数据结构强化课考试

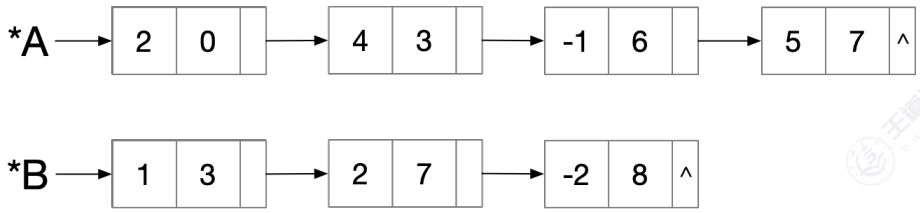
> 注1：本次考试时间共120分钟（408考试中，平均每个大题可分配20分钟左右的做题时间，因此该试卷共包含6个数据结构大题）
>
> 注2：本试卷的个别题目难度略高于真题

算法题

一、数学上的一元多项式 $P(x) = p_0 x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 + ... + p_n x^n$，可以用一个单链表来存储，结点的数据结构定义如下：

```
typedef struct Node {
 float co;    //系数
 int ex;      //指数
 struct Node *next;     //指向下一个结点
} *Polynomial;
```

其中，co 表示每一项的“系数”，ex 表示每一项的“指数”，next 为指向下一个结点的指针。我们规定：“系数”为0的项无需存储；各个项在链表中按“指数”递增存放；单链表没有头结点。例如，多项式 $A(x) = 2 + 4x^3 - x^6 + 5x^7$ 和 多项式 $B(x) = x^3 + 2x^7 - 2x^8$ 可表示为：



现要求设计一个尽可能高效的算法，实现两个多项式的加法，并返回相加之后的结果。要求：

1）给出算法的基本设计思想。

2）根据设计思想，采用C或C++语言描述算法，关键之处给出注释。

3）说明你所设计算法的时间复杂度和空间复杂度。

> 【参考答案】
>
> 1）算法思想：
>
> 每个多项式的各个项，按照指数递增的次序存放在单链表中。两个多项式相加，可以将相加的结果合并到一个链表中。
>
> 可设置两个指针 p、q，分别用于遍历 A(x)、B(x) 的各个结点
>
> 若当前 p、q 所指两个结点的“指数 ex” 相等，则，将 p、q 的系数相加，并让 p 指向 A(x) 的下一个结点，q 指向 B(x) 的下一个结点；
>
> 若当前 p 的“指数 ex” 更小，则将 q 所指结点插入到 p 结点之前，保证指数更小的项在单链表中更靠前，再让 q指向 B(x) 的下一个结点；

若当前 p 的“指数 ex” 更大，则将 p 指针指向 A(x) 的下一个结点即可（两个多项式相加的结果保存在原来的单链表 A(x) 中）。

2）算法代码如下：

```
//a和b两个多项式相加，相加的结果合并到a
int Addition (Polynomial &a, Polynomial &b){
 if (a == NULL || b == NULL)
     return 0;        //两个多项式不能为空

 struct Node *p=a, *q=b;       //p、q 两个指针遍历a、b两个单链表
 struct Node *pPre=NULL;       //pPre 用于记录 p 的前驱
 while (p!=NULL && q!= NULL) {
     if (p->ex < b->ex) {            //p结点的指数更小
         pPre = p;
         p = p->next;
     } else if (p->ex > q->ex) {      //q结点的指数更小，将q插入到p之前
         //单链表中，实现前插操作不方便，可以先后插，再交换数据
         struct Node * s = q;
         q = q->next;
         s->next = p->next;
         p->next = s;
         //交换两个结点的数据
         int coTemp = s->co;
         int exTemp = s->ex;
         s->co = p->co;
         s->ex = p->ex;
         p->co = coTemp;
         p->ex = exTemp;
         //p指向下一个待合并结点
         pPre = p;
         p=p->next;
     } else {           //p和q所指结点的指数相同，则统一合并到p
         p->co += q->co;
         pPre = p;
         p = p->next;
         struct Node * s = q;
         q = q->next;
         free(s);
     }
 }
 if (p==NULL) {  //p==NULL，说明多项式b中还有一些项没有合并
     pPre->next = q;
 }
}
```

3）若两个多项式的长度分别是 m、n，则

时间复杂度 = O(m+n)

> 空间复杂度 = O(1)

二、已知一棵非空二叉树 T 高度为h，结点总数为n，采用二叉链表存储结构，结点的数据结构定义如下：

```
//二叉树的结点（链式存储）
typedef struct BiTNode{
 char data;                          //数据域
 struct BiTNode *lchild,*rchild;   //左、右孩子指针
}BiTNode,*BiTree;
```

请设计一个算法，求树 T 的宽度（即具有结点数最多的那一层的结点个数），要求：

1）给出算法的基本设计思想。

2）根据设计思想，采用C或C++语言描述算法，关键之处给出注释。

> 【参考答案】
>
> 1）算法思想：
>
> 由题目已知二叉树高度为H，因此可设置用于统计的数组 width[H]，其中，width[i] 表示第 i 层共有几个结点（不妨规定层数从0开始）；
>
> 使用二叉树前序遍历的思想，遍历的同时，判断结点所处层数 i，令 width[i]++；
>
> 遍历完所有结点后，找到 width 数组中最大的值，即为二叉树的宽度。
>
> 2）算法代码如下：

```
//先序遍历，同时统计各层结点总数
void PreOder(BiTree T, int level, int width[]){
 if (T == NULL)  return;
 width[level]++;      //根据当前结点所处层数，累加该层结点总数
 PreOder(T->lchild, level + 1, width);       //遍历左子树
 PreOder(T->rchild, level + 1, width);       //遍历右子树
}

//求树的宽度
int treeWidth (BiTree T) {
 int width[H];    //定义一个数组，用于统计各层的结点总数
 for (int i=0; i<H; i++)
     width[i]=0;  //数组初始化

 PreOder(T, 0, width);    //前序遍历二叉树，同时统计各层结点总数

 int maxWidth = 0;        //找到最大宽度
 for (int i=0; i<H; i++){
     if(width[i]>maxWidth)
         maxWidth =width[i];
 }
```

```
  return maxWidth;          //返回树的宽度
}
```

注：本题为王道书 5.3.3 大题 14 题，王道书用层序遍历实现，略麻烦。平时训练可以用层序遍历，但考试中只要题目没有特殊要求，就尽量用前/中/后序递归遍历实现。

三、一个长度为n的升序整数序列S中，只有常数K（K的值已知）出现了若干次，其他数最多都只出现一次。试设计一个在时间和空间两方面都尽可能高效的算法，返回 K 出现的次数。

（1）给出算法的基本设计思想。

（2）根据设计思想，采用C或C++语言描述算法，关键之处给出注释。

（3）说明你所设计算法的时间复杂度和空间复杂度。

【参考答案】

次优解：枚举，遍历数组统计k出现的次数

最优解：折半查找两次

次优解：枚举，遍历数组统计k出现的次数

1）算法思想：循环遍历数组，统计数组中k出现的次数。

2）算法如下：

```
int ans(int A[], n, k){
  int m=0;                      //m统计k出现的次数
  for (int i=0; i<n; i++)
    if (A[i]==k)
      m++;
  return m;
}
```

3）时间复杂度：O(n)　　空间复杂度：O(1)

最优解：折半查找两次

1）算法思想：要求出k出现的次数，可以折半查找k-1和k+1的位置，他们之间就是k出现的次数。k-1和k+1最多只会出现一次，通过折半查找k-1和k+1的位置，然后将下标相减就得到k出现的次数。

2）算法如下：

```
int Binary_Search(int A[], int L, int R, int x){
  int mid;
  while (L<R){                  //如果L>R则范围错误
    mid=(L+R)/2;                //mid取中间数，向下取整
    if (x<=A[mid])
```

```
            R=mid;
        else L=mid+1;          //更新查找范围
    }
    return L;                  //返回数组下标L
}

//ans函数返回数组S中，常数k出现的次数
int ans(int S[], int n, int k){
    int L=Binary_Search(int A[], 0, n-1, k-1);
    if (A[L]<k)
        L++;                   //L是K出现的最小下标
    int R=Binary_Search(int A[], 0, n-1, k+1);
    if (A[L]>k)
        R--;                   //R是K出现的最大下标
    return R-L+1;
}
```

3）时间复杂度：O(logn)　　空间复杂度：O(1)

应用题

四、请回答以下问题：

（1）队列在顺序存储时的“假溢出”现象指什么？

（2）简述一种可行的假溢出的解决方法。

（3）若用数组q[1...m]表示队列，队列头指针front、尾指针rear 的初值均为 1，基于（2）中的方法，如何求队列的当前长度？如何判定队空？如何判定队满？

【北京邮电大学803 2018年】

考点：队列的应用

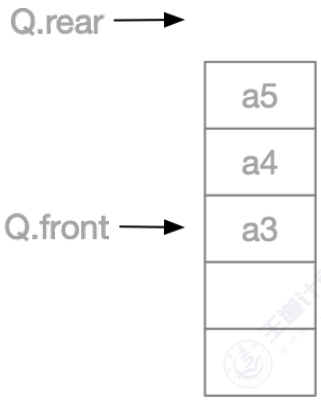
【参考答案】

（1）

对于顺序存储的队列，执行入队和出队操作时，头、尾指针只增大不减小，致使出队元素的空间无法被重新利用。因此，尽管队列中实际元素个数可能远小于数组大小，但可能由于尾指针已超出数组下标的界限而不能执行入队操作。该现象称为“假溢出”。

（咸鱼注：有的简答题，如果你觉得文字表述不够清晰，可能会导致老师扣你分，那么可以主动配上示例图，比如加上后边这段...当然，如果你觉得文字表达已经OK了，完全可以不画图）

如下图所示，是数组大小为5的顺序队列，队尾指针超出了数组范围，尽管此时仍有未使用的空间，但无法入队，此时发生“假溢出”。



（2）

解决假溢出的方法，可以采用循环队列。入队操作时，若队列不满，则将新元素插入队尾指针 rear 所指位置，并令 rear = (rear+1)%m；出队操作时，若队列不空，则令队头指针 front 所指元素出队，并令 front = (front+1)%m。其中，m为队列总长度。

（3）

队空条件：front==rear

队满条件：front==(rear+1)%m

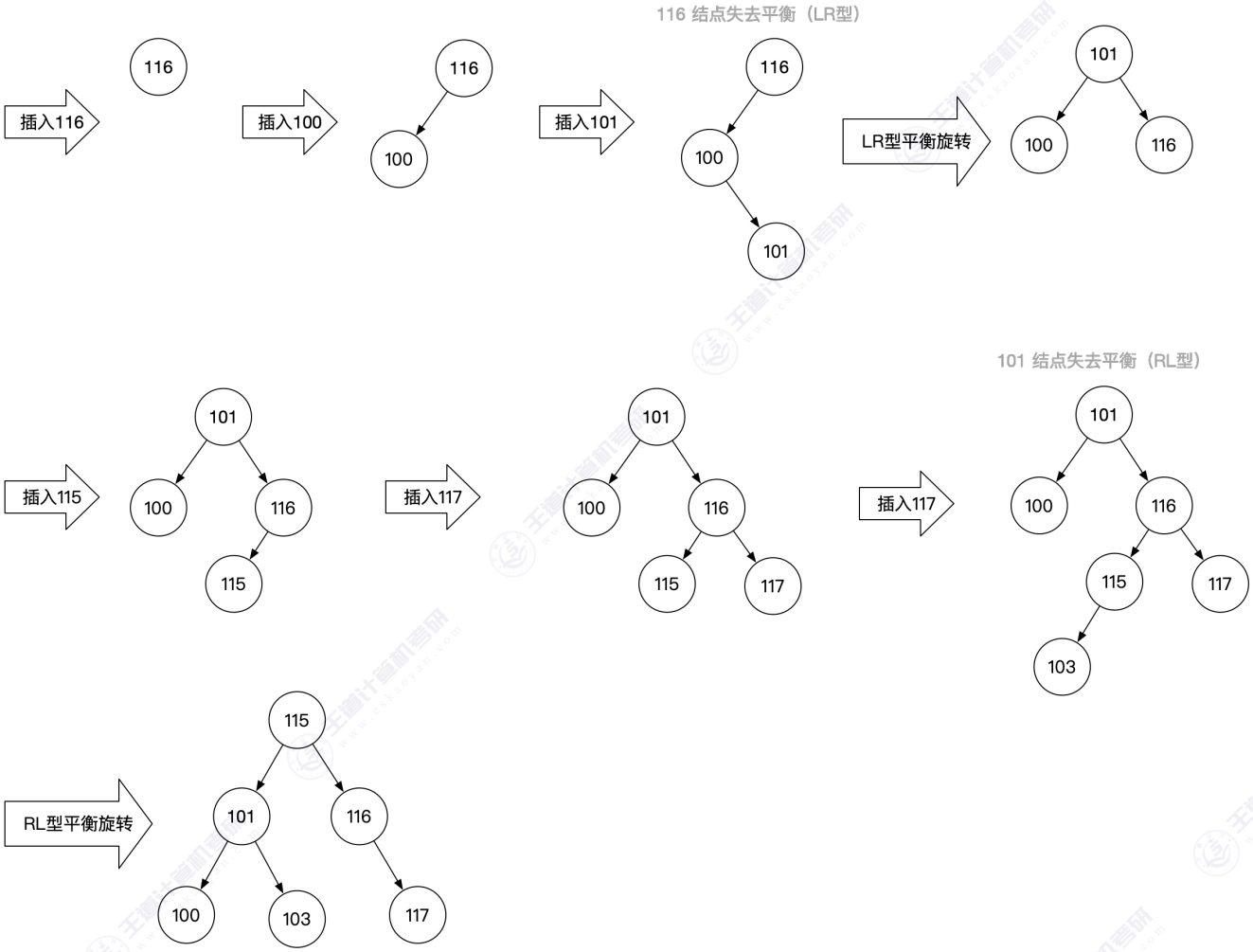
队列长度：length = (rear-front+m)%m

五、将关键字序列 {116, 100, 101, 115, 117, 103} 依次插入到初始为空的平衡二叉树 （AVL树），给出每插入一个关键字后的平衡树，并说明其中可能包合的平衡调整步骤（即：先说明是哪个结点失去平衡，然后说明做了什么平衡处理）；然后分别给出前序、中序和后序遍历该二叉树的输出结果。【中国科学院大学863 2019年】

考点：平衡二叉树

【参考答案】

各关键字的插入过程如下所示：



对该二叉树的遍历结果如下

前序遍历：115，101，100，103，116，117

中序遍历：100，101，103，115，116，117

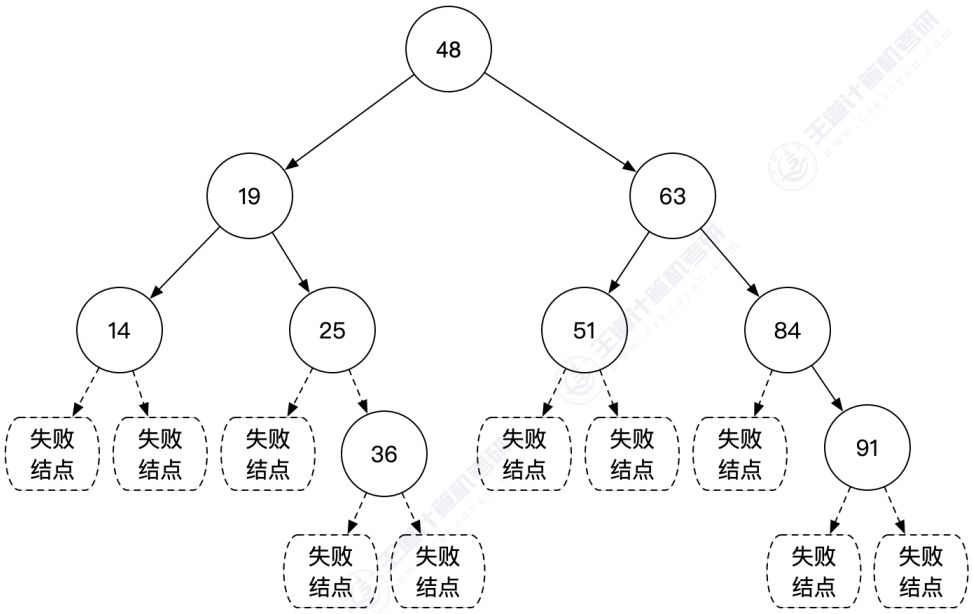
后序遍历：100，103，101，117，116，115

六、设一组有序的记录关键字序列为 (14,19,25,36,48,51,63,84,91），运用二分法进行查找，请给出二分查找的判定树，以及查找关健字 84 时的比较次数，并计算出查找成功时的平均查找长度。【华中科技大学834 2019年】

考点：查找算法的分析与应用（二分查找）

【参考答案】

二分查找的判断树如下：



查找成功时的平均查找长度 $ASL_{成功}=(1+2\times2+3\times4+4\times2)/9=25/9$