律（作用力与反作用力相等且方向相反）对于两个相互作用的运动点电荷不成立。其根本原因是:

A. 洛伦兹力公式本身不具有对称性。
B. 电磁相互作用的传播速度是有限的（光速）。
C. 电场和磁场本身携带动量，弥补了粒子动量的非守恒。
D. 麦克斯韦方程组是线性微分方程组。

86. 电磁场动量密度 $\boldsymbol{g}$ 的正确表达式是:

A. $\boldsymbol{g} = \epsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{S}$
B. $\boldsymbol{g} = \frac{1}{c^2} \boldsymbol{S}$
C. $\boldsymbol{g} = \epsilon_0 (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$
D. 以上所有表达式均正确。

87. 麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{T}$ 在静电场中，其对角元素 T_{xx} 的表达式为:

A. $T_{xx} = \frac{1}{2}\epsilon_0 (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)$
B. $T_{xx} = \frac{1}{2}\epsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)$
C. $T_{xx} = \epsilon_0 E_x^2 - \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$
D. $T_{xx} = \epsilon_0 E_x^2$

88. 麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{T}$ 的非对角元素 T_{ij}（其中 $i \neq j$）的物理意义是:

A. 作用在表面上的法向压力。
B. 作用在表面上的切向剪应力。
C. 电磁场的能量密度。
D. 电磁场的动量密度。

89. 电磁场动量 $\boldsymbol{P}_{em}$ 在一个任意体积 $\mathcal{V}$ 内的局域守恒定律（$\boldsymbol{f}$ 为洛伦兹力密度）可表述为:

A. $\frac{d\boldsymbol{P}_{mech}}{dt} = \boldsymbol{F}_{em}$
B. $\frac{d\boldsymbol{P}_{mech}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{P}_{em}}{dt} = 0$
C. $\frac{d\boldsymbol{P}_{mech}}{dt} = \oint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{T} \cdot d\boldsymbol{a} - \frac{d\boldsymbol{P}_{em}}{dt}$
D. $\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{g} d\tau = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$

90. 麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{T}$ 与动量守恒的关系中，积分 $\oint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{T} \cdot d\boldsymbol{a}$ 在物理上表示:

A. 通过表面 $\mathcal{S}$ 流出体元 $\mathcal{V}$ 的总动量。
B. 作用在体元 $\mathcal{V}$ 内电荷上的总电磁力。
C. 作用在体元 $\mathcal{V}$ 边界 $\mathcal{S}$ 上的电磁力。
D. 通过表面 $\mathcal{S}$ 流入体元 $\mathcal{V}$ 的电磁动量流。

91. 在真空中传播的单色平面电磁波，其电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{B}$ 和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 之间的关系，哪个是错误的？

A. $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$
B. $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}$
C. $|\boldsymbol{B}| = \frac{1}{c}|\boldsymbol{E}|$
D. $\boldsymbol{E} = c(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B})$

92. 麦克斯韦方程组的推论表明，真空中 $\boldsymbol{E}$ 场满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$。该波动方程成立所依赖的麦克斯韦方程是：

A. 法拉第感应定律和高斯定律
B. 安培-麦克斯韦定律和高斯定律
C. 法拉第感应定律和安培-麦克斯韦定律
D. 法拉第感应定律和磁场无源定律

93. 对于一个在真空中沿 z 方向传播的单色平面电磁波，其 $\boldsymbol{E}$ 场的振幅为 $\boldsymbol{E}_0 = E_{0x}\hat{\boldsymbol{x}} + iE_{0y}\hat{\boldsymbol{y}}$。该电磁波的偏振状态是：

A. 线性偏振
B. 圆偏振
C. 椭圆偏振
D. 自然光

94. 真空中单色平面电磁波的时间平均能流密度 $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ 与电场振幅 E_0 的关系是：

A. $\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c}E_0^2$
B. $\langle S \rangle = \epsilon_0 c E_0^2$
C. $\langle S \rangle = \frac{c}{\epsilon_0}E_0^2$
D. $\langle S \rangle = \frac{1}{2}\mu_0 c E_0^2$

95. 电磁波的辐射压 P_{rad}（作用在完全吸收表面上的压强）与时间平均能流密度 $\langle S \rangle$ 的关系是：

A. $P_{\text{rad}} = \langle S \rangle$
B. $P_{\text{rad}} = c\langle S \rangle$
C. $P_{\text{rad}} = \frac{1}{c}\langle S \rangle$
D. $P_{\text{rad}} = 2\frac{1}{c}\langle S \rangle$

96. 在一个线性、非色散、无源的介质 $(\epsilon, \mu, \sigma = 0)$ 中，电磁波的相速度 v 与该介质的折射率 n 的关系是：

A. $v = cn$

B. $v = c\sqrt{\mu_r \epsilon_r}$

C. $v = \frac{c}{n}$

D. $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

97. 当电磁波从介质 1 垂直入射到介质 2 时，反射系数 R (反射波强度与入射波强度之比) 的表达式为：

A. $R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$

B. $R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$

C. $R = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$

D. $R = \frac{E_{0R}}{E_{0I}}$

98. 电磁波从真空入射到良导体 ($\sigma \to \infty$) 表面时，电场振幅的透射系数 t 的近似值是：

A. $t \approx 1$

B. $t \approx 0$

C. $t \approx \frac{2}{1+i}$

D. $t \approx \frac{2\omega\epsilon_0}{i\sigma}$

99. 在良导体中传播的电磁波，其电场振幅衰减到 $1/e$ 所经过的距离称为趋肤深度（Skin Depth）δ。δ 与频率 ω 的关系是：

A. $\delta \propto \omega$

B. $\delta \propto \sqrt{\omega}$

C. $\delta \propto 1/\omega$

D. $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$

100. 在存在色散（Dispersion）的介质中，波包的传播速度由哪个速度决定？

A. 相速度 v_p

B. 群速度 v_g

C. 光速 c

D. v_p 和 v_g 的平均值

101. 对于单色平面波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$，$\boldsymbol{E}_0$ 必须满足 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$，这个条件来自于哪个麦克斯韦方程？

A. 法拉第感应定律 ($\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$)

B. 安培-麦克斯韦定律 ($\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$)

C. 高斯定律 ($\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$)

D. 磁场无源定律 ($\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$)

102. 当电磁波从光疏介质（低 n）以大于布儒斯特角 (θ_B) 的角度入射到光密介质（高 n）时:

A. 只有 E 场垂直于入射面的分量发生全反射。
B. 只有 E 场平行于入射面的分量发生全反射。
C. 两个分量都不会发生全反射。
D. 两个分量都会发生全反射（若角度大于临界角 θ_c）。

103. 电磁波在良导体中传播时，电场和磁场之间的相位关系是:

A. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同相。
B. $\boldsymbol{E}$ 领先 $\boldsymbol{B}$ 相位角 45°。
C. $\boldsymbol{E}$ 落后 $\boldsymbol{B}$ 相位角 45°。
D. $\boldsymbol{E}$ 领先 $\boldsymbol{B}$ 相位角 90°。

104. 在一个具有截止频率 ω_c 的理想矩形波导中，若信号频率 $\omega < \omega_c$，则波导:

A. 内部发生全反射，波能无衰减传播。
B. 无法传播，波能呈指数衰减。
C. 以相速度 $v_p = c$ 传播。
D. 以群速度 $v_g = c$ 传播。

105. 对于真空中沿 z 方向传播的波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$，其瞬时波印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 在 z 轴上的时间平均值为:

A. $\langle S \rangle = 0$
B. $\langle S \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$
C. $\langle S \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$
D. $\langle S \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c}$

106. 考虑电磁波在理想介质 (ϵ, μ) 中传播，其相速度 v_p 和群速度 v_g 的表达式为:

A. $v_p = c/\sqrt{\mu_r \epsilon_r}, v_g = v_p$
B. $v_p = c/\sqrt{\mu_r \epsilon_r}, v_g = \frac{d\omega}{dk}$
C. $v_p = \frac{d\omega}{dk}, v_g = \frac{\omega}{k}$
D. $v_p = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}}, v_g = \frac{d\omega}{dk}$

107. 对于一个从介质 1 (μ_1, ϵ_1) 垂直入射到介质 2 (μ_2, ϵ_2) 的电磁波，其电场透射系数 t 的表达式是:

A. $t = \frac{2\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}}{\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}+\sqrt{\mu_2/\epsilon_2}}$
B. $t = \frac{2\sqrt{\mu_2/\epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}+\sqrt{\mu_2/\epsilon_2}}$

C. $t = \frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2}$
D. $t = \frac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2}$

108. 在电磁波传播中，若电场和磁场的能量密度相等，即 $u_E = u_B$，则该介质必须满足哪个条件？

   A. $\mu = \mu_0$
   B. $\epsilon = \epsilon_0$
   C. $\mu\epsilon = 1/c^2$
   D. 总是成立

109. 当光从光密介质以大于临界角 θ_c 入射到光疏介质时，发生全反射。此时，在光疏介质中：

   A. 没有电磁场存在，能量完全反射。
   B. 存在沿边界传播的倏逝波 (Evanescent Wave)，但能量流为零。
   C. 存在沿边界传播的倏逝波，且能量沿边界传播。
   D. 存在正常的传播波，但振幅衰减很快。

110. 某电磁波的电场表达式为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 e^{-\alpha z}\cos(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$。这代表了：

   A. 沿 x 方向传播的衰减波。
   B. 沿 z 方向传播的衰减波。
   C. 沿 z 方向传播的非衰减波。
   D. 沿 z 方向传播的驻波。

111. 磁场 $\boldsymbol{B}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式 ($\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$) 对一个规范变换 $V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\lambda$ 保持不变，是因为：

   A. 麦克斯韦方程组是线性方程组。
   B. 势函数 V 和 $\boldsymbol{A}$ 必须满足连续性方程。
   C. $\nabla \times (\nabla\lambda) = 0$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\lambda) = \nabla(\frac{\partial \lambda}{\partial t})$。
   D. 洛伦兹力公式 $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ 具有规范不变性。

112. 在洛伦兹规范（Lorentz Gauge）中，标量势 V 满足的非齐次波动方程是：

   A. $\nabla^2 V - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$
   B. $\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$
   C. $\nabla^2 V - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$
   D. $\nabla^2 V - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\mu_0\boldsymbol{J}$

113. 库仑规范（Coulomb Gauge）$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 在瞬时形式上使标量势 V 满足泊松方程 ($\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$)。这暗示着库仑规范下的 V：

A. 必须是零。
B. 与时间无关。
C. 瞬时响应电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$。
D. 满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$。

114. 延迟标量势 $V(\boldsymbol{r}, t)$ 的定义式为 $V(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d\tau'$。其中延迟时间 t_r 满足:

A. $t_r = t + \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$
B. $t_r = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$
C. $t_r = t$
D. $t_r = t - \frac{|\boldsymbol{r}'|}{c}$

115. Jefimenko 方程明确了在时变场中，电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ 产生于哪些物理量?

A. 仅延迟电荷 $\rho(\boldsymbol{r}', t_r)$。
B. 仅延迟电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t_r)$。
C. 延迟电荷 ρ 及其对时间的导数 $\frac{\partial \rho}{\partial t_r}$，以及延迟电流 $\boldsymbol{J}$ 及其对时间的导数 $\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t_r}$。
D. 仅延迟电荷 ρ 和延迟电流 $\boldsymbol{J}$。

116. 考虑一个匀速直线运动的点电荷 q，其 $\boldsymbol{E}$ 场在运动方向上的空间分布特点是:

A. 场线密度在运动方向上被压缩（前方增强，后方减弱)。
B. 场线密度在垂直运动方向上被压缩（垂直方向增强)。
C. 场线分布仍然是径向对称的，但振幅随速度减小。
D. 场线分布与静止时完全相同。

117. Liénard-Wiechert 势中，分母处的因子 $\mathcal{R} = R - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}/c$ 的物理意义不包括:

A. 考虑了电磁信号有限的传播速度 c。
B. 考虑了源点在信号发出后仍在运动。
C. 使得势函数 V 随距离的衰减不再是简单的 $1/R$。
D. 使得势函数 V 具有洛伦兹协变性。

118. 对于运动点电荷的电场 $\boldsymbol{E}$ 表达式，可将其拆分为速度场（Velocity Field, $\boldsymbol{E}_v$）和加速度场（Acceleration Field, $\boldsymbol{E}_a$)。下列哪个陈述是正确的?

A. $\boldsymbol{E}_v$ 场的强度随距离 R 衰减为 $1/R^3$。
B. $\boldsymbol{E}_a$ 场的强度随距离 R 衰减为 $1/R^2$。
C. $\boldsymbol{E}_a$ 场的总能量流（辐射功率）与距离 R 无关。
D. $\boldsymbol{E}_v$ 场总是垂直于速度 $\boldsymbol{v}$ 的。

119. 为了使 $\boldsymbol{E}$ 场满足法拉第定律 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$，势 $\boldsymbol{A}$ 和 V 必须满足:

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$
B. $\boldsymbol{E} = -\nabla V$
C. $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$
D. $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$

120. 任意电荷-电流分布 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ 和 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ 产生的 $\boldsymbol{E}$ 场，在远场区 ($R \to \infty$)，哪一项贡献（或哪一项与 R 的关系）决定了电磁辐射？

A. 仅由延迟电荷项 $\propto 1/R^2$ 贡献。
B. 仅由延迟电流项 $\propto 1/R$ 贡献。
C. 由所有项中随 $1/R$ 衰减的分量贡献。
D. 仅由延迟电荷项 $\propto 1/R$ 贡献。

121. 判别电磁场中是否存在不可逆能量传输（辐射）的决定性条件是：

A. 电场 $\boldsymbol{E}$ 随距离 r 衰减为 $1/r^2$。
B. 磁场 $\boldsymbol{B}$ 随距离 r 衰减为 $1/r^3$。
C. 波印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 在远场区随距离 r 衰减不快于 $1/r^2$。
D. 源点的电荷和电流必须随时间呈正弦振荡。

122. 对于一个振荡电偶极子 $\boldsymbol{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}$，其辐射场 $\boldsymbol{E}_{rad}$ 在远场区 ($r \to \infty$) 的表达式中，下列关于其 r 依赖性和角度 θ 依赖性的描述正确的是（θ 为与 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 轴的夹角）：

A. 振幅 $\propto 1/r^2$；角分布 $\propto \sin^2\theta$。
B. 振幅 $\propto 1/r$；角分布 $\propto \cos^2\theta$。
C. 振幅 $\propto 1/r$；角分布 $\propto \sin^2\theta$。
D. 振幅 $\propto 1/r^2$；角分布 $\propto \cos\theta$。

123. 在多极矩展开中，电偶极子辐射是最低阶的辐射。其辐射功率 P 与振荡频率 ω 的关系是：

A. $P \propto \omega^2$
B. $P \propto \omega^4$
C. $P \propto \omega^6$
D. $P \propto 1/\omega^2$

124. 考虑一个半径为 a 的电流环 $I(t)$，其磁偶极矩为 $\boldsymbol{m}(t)$。磁偶极辐射相对于电偶极辐射的相对强度由哪个无量纲小参数决定？

A. v/c
B. $\omega a/c$

C. a/r

D. $\mu_0\epsilon_0$

125. Larmor 公式 $P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}|\boldsymbol{a}|^2$ 给出了非相对论运动下点电荷的瞬时辐射功率。该公式成立的前提是:

A. 电荷必须做匀速圆周运动。

B. 观测点必须在辐射区。

C. 电荷的速度远小于光速且加速度 $\boldsymbol{a}$ 远小于 c^2/R。

D. 电荷的速度远小于光速且辐射反作用力可忽略。

126. 对于匀速直线运动的点电荷，其辐射功率 P 为:

A. $P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}|\boldsymbol{a}|^2$

B. $P = 0$

C. P 与速度 $\boldsymbol{v}$ 成正比。

D. P 与速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 的乘积成正比。

127. 在 Liénard 公式中，描述点电荷辐射功率角分布 $dP/d\Omega$ 的辐射场（$\boldsymbol{E}_{rad}$）与总电场 $\boldsymbol{E}$ 的衰减行为在远场区分别满足:

A. $\boldsymbol{E}_{rad} \propto 1/R^2$； $\boldsymbol{E} \propto 1/R$。

B. $\boldsymbol{E}_{rad} \propto 1/R$；$\boldsymbol{E} \propto 1/R^2$。

C. $\boldsymbol{E}_{rad} \propto 1/R$；$\boldsymbol{E} \propto 1/R$。

D. $\boldsymbol{E}_{rad} \propto 1/R$；$\boldsymbol{E} \propto 1/R$ 和 $1/R^2$ 的组合。

128. 经典电动力学中，Abraham-Lorentz 辐射反作用力 $\boldsymbol{F}_{rad}$ 的表达式 $\boldsymbol{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{\boldsymbol{a}}$ 带来了哪个物理学上的难题?

A. 违反了动量守恒。

B. 违反了能量守恒。

C. 导致了预加速（Pre-acceleration）和失控解（Runaway Solutions）。

D. 辐射功率与加速度的平方成正比。

129. 当点电荷处于极端相对论运动 ($v \to c$) 时，其辐射功率的角分布 $dP/d\Omega$ 表现出何种特性?

A. 辐射方向与加速度方向垂直。

B. 辐射集中在与 $\boldsymbol{v}$ 方向相反的极窄锥形区域内。

C. 辐射集中在与 $\boldsymbol{v}$ 方向平行的极窄锥形区域内。

D. 辐射分布与非相对论情况相似，呈 $\sin^2\theta$ 分布。

130. 四极矩辐射 (Quadrupole Radiation) 相比于电偶极矩辐射，其总辐射功率 P 的 r 依赖性和 ω 依赖性分别是:

A. $P \propto 1/r^2, P \propto \omega^4$
B. $P \propto r^0, P \propto \omega^6$
C. $P \propto 1/r, P \propto \omega^6$
D. $P \propto r^0, P \propto \omega^8$

131. 在狭义相对论中，电动力学与力学的一致性是通过哪个原理建立起来的?

A. 洛伦兹力公式的协变性。
B. 惯性系中所有物理定律形式不变。
C. 光速不变原理。
D. 场和源都是四维张量或四维矢量。

132. 一个四维矢量 $\boldsymbol{A}^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$，其零分量 A^0 在洛伦兹变换下的变换特性通常是什么?

A. 保持不变。
B. 与空间分量 $\boldsymbol{A}$ 的变化无关。
C. 与空间分量 $\boldsymbol{A}$ 耦合。
D. 恒等于零。

133. 四维电流密度 J^μ 的定义是:

A. $(\rho, \boldsymbol{J})$
B. $(\rho c, \boldsymbol{J})$
C. $(\rho c, \boldsymbol{J}/c)$
D. $(\rho c, \boldsymbol{J}\gamma)$

134. 在电动力学中，四维势 $A^\mu = (V/c, \boldsymbol{A})$ 满足的洛伦兹规范条件，用四维表示应为:

A. $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$
B. $\partial_\mu A^\mu = 0$
C. $A_\mu A^\mu =$ 常数
D. $\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

135. 电磁场张量 $F^{\mu\nu}$ 是一个反对称的二阶张量。其分量 F^{10} 对应哪个电磁场分量?

A. E_x/c
B. $-E_x/c$
C. B_x
D. B_z

136. 麦克斯韦方程组用电磁场张量 $F^{\mu\nu}$ 和四维电流密度 J^μ 表示，其中描述场与源关系的方程（非齐次方程）是:

A. $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$
B. $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$
C. $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$
D. $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} =$ 常数

137. 考虑一个相对论性粒子所受的四维洛伦兹力 K^μ。其中零分量 K^0 的物理意义是什么?

A. 粒子所受的瞬时力。
B. 粒子在单位时间内的动量变化率。
C. 粒子所受的辐射反作用力。
D. 洛伦兹力对粒子做功的功率 P 与 c 的比值 P/c。

138. 在惯性系 S' 中观察到一个静止的电偶极子。若 S' 相对于 S 系以速度 $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ 运动,则在 S 系中观测到的场是:

A. 仅有电场,没有磁场。
B. 仅有磁场,没有电场。
C. 既有电场,也有磁场。
D. 仅有一个与 $\boldsymbol{v}$ 平行的电场。

139. 描述电磁场能量和动量密度的张量是:

A. 电磁场张量 $F^{\mu\nu}$
B. 能量-动量四维矢量 P^μ
C. 波印廷矢量 $\boldsymbol{S}$
D. 能量-动量张量 $T^{\mu\nu}$

140. 麦克斯韦方程组的协变形式,特别是 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$,保证了电荷守恒定律(连续性方程)的自然满足。这是通过哪个数学性质实现的?

A. 洛伦兹规范条件。
B. 电磁场张量 $F^{\mu\nu}$ 的反对称性。
C. 麦克斯韦方程组的线性性质。
D. 闵可夫斯基度规 $g_{\mu\nu}$ 的对角性。

§2. 简答题

1. 狄拉克 δ 函数的性质与物理意义

   (a) 写出三维狄拉克 δ 函数 $\delta^3(\boldsymbol{r})$ 的定义及其两个关键性质（积分性质和筛选性质）。

   (b) 解释为什么 $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$ 在电磁学中至关重要。请说明它如何将泊松方程和库仑定律联系起来。

   (c) 在计算 $\nabla^2(1/r)$ 时，为什么不能简单地直接应用微分算子而忽略原点 $r = 0$ 处的特殊性?

2. 矢量积分的四大基本定理

   (a) 简述矢量微积分中的四个基本定理（梯度定理、高斯散度定理、斯托克斯旋度定理、以及基本积分定理）的一般形式。

   (b) 阐述这四个定理在数学形式上的共同特征。

   (c) 解释这些定理在物理学中最重要的意义，即它们如何描述边界上的量与体积/区域内部的量之间的关系。

3. 导体静电平衡性质的证明与应用

   (a) 利用静电学的基本方程，证明处于静电平衡状态的完美导体内部，净电荷密度 ρ 必须为零。

   (b) 证明处于静电平衡的导体表面，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 必须垂直于导体表面。

   (c) 解释静电屏蔽的原理，并说明其在实际应用中的有效性如何体现在导体的静电平衡性质中。

4. 高斯定律和库仑定律的关系与静电场的旋度

   (a) 说明高斯定律和库仑定律之间的关系。为什么在静电学中，仅凭高斯定律不足以完全确定电场 $\boldsymbol{E}$?

   (b) 在静电学中，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 这一微分方程的物理意义是什么? 请从功和场的保守性角度阐述。

   (c) 证明 $V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\tau'$ 形式的电势，自动满足 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$。

5. 唯一性定理与边值条件

   (a) 阐述静电学第一唯一性定理和第二唯一性定理对求解静电场边值问题的意义。

   (b) 简述 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件在物理上的含义，并说明当边界条件给出后，为什么解是唯一的（简要说明证明思路）。

(c) 在实际应用中，如果边界 S 上一部分满足 Dirichlet 条件，另一部分满足 Neumann 条件，此时唯一性定理是否仍然成立？为什么？

6. 静电能的物理本质与点电荷问题

   (a) 解释静电能公式 $W = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau$（电荷观点）和 $W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$（场观点）的物理含义，以及它们何时是等价的。

   (b) 证明对于一个点电荷 q，由 $\frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$ 计算出的能量是无穷大。这种自能无穷大的结果揭示了经典电磁学在描述点电荷时的何种根本性困难？

7. 电介质中 $\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{D}$ 场的物理意义与应用

   (a) 阐述电场强度 $\boldsymbol{E}$ 场和辅助电场 $\boldsymbol{D}$ 场的物理意义和根本区别。

   (b) 解释引入 $\boldsymbol{D}$ 场的物理动机。为什么在处理电介质边界条件问题时，$\boldsymbol{D}$ 场比 $\boldsymbol{E}$ 场更方便？

   (c) 在一个电介质内部，挖出一个扁平盘状腔和一个细长针状腔时，腔内 $\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{D}$ 场与介质中 $\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{D}$ 场的关系，并解释其物理原因。

8. 束缚电荷的本质与电介质的静电能

   (a) 描述电介质中束缚电荷的微观起源，并解释为什么束缚电荷的净效应总是削弱了自由电荷产生的电场。

   (b) 推导静电能公式 $W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} d\tau$（适用于线性电介质），并解释这个能量表达式与真空中 $W_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0\int E^2 d\tau$ 的物理区别。

9. 静磁学的基本原理与电磁场的对称性

   (a) 解释静磁学中 $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 和静电学中 $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ 这两个方程的物理意义和根本差异。

   (b) 阐述“磁单极子”的概念。如果磁单极子存在，静磁学的两个基本方程将如何修改？这会给磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的定义带来什么影响？

10. 磁矢势的规范自由度

   (a) 解释磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的“规范自由度”是什么。写出通用的规范变换公式。

   (b) 为什么磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的引入（而非直接使用 $\boldsymbol{B}$）在理论物理中是必要的？除了简化方程，它的更深层次的物理意义是什么？（提示：考虑量子力学和延迟势。）

11. $\boldsymbol{B}$ 场和 $\boldsymbol{H}$ 场的物理意义及应用区别

   (a) 阐述磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 场和辅助磁场 $\boldsymbol{H}$ 场的物理意义和根本区别。

   (b) 为什么在计算一个被均匀磁化的物体（如磁棒）产生的磁场时，可以采用两种看似不同的方法（束缚电流法和 $\boldsymbol{H}$ 场法），但最终得到相同的 $\boldsymbol{B}$ 场？

(c) 简述在物质内部挖出一个扁平盘状腔和一个细长针状腔时，腔内 $\boldsymbol{B}$ 场和 $\boldsymbol{H}$ 场与介质中 $\boldsymbol{B}$ 场和 $\boldsymbol{H}$ 场的关系，并解释其物理原因。

12. 磁场的本质与永磁体的能量

(a) 描述经典电动力学中永磁体的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 场的微观起源，并解释为什么永磁体的磁场被称为“束缚场”。

(b) 在构建永磁体时（例如铁），为何需要消耗能量？这部分能量存储在哪里？写出永磁体在外部磁场 $\boldsymbol{B}_{ext}$ 中的磁能（或势能）公式，并解释其物理含义。

13. 解释 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$ 和 $\nabla \times (\nabla f) = 0$ 这两个矢量恒等式在麦克斯韦方程组中的体现和物理意义。

14. 磁荷和电磁场的对偶性如果假设存在磁单极子（磁荷密度 ρ_m 和磁流密度 $\boldsymbol{J}_m$），请写出引入磁荷后的麦克斯韦方程组。并简述电磁场（$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$）在电荷和磁荷存在时所体现的对偶性。

15. 法拉第定律的积分和微分形式的适用性法拉第电磁感应定律的积分形式 $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -d\Phi_B/dt$ 和微分形式 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ 之间有何根本区别？哪种形式对于描述动生电动势更直接?

16. 简述稳恒电流在数学上必须满足的两个条件，并说明在均匀导电介质中，稳恒电流的电荷分布特征。

17. 详细阐述波印廷定理（积分形式）$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} u \, d\tau - \oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{a}$ 中，电磁场能量守恒的含义。特别要指出电磁场能量本身是否守恒？如果否，那么总能量是如何守恒的?

18. 阐述在电动力学中，动量守恒是如何被麦克斯韦应力张量和场动量概念所“拯救”的。请解释在 $\frac{d\boldsymbol{P}_{mech}}{dt} = \oint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{T} \cdot d\boldsymbol{a} - \frac{d\boldsymbol{P}_{em}}{dt}$ 这一动量守恒方程中，应力张量 $\overleftrightarrow{T}$ 和场动量 $\boldsymbol{P}_{em}$ 的物理作用。

19. 在无源线性介质中 $(\rho = 0, \boldsymbol{J} = 0, \epsilon, \mu)$，电磁波是横波。

(a) 证明对于单色平面波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$，由高斯定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ 可推导出 $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}$。

(b) 简述为什么在有源介质（例如导体）中，电磁波不再是严格的横波，而是存在纵向分量?

20. 当电磁波在光密介质和光疏介质边界上发生全反射时，光疏介质中会产生倏逝波。

(a) 解释什么是倏逝波，并指出其沿着垂直于边界的方向上的特性。

(b) 简述倏逝波是否携带能量？如果是，其能量流的方向是怎样的？为什么全反射仍然是“全”反射?

21. 群速度和相速度的区别与联系

   (a) 简述相速度 v_p 和群速度 v_g 的物理意义。

   (b) 在何种介质中 v_p 和 v_g 相等? 在何种介质中 $v_g > v_p$(反常色散), 以及 $v_g < v_p$(正常色散)?

   (c) 物理信息（例如信号）的传播速度由哪个速度决定? 为什么?

22. 与在真空中的传播特性相比，电磁波在良导体 ($\sigma \to \infty$) 中传播时，其特性发生了哪些根本性的改变? 请从以下三个方面阐述:

   (a) 衰减特性（振幅和距离的关系）。

   (b) 相速度和波长。

   (c) $\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{B}$ 场的相位和振幅关系。

23. 详细阐述“延迟势”在电动力学中的物理意义, 特别是它如何体现电磁因果律。请说明为什么在静电学和静磁学中，势的表达式（如库仑势和毕奥-萨伐尔势）看起来是瞬时的，但这并不与因果律矛盾。

24. 比较和对比洛伦兹规范和库仑规范。特别要说明:

   (a) 它们各自的定义条件是什么?

   (b) 它们各自导致势函数 V 和 $\boldsymbol{A}$ 满足的微分方程的特点（是否解耦、是否是波动方程)?

   (c) 它们各自在理论（如相对论）和实际应用（如静磁场）中的优势。

25. Liénard-Wiechert 场与辐射的起源

   (a) Liénard-Wiechert 场表达式中，电场 $\boldsymbol{E}$ 可以分解为速度场（$\boldsymbol{E}_v$）和加速度场（$\boldsymbol{E}_a$）。请说明 $\boldsymbol{E}_v$ 和 $\boldsymbol{E}_a$ 在远场区 ($R \to \infty$) 的 R 依赖性，并指出哪个分量负责电磁辐射?

   (b) 解释 $\boldsymbol{E}_v$ 和 $\boldsymbol{E}_a$ 场的物理意义。为什么只有 $\boldsymbol{E}_a$ 场才能产生不可逆的能量流(即辐射)?

26. 辐射反作用力的经典难题

   (a) 辐射反作用力 $\boldsymbol{F}_{rad}$ (Abraham-Lorentz 公式) 是如何从能量守恒角度推导出来的? 其推导的基本假设是什么?

   (b) 详细阐述 Abraham-Lorentz 公式 $\boldsymbol{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{\boldsymbol{a}}$ 在物理上导致的两个主要难题：预加速问题和失控解问题。这些难题如何表明经典电动力学在微观尺度上的局限性?

27. $\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{B}$ 场的相对论本质

(a) 简述在电动力学与相对论的框架下，电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 的物理本质是什么？它们如何不再是独立的场，而是统一于一个单一的数学对象？

(b) 以一个静止点电荷的例子进行说明：在 S 系中观测到一个静止电荷 q 产生纯静电场 $\boldsymbol{E}$。当切换到一个相对 S 系以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的 S' 系时，场 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 如何产生？这一现象如何体现了相对论对电磁学的统一？

28. 麦克斯韦方程组的协变性

(a) 写出麦克斯韦方程组的四维协变形式，并指出每个方程对应的经典麦克斯韦方程。

(b) 解释“协变性”的物理含义。为什么麦克斯韦方程组的协变形式是狭义相对论成功的关键证据之一？

§3. 计算题

1. 考虑矢量场 $\boldsymbol{v} = x^2\hat{\boldsymbol{x}} + 2yz\hat{\boldsymbol{y}} + y^2\hat{\boldsymbol{z}}$。

   (a) 计算 $\boldsymbol{v}$ 的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$。

   (b) 验证高斯散度定理 $\oint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) d\tau$，其中 V 是由六个面 $x = 0, 1; y = 0, 1; z = 0, 1$ 围成的单位立方体。

2. 考虑矢量场 $\boldsymbol{v} = y\hat{\boldsymbol{x}} + 2x\hat{\boldsymbol{y}}$。

   (a) 计算 $\boldsymbol{v}$ 的旋度 $\nabla \times \boldsymbol{v}$。

   (b) 验证斯托克斯定理 $\oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{a}$，其中 S 是位于 $z = 0$ 平面上，由 $x = 0, 1$ 和 $y = 0, 1$ 围成的单位正方形区域，边界 C 沿逆时针方向。

3. 在柱坐标系 (s, ϕ, z) 中，标量函数 T 的拉普拉斯算子 $\nabla^2 T$ 为：

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

   考虑一个沿 z 轴无限长、半径为 R 的圆柱体。圆柱体内 $(s < R)$ 的电势 V 仅依赖于径向距离 s 和方位角 ϕ，即 $V = V(s, \phi)$。

   (a) 如果圆柱体内没有自由电荷，写出 $V(s, \phi)$ 满足的微分方程。

   (b) 假设 $V(s, \phi)$ 具有特殊形式 $V(s, \phi) = s^n \cos(n\phi)$，其中 n 是非负整数。将此形式代入 (a) 的微分方程中，证明 $V(s, \phi)$ 确实是一个可能的解。

   (c) 证明 $\nabla \cdot (\nabla V) = 0$ 是恒成立的。

4. 非均匀带电球体的电场与电势一个半径为 R 的球体内部，电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 呈非均匀分布，由下式给出：

$$\rho(r) = kr^2$$

   其中 k 是常数，r 是到球心 O 的距离。假设球体周围是真空。

   (a) 计算球体的总电荷 Q_{total}。

   (b) 利用高斯定律，求出球体内部 $(r < R)$ 的电场 $\boldsymbol{E}_{in}(\boldsymbol{r})$。

   (c) 求出球体内部 $(r < R)$ 的电势 $V_{in}(r)$，以无穷远处的电势为零作为参考。

5. 均匀带电圆盘的电势与电场一个半径为 R 的圆盘，均匀带电，面电荷密度为 σ。

   (a) 计算圆盘中心轴线（z 轴）上任意一点 $P(0, 0, z)$ 的电势 $V(z)$。

   (b) 利用 $\boldsymbol{E} = -\nabla V$，求出点 P 处的电场 $\boldsymbol{E}(z)$。

   (c) 分析 $V(z)$ 和 $\boldsymbol{E}(z)$ 在 $z \gg R$ 时的近似形式，并解释物理意义。

6. 考虑一个半径为 R 的球体，带有均匀体电荷密度 ρ_0。

(a) 利用电荷观点 $W = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau$，计算系统的总静电能 W。

(b) 利用场观点 $W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$，计算系统的总静电能 W，并验证与 (a) 部的结果一致。

7. 接地导电球外的点电荷一个点电荷 q 放置在距离半径为 R 的接地导电球中心 d 处 $(d > R)$。

   (a) 利用镜像法，确定镜像电荷 q' 的大小和位置 d'（相对于球心）。

   (b) 求出球心到电荷 q 之间连线上，球体表面上一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小。

   (c) 求出电荷 q 受到球体吸引力的方向和大小。

8. 二维拉普拉斯方程的边值问题考虑一个无限长的矩形区域（截面为 $a \times b$），三个侧面 $(x = 0, x = a, y = 0)$ 均接地（电势 $V = 0$）。第四个侧面 $(y = b)$ 保持电势 $V(x, b) = V_0$（常数）。

   (a) 写出在矩形区域内电势 $V(x, y)$ 满足的定解方程(包括微分方程和边界条件)。

   (b) 利用分离变量法 $V(x, y) = X(x)Y(y)$，求出电势 $V(x, y)$ 的一般解。

   (c) 确定最终解中级数的系数。

9. 电偶极子系统的多极展开一个电荷系统由三个点电荷组成：q 位于 $(0, 0, a)$ 处，$-2q$ 位于原点 $(0, 0, 0)$ 处，另一个 q 位于 $(0, 0, -a)$ 处。

   (a) 计算该系统的总电荷（单极矩 Q）。

   (b) 计算该系统的电偶极矩 $\boldsymbol{p}$。

   (c) 写出在远处 $(r \gg a)$ 电势 $V(\boldsymbol{r})$ 的最低阶非零近似项表达式。

10. 均匀极化圆柱体的场一个无限长、半径为 R 的圆柱体被均匀极化，极化强度为 $\boldsymbol{P} = P_0\hat{\boldsymbol{s}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 是径向单位矢量（柱坐标）。周围是真空。

    (a) 计算圆柱体的体束缚电荷密度 ρ_b 和表面束缚电荷密度 σ_b。

    (b) 利用束缚电荷法，求出圆柱体内部 $(s < R)$ 的电场 $\boldsymbol{E}_{in}$。

    (c) 求出圆柱体外部 $(s > R)$ 的电场 $\boldsymbol{E}_{out}$。

11. 同轴电容与分层电介质一个无限长同轴电容器，内导体半径 a，外导体半径 c。内导体和外导体之间 $(a < s < c)$ 填充了两种不同的线性电介质：区域 $a < s < b$ 填充了介质 ϵ_1，区域 $b < s < c$ 填充了介质 ϵ_2。假设内导体带有自由线电荷密度 λ_f。

    (a) 利用 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$，求出两个区域内的辅助电场 $\boldsymbol{D}(s)$。

    (b) 求出两个区域内的电场 $\boldsymbol{E}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{E}_2(s)$。

    (c) 求出在 $s = b$ 边界上的束缚面电荷密度 σ_b。

12. 电介质中的泊松方程一个无限大的线性电介质 (ϵ) 内部，存在一个均匀分布的自由电荷球体，半径为 R，体自由电荷密度为 ρ_f。

(a) 写出电介质中，电势 V 满足的微分方程（泊松方程）的修正形式。

(b) 利用高斯定律或泊松方程，求出介质内部 $(r < R)$ 的电场 $\boldsymbol{E}_{in}$ 和电势 V_{in}。

(c) 求出介质外部 $(r > R)$ 的电场 $\boldsymbol{E}_{out}$ 和电势 V_{out}。

13. 一根无限长的圆柱形导线，半径为 R，沿 z 轴放置。导线中流过总电流 I，电流密度 $\boldsymbol{J}$ 沿轴向 ($\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向) 分布，其大小与柱坐标 s (径向距离) 的平方成正比，即 $\boldsymbol{J}(s) = cs^2\hat{\boldsymbol{z}}$，其中 c 是常数。

(a) 求出常数 c 与总电流 I 和半径 R 的关系。

(b) 利用安培定律，求出导线内部 $(s < R)$ 的磁感应强度 $\boldsymbol{B}(s)$。

(c) 求出导线外部 $(s > R)$ 的磁感应强度 $\boldsymbol{B}(s)$。

14. 一个无限长、半径为 R 的理想螺线管，单位长度匝数为 n，通有电流 I。螺线管沿 z 轴放置。

(a) 利用安培定律确定螺线管内部和外部的磁场 $\boldsymbol{B}$。

(b) 在库仑规范 $(\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0)$ 下，利用 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，求出螺线管内部 $(s < R)$ 的磁矢势 $\boldsymbol{A}(s)$。

(c) 求出螺线管外部 $(s > R)$ 的磁矢势 $\boldsymbol{A}(s)$。

15. 一个无限长直导线沿 x 轴放置，通有稳恒电流 I（沿 $+\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向）。在 y 轴上 $y = a$ 处放置一个微小磁偶极子 $\boldsymbol{m}$，其方向沿 z 轴 $(\boldsymbol{m} = m\hat{\boldsymbol{z}})$。

(a) 求出直导线在磁偶极子位置 $(y = a)$ 产生的磁场 $\boldsymbol{B}(a)$。

(b) 利用公式 $\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})$，计算直导线对磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 施加的净力 $\boldsymbol{F}$。

16. 一个半径为 R 的球体被均匀磁化，磁化强度为 $\boldsymbol{M} = M_0\hat{\boldsymbol{z}}$。球体周围是真空。

(a) 计算球体的体束缚电流密度 $\boldsymbol{J}_b$ 和表面束缚电流密度 $\boldsymbol{K}_b$。

(b) 证明球体内部的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_{in}$ 是均匀的，并求出其表达式。

(c) 求出球体外部（$r > R$）的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_{out}$。

17. 考虑一个无限长同轴电缆，内导体内径为 a，外导体内径为 b，外径为 c。内导体和外导体之间 $(a < s < b)$ 填充了一种线性磁介质，其相对磁导率为 μ_r。内导体通有均匀分布的自由电流 I（沿 z 轴正向），外导体通有 $-I$。

(a) 利用 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f$，求出区域 $a < s < b$ 内的辅助磁场 $\boldsymbol{H}$。

(b) 求出区域 $a < s < b$ 内的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和磁化强度 $\boldsymbol{M}$。

(c) 求出整个系统中所有的束缚电流密度 $\boldsymbol{J}_b$ 和 $\boldsymbol{K}_b$。

18. 假设磁介质 1 (磁导率 μ_1) 和磁介质 2 (磁导率 μ_2) 之间存在一个平坦的交界面，界面上没有自由电流。

(a) 写出磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和辅助磁场 $\boldsymbol{H}$ 在该交界面处的边界条件。

(b) 假设 $\boldsymbol{B}_1$ 与界面法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ (指向介质 2) 的夹角为 θ_1。推导 $\boldsymbol{B}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 之间的折射定律（即 θ_1 与 θ_2 之间的关系）。

19. 一个矩形线圈（边长 a 沿 x 轴，边长 b 沿 y 轴）以恒定速度 $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ 沿 x 轴移动。线圈位于一个非均匀磁场中：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = kx\hat{\boldsymbol{z}}$$

其中 k 是常数。在 $t = 0$ 时刻，线圈的左边沿位于 $x = 0$ 处。

(a) 计算 $t > 0$ 时刻穿过线圈的总磁通量 $\Phi_B(t)$。

(b) 利用磁通量求导法（$\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$）计算线圈中的感应电动势 $\mathcal{E}$。

(c) 利用动生电动势积分法（$\mathcal{E} = \oint(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l}$）验证 (b) 的结果。

20. 一个半径为 R 的圆柱形电容器正在以恒定电流 I 充电。假设两极板之间为理想介质（介电常数 ϵ，电导率 $\sigma = 0$）。

(a) 证明板间区域（$s < R$）的位移电流密度 $\boldsymbol{J}_D$ 是均匀的，并写出 $\boldsymbol{J}_D$ 的大小（用 I 和 R 表示）。

(b) 在 $s < R$ 区域，计算 $\nabla \times \boldsymbol{B}$ 的大小（用 $\boldsymbol{J}_D$ 表示）。

(c) 利用斯托克斯定理 $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int(\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{a}$，计算在 $s < R$ 处的磁场大小 $B(s)$。

21. 一个具有电导率 σ 和介电常数 ϵ 的无限大介质内部，在 $t = 0$ 时刻注入了均匀的自由电荷密度 ρ_0。

(a) 从连续性方程和欧姆定律 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ 出发，推导出电荷密度 ρ 满足的微分方程。

(b) 求解此微分方程，给出 $\rho(t)$ 的表达式。

(c) 计算铜（$\sigma \approx 6 \times 10^7\,\mathrm{S/m}$，$\epsilon \approx \epsilon_0$）的弛豫时间 τ，并说明在良导体中电荷的分布特征。

22. 两个共轴的圆形线圈 C_1 和 C_2，半径分别为 a 和 b（假设 $a \ll b$），相距 z。线圈 C_1 中通有电流 I_1。

(a) 写出 C_1 在其轴线上产生的磁场 $\boldsymbol{B}_1(z)$ 的近似表达式。

(b) 计算穿过线圈 C_2 的磁通量 Φ_{21} 的近似值。

(c) 给出两个线圈之间的互感系数 M_{21} 的近似表达式。

23. 在一个不存在自由电荷和传导电流的真空区域，存在一个电场 $\boldsymbol{E} = E_0 \sin(\omega t - kx)\hat{\boldsymbol{y}}$。

(a) 利用法拉第电磁感应定律 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$，求出相应的磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$。

(b) 利用安培-麦克斯韦定律 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$，验证所求 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是否满足该方程。

24. 考虑两个线性均匀介质的交界面（$z=0$），介质 1（$z>0$）的参数为 ϵ_1, σ_1，介质 2（$z<0$）的参数为 ϵ_2, σ_2。在交界面处没有自由面电荷。

   (a) 写出非稳恒电流情况下，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量 $D_{1\perp}$ 和 $D_{2\perp}$ 之间满足的边界条件。

   (b) 结合欧姆定律 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 和边界条件，推导传导电流的法向分量 $J_{1\perp}$ 和 $J_{2\perp}$ 之间满足的关系。

   (c) 假设交界面处存在一个稳定的自由面电荷密度 σ_f，这个稳定的 σ_f 表达式是什么？

25. 一根无限长、理想导体的同轴电缆，内导体内径为 a，外导体内径为 b。电缆两端接有电压为 V 的电池（形成电场 $\boldsymbol{E}$）和负载电阻（消耗功率）。稳态时，内导体携带总电流 I，外导体携带回流电流 $-I$。忽略边缘效应。

   (a) 求同轴电缆内 $a<s<b$ 区域的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$（以圆柱坐标系表示，$\hat{\boldsymbol{s}}$ 为径向，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 为环向，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 为轴向）。

   (b) 计算 $a<s<b$ 区域的波印廷矢量 $\boldsymbol{S}$，并说明其方向所代表的物理意义。

   (c) 通过积分 $\oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{a}$ 证明通过电缆横截面的总功率 P 等于 VI。

26. 一个平行板电容器，极板面积为 A，间距为 d。两板之间的空间充满均匀电场 $\boldsymbol{E}=E_0\hat{\boldsymbol{z}}$。此外，电容器置于一个均匀的外磁场 $\boldsymbol{B}=B_0\hat{\boldsymbol{x}}$ 中。

   (a) 写出该区域内电磁场动量密度 $\boldsymbol{g}$ 的表达式。

   (b) 计算该区域内电磁场动量密度 $\boldsymbol{g}$ 的矢量方向和大小。

   (c) 忽略边缘效应，求出电容器内储存的总电磁场动量 $\boldsymbol{P}_{em}$。

27. 考虑一个带有均匀面电荷密度 σ 的无限大平面导体薄板，其电场为 $\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}}$（假设薄板位于 $z=0$ 平面，考虑 $z>0$ 区域）。现在考虑 $z>0$ 区域内的麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{T}$。

   (a) 确定 $z>0$ 区域麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{T}$ 的所有分量，并以矩阵形式表示。

   (b) 利用静电场中电磁力公式 $\boldsymbol{F}=\oint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{T}\cdot d\boldsymbol{a}$，考虑一块位于 $z>0$ 区域、面积为 A 的想象性闭合体元 $\mathcal{V}$（例如一个底面在 $z=0$ 上方的立方体），计算电场作用在底面上的力（即应力）的方向和大小。

   (c) 基于应力张量的物理意义，解释导体薄板表面所受的净压力应如何计算。

28. 一个在真空中传播的单色平面电磁波，已知其磁场为 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=B_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$。

   (a) 写出该电磁波的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的一般表达式。

   (b) 根据麦克斯韦方程组，求出对应的电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 的表达式。

29. 电磁波从真空 (ϵ_0,μ_0) 垂直入射到一种非磁性介质 $(\mu=\mu_0,\epsilon=4\epsilon_0)$。

(a) 计算该介质的折射率 n 和本征阻抗 η。

(b) 计算电场振幅的反射系数 r 和透射系数 t。

(c) 确定反射波的强度 R 和透射波的强度 T (以入射波强度 I 为单位)，并验证 $R+T=1$。

30. 海水是一种良导体，其电导率约为 $\sigma = 4\,\mathrm{S/m}$，相对介电常数 $\epsilon_r \approx 80$，且 $\mu_r \approx 1$。

(a) 确定对于频率 $f = 100\,\mathrm{Hz}$ 的无线电波，海水是良导体还是不良导体（通过比较位移电流和传导电流密度）。

(b) 计算该频率下电磁波在海水中的趋肤深度 δ。

(c) 解释该结果对水下通信的影响。

31. 光从介质 1 ($n_1 = 1.5$) 入射到介质 2 ($n_2 = 1.0$)。

(a) 计算两个介质之间的布儒斯特角 θ_B（当 E 场平行于入射面时，反射波为零的角度）。

(b) 计算全反射的临界角 θ_c。

(c) 简述当入射角为 $45°$ 时，介质 2 中是否存在传播波?

32. 一个均匀的电磁波以强度 $I = 1000\,\mathrm{W/m^2}$ 传播，作用在一个面积为 $A = 1\,\mathrm{m^2}$ 的完全吸收表面上。

(a) 计算该电磁波的动量密度 $\boldsymbol{g}$ 的平均值 $\langle g \rangle$。

(b) 计算作用在该表面上的平均辐射压 $\langle P_{\mathrm{rad}} \rangle$。

(c) 求出作用在该表面上的总平均电磁力 $\langle \boldsymbol{F} \rangle$。

33. 一个理想矩形波导的横截面尺寸为 a 和 b，其中 $a > b$。电磁波在其中传播的色散关系为 $\omega^2 = c^2k^2 + \omega_c^2$。

(a) 写出 TE_{10} 模式的截止频率 ω_c 表达式（以 a 和 c 表示）。

(b) 证明在该波导中，相速度 v_p 总是大于光速 c。

(c) 证明群速度 v_g 总是小于光速 c，并验证 $v_p v_g = c^2$。

34. 给定某电磁场的一组势函数为 $V(\boldsymbol{r}, t) = 0$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_0 \times \boldsymbol{r} \sin(\omega t)$，其中 $\boldsymbol{B}_0$ 是常矢量。

(a) 判断该组势函数是否满足洛伦兹规范条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$。

(b) 找到一个规范函数 $\lambda(\boldsymbol{r}, t)$，使得变换后的新标量势 $V'(\boldsymbol{r}, t)$ 满足 $V'(\boldsymbol{r}, t) = -(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r}) \cos(\omega t)$，其中 $\boldsymbol{E}_0$ 是另一个常矢量。

(c) 利用找到的 $\lambda(\boldsymbol{r}, t)$ 给出新的矢量势 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}, t)$。

35. 一个位于原点 ($\boldsymbol{r}' = 0$) 的点电荷，其电荷量随时间作余弦振荡变化 $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$。

(a) 写出该点电荷产生的延迟标量势 $V(\boldsymbol{r},t)$ 的表达式。

(b) 计算该标量势 $V(\boldsymbol{r},t)$ 对应的电场 $\boldsymbol{E}_V = -\nabla V$ 项（注意：∇ 是对 $\boldsymbol{r}$ 的求导，需要考虑 ρ 对 t_r 的依赖，其中 $t_r = t - r/c$）。

(c) 讨论在准静态近似 ($\omega \to 0$ 或 $c \to \infty$) 下，结果是否符合库仑定律。

36. 一个点电荷 q 沿着 z 轴以恒定速度 $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$ 运动。在某一时刻 t 观察到电荷位于 $z(t) = vt$ 处。

(a) 证明对于场点 $\boldsymbol{r} = (0, y, 0)$，其源点 $\boldsymbol{r}'(t_r) = (0, 0, z(t_r))$ 处的 Liénard-Wiechert 因子 $\mathcal{R} = R - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}/c$ 可以表示为：

$$\mathcal{R} = \frac{R}{\gamma^2(1 - v^2/c^2)}$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 为洛伦兹因子，$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'(t_r)|$。

(b) 利用勾股定理和延迟时间 t_r 的定义 $R = c(t - t_r)$，求出在 $\boldsymbol{r} = (0, y, 0)$ 处观测时，R^2 与 y 和 γ 的关系。

37. 一个电偶极子 $\boldsymbol{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}$ 位于原点。

(a) 写出在辐射区 ($kr \gg 1$) 产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的表达式（只需写出振幅和相位因子）。

(b) 计算波印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 的时间平均值 $\langle \boldsymbol{S} \rangle$。

(c) 推导辐射的角分布 $dP/d\Omega$ 的表达式，并画出其在 xz 平面上的示意图。

38. 一个电荷量为 q 的粒子，在 xy 平面内做半径为 R 的匀速圆周运动，角速度为 ω。

(a) 假设粒子是非相对论性的 ($v \ll c$)，写出其瞬时辐射功率 $P(t)$ 的表达式。

(b) 计算其时间平均辐射功率 $\langle P \rangle$。

(c) 假设 $q = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$（电子电荷），$R = 1\,\mathrm{m}$，$\omega = 1\,\mathrm{Hz}$，估算 $\langle P \rangle$ 的数量级，并说明电子做如此低速圆周运动时的辐射效应是否显著。

39. 对于一个局域的电荷-电流分布 $\rho(\boldsymbol{r}', t), \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t)$，其产生的 $\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{B}$ 场可以分解为静场、感应场和辐射场。

(a) 在远场区，请简述电场 $\boldsymbol{E}$ 中随 $1/R^2$ 衰减的项（感应场）和随 $1/R$ 衰减的项（辐射场）的物理来源。

(b) 推导在远场区 $\boldsymbol{E}_{rad}$ 和 $\boldsymbol{B}_{rad}$ 之间的关系，并证明它们彼此垂直，且都垂直于传播方向 $\hat{\boldsymbol{r}}$。

40. 一个惯性系 S' 以匀速 $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ 相对于 S 系运动。在 S' 系中有一个均匀静电场 $\boldsymbol{E}' = E_0'\hat{\boldsymbol{y}}$。

(a) 写出 S' 系中的电磁场分量 $E_x', E_y', E_z', B_x', B_y', B_z'$ 的值。

(b) 利用场变换公式（$B'_x = B_x$ 等），计算 S 系中的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分量。

(c) 讨论 $\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{B}$ 场在 S 系中的相对方向关系。

41. 在洛伦兹规范下，四维势 $A^\mu = (V/c, \boldsymbol{A})$ 满足的方程为：

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

(a) 将左边的达朗贝尔算符 $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ 用四维散度 ∂_μ 表示。

(b) 利用 A^μ 的四维形式和 $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$，将上述方程写成完全协变形式，即只使用四维张量和四维矢量符号。

(c) 证明四维势方程的解 A^μ 的解可以写为延迟积分形式：

$$A^\mu(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^\mu(\boldsymbol{r}', t_r)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau'$$

（只需说明推导思路和最终结果的物理意义，无需详细积分过程）。

42. 证明电荷守恒定律（连续性方程）$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ 在四维表示下满足四维散度为零 $\partial_\mu J^\mu = 0$。

矢量微分

直角坐标系

$$d\boldsymbol{l} = dx\,\hat{\boldsymbol{x}} + dy\,\hat{\boldsymbol{y}} + dz\,\hat{\boldsymbol{z}}, \quad d\tau = dx\,dy\,dz$$

梯度: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$

散度: $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

旋度: $\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$

拉普拉斯算子: $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

球坐标系

$$d\boldsymbol{l} = dr\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

梯度: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

散度: $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

旋度:

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{v} = &\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{r}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}$$

拉普拉斯算子: $\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$

柱坐标系

$$d\boldsymbol{l} = ds\,\hat{\boldsymbol{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\boldsymbol{z}}, \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$$

梯度: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\boldsymbol{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$

旋度: $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

旋度:

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{v} = &\left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &+ \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

拉普拉斯算子: $\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

矢量恒等式

三重积

1. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$
2. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

积规则

3. $\nabla(fg)=f(\nabla g)+g(\nabla f)$
4. $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$
5. $\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla f)$
6. $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$
7. $\nabla\times(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\times(\nabla f)$
8. $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

二阶导数

9. $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$
10. $\nabla\times(\nabla f)=0$
11. $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

基本定理

梯度定理: $\int_a^b(\nabla f)\cdot d\boldsymbol{l}=f(b)-f(a)$
散度定理: $\int(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,d\tau=\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{a}$
旋度定理: $\int(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{a}=\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$