实变函数讲稿

2010 年 3 月 29 日

目录

第一章　集和直线上的点集

1.1　集和集的运算

1.1.1　集的概念

在现代数学中，集的概念已被普遍地采用. 通常把具有某种特定性质的具体的或抽象的对象的全体称做集合，或简称为集，其中的每个对象称为该集合的元素.

例如，在代数学中，群、环、域等都是集合，这种集的各个元素之间具有一定的代数关系；在几何学中，直线、曲线、曲面等都可以看作是由点所组成的点集；数学分析中的实数集、连续函数集、某函数的定义域等都是常用的集.

集是数学的一个基础概念. 集论是研究集的一般性质的，属于数学基础的一个分支. 关于集和元素的严谨的定义属干集论的研究范围，这里不予涉及.

以后我们常用大写字母$A, B, X, Y, \cdots$表示集，而用小写字母$a, b, x, y, \cdots$表示元素.

对于一个集A来说，某一对象x或者是集A的元素这时，我们说x属于A，记为$x \in A$；或者x不是集A的元素即x不属于A，记为$x \notin A$；二者必居其一.

当集A是具有某种性质P的元素全体时，我们往往用下面的形式来表示A:

$$A = \left\{x\colon x\text{具有性质}P\right\}$$

例如方程$x^2 - 1 = 0$的解x的全体组成的数集是$\{x\colon x^2 - 1 = 0\}$. 如果能够明确写出集A的所有元素，也可以都列举在大括号里面，例如上面这个数集就是$\{1, -1\}$. 有时我们也把集$\left\{x\colon x \in E, x\text{有性质}P\right\}$写成$E(x\text{有性质}P)$. 例如，设$f(x)$是$E$上的一个函数，$c$是一个实数，我们把集$\{x\colon x \in E, f(x) \le c\}$写成$E(f \le c)$.

下面我们研究集的关系.

如果集A中的元素都是集B的元素，那末称A是B的子集，记做$A \subset B$，读做A包含在B中，或记做$B \supset A$，读作B含有A. 显然，$A \subset A$. 有时为研究问题的需要，我们引入不含有任何元素的集合，称为空集，记为$\emptyset$. 例如$\left\{x\colon x\text{是实数且}x^2 + 1 = 0\right\}$是一空集。我们规定空集是任何集的子集. 如果$A \subset B$，而$B$中确有元素$b$不属于$A$，称$A$是$B$的真子集. 例如$A$是平面上以正有理数做半径的圆的全体，$B$是平面上所有圆的全体，那末$A$是$B$的一个真子集.

如果$A\subset B$，而且又有$B\subset A$，这时A,B由相同的元素组成，就是同一集，称A等于B(或B等于A)，记做$A=B$(或$B=A$). 例如$\{x\colon x^2-1=0\}=\{1,-1\}$.

1.1.2　集的运算

设A,B是两个集，由集A和集B的一切元素所组成的集称做A和B的并集，简称为“并”，记做$A\cup B$；所有既属于集A又属于集B的元素组成的集，称为A和B的交集，也简称为“交”，记做$A\cap B$.

完全类似地可以定义任意个集的并集和交集. 设$\{A_\alpha\colon \alpha\in N\}$是任意一组集，其中$\alpha$是集的指标，它在某个指标集$N$中变化，由一切$A_\alpha(\alpha\in N)$的所有元素所组成的集称做这组集的并集，记做$\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$；同时属于每个集$A_\alpha(\alpha\in N)$的一切元素所组成的集，称做这组集的交集，记做$\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$.

应该注意，由若干个集构成并集时，同时是两个或两个以上的集所公有的元素在并集中只算做一个. 另外，当$A\cap B=\emptyset$时，我们又简称A与B不交. 当$A\cap B\neq\emptyset$时，简称A与B相交.

不难证明“并”、“交”运算具有下面一些性质：

1. $A\cup A=A, A\cap A=A$(并、交的幂等性);

2. $A\cup\emptyset=A$(空集是并的零元);

3. $A\cup B=B\cup A$(并的交换律);

   $A\cap B=B\cap A$(交的交换律);

4. $(A\cup B)\cup D=A\cup(B\cup D)$(并的结合律);

   $(A\cap B)\cap D=A\cap(B\cap D)$(交的结合律);

5. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$(分配律)

6. 如果$A\subset B$，那末对任意的集C成立着

   $A\cup C\subset B\cup C, A\cap C\subset B\cap C$(并、交的保单调性)

在集合之间，除了上面的“并”和“交”以外，我们再引入“差”：设A,B为两个集,由集A中不属于B的那些元素全体所组成的集，称做集A减集B的差集，记做$A\setminus B$(注意，这里并不要求$A\supset B$). 当$B\subset A$时，称差集$A\setminus B$为B关于A的余集，记做C_AB. 当我们只讨论某个固定集A的一些子集B时，常简记$A\setminus B$为B^c，并称它是B的余集.

“差”运算(或称求余运算)，显然有下面的性质：

7. 如果$A\subset B$，那末$A\setminus B=\emptyset$;

8. $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$(“差”分配律);

9. $(C\setminus A)\setminus B=C\setminus(A\cup B)$;

10. 如果$A\subset C,B\subset C$，那末$A\setminus B=A\cap B^c$.

    我们称集$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$为集$A$和集$B$的对称差，记做$A\triangle B$.

11. $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$。

以上这些性质都可以从集的“包含”、“相等”、“并”、“交”以及“差”的定义推导出来，其中有些还可以推广到任意个集的一般情况，这里不一一证明. 图形可以帮助我们较直观地理解和记忆一些概念，或者启发我们思考问题，是学习中的一种有效工具，以后将经常采用. 但是必须指出，决不能把图形的示意看成定义，或者定理的证明. 因为定义必须要用确切的文字叙述，而定理的证明是必须经过严密的逻辑论证.

下面介绍两个有用的公式–de Morgan关系式:

设S是任意一个集，$\{A_\alpha\colon\alpha\in N\}$是任一族集，那末有

12.
$$S\setminus\bigcup_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in N}(S\setminus A_\alpha)\tag{1.1}$$

13.
$$S\setminus\bigcap_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in N}(S\setminus A_\alpha)\tag{1.2}$$

用文字叙述，就是：并集(关于S)的余集等于每个集(关于S)的余集的交集(1.1)，而交集(关于S)的余集等于每个集(关于S)的余集的并集(1.2).

现在来证明de Morgan关系式(1.1)和(1.2).

首先，(1.1)式左边是属于S而不属于任何一个$A_\alpha(\alpha\in N)$的元素所成的集，因而它属于每一个集$S\setminus A_\alpha(\alpha\in N)$，所以左边是右边的子集；完全类似地可以说明右边也是左边的子集. 这样，(1.1)式两边的集相同. 类似地可以证明(1.2)式，希望读者自己进行分析和论证. 但为帮助读者熟悉论证和表达的方法，我们把证明过程详细写出来. 这是用集论方法论证时常用的方法. 读者可以仿此证明上面各条性质(1-11).

证明： 现证(1.1). 记$S\setminus\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$为$P$，$\bigcap\limits_{\alpha\in N}(S\setminus A_\alpha)$为$Q$. 这样，只要证明$P=Q$。

设$x\in P$，按定义有$x\in S$而且$x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$. 因此，对每个$\alpha\in N,x\notin A_\alpha$，因而$x\in S\setminus A_\alpha(\alpha\in N)$. 即$x\in Q$. 这就是说，凡$P$中的元素都属于$Q$，所以$P\subset Q$.

反过来，设$x\in Q$，那末对任何$\alpha\in N$有$x\in S\setminus A_\alpha$，即$x\in S$，而且$x\notin A_\alpha(\alpha\in N)$，因此$x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，所以$x\in S\setminus\bigcup_{\alpha\in N}A_\alpha=P$，这就是说，凡$Q$中的元素必属于$P$，所以$Q\subset P$. 综合起来就得到$P=Q$

(1.2)的证明是类似的，略去. QED.

强调指出，(1.1)，(1.2)式中并不要求S包含每个$A_\alpha(\alpha\in N)$.

1.1.3　上限集与下限集

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是任意一列集. 由属于上述集列中无限多个集的那种元素全体组成的集称为这一列集的上限集，记做$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$；而由属于集列中从某个指标$n_0(x)$(这个指标不是固定的，与元素$x$有关)以后所有集$A_n$ 的那种元素x全体(即除去有限多个集外的所有集A_n都含有的那种元素)组成的集称为这一列集的下限集，记做$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 显然，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{1.3}$$

例 1.1.1 设$A_n(n=1,2,\cdots)$是如下一列点集:

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \left[0, 2-\frac{1}{2n+1}\right], \quad n=0,1,2,\cdots \\ A_{2n} &= \left[0, 1+\frac{1}{2n}\right], \quad n=1,2,\cdots \end{aligned}$$

我们来确定$\{A_n\}$的上限集和下限集.

因为$A \subset [0,2)(n=0,1,2,\cdots)$，所以$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0,2)$(其实是$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = [0,2)$). 根据(1.3)，只要考察$[0,2)$中点哪些属: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$即可. 显然，$[0,1] \subset A_n(n=0,1,2,\cdots)$，所以$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \supset [0,1]$. 而对于$(1,2)$中的任何点$x$，必存在自然数$n_0(x)$，使当$n > n_0(x)$时，

$$1+\frac{1}{2n} < x \leq 2-\frac{1}{2n+1}$$

即当$n > n_0(x)$时，$x \notin A_{2n}$但$x \in A_{2n+1}$. 换句话说，对于开区间$(1,2)$中的x，具有充分大奇数指标的集都含x，从而$\{A_n\}$中有无限多个集含有x，而充分大的偶数指标的集都不含有x，即$\{A_n\}$中不含有x的集不是有限多个. 因此，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,2), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,1]$$

例 1.1.2 设$A_n = \left[0, 1+\frac{1}{n}\right](n=1,2,\cdots)$. 类似于例1.1.1中的讨论，立即得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,1)$$

集列$\{A_n\}$的上限集与下限集都可以用集列$\{A_n\}$的“并”、“交”运算表示出来. 它们的表达式是:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1.4}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1.5}$$

证明： 现在证明第一式：记$P = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n, Q = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 对于$P$中的任何元素$x$，由上限集的定义，$x$属于$\{A_n\}$中无限个集，不妨设$x$同时属于集$A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots (n_k < n_{k+1}, k = 1, 2, \cdots)$. 因此，对任何自然数$n$当$n_k > n$时,$x \in A_{n_k} \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$，所以$x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$，我们得到$P \subset Q$.

反过来，在Q中任意取一个元素y，今证明在$\{A_n\}$中必有无限个集同时含有y. 事实上，取$n = 1$，因为$y \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$，所以必存在自然数$n_1$使得$y \in A_{n_1}$；其次，又因为$y \in \bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$，所以必存在自然数$n_2 > n_1$，使得$y \in A_{n_2}$；这样的手续一直进行下去，得到一列自然数$\{n_k\}, n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，而集$A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots A_{n_k}, \cdots$等都含有元素$y$，因此，$y \in P$. 于是又有$Q \subset P$. 总起来得到$P = Q$.

读者可以完全类似地证明第二式. QED.

如果从有关集本身所具有的含义去理解，等式(1.4)的成立是很明显的. 事实上，集$B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$正是使命题“集列$\{A_k\}$中从第$n$号以后必有集包含它”成立的元素全体，而$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$是使命题“一切$B_n (n = 1, 2, \cdots)$都包含它”成立的元素全体. 因此，集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$就是使命题“对任何$n$，集列$\{A_n\}$中必存在第$n$号以后的集包含它”成立的元素全体. 显然，命题“对任何n，集列$\{A_m\}$中必存在第n号以后的集包含它”和命题“集列$\{A_m\}$中有无限个集包含它”等价，所以，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，用同样方式可以考察等式(1.5).

由de Morgan关系容易得到:

14. 设$\{A_n\}$是任意一列集，S是任意一个集，那来

$$S \setminus \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} (S \setminus A_n) \tag{1.6}$$

$$S \setminus \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} (S \setminus A_n) \tag{1.7}$$

如果集列$\{A_n\}$的上限集和下限集相等:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

那末就说集列$\{A_n\}$收敛. 这时，称$A = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$是集列$\{A_n\}$ 的极限(或极限集)，记为$A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

如例1.1.2中的集列$\left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] (n = 1, 2, \cdots)$就是收敛的，它的极限是$[0, 1]$.

定义 1.1.3 (单调集列) 如果集列$\{A_n\}$满足

$$A_n \subset A_{n+1}(A_n \supset A_{n+1}), \quad n=1,2,\cdots$$

那末称$\{A_n\}$是单调增加(减少)集列. 单调增加与单调减少的集列统称为单调集列.

容易证明: 单调集列是收敛的.

如果$\{A_n\}$是单调增加的，那末

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

事实上，对任何$x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，必有某个$n_0$，使得$x \in A_{n_0}$但是$A_n \subset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，所以$x \in A_n(n \geq n_0)$，从而$x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$，即$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 再根据(1.3)，立即得到$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

类似地，如果$\{A_n\}$是单调减少的，可以证明

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

1.1.4 函数与集

设X是一个不空的集，如果f把X中的每个元素x都对应于一个实数(或复数)$f(x)$，我们便称f是定义在X上的实(或复)函数，有时也记为$f(\cdot)$. 和数学分析中完全类似，我们可以定义一般集上的两个函数f,g的和$f+g$、差$f-g$、积$f\cdot g$，以及绝对值函数$|f|$等，同样还可以定义函数列$\{f_n(x)\}$的收敛等等. 与过去唯一不同的只是现在的自变量x是在一般的集合X上变化，而不一定是在实数集或复数集中变化.

在实函数论中，利用集来分析函数性质时，常要用到下面类型的集. 当集E上的一个实函数f给定以后，对于任意给定的实数c，按第一段中所说的记号，我们记

$$E(f \geq c) = \{x \colon x \in E, f(x) \geq c\}$$
$$E(f > c) = \{x \colon x \in E, f(x) > c\}$$

等等，它们都是由f决定的，而且是与f有密切联系的集. 为了后面的需要，我们现在先让读者对这些集的性质、运算作一些了解和准备. 例如它们有如下一些关系式:

1. $E(f \geq c) \cup E(f < c) = E, \quad E(f \geq c) \cap E(f < c) = \emptyset$

2. $E(f > c) \cap E(f \leq d) = E(c < f \leq d)$

3. $E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})$(这里$c\geq 0$)

4.
$$E(f>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\geq c+\frac{1}{n}\right) \tag{1.8}$$

这些性质，读者无须记住它，重要的是要逐步熟悉这种处理方法.

证明： 我们证明等式(1.8). 当$x\in E(f>c)$时，$f(x)>c$，所以必有自然数n，使得$f(x)\geq c+\frac{1}{n}$，因此$x\in E(f\geq c+\frac{1}{n})$，即等式(1. 7)的左边的集包含在右边集中.

另一方面，如果$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f\geq c+\frac{1}{n})$，必然存在某个$n$，使$x\in E(f\geq c+\frac{1}{n})$，这时自然有$f(x)>c$，所以$x\in E(f>c)$. 也就是说(1.8)右边的集也包含在左边集中. 所以(1.8)成立. QED.

设实函数列$\{f_n\}$有极限函数f，那末

$$E(f\leq c)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E(f\leq c+\frac{1}{k}) \tag{1.9}$$

证明： 如果$x\in E(f\leq c)$，那末对任何自然数$kf(x)<c+\frac{1}{k}$. 因为$f(x)$是$f_n(x)$的极限，所以必有自然数N，使得当$n\geq N$时，$f_n(x)<c+\frac{1}{k}$. 这就是说，当$n\backslash N$时，$x\in E(f_n[c+\frac{1}{k})$. 即

$$x\in\varliminf_{n\to\infty}E(f_n[c+\frac{1}{k})$$

因此(1.9)式左边的集包含在右边的集中.

反过来，如果$x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty}E(f_n\leq c+\frac{1}{k})$，那末对一切$k$，$x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}E(f_n\leq c+\frac{1}{k})$，这时必有自然数$N_k$，使得当$n\geq N_k$时，$x\in E(f_n\leq c+\frac{1}{k})$，即$f_n(x)\leq c+\frac{1}{k}$. 令$n\to\infty$，因而对一切自然数$k, f(x)\leq c+\frac{1}{k}$. 令$k\to\infty$，就得到$f(x)\leq c$. 这就是$x\in E(f\leq c)$. 因此(1.9)的右边含在左边集中. 所以(1.9)成立. QED.

注意(1.9)式右边的每个集改为$E(f<c+\frac{1}{k})$也是成立的. 而左边的集却不能改为$E(f<c)$.

象这样由函数所产生的集的关系式可以举出很多，读者自己也可以列举并加以证明. 用点集分析的方法来研究函数时，离不开这些重要的集以及它们的关系式. 反过来，有时也常会遇到要用函数来研究集的性质. 下面的特征函数便是这方面的一个重要例子.

1.1.5 集的特征函数

设X是一个固定的非空集，又设A是X的一个子集. 作X上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, \text{当} x\in A\\ 0, \text{当} x\notin A\end{cases}$$

称$\chi_A(x)$为集A的特征函数. 显然子集A和它的特征函数之间的对应是一对一的.

特征函数与集之间有下面一些常见的重要等价关系:

1. $A = X$等价于$\chi_A(x) \equiv 1$; $A = \emptyset$等价于$\chi_A(x) \equiv 0$.

2. $A \subset B$等价于$\chi_A(x) \le \chi_B(x)$;

   $A = B$等价于$\chi_A(x) = \chi_A(x)$.

3. $$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha \in N} A_\alpha}(x) = \max_{\alpha \in N} \chi_{A_\alpha}(x), \quad \chi_{\bigcap\limits_{\alpha \in N} A_\alpha}(x) = \min_{\alpha \in N} \chi_{A_\alpha}(x)$$

4. 设$\{A_n\}$是一列集, 那末

$$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x) \tag{1.10}$$

$$\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x) \tag{1.11}$$

5. 设$\{A_n\}$是一列集, 那末极限$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$存在的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x)$存在, 而且当极限存在时

$$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty} A_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x)$$

证明: 性质1、2、3的证明留给读者完成. 我们只证明4的第一式(1.10)((1.11)可类似地证明).

如果$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = 1$, 那末$x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 这就是说序列$\{A_n\}$中必有无限个集包含$x$, 从而数列$\{\chi_{A_n}\}(x)$中必有无限个是1. 因此, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x) = 1$. 把上述推导的顺序反过来也就证明了: 如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x) = 1$, 那末$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = 1$. 所以使函数$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)$取值为1的元素与使$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x)$取值为1的元素一致. 但函数$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x)$的值不取1便取0, 因此$X$中使这两个函数分别取值为0的元素也一致. 所以这两个函数完全相等.

QED.

习题

1. 证明:

   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. 证明:

   (a) $A \setminus B = A \setminus A \cap B = (A \cup B) \setminus B$

   (b) $A \cap (B \setminus C) = A \cap B \setminus A \cap C$

(c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (A \cup C)$

(d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

(e) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = A \cap C \setminus (B \cup D)$

(f) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) \supset (A \cup C) \setminus (B \cup D)$

(g) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) \subset (A \cup C) \setminus (B \cap D)$
(举例说明上面两个包含号$\supset$与$\subset$不能换为等号)

(h) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

3. (a) 等式$(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$成立的充要条件是什么?

(b) 证明: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

4. 证明:

(a) $\left(\bigcup\limits_{\alpha \in N} A_\alpha\right) \setminus B = \bigcup\limits_{\alpha \in N} (A_\alpha \setminus B)$

(b) $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in N} A_\alpha\right) \setminus B = \bigcap\limits_{\alpha \in N} (A_\alpha \setminus B)$

5. 设$\{A_n\}$是一列集,

(a) 作$B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right)(n > 1)$. 证明$\{B_n\}$是一列互不相交的集,而且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

(b) 如果$\{A_n\}$是单调减少的集列,那末

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

并且其中各项互不相交.

6. 设$A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{n}\right), A_{2n} = (0, n), n = 1, 2, \cdots$, 求出集列$\{A_n\}$的上限集和下限集.

7. 设$\{f_n\}$是区间$E = [a, b]$上的实函数列

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots$$

又设$f_n(x)$具有极限函数$f(x)$. 证明对任何实数c,

$$E(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c)$$

8. 证明:

   (a) $A\triangle B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

   (b) $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$

   (c) $\chi_{A\triangle B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$

   (d) $A\triangle B=\{x\colon \chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}$

9. 设$f(x)$是E上的一个函数，c是任何实数，证明

   (a) $E(f>c)\cup E(f\leq c)=E,\quad E(f\geq c)=E(f>c)\cup E(f=c)$

   (b) $E(f>c)\cap E(f=c)=\emptyset$

   (c) 当$c<d$时，$E(f>c)\cap E(f[d)=E(c<f[d)$

   (d) 当$c\geq 0$时，$E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\cup E(f<\sqrt{c})$

   (e) 当$f\geq g$时，$E(f>c)\supset E(g>c)$

10. 设集E上的实函数列$\{f_n\}$具有性质$f_1(x)\leq f_2(x)\leq\cdots\leq f_n(x)\leq\cdots$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 证明

$$E(f\leq c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leq c)=\lim_{n\to\infty}E(f_n\leq c)$$

11. 设f是定义在集E上的实函数，c是任何实数，证明:

   (a) $E(c\leq f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(c\leq f<c+n)$

   (b) $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(-n\leq f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f<n)$

   (c) $E(f<c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f\leq c-\frac{1}{n})$

12. 设X是固定的集，$A\subset X,\chi_A(x)$是集A的特征函数，证明:

   (a) $A=X$等价于$chi_A(x)\equiv 1$, $A=\emptyset$等价于$\chi_A(x)\equiv 0$;

   (b) $A\subset B$等价于$\chi_A(x)\leq\chi_B(x$

   $A=B$ 等价于$\chi_A=\chi_B$;

   (c) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$

   $\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$

   (d) 设$\{A_n\}$是一列集. 那末极限$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$存在，而且当极限存在时，有

$$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$$

13. 证明“de Morgan关系式”

$$S \setminus \bigcap_{\alpha\in N} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in N}(S \setminus A_\alpha)$$

14. 设F, E_1及E_2是X的任意三个子集，记$F_1 = F\cap(E_1\cap E_2^c)^c$,证明:

(a) $F_1\cap E_1\cap E_2 = F\cap E_1\cap E_2$

(b) $F_1\cap E_1\cap E_2^c = \emptyset$

(c) $F_1\cap E_1^c\cap E_2 = F\cap E_1^c\cap E_2$

(d) $F_1\cap E_1^c\cap E_2^c = F\cap E_1^c\cap E_2^c$

1.2 映照与势

作为数学分支的集论本身，它的内容是相当丰富的，介绍集论的基本内容不是本书的任务. 但为了本书后面的需要，我们将在本节中对集论中常常被用到的最初步的势的知识作一介绍.

1.2.1 映照

前面我们已叙述过一般集上的函数概念. 我们现在介绍比函数概念更一般的集之涧的另一种关系对应关系，它是函数关系的推广.

定义 1.2.1 设A, B是两个非空集，如果存在一个规则φ，使得对于A中任何一个元素x，按照规则φ，在B中都有一个确定的元素y 与x对应，记为

$$\varphi\colon x\mapsto y$$

那末称这个规则φ是从A到B*(中)*的映照*(也称为映射)*，

元素y 称做元素x*(在映照φ下)*的象，记做$y=\varphi(x)$.

对于任一个固定的y，称适合关系$y=\varphi(x)$的x全体为y*(在映照φ之下)*的原象，记为$\varphi^{-1}(y)$.

集A称做为映照φ的定义域，记为$\mathfrak{D}(\varphi)$.

设C是A的子集，C中所有元素x的象y的全体记为$\varphi(C)$ ，称它为集C的象，称$\varphi(A)$为映照φ的值域，常记为$\mathfrak{R}(\varphi)$. 有时也常把从$\mathfrak{D}(\varphi)=A$到$\mathfrak{R}(\varphi)\subset B$的映照$\varphi$写成

$$\varphi\colon A\mapsto B$$

如果$\varphi\colon A\mapsto B, D\subset B$，那末称集$\{x\colon \varphi(x)\in D, x\in\mathfrak{D}(\varphi)\}$为$D$ *(在映照φ之下)*的原象，记为$\varphi^{-1}(D)$.

如果$\varphi(A)=B$，就称φ是A到B上的映照，又称为A到B的满射.

特别地，如果值域B是一数集(实数或复数集)，这时映照φ就是前面说的定义在集A上的函数. 如果A,B都是数集，它们之间的映照就是数学分析中所研究的函数了. 由此可见，映照概念实在就是函数概念的推广.

映照是一个相当普遍的概念，除了普通的函数是一种映照之外，其它的，如定积分可以看作可积函数集到数集中的映照，求导函数的运算(微分)可看作可微分函数集到函数集中的映照，而线性变换就是n维向量空间到n维向量空间的映照；又如代数学中的同态映照、同构映照等. 从更广泛的意义上说，任何一种运算也可以看作是映照. 事实上，如实数的加法运算“+”，就可视为平面点集到直线点集上的一个映照φ: $(a,b)\mapsto a+b$. 再看几个映照的具体例子.

例 1.2.2 设$A=(-\infty,\infty), B=(-\infty,\infty)$，符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

是A到B中的映照.

例 1.2.3 设A是平面上所有圆组成的集合，B是平面上所有点的全体，令φ表示圆与其圆心之间的对应，φ就是A到B上的映照.

例 1.2.4 设D^2是直线上的二次可微函数全体，B是直线上的函数全体，a,b,c是常数，定义D^2到B中的映照φ如下:

$$\varphi\colon f(x)\mapsto a\frac{d^2}{dx^2}f(x)+b\frac{d}{dx}f(x)+cf(x),\quad f\in D^2$$

当$a\neq 0$时, 称φ为二阶微分算子，简记为$\varphi=a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}+c$.

例 1.2.5 设E是n维欧几里得空间，(k_{ij})是给定的n阶方阵，作E^n到E^n中的映照φ如下:

$$\varphi\colon x\mapsto Kx,\quad x\in E^n$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 又

$$y=\varphi(x)=Kx=\left(\sum_{j=1}^n k_{1j}x_j,\sum_{j=1}^n k_{2j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^n k_{nj}x_j\right)$$

例 1.2.6 设$C[0,1]$是区间$0\leq x\leq 1$上所有连续函数全体，E^1是直线$-\infty<x<\infty, x_0$是$[0,1]$中的一个定点，作映照

$$\varphi\colon f\mapsto f(x_0),\quad f\in C[0,1]$$

则φ就是$C[0,1]$到E^1上的映照.

1.2.2 映照的延拓

映照和它的定义域有关. 在小范围有意义的映照, 在较大的范围内未必有意义.

定义 1.2.7 设φ,ψ分别是定义域$\mathfrak{D}(\varphi),\mathfrak{D}(\psi)$到$B$中的映照, 如果$\mathfrak{D}(\varphi)\subset\mathfrak{D}(\psi)$, 而且对于$\mathfrak{D}(\varphi)$中的每个元素$x$成立着

$$\psi(x)=\varphi(x),\quad \forall x\in\mathfrak{D}(\varphi)$$

即ψ与φ在$\mathfrak{D}(\varphi)$上一致, 就称映照ψ是映照φ在$\mathfrak{D}(\psi)$上的延拓, 记成$\varphi\subset\psi$, 这时称φ是ψ在$\mathfrak{D}(\varphi)$上的部分或限制, 记为$\varphi=\psi|_{\mathfrak{D}(\varphi)}$.

例 1.2.8 设$f(x)=sinx, 0\le x\le\pi$; 又设$g(x)=|sinx|,-\infty<x<\infty$, 那末$g(x)$就是$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的延拓, 即$f=g|_{[0,\pi]}$.

例 1.2.9 设$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n,|z|<l,g(z)=\frac{1}{1-z},z\neq 1$. 解析函数$g(z)$就是$f(z)$的延拓.

完全类似地可将复合函数的概念拓广, 定义复合映照概念如下:

定义 1.2.10 设$\varphi_1\colon A\mapsto B,\varphi_2\colon B\mapsto C$, 作$A$到$C$的映照$\varphi$如下, 对任何$x\in A,\varphi(x)=\varphi_2(\varphi_1(x))$, 称$\varphi$是$\varphi_1,\varphi_2$的复合映照, 记$\varphi$ 为$\varphi_2\circ\varphi_1$.

1.2.3 一一对应

在各种映照之中, 我们要着重讨论一下一对一的映照.

定义 1.2.11 (可逆映照) 设φ是A到B中的映照, 若对每一个$y\in\mathfrak{R}(\varphi)$, A 中只有一个元素x适合$\varphi(x)=y$, 就说φ是可逆映照或一对一的映照(又称为单射). 换言之, 对A中任意两个元素x_1,x_2, 当$x_1\neq x_2$ 时, 必有$\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$, 那末$\varphi$就是可逆映照.

例如$(-\infty,\infty)$上的函数$\varphi(x)=\sin x,\psi(x)=x^2$都不是$(-\infty,\infty)$到$(-\infty,\infty)$中的可逆映照. 显然, 任何一个严格单调函数都可以看成它的定义域到值域中的可逆映照. 又如$(0,1]$上的函数

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

是$(0,1]$到$[0,1)$中的可逆映照.

定义 1.2.12 设φ是集A到集B上的可逆映照, 则称φ为A到B的一一对应(或双射).

换句话说，φ是A到B的一一对应意味着对于A中任何一个元素a，有唯一的$b=\varphi(a)\in B$，而且对B中每个元素b，必在A中有唯一的元素a，适合$\varphi(a)=b$.

例如上面的函数$g(x)$就只是$(0,1]$到$[0,1]$中的可逆映照，而不是$(0,1]$到$[0,1]$的一一对应。这是因为$[0,1]$上的点1找不到原象. 但$g(x)$却是$(0,1]$到$[0,1)$的一一对应. 其实，任何可逆映照φ一定是$\mathfrak{D}(\varphi)$到$\mathfrak{R}(\varphi)$的一一对应.

定义 1.2.13 (逆映照) 设φ为A到B的可逆映照:

$$\varphi\colon A=\mathfrak{D}(\varphi)\mapsto\mathfrak{R}(\varphi)\subset B$$

我们作$\mathfrak{R}(\varphi)$到$\mathfrak{D}(\varphi)$的映照ψ如下：如果

$$\varphi\colon x\mapsto y, x\in\mathfrak{D}(\varphi), y\in\mathfrak{R}(\varphi)$$

我们便令

$$\psi\colon y\mapsto x$$

由于φ是可逆的，根据可逆映照的定义，对于每一个y，与它相应的x是唯一的，因此ψ实现了从$\mathfrak{R}(\varphi)$到$\mathfrak{D}(\varphi)$上的映照，我们称ψ为φ的逆映照，记ψ为φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}\colon\mathfrak{R}(\varphi)\mapsto\mathfrak{D}(\varphi)$$

显然，$\mathfrak{D}(\varphi^{-1})=\mathfrak{R}(\varphi),\mathfrak{R}(\varphi^{-1})=\mathfrak{D}(\varphi)$.

因此可逆映照必有逆映照. 逆映照是反函数概念的拓广.

φ的逆映照用记号φ^{-1}，在集D的原象$\varphi^{-1}(D)$中也出现记号φ^{-1}，在今后发生混淆的地方，我们将在行文中交待φ^{-1}记号的具体含义.

例如，任何一个严格单调函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$可以看成映照$f(x)$的逆映照. 又如A是$[0,1]$上具有连续导函数而且在0 点其函数值为0的函数全体，φ是求导函数这个映照，即

$$\varphi\colon f(x)\mapsto\frac{d}{dx}f(x),\quad f(x)\in A$$

显然φ是A到$C[0,1]$的一一对应，而其逆映照就是求不定积分

$$\varphi^{-1}\colon g(x)\mapsto\int_0^x f(t)dt$$

设X是一固定集，$\mathfrak{M}$是X的子集的全体，$\mathfrak{N}$是定义在X上的特征函数的全体，作映照

$$\varphi\colon A\mapsto\chi_A,\quad A\subset X$$

它就是$\mathfrak{M}$到$\mathfrak{N}$之间的一一对应.

定义 1.2.14 (恒等映照) 设A是一个集，称集A到A上的映照

$$\varphi\colon x \mapsto x, \quad \forall x \in A$$

是A上的恒等映照.

显然，恒等映照是A到A的一一对应.

1.2.4 对等

现在用一一对应来建立两个集的对等概念. 对等概念是建立势的理论的基础.

定义 1.2.15 设A, B是两个集，如果存在一个A到B的一一对应φ，那末称集A与集B对等*(或相似)*，记为$A \overset{\varphi}{\sim} B$，或简记为$A \sim B$.

规定空集$\emptyset$和自身对等.

例如，奇数集$O = (1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots)$，偶数集$E = (2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots)$，自然数集$N = (1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$. 显然$\varphi_1\colon n \mapsto 2n, \varphi_2\colon 2n \mapsto 2n-1 (n = 1, 2, 3, \cdots), \varphi_2 \circ \varphi_1$分别是$N$到$E$，$E$ 到O，N到O的一一对应，因此它们彼此对等.

显然，对等关系“$\sim$”具有下面三个基本性质:

1. $A \sim A$(自反性);
2. 若$A \sim B$，则$B \sim A$(对称性);
3. 若$A \sim B, B \sim C$，则$A \sim C$(传递性).

由此可知，对等是一种等价关系(等价关系可参见1.3节).

此外，对等还有下面的一个性质，虽非基本，但很重要.

4. 设$\{A_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$, $\{B_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ 为两族集，Λ是指标集. 又设对每一个$\lambda \in \Lambda$，$A_\lambda \sim B_\lambda$，而且集族$\{A_\lambda\}$中任何两个集互不相交，即$A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset (\lambda \neq \mu, \lambda, \mu \in \Lambda)$，$\{B_\lambda\}$中任何两个集也互不相交，那末

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \sim \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

此性质读者不难自行证明.

前面已经说过，若φ是A到B中的可逆映照，φ未必是A到B 的一一对应，但φ实现A到$\mathfrak{R}(\varphi)$的一一对应. 因此A与B的子集$\mathfrak{R}(\varphi)$对等.

欲判断两集对等，常用下面的定理.

定理 1.2.16 (F.Bernstein，1898) 设A,B是两个集，如果A 对等于B的一个子集，B对等于A的一个子集，那末A与B对等.

证明： 由假设，存在A到B的某子集B_1上的一一对应φ_1，又存在B到A的子集A_1上的一一对应φ_2，因为$B_1 \subset B$，记$A_2 = \varphi_2(B_1)$。显然φ_2是B_1到A_2上的一一对应，即

$$A \overset{\varphi_1}{\sim} B_1 \overset{\varphi_2}{\sim} A_2 \quad (A_2 \subset A_1)$$

显然φ_1和φ_2的复合映照$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$实现了$A$到$A_2$上的一一对应。因为$A_1$是$A$的子集，$A_3 = \varphi(A_1)$是$A_2$的子集:

$$A_1 \overset{\varphi}{\sim} A_3, \quad (A_3 \subset A_2)$$

照这样逐步进行下去，我们得到一列的子集:

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

而在同一个映照φ之下，有

$$A \sim A_2 \sim A_4 \sim \cdots, \quad A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \cdots$$

这样我们可以将A分解为一系列互不相交的子集之和:

$$A = (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup D$$

此处$D = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$；同样地有

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \cdots \cup D$$

由于映照φ是一对一的，容易看出

$$\begin{gathered} A \setminus A_1 \overset{\varphi}{\sim} A_2 \setminus A_3 \\ A_2 \setminus A_2 \overset{\varphi}{\sim} A_3 \setminus A_4 \\ \cdots \\ A_n \setminus A_{n+1} \overset{\varphi}{\sim} A_{n+2} \setminus A_{n+3} \\ \cdots \end{gathered}$$

显然，我们可以将A, A_1的上述分解写成

$$
\begin{tikzcd}
A = D \arrow[d, equal] & \cup(A\setminus A_1) \arrow[dr, "\varphi"', "\sim"] & \cup(A_1\setminus A_2) \arrow[dl, equal] & \cup(A_2\setminus A_3) \arrow[dr, "\varphi"', "\sim"] & \cup(A_3\setminus A_4) \arrow[dl, equal] & \cup\cdots \\
A_1 = D & \cup(A_1\setminus A_2) & \cup(A_2\setminus A_3) & \cup(A_3\setminus A_4) & \cup(A_4\setminus A_3) & \cup\cdots
\end{tikzcd}
$$

由于$A_{2n}\setminus A_{2n+1}\overset{\varphi}{\sim}A_{2n+2}\setminus A_{2n+3}(n=0,1,2,\cdots,A_0=A)$，又因为集列$D,A_1\setminus A_2,\cdots,A_{2n+1}\setminus A_{2n+2},\cdots$中每个集都分别与自身对等. 根据性质(4)就得到$A\sim A_1$. 又因为$A_1\sim B$，所以$A\sim B$. QED.

1.2.5 势

在集论中所讨论的集都是一般的，并不考察集的进一步结构，例如集中元素之间没有大、小，没有距离、没有运算等可言，最多可以讲两个元素间或是$x=y$，或是$x\neq y$而已. 如果赋于集的元素之间以具体的结构，那末所讨论的集与结构有关的性质已不再属于集论所讨论的对象了. 所以集论中最初的一个基本课题就是研究集的元素个数有多少的问题，即势的理论.

关于事物的多或少是很普通的概念，例如，假如有人问：某班级的学生人数和某教室的凳子数是哪个多?这个问题很简单，只要规定每个人可坐一只凳，但最多只能坐一只凳子. 最后，如果有学生坐不到凳子，那末便是学生的人数多于凳子数；如果凳子有空，那末便是凳子数多于学生人数；如果既没有学生坐不到凳子，又没有凳子空下，那末便是两者个数一样多. 这里之所以必能得出上面结论之一，并且不管任何人来回答都必是相同的结论，这是因为以经过每个学生坐一只凳子的过程所得的结果为依据的.

更一般地，我们就引入下面定义.

定义 1.2.17 设A,B是两个集.

1. 如果A和B对等，那末称A和B具有相同的势(或基数). 记集A的势为$\overline{\overline{A}}$，A和B具有相同势时，记为$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$;
2. 如果A对等于B的某个子集B_1，那末称A的势小于或等于B的势，或称B的势大干或等于A的势. 记为$\overline{\overline{A}}\leq\overline{\overline{B}}$，或$\overline{\overline{B}}\geq\overline{\overline{A}}$；如果$\overline{\overline{A}}\leq\overline{\overline{B}}$，并且$\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$，那末势$A$的势小于$B$的势，或$B$ 的势大于A的势. 记为$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，或$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$.

势这个概念的直观背景就是元素的个数. 两个集A和B，如果有相同的势(也简说成等势)就意味着集A和B的元素的个数是“一样多”，势的大、小就意味着元素个数的“多、少”. 然而，如果$A\supset B$，并且$B\neq$，但这并不必然意味着$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$. 例如偶数集$E$ 虽然是自然数集N的真子集，然而因为E却能和N对等，所以$\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{N}}$

如果从势的观念来看Berstein定理，那末它可改述如下:

定理 1.2.18 (F.Bernstein) 如果$\overline{\overline{A}}\leq\overline{\overline{B}},\overline{\overline{B}}\leq\overline{\overline{A}}$，那末$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证明： 因为$\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$，所以$A$与$B$的某个子集$B_1$对等．又因为$\overline{\overline{B}} \le \overline{\overline{A}}$，所以$B$也与$A$的某个子集$A_1$对等．根据前面的Bernstein定理，必然$A$对等于$B$，即$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. QED.

Bernstein定理在势的比较大、小问题中的地位，相当于实数比较大、小中由$a \le b$和$b \le a$同时成立必有$a = b$这个事实．任何两个实数是可以比较它们的大、小的(即实数有全序性，关于“序”可参见1.3节)．很自然地会问：任何两个集是否必定可以比较它们的势的大、小．对任何两个集A, B，从逻辑上讲，必然发生下面四种情况之一：

1. A可以对等于B的某个子集B_1，而B永远不对等于A的任何一个子集；
2. B可以对等于A的某个子集A_1，而A永远不对等于B的任何一个子集；
3. B可以对等于A的某个子集A_1，而A也可以对等于B的某个子集B_1；
4. A永远不对等于B的任何一个子集，B也永远不对等于A的任何一个子集.

情况(1)就是$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$，(2)就是$\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$．根据Bernstein定理知道，情况(3)就是$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 因而如果有办法能证明情况(4)决不出现，那末任何两个集就可比较它们的势的大、小．否则就有些集，它们的势是不能比较大、小的．至今还是无法证明(4)一定不出现或者举出例子说明(4)是会出现的．E.Zermelo(1908) 提出一条公理选取公理(可参见1.3节)，依据这条公理就可以证明(4)不会出现，从而任何两个集的势都是可以比较大、小的了.

下面简单地介绍一些常见的集的势及其性质.

1.2.6　有限集和无限集

有限集的元素的多少是清楚的，主要要讨论的是无限集的势．但什么是有限集呢?还是有必要给有限集这个概念以严格的数学定义.

定义 1.2.19 设n是自然数，令$M_n = \{1, 2, \cdots\}$．如果集A能与某个M_n对等，那末称A是有限集．当$A \sim M_n$时，称n为集A的计数.

规定空集为有限集，并且它的计数规定为零.

下面给出有限集的特征并证明它的计数是唯一的.

引理 1.2.20 集M_n与其任何真子集不对等.

证明： 利用数学归纳法来证明这个引理.

当$n = 1$时，显然M_1的真子集只能是空集，故M_1不与其真子集对等.

设k为一自然数，而且M_k不与其真子集对等．今证M_{k+1}也不与其真子集对等就好了．假若不然，便有M_{k+1}到它的真子集M'上的一一对应φ，记$\varphi(k+1) = l$．分三种情况来讨论.

1. 若$l=k+1$，此时在M_{k+1}与M'中都删去$k+1$后分别得到集M_k与M''，φ在M_k上的限制成为M_k到M''上的一一对应，但$M''\subset M_k$，而且$M_k\neq M''$，这与归纳法假设冲突.

2. 虽然$l\neq k+1$，但$k+1\in M'$. 此时设$k+1=\varphi(m)$，在M_{k+1}上作映照ψ如下:

$$\psi(\nu)=\begin{cases}\varphi(\nu), & \nu\neq m,k+1\\ l, & \nu=m\\ k+1, \quad \nu=k+1\end{cases}$$

易知φ与ψ同为M_{k+1}到真子集M'上的一一对应，由于$\psi(k+1)=k1$，即ψ适合情况(1)，所以(11)也是不可能的。

3. 若$l\neq k+1, k+1\notin M'$. 此时从M_{k+1}中删去$k+1$得到M_k，再从M'中删去l得到一集M''. 显然可视φ为M_k到它的真子集M''的一一对应，由归纳法假设，这也不可能.

总之，M_{k+1}不能与其真子集对等。 QED.

推论 1.2.21 有限集决不与其真子集对等.

由此可得

定理 1.2.22 有限集具有唯一的计数，

证明： 对于空集，定理显然成立. 设A为一非空有限集. 若$A\sim M_n$，又$A\sim M_m$，则$M_n\sim M_m$. 今证$m=n$. 用反证法，若$m\neq n$，m,n中必然一大一小，不妨设$m<n$. 这就得到M_n与其真子集M_m 对等，由引理1.2.20知道这是不可能的. 所以$m=n$。即任一非空有限集只可能和一个M_n对等. QED.

由此可知，两个有限集相互对等的充要条件是它们的计数相等，因而，计数是所有相互对等的有限集的公共特征.

规定有限集A的势为集A的计数，即如果$A\sim M_n$，那末规定$\overline{\overline{A}}=n$.

我们称不是有限集的集为无限集.

无限集是存在的，例如自然数全体$\mathbb{N}$由于它能和它的真子集E(偶数全体)对等，所以不是有限集，即$\mathbb{N}$是一无限集. 更一般地，有下列定理.

定理 1.2.23 无限集必与它的一个真子集对等.

证明： 先证明在任一无限集A中，一定能取出一列互不相同的元素$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$. 事实上，在$A$中任取一个元素，记为$a_1$. 因为$A$是无限集，集$A\setminus\{a_1\}$显然不空，这时再从

集$A\setminus\{a_1\}$取一个元素a_2，同样，$A\setminus\{a_1,a_2\}$决不空. 可以继续做下去，将从A中取出一列互不相同的元素$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，记余集为$\hat{A}=A\setminus\{a_n\colon n=1,2,\cdots\}$. 在$A$中取出一个真子集

$$\{a_2,a_3,\cdots\}\cup\hat{A}=\tilde{A}$$

今作A与$\tilde{A}$之间的映照φ:

$$\varphi(x)=\begin{cases}a_{n+1}, & x=a_n(n=1,2,\cdots)\\ x, & x\in\hat{A}\end{cases}$$

显然，φ是A到$\tilde{A}$上的一一对应. QED.

改变一下定理1.2.23的叙述方式，即得到

推论 1.2.24 凡不能与自己的任一真子集对等的集必是有限集.

还可得到下面重要的推论.

推论 1.2.25 集A是有限的充要条件是它不能和真子集对等；集A 是无限的充要条件是能和真子集对等.

下面要介绍最常见的两种无限集.

1.2.7　可列集及连续点集的势

定义 1.2.26 设$\mathbb{N}$为自然数全体所成之集. 凡与集$\mathbb{N}$对等的集称为可列集，也称为可数无限集.

可列集是最“小”的无限集，即任何无限集必含有一可列子集(从定理2的证明中可以看出这一点). 如果A是可列集，φ是$\mathbb{N}$ 到N上的一一对应，记

$$a_n=\varphi(n),\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

那末A中每一个元素就有了确定的编号，因而成为序列:

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

通常记可列集的势为$\aleph_0$(读作“阿列夫零”).

例 1.2.27 三角函数系: $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$是可列集.

定理 1.2.28 可列集的任何子集，若不是有限集必是可列集.

证明： 设A为可列集，它的元素编号如下：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

B是A的非空子集，B中元素显然是上述叙列中的一个子叙列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

指标$n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$之中，如果有最大数，那末$B$为一有限集，否则$B$为一无限集，当$B$是无限集时，把$a_{n_k}$与自然数$k$对应就知道$B$是一可列集. QED.

定理 1.2.29 有限个或可列个有限集或可列集的并集是有限集或可列集.

证明： 不失一般性，设有一列集$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，而其中每一个都是可列集：

$$\begin{array}{lccccc}
A_1 = \{ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots\} \\
A_2 = \{ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots\} \\
A_3 = \{ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots\} \\
A_4 = \{ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots\} \\
\cdots & & & & &
\end{array}$$

称$p+g=h$为元素$a_{pq}(p,g=1,2,\cdots)$的高度，按高度大小编号，在同一高度中按q的值由小到大编号，这样就可以把并集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$中所有的元素编成一列(即上图箭头所指顺序)：

$$a_{11}; a_{21}, a_{12}; a_{31}, a_{22}, a_{13}; \cdots; a_{n1}, a_{n-1,2}, \cdots, a_{2,n-1}, a_{1n}; \cdots$$

因为A_i, A_j可能有公共元素，这些公共元素在并集中是同一元素，在这一序列中去掉重复的元素后余集仍是可列的。当$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中有些是有限集，或仅为有限个集$A_1, A_2, \cdots, A_n$的情况，也可以类似地讨论. QED.

例 1.2.30 平面上在直角坐标系下，两坐标x, y均为整数的点(x,y)(称为格点)全体成一可列集.

事实上，对每个固定的整数$n, A_n = \big\{(n,m) \colon m\text{是整数}\big\}$是一可列集. 显然，全平面上的格点全体就是并集$\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$，这是可列个可列集之和，因而是可列集.

例 1.2.31 有理数全体成一可列集.

事实上，有理数rr可写成既约分数$p/q, p, q$均为整数，并舰定$q > 0$. 改变一下记号，把既约分数p/q与平面上的格点(q, p)对应. 由定理4知这种格点(q, p)的全体至多是可列集；又由于有理数全体是无限集，所以有理数全体确是可列集.

设A, B是两个非空集，那末任取$a \in A, b \in B$作成元素对(a, b)，这种元素对的全体所成的集称为A与B的乘积，记为$A \times B$. 例9与例10实际上说明：当A, B是可列集时，乘积$A \times B$是可列集. 同样可以证明下列定理.

定理 1.2.32 如果$A, B, \cdots, C$是有限多个有限集或可列集，那末，乘积集

$$A \times B \times \cdots \times C = \{(a, b, \cdots, c) \colon a \in A, b \in B, \cdots, c \in C\}$$

是有限集或可列集.

从这里得到下面一些重要的例.

例 1.2.33 整系数多项式全体是可列集.

事实上，对于固定的自然数n，n次整系数多项式全体可以与$n+1$个自然数集的乘积对等. 所以它是可列集，从而各次整系数多项式全体是可列集.

整系数多项式的实数根称为代数数. 这就是说，设x是实数，如果存在整数$a_0, a_1, \cdots, a_n$ $(a_0 \neq 0)$，使

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

就称x是代数数.

例 1.2.34 代数数全体是可列集.

例 1.2.35 设A是直线上某些长度不为零的而且互不相交的区间所成的集(集A中的元素是区间)，则A是可列集或是有限集.

事实上，作集A到有理数集的映照φ如下：当区间$d \in A$时，由于d的长度不为零，必行有理数属于d，任意取定d中的有理数作为$\varphi(d)$，当$d_1, d_2 \in A$且$d_1 \neq d_2$时，则d_1与d_2不相交，因此$\varphi(d_1) \neq \varphi(d_2)$，这就是说，$\varphi$是可逆映照，因此$A$与有理数全体的子集对等. 然而由例1.2.31，有理数全体是可列集，再从定理1.2.28知道它的子集是可列集或有限集. 因此A也是如此.

定理 1.2.36 设A是有限集或可列集，B是任一无限集，那末

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{B}}$$

证明： 我们只须证明$A \cup B \sim B$就可以了. 因B是无限集，由定理2，存在一个可列子集$M \subset B$，再由定理4知道，集$M \cup (A \setminus B)$ 也是可列集，即$(A \setminus B) \cup M \overset{\varphi}{\sim} M$，又由于$B \setminus M \overset{I}{\sim} B \setminus M, (B \setminus M) \cap (M \cup (A \setminus B)) = \emptyset$，所以

$$\begin{array}{rcccc} B & = & (B \setminus M) & \cup & M \\ & & \| & & \downarrow \varphi \\ A \cup B & = & (B \setminus M) & \cup & (M \cup (A \setminus B)) \end{array}$$

QED.

上述定理表明：加任何一个有限集或可列集到一个无限集中时，此无限集的势不会改变.

定理 1.2.37 实数区间$0 \leq x \leq 1$是不可列集.

证明： 如果$(0,1]$是不可列的，那末闭区间$[0,1]$自然是不可列集，所以只要证$(0,1]$是不可列集.

如果$(0,1]$是可列集，那末其中所有实数可排成一数列：$t_1, t-2, \cdots, t_n, \cdots$ £. 将$(0,1]$中实数用十进位无限小数表示，

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.t_{11}t_{12}t_{13}t_{14}\cdots \\ t_2 &= 0.t_{21}t_{22}t_{23}t_{24}\cdots \\ t_3 &= 0.t_{31}t_{32}t_{33}t_{34}\cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

其中所有的t_{ij}都是$0,1,2,\cdots,9$十个数字中的一个，并且对每个i数列$\{t_{ij} : j = 1,2,\cdots\}$中有无限项不为0.

作十进位小数

$$a = 0.a_1a_2a_3\cdots$$

其中$a_i \neq t_{ii}, a_i \neq 0 (i = 1,2,\cdots)$，这是办得到的. 因为对任意的$i$，如$t_{ii} = 1$，令$a_i = 2$，如$t_{ii} \neq 1$，那末取$a_i = 1$就行了. 于是所作成的数$a$应该在区间$(0,1]$中，但不会在数列$t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$中，因为对于每个$n, a_n \neq t_{nn}$。所以$a \neq t_n$. 这和$\{t_n\}$是区间$(0,1]$中实数全体的假设相矛盾. 因此$(0,1]$是不可列集. QED.

定义 1.2.38 称0与1之间实数全体所成之集的势为连续点集的势. 这个势记作$\aleph$(读作“阿列夫”)，或记作c.

定理 1.2.39 实数全体的势为$\aleph$.

证明： 显然，$(0,1)$和$[0,1]$的势相同，所以只要证明实数全体$(-\infty,\infty)$和$(0,1)$对等好了. 今作$(0,1)$到$(-\infty,\infty)$的映照φ:

$$\varphi(x)=\tan\frac{2x-1}{2}\pi$$

显然这是$(0,1)$到$(-\infty,\infty)$的一一对应，所以实数全体的势是$\aleph$. QED.

推论 1.2.40 无理数全体的势是$\aleph$.

证明： 记无理数全体为B, 有理数全体为R，由定理6得

$$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{B\cup R}}=\overline{\overline{(-\infty,\infty)}}=\aleph$$

QED.

根据这个事实可以粗略地说，无理数比起有理数来要多得多.

不是代数数的实数称为超越数. 类似地得到

推论 1.2.41 超越数全体的势为$\aleph$.

这个事实不仅告诉了我们超越数是存在的，而且远比代数数要多.

在Cantor创立集论以前，曾有好多数学家比较费力地证明超越数的存在(如Liouville、Hermite)等最后才证明e是超越数)，然而抽象集论的方法不仅肯定了超越数存在，而且断定多得很. 可惜的是它不能给我们具体地指出那些数是超越数，但尽管如此，却并不因此而失去它的重要意义.

定理 1.2.42 实数列全体E^∞的势是$\aleph$.

证明： 记B为E^∞中适合$0<x_n<1,(n=1,2,\cdots)$的点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$的全体. 设$x\in B, x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，其中$x_n$是实数. 作映照$\varphi$:

$$\varphi(x)=\left\{\tan\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\tan\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots,\tan\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots\right\}$$

显然，φ是B到E^∞的一一对应. 我们只须证明B的势为$\aleph$.

事实上，首先把$(0,1)$中任何x与B中的点

$$\tilde{x}=\{x,x,\cdots,x,\cdots\}$$

对应，就知道$(0,1)$对等于B的一个子集. 即$\overline{\overline{B}}\geq\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$.

反之，对B中的任何$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，按十进位无限小数表示$x_n$有

$$
\begin{aligned}
&x_1=0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots\\
&x_2=0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots\\
&x_3=0.x_{31}x_{32}\cdots x_{3n}\cdots\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

由上述一列数$x=\{x_n\}\in E^\infty$，作一小数$\psi(x)$:

$$\psi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}x_{31}x_{22}x_{13}\cdots$$

显然$\psi(x)\in(0,1)$而且当$x\neq y$时，$\psi(x)\neq\psi(y)$，由映照ψ，B也对等于$(0,1)$的一个子集，从而$\overline{\overline{B}}\leq\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$. 所以由Bernstein定理得到$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{(0,1)}}$. QED.

推论 1.2.43 n维欧几里得空间E^n的势为$\aleph$.

证明： 如将E^n中点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对应于E^∞中的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)$时，就知道$E^n$对等于$E^\infty$的一个子集. 但是$\overline{\overline{E^\infty}}=\overline{\overline{E^1}}$，所以$E^\infty\sim E^1$. 因此$E^n$对等于$E^1$的子集. 如果再将$E^1$中的点$x$应于$E^n$中点$(x,0,\cdots,0)$时，又知道$E^1$对等于$E^n$的一个子集. 所以由Bernstein定理知道$\overline{\overline{E^n}}=\overline{\overline{E^1}}=\aleph$. QED.

常用的是十进位小数，本书中有几处要用到二进位及三进位的小数，使用电子计算机时要用二进位、四进位、八进位等数. 下面我们来介绍g进位小数.

g进位小数 设g是任意取定的一个大于l的自然数，$\{t_k\}$是一列小于g而大于或等于0的整数，称级数

$$\frac{t_1}{g}+\frac{t_2}{g^2}+\cdots+\frac{t_n}{g^n}+\cdots$$

为g进位小数. 常简记成

$$0.t_1t_2\cdots t_n\cdots$$

若在一个g进位小数中，从某一项以后t_k全为0，则称为g进位有限小数，否则，称为g进位无限小数.

我们知道，$(0,1]$中任何实数可以唯一地表示为$g(g>1)$进位无限小数. 我们有下面的

引理 1.2.44 如果把$(0,1]$中的实数表示成$g(g>1)$进位无限小数, 记g进位无限小数全体为A，那末这个表示成为$(0,1]$到A的一一对应.

推论 1.2.45 $g(g>1)$进位无限小数全体的势为$\aleph$. g进位小数全体的势也是$\aleph$.

证明： 由于g进位有限小数全体是可列集，由定理1.2.36，g进位小数全体的势与g进位无限小数全体的势相同．再由引理1.2.44，它们的势都是$(0,1]$的势$\aleph$. QED.

现在我们来讨论在数学分析中重要的函数族的势.

定理 1.2.46 $[a,b]$上的连续函数全体$C[a,b]$的势是$\aleph$.

证明： 由于常数函数属于$C[a,b]$，常数函数的全体K的势是$\aleph$. 由于E^∞的势是$\aleph$，所以E^∞与$C[a,b]$的子集E对等．根据Bernstein定理，只要证明$C[a,b]$与E^∞的一子集对等.

我们把$[a,b]$中的有理数全体排成一列，记为$r_1,r_2,\cdots$，任何一个连续函数$f(x)$，由它在$r_1,r_2,\cdots$上的值$f(r_1),f(r_2),\cdots$完全决定．事实上，因为对于任何$x\in[a,b]$，存在上述有理数列的子数列$r_{n_k}\to x(k\to\infty)$. 由f的连续性，$f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f(r_{n_k})$. 因此$C[a,b]$到$E^\infty$中的映照

$$\varphi\colon f\mapsto(f(r_1),f(r_2),\cdots)$$

是可逆的，即$C[a,b]$和E^∞的一个子集$\varphi(C[a,b])$对等. QED.

应该注意，对于$[a,b]$上所有实值函数全体所成的集$R[a,b]$，虽然$R[a,b]$有许多子集(如$C[a,b]$)与$[0,1]$对等，但是$R[a,b]$并不能与$[0,1]$对等(可参见下面推论1.2.49).

定理 1.2.47 *1.* 设M是由两个元素$p,q(p\neq q)$作成的元素列全体，那末M的势为$\aleph$.

2. 如果Q是可列集，那末Q的子集全体所成之集S的势为$\aleph$.

证明：

1. 作M到二进位小数全体B的映照φ如下：任取$b=\{b_n\}\in M$，作二进位小数$\varphi(b)=0.t_1t_2\cdots$，其中当$b_n=p$时$t_n=0$，而$b_n=q$时$t_n=1$. 容易看出$\varphi$是$M$到$B$的一一对应．根据推论1.2.45，$B$的势是$\aleph$. 因此，$M$的势是$\aleph$.

2. 作S到二进位小数全体B的映照ψ如下：将Q中元素用自然数编号成为

$$q_1,q_2,\cdots,q_n,\cdots$$

对任意一个$C\in S$，作二进位小数$\psi(C)=0.t_1t_2\cdots$，其中当$q_n\in C$时，$t_n=1$，而$q_n\notin C$时，$t_n=0$. 显然ψ是S到B 上的一一对应．因此，S与B的势同为$\aleph$.

QED.

1.2.8 无最大势

势既然可以比较，是否存在最大的势呢？这个问题的回答是否定的. 我们有如下定理.

定理 1.2.48 B是一个集，S是B的一切子集所构成的集. 必有$\overline{\overline{S}} > \overline{\overline{B}}$.

证明： 由B中单独一个点构成的集是S中的一个元素，S中这种元素的全体记为S_1, S_1是S的子集. 显然B与S_1对等，因而$\overline{\overline{S}} \geq \overline{\overline{B}}$. 剩下的只要证明$\overline{\overline{S}} \neq \overline{\overline{B}}$.

用反证法证明$\overline{\overline{S}} \neq \overline{\overline{B}}$: 假如不对，便有$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{B}}$，从而存在$\varphi, \varphi$ 是B到S上的一一对应. 对任何$b \in B, \varphi(b) \in S$. 因而$b$和$\varphi(b)$ 之间只有两种可能，

1. $b \in \varphi(b)$;

2. $b \notin \varphi(b)$.

不可能对一切$b \in B$，都只发生(1). 否则，在S中取一个元素$s = \{a, b\}$，根据(1)，$\varphi^{-1}(s)$只可能是a或b. 如果是a，但S中的$s_1 = \{a\} (\neq s)$，也有$\varphi^{-1}(s_1) = a = \varphi^{-1}(s)$，这与假设$\varphi$是一一对应相矛盾. 同样也可以证明$\varphi(s)$不可能是$b$. 从而(2)必然会发生. 记满足(2)的B 中元素全体为S^*，它不是空集. 又记$\varphi^{-1}(S^*) = b^*$，现在问：是否$b^* \in S^*$?

如果$b^* \notin S^*$，而$S^* = \varphi(b^*)$是由B中满足(2)的元素全体构成的，即$b^* \in S^*$. 矛盾。

如果$b^* \in S^*$, 同样由S^*的定义，得到$b^* \notin S^*$，矛盾。由此可知假设$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{B}}$是不对的.

QED.

注意，定理1.2.48的证明并不需要用到任何两个集的势必可比较大、小这个命题，即只要有势的大、小概念，没有Zermelo的选取公理，定理1.2.48仍然成立.

推论 1.2.49 $[a, b]$上一切实函数全体$R[a, b]$的势大于$\aleph$.

证明： 记$[a, b]$上每点的函数值不取0便取l的实函数全体为S，显然$S \subset R[a, b]$，因而$\overline{\overline{S}} \leq \overline{\overline{R[a, b]}}$. 而集$S$与$[a, b]$的一切子集所构成的集具有相同的势，因而

$$\overline{\overline{R[a, b]}} \geq \overline{\overline{S}} > \aleph$$

QED.

Cantor假设 $\aleph_0, \aleph$是两个重要的无限势. 是否存在一个势α，使得$\aleph_0 < \alpha < \aleph$成立? Cantor首先看到了这个自然而重要的问题. 他并没有解决这个问题. 但他相信(从而他假设)没有这个“中间”势α，这就是著名的Cantor连续统假设. 这个假设现在终于已被人们搞清楚了. 这个假设可以作为一条公理，并且与集合论中其它一些公理是独立的.

习题

1. 证明代数数全体是可列集.

2. 证明任一可列集的所有有限子集全体是可列集.

3. 证明g进位有限小数全体是可列集，循环小数全体也是可列集。

4. 对于有理数，施行$+,-,\times,\div,\sqrt{\ },\sqrt[3]{\ },\cdots$等有限回运算. 这样得到的一切数其全体是可列的吗?

5. 设A是平面上以有理点(即坐标都是有理数的点)为中心有理数做半径的圆的全体，证明A是可列集.

6. 若集A中每个元素，由互相独立的可列个指标所决定，即$A=\{a_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\cdots}\}$，而每个指标$\lambda_n$在一个势为$\aleph$ 的集中变化，则集A的势也是$\aleph$.

7. 设$\{x_n\}$为一序列，其中的元素彼此不同，则它的子序列全体组成势为$\aleph$的集. 如果$\{x_n\}$中只有有限项彼此不同，那末子序列全体的势如何?

8. 证明$[a,b]$区间上右方连续的单调函数全体的势是$\aleph$. 又$[a,b]$区间上的单调函数全体的势如何?

9. 设集B与C的并集的势为$\aleph$. 证明B及C中必有一个集的势也是$\aleph$. 如果$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$的势是$\aleph$，证明必有一个$A_n$的势也是$\aleph$.

10. 证明: 直线上集A如果具有下面性质: 对任何$x\in(-\infty,\infty)$，总存在包含x的某个区间$(x-\delta,x+\delta)$，使得$(x-\delta,x+\delta)\cap A$最多只有可列个点，那末$A$必是有限集或可列集.

1.3 等价关系、序和Zorn引理

1.3.1 等价关系

在数学中，一个集A的元素之间常有一定的关系. 我们现在要考察的是下面的一种等价关系.

定义 1.3.1 假设A是一个集，在A的元素之间有一种关系“$\sim$”适合以下的条件:

1. 自反性: 对于一切$a\in A, a\sim A$;

2. 对称性: 如果$a\sim b$, 那末$b\sim a(a,b\in A)$;

3. 传递性: 如果$a\sim b, b\sim c$，那末$a\sim c$.

这时我们说“$\sim$ ”是A上的等价关系.

例 1.3.2 在实数全体E^1上，当$x-y=2k\pi$(k是整数)时，规定$x\sim y$，这是E^1上的一个等价关系.

例 1.3.3 在平面E^2上，当两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$满足$x_1=x_2$时，规定$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$，这是E^2上的一个等价关系.

例 1.3.4 A,B是两个集，f是A到B的一个映照. 当$x,y\in A$满足$f(x)=f(y)$时，规定$x\sim y$. 这是A上的一个等价关系。这个等价关系又称为由映照f按等值方式所导出的等价关系，简称为由f导出的等价关系.

剖分和等价类 设A是一个集，$\{A_\alpha\colon\alpha\in\Lambda\}$是$A$的一族子集，如果满足

1. $A_\alpha\cap A_\beta=\emptyset(\alpha\neq\beta)$

2. $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=A$

那末称$\{A_\alpha\colon\alpha\in\Lambda\}$是$A$的一个剖分

例 1.3.5 A,B是两个集，f是A到B的一个映照. 对任何$b\in B$，作$A_b=\{x\colon f(x)=b\}$(如果$b\notin\Re(f)$，那末规定$A_b=\emptyset$)这时$\{A_b\colon b\in B\}$是A的一个剖分. 它称为由f按等值方式所导出的剖分，简称为由f导出的剖分.

由映照f可以导出一个剖分. 反之，对任何A的剖分$\{A_\alpha\colon\alpha\in\Lambda\}$ 必存在映照f，使得由f所导出的剖分就是$\{A_\alpha\colon\alpha\in\Lambda\}$. 事实上，取$B=\Lambda$，作$A$到$B$的映照$f$: 当$x\in A_\alpha$时，$f(x)=\alpha$. 显然，$f$就是所要求的映照.

设$\sim$是集A上的一个等价关系. 任取$a\in A$，令$\tilde{a}=\{b\colon b\sim a\}$，称$\tilde{a}$是$A$中(按等价关系$\sim$)的一个等价类.

显然，每个等价类是A的一个子集，任何两个等价类$\tilde{a},\tilde{b}$或是相同(这时$a\sim b$)，或是互不相交(这时$a\nsim b$，“$\nsim$”表示不等价)，并且集A就是一切互不相同的等价类的并集. 换句话说，一切按等价关系$\sim$所产生的等价类构成了A的一个剖分. 反之，对于A的任何一个剖分$A_\alpha\colon\alpha\in\Lambda$，必存在一个$A$上的等价关系$\sim$，使得由$\sim$所产生的等价类全体所构成$A$的剖分就是$\{A_\alpha\colon\alpha\in\Lambda\}$. 事实上，如果$\{A_\alpha\colon\alpha\in\Lambda\}$是给定的($A$的)一个剖分，当$x,y$同属于$A_\alpha$时，规定$x\sim y$，那末$\sim$便是$A$上的一个等价关系，而由这个等价关系所产生的等价类全体所构成的A的剖分正是$\{A_\alpha\colon\alpha\in\Lambda\}$.

1.3.2 顺序关系

顺序是数学中常用的概念之一. 例如实数大小就是一种重要的顺序关系. 高等数学的重要概念之一是极限，极限概念所研究的主要就是变量按照一定的顺序变化的趋势. 但是在许多情况下，在集合中不是任何两个元素之间都可以自然地定义顺序. 例如在构造Riemann积分和数的时候，需要考察积分区间里所取的各种不同的分点组. 令A表示$[a,b]$中所有有限分点组$\mathfrak{D}$全体，我们在A中规定：当$\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2\in A$而且$\mathfrak{D}_1\subset\mathfrak{D}_2$时，说$\mathfrak{D}_1$在$\mathfrak{D}_2$前，这是一种顺序关系. 但$A$中确实有这样的$\mathfrak{D}_1$和$\mathfrak{D}_2$，$\mathfrak{D}_1$既不包含在$\mathfrak{D}_2$中，$\mathfrak{D}_2$也不包含在$\mathfrak{D}_1$中，这样$\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2$之间就不存在上述的顺序关系. 所以我们需要考察这样的情况：在集中只是一部分元素之间具有顺序关系. 从黎曼积分的理论也可以看出这种顺序关系是十分重要的. 在其它数学领域中也常遇到这一基本的概念. 现在我们给出序的概念.

定义 1.3.6 设A是一集，在其中规定了某些元素之间的关系“$\prec$”，它满足以下的条件：

1. 自反性：对A中的一切元素a成立着$a\prec a$;
2. 如果$a\prec b$，而且$b\prec a$，那末$a=b$;
3. 传递性：如果$a\prec b$, 而且$b\prec c$，就有$a\prec c$，

那末称关系“$\prec$”为A中的一个顺序，$a\prec b$读作a在b前(或b在a 后)，这时称集A按顺序$\prec$成一半序集，或者说集A是有序的.

例 1.3.7 设B是一个非空集，A是B的所有子集所成的集. 如果子集之间用包含关系“$\subset$”作为A中某些元素间的顺序，即当$U,V\in A$，且$U\subset V$时，规定$U\prec V$，那末显然这是一种顺序(称它是自然顺序)，因而A按此顺序成为一个半序集.

例 1.3.8 设B是一个集, A是B上的实函数全体，当$a,b\in A$，而且对每个$t\in B$有$a(t)\le b(t)$时，规定$a\prec b$，那末A按此顺序也成为半序集.

例 1.3.9 设A是某些实数所成的集，在A中规定当$a\le b$时为$a\prec b$. 显然A成一半序集，这个顺序称作自然顺序.

若在这个集A中作另一规定：当$a\ge b$时规定$a\prec b$，显然这也是一个顺序关系，称此顺序为逆自然顺序.

例 1.3.10 设A是所有实数对(x,y)全体，规定两对$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$当$x_1<x_2$时为$(x_1,y_1)\prec(x_2,y_2)$，以及当$x_1=x_2$而$y_1\le y_2$时为$(x_1,y_1)\prec(x_2,y_2)$. 这是A中的一个顺序关系，称为字典顺序(因为它和拼音文字字典的字序类似).

定义 1.3.11 设集A中已经定义了顺序关系“$\prec$”，如果对A中的任何两个元素a,b都可以确定它们之间的顺序，即$a\prec b$与$b\prec a$两个关系式中必有一个成立，就称A是一个全序集.

在例1.3.9中的数集A按自然顺序(或逆自然顺序)是全序集，例1.3.10的集也是全序集. 如在例1.3.7、例1.3.8中，当B不止含有一个元素时，A都不是全序集.

定义 1.3.12 设A是一个半序集，B是A的子集，如果有$a \in A$，使得对每个$b \in B$，成立着$b \prec a$，即a在B中所有元素之后，那末称a为子集B 的上界. 类似地也有下界的概念.

对一个子集，上界、下界不一定是唯一的，也可以没有上界或下界. 例如取A为实数区间$(0,1)$，以自然顺序为顺序，取$B=A$，显然B在A中就不存在上界，也不存在下界.

例 1.3.13 对每个自然数n作区间$[0,1]$上的分点组，令

$$D_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

所有这些分点组的全体记作$\mathfrak{D}$. 令B表示$[0,1]$中的有理数全体，A表示B的子集全体. $B \in A$，于是$\mathfrak{D} \subset A$. 象例*1.3.7*中所规定的那样，在集A中以包含关系$\subset$作为元素间的顺序，A成为半序集. 显然，对任何$D_n \in \mathfrak{D}$，都有$D_n \subset B$. 所以B是$\mathfrak{D}$的上界.

定义 1.3.14 设A是一个半序集，$a \in A$, 如果在A中不存在别的元素$b(\neq a)$ 在a后，那末称a为A的极大元.

换句话说，极大元a是具有下面性质的元素：如果$b \in A$，而且$a \prec b$，那末必有$b = a$. 半序集的极大元不一定是唯一的. 例如两个元素a, b所组成的集A，其中规定$a \prec a, b \prec b$，则A是半序集，而a和b都是A的极大元. 但是，在全序集中极大元是唯一的.

类似地也有极小元的概念.

1.3.3 Zorn引理

下面介绍一个引理，它是研究“无限的过程”的一个逻辑工具，在泛函分析的基本理论中常要用到. 这个引理是作为关于半序集的一个公理来接受的.

引理 1.3.15 (Zorn引理) 设A是一个半序集，如果A的每个全序子集都有上界，那末A必有极大元.

类似地有关于下界和极小元(存在性)的引理.

Zorn引理是证明别的一些定理的基础. 作为公理，它并不象别的公理，如欧几里得几何学上的一些公理那样直观，那样明显，自然不易被人们所接受，因而有必要作些简略的说明.

这个引理的可接受性，可以这样粗略地看(但这不是逻辑的证明)：如果A是一个半序集，任意取A中的一个元素a_1, 如果它不是极大元，那末必有元素$a_2 \in A, a_2 \neq a$，使得$a_1 \prec a_2$. 这样继续下去，可以得到一个全序子集

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

依假设，它必有上界记为a_ω. 如果a_ω不是极大元，A中必有一元素在a_ω之后，记它为$a_{\omega+1}$，(这里$\omega+1$且理解为一个记号)；再继续下去，又得到全序子集

$$a_1, \cdots, a_n, \cdots, a_\omega, a_{\omega+1}, \cdots, a_{\omega+n}, \cdots$$

由假设它有上界记为$a_{2\omega}$(这里2ω也只是一个记号，我们不去追究它的意义)，这样一直做下去，"最终总可以"找到极大元.

如果对上述过程加以严格分析，果真要实现"最终总可以找到极大元"就要运用另一个公理Zermelo的选取公理.

定理 1.3.16 (Zermelo选取公理) 设$S=\{M\}$是一族两两不相交的不空的集，那末存在集L满足下面两个条件:

1. $L \subset \bigcup\limits_{M\in S} M$;
2. 集L与S中每一个集M有一个而且只有一个公共元素.

其实选取公理和Zorn引理是等价的.

1.4 实数理论和极限论

本节内容是给读者参考的.

1.4.1 实数理论

上面一节，整个理论是建立在实数直线的连续性的基础上. 但是，关于实数直线本身的连续性的理论，并未说明. 下面我们以有理数为基础来建立实数的理论. 尽管人们早就在应用实数有基数或无理数，然而什么是实数?这个问题直到十九世纪后半叶才得到严格解决：这方面的理论大体分为两类，一类由Cantor(1872)，Ch. Me'ray(1869)和Weierstrass(1860)分别获得的，他们的形式虽略有差异。但实质上是差不多的，这就是下面所要介绍的，这种方法具有普遍意义. 另一类是Dedekind(1872)的理论.

定义 1.4.1

- 设$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$都是有理数. 假如对于任意的正有理数$\varepsilon$，有自然数$N$，使得当$n, m \geq N$时不等式

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \tag{1.12}$$

成立，就称$\{a_n\}$是基本有理数列.

- 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个基本有理数列，若对任一正有理数ε，有自然数N，使得当$n \geq N$时不等式

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \tag{1.13}$$

  成立，就称基本有理数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$相等，记做$\{a_n\} = \{b_n\}$.

- 我们称基本有理数列是一个实敛. 规定相等的基本有理数列是同一个实数.

引理 1.4.2 基本有理数列$\{a_n\}$是有界的，即有一个有理数M，使得对一切自然数n，成立着

$$|a_n| \leq M$$

证明： 因为$\{a_n\}$是基本有理数列，所以对$\varepsilon = 1$有自然数N，使得当$n \geq N$ 时(5. 1)成立，即

$$|a_n - a_N| < 1$$

从而当$n \geq N$时有

$$|a_n| < |a_N| + 1$$

令$M = \max |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N| + 1$，那末$M$是有理数，而且对一切自然数$n$都有

$$|a_n| \leq M$$

QED.

引理 1.4.3 *1.* 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是两个基本有理数列，那末$\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ 都是基本有理数列.

2. 如果$\{a_n\}, \{a'_n\}, \{b_n\}, \{b'_n\}$都是基本有理数列，而且

$$\{a_n\} = \{a'_n\}, \quad \{b_n\} = \{b'_n\}$$

必有$\{a_n + b_n\} = \{a'_n + b'_n\}, \{a_n b_n\} = \{a'_n b'_n\}$

证明： 由引理1.4.2，有正有理数A使得对一切自然数n成立着

$$|a_n| < A, \quad |a'_n| < A, \quad |b_n| < A, \quad |b'_n| < A$$

设ε是一个正有理数，有自然数N使得不等式

$$|a_n - a_m| < \frac{2\varepsilon}{A}, \qquad |a'_n - a'_m| < \frac{2\varepsilon}{A}, \quad \forall n, m \geq N$$
$$|b_n - b_m| < \frac{2\varepsilon}{A}, \qquad |b'_n - b'_m| < \frac{2\varepsilon}{A}$$

那末当$n, m \geq N$时，

$$\begin{aligned}|a_n b_n - a_m b_m| &= |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)| \\ &\leq A\,|b_n - b_m| + A\,|a_n - a_m| < \varepsilon\end{aligned}$$

所以$\{a_n b_n\}$是基本有理数列。又当$n \geq N$时，

$$\begin{aligned}|a_n b_n - a'_n b'_n| &= |a_n(b_n - b'_n) + b'_n(a_n - a'_n)| \\ &\leq A\,|b_n - b'_n| + A\,|a_n - a'_n| < \varepsilon\end{aligned}$$

所以$\{a_n b_n\} = \{a'_n b'_n\}$.

共余的部分也可以类似地证明. QED.

利用引理1.4.3可以规定实数的运算如下:

定义 1.4.4 设$a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$是两个实数，称实数$\{a_n + b_n\}$为"a加b"的和，记做$a + b$；称$\{a_n b_n\}$为"a乘b的积"，记做$a \cdot b$或ab.

引理1.4.3说明了$a + b, a \cdot b$确是实数，而且有确定的意义。就是说，如果$a = a', b = b'$，那么必然$a + b = a' + b', a \cdot b = a' \cdot b'$.

容易证明下面的定理:.

定理 1.4.5 *实数全体E^1按照上述的加法及乘法成为一个域. 换句话说，E^1 具有下面各项性质:*

1. *E^1按照加法成一交换群:*
   - *(a) 当$a, b \in E^1$时，$a + b \in E^1$*
   - *(b) 加法结合律：如果$a, b, c \in E^1$，那末$a + (b + c) = (a + b) + c$*
   - *(c) 存在零元素$0 = \{0, 0, \cdots\} \in E^1$，对一切$a \in E^1$,*

$$a + 0 = a$$

   - *(d) 对于每一个$a \in E^1$，有负元素$-a \in E$，使得*

$$a + (-a) = 0$$

(e) 加法交换律：若$a,b\in E^1$，那末$a+b=b+a$

2. E^1中的非零元素全体按照乘法成一交换群:

(a) 当$a,b\in E^1$时，$ab\in E^1$

(b) 乘法结合律：如果$a,b,c\in E$，那末$a(bc)=(ab)c$

(c) 存在单位元素$1=\{1,1,\cdots\}\in E^1$，使一切$a\in E^1$

$$a\cdot 1=a$$

(d) 如果$a\in E^1$而且$a\neq 0$，那末必有(乘法)逆元素$a^{-1}\in E$，使得

$$a\cdot a^{-1}=1$$

(e) 乘法交换律：对任意的$a,b\in E^1$，有$a\cdot b=b\cdot a$

3. 乘法与加法之间的分配律：如果$a,b,c\in E^1$，那末

$$a\cdot(b+c)=ab+ac$$

证明： 我们只证明(2d)和(3).

先对于实数$a\neq 0$, 证明存在逆元素$a^{-1}\in E^1$，使得

$$a\cdot a^{-1}=1$$

设$a=\{a_n\}\in E^1, a\neq 0$，那末必存在正有理数$\varepsilon$，在区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$中最多只有$\{a_n\}$中的有限项.

不然的话，对每个正有理数ε，在$(-\varepsilon,\varepsilon)$中有$\{a_n\}$的无限项，$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$，即$|a_{n_k}|<\varepsilon$, 但是$\{a_n\}$是基本数列，有自然数$N$得当$n,m\geq N$时(1.12)成立，取一个$n_k\geq N$，那末就知道当$n\geq N$时

$$|a_n|\leq|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}|<2\varepsilon$$

这样一来$a=0$.

设当$n\geq N_\varepsilon$，$|a_n|\geq\varepsilon$. 规定$a^{-1}=\{a'_n\}$如下:

$$a'_i=\begin{cases}a_n, & \text{当}n<N_\varepsilon\\ \frac{1}{a_n} & \text{当}n\geq N_\varepsilon\end{cases}$$

现在证明$\{a'_n\}$是基本有理数列. 事实上，当$n,m\geq N_\varepsilon$时

$$|a'_n - a'_m| = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| = \frac{|a_n - a_m|}{a_n a_m}$$

由于对任意的正有理数η，存在自然数N'，使得当$n,m \geq N'$时，$|a_n - a_m| < \eta\varepsilon^2$。又当$n,m \geq N_\varepsilon$时，$|a_n a_m| \geq \varepsilon^2$，从而当$n,m \geq \max\{N_\varepsilon, N'\}$时成立

$$|a'_n - a'_m| < \eta$$

所以$\{a'_n\}$是基本有理数列，因此$a^{-1} = \{a'_n\} \in E^1$。由于

$$a \cdot a^{-1} = \left\{a_1^2, a_2^2, \cdots, a_{N-1}^2, 1, 1, \cdots, 1, \cdots\right\}$$

这个数列中从第N_ε项以后全是a，它等于$1 = \{1, 1, \cdots\}$，因此

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

现在来证明3. 设$a = \{a_n\}, b = \{b_n\}, c = \{c_n\}$. 于是

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= \{a_n(b_n + c_n)\} = \{a_n b_n + a_n c_n\} \\ &= \{a_n b_n\} + \{a_n c_n\} = ab + ac \end{aligned}$$

其余各项请读者自己证明. QED.

我们简记$a + (-b) = a - b$，称为a减b的差. 容易明白：$0 - a = -a$.

当$b \neq 0$时，简记$a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$(或$ab$)，称为$a$除以$b$的商，或称为$a$与$b$ 的比值，也可记做$a : b$.

容易看出，如果$a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$，那末$a - b = \{a_n - b_n\}$；当$b \neq 0$，并且一切b_n全不为0时，$ab = \{a_n / b_n\}$.

上面规定好了实数的运算，下面来规定实数的顺序.

定义 1.4.6 设$a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$是两个实数，假如有正有理数δ和自然数N，使得当$n \geq N$时，

$$a_n - b_n > \delta$$

那末称b小于a，记作$b < a$；或称a大于b，记为$a > b$.

容易证明，若基本有理数列$\{a_n\} = \{a'_n\}, \{b_n\} = \{b'_n\}$，那末当$\{a_n\} < \{b_n\}$时，$\{a'_n\} < \{b'_n\}$，所以$a < b$有确定的意义.

定理 1.4.7 设a,b是两个实数，那末三个关系

$$a=b,\quad a<b,\quad a>b$$

必有一个成立，而且只有一个成立.

证明： 因为$a=\{a_n\},b=\{b_n\}$都是基本有理数列，所以对于任一正有理数ε，有正整数N，使得当$m\ge N$时有

$$|a_m-a_N|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |b_m-b_N|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$|(a_m-b_m)-(a_N-b_N)|<\varepsilon$$

也就是

$$a_N-b_N-\varepsilon<a_n-b_n<a_N-b_N+\varepsilon \tag{1.14}$$

假如有一个ε和N，使得上式两端$a_N-b_N-\varepsilon$及$a_N-b_N+\varepsilon$同号。譬如说是正号，那末只要令$a_N-b_N-\varepsilon=\delta$，当$m\ge N$时

$$a_m-b_m>\delta$$

这就是说，$a>b$. 类似地如果(1.14)两端同时为负号，可证$b>a$.

如果对一切正有理数ε，(1.14)两端异号，就是

$$a_N-b_N-\varepsilon<0,\qquad a_N-b_N+\varepsilon>0$$

即

$$|a_N-b_N|<\varepsilon$$

因此，由(1.14)，对每个正有理数ε，有自然数N，使当$m\ge N$时，

$$|a_m-b_m|<\varepsilon+|a_N-b_N|<2\varepsilon$$

这就证明了$a=b$.

所以$a=b,a<b$或$a>b$三个关系至少有一个成立. 至于上述关系不可能有两个同时成立，容易从定义直接验证. QED.

此外还可以证明，实数的顺序与代数运算之间有下面的基本关系：

定理 1.4.8 设a,b,c是三个实数，如果$a<b$，那末$a+c<b+c$。如果又有$0<c$，那末$a\cdot c<b\cdot c$. 特别地，$a>0$与$-a<0$是等价的.

定义 1.4.9 大于0的实数称为正数，小于0的实数称为负数.

设a是一实数，记$|a|$为如下的实数：当$a\geq 0$时，$|a|=a$；当$a<0$时，$|a|=-a$，称$|a|$为实数a的绝对值.

容易证明：如果$\{a_n\}$是基本有理数列，$a=\{a_n\}$，那末$|a_n|=\{|a_n|\}$. 因此，a的绝对值$|a|$有确定的意义.

由定理1.4.8易知

定理 1.4.10 设a和b是实数，那末$|ab|=|a|\,|b|$，并且

$$|a+b|\leq |a|+|b|$$

我们还要把有理数和一部分实数等同起来. 对任何有理数r，显然

$$\tilde{r}=\{r,r,\cdots,r,\cdots\}$$

是一个基本有理数列，即是一个实数，称$\tilde{r}$是相应于有理数r的实数. 记R_0 为有理数全体，$\tilde{R}_0$是相应于有理数的实数全体. 容易看出映照

$$r\mapsto\tilde{r}$$

是R_0与$\tilde{R}_0$间的一一对应，而且在这个映照下，代数运算和“大小”顺序关系保持不变，就是说：

$$\widetilde{(r_1+r_2)}=\tilde{r_1}+\tilde{r_2},\quad \widetilde{r_1r_2}=\tilde{r_1}\tilde{r_2}$$

$$r_1<r_2\qquad \text{隐含}\qquad \tilde{r_1}<\tilde{r_2}$$

我们今后就把r和$\tilde{r}$等同起来. 这是可以的，因为对于实数来说，只要代数运算和大小顺序没有改变就行了. 这样一来，有理数就是实数的一部分了.

我们来证明有理数在实数中是处处稠密的，就是要证明任何两个实数中间必有有理数.

定理 1.4.11 设a,b是两个实数，$a<b$，那末必有有理数r适合

$$a<r<b$$

证明： 设$a=\{a_n\},b=\{b_n\}$，由于$\{a_n\}<\{b_n\}$，必有正有理数δ和自然敛N，使得当$n\geq N$时有

$$b_n-a_n>\delta$$

又因为$\{a_n\}$及$\{b_n\}$是基本数列，必有$N_1\geq N$，使得当$m,n\geq N_1$时。

$$|a_n-a_m|<\frac{\delta}{4},\qquad |b_n-b_m|<\frac{\delta}{4}$$

取$c=b_{N_1}-\frac{\delta}{2}$，这是有理数，并且当$m\geq N_1$时有

$$b_m-c=b_m-b_{N_1}+\frac{\delta}{2}>\frac{\delta}{4}>0$$

所以$\{b_m\})>\{c\}$；又当$m\geq N_1$时，

$$c-a_m=b_{N_1}-a_{N_1}+a_{N_1}-a_m-\frac{\delta}{2}>\frac{\delta}{4}>0$$

即$\{c\}>\{a_n\}$. QED.

在转入讨论实数的极限论之前，先说明一个问题：现在建立实数的方法是把有理数作为已知，而把一列有理数(当然不是一般的，而是构成基本序列的有理数序列)就称为一个实数. 这种把一列数规定作为一个数是否太奇怪呢？其实，这并不奇怪. 例如，在人们知道了自然数后，发现它对减法运算不封闭，如果要对减法运算封闭，就需要出现$0-n$这种形式的数，即负数。记为$-n$. 再如人们发现自然数对除法运算不封闭，因而需要出现用自然数对(m,n) 规定为一个数，即有理数，记为$\frac{m}{n}$. 而实数理论正是由于极限运算的出现(尽管早在毕达哥拉斯时代已出现个别的非有理数的数，但那时，作为求极限的运算远未出现)，例如一个单调增加的数列，如果有上界，是否一定有极限？这个问题，从几何的直观，似乎是显而易见地肯定对的. 但如果要求给出严格的逻辑证明却又发生困难. 这样就必须要有严格的实数理论，给极限论有坚实的基础. Cantor提出的这种用一列数来规定一个数的思想不仅为实数建立了严格的理论，而且这个思想方法已被泛函分析和其它学科推广了. 例如本书第四章中还将采用这种方法讨论度量空间的完备化问题.

1.4.2 实数列的极限理论

现在利用上面建立的实数理论，来证明极限理论中的几个基本定理.

定义 1.4.12 设$\{a_n\}$是一实数列. 如果有实数a适合如下的条件：对于任何正实数ε，有自然数N，使得当$n\geq N$时成立

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

那末称实数列$\{a_n\}$收敛于极限a，记做$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

定理 1.4.13 (Cauchy收敛原理) 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对于任一正*(实)*数ε，有自然数N，使得当$n, m \geq N$时

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

证明： 必要性是显然的，我们只要证明条件的充分性. 为便于理解，在下面的证明过程中，暂时仍然把有理数和对应于有理数r的实数$\tilde{r} = \{r\}$区别开来.

充分性的证明：对于实数a_n，有有理数x_n,使相应的实数$\tilde{x_n}$适合

$$a_n < \tilde{x_n} < a_n + \widetilde{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

对于任一正有理数δ，由假设，必有自然数N(不妨取$N > \frac{4}{\delta}$),使得当$n, m \geq N$时，

$$|a_n - a_m| < \widetilde{\left(\frac{\delta}{4}\right)}$$

于是当$n, m \geq N$时，

$$\begin{aligned} |\tilde{x_n} - \tilde{x_m}| &\leq |\tilde{x_n} - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - \tilde{x_m}| \\ &\leq \frac{\tilde{1}}{n} + \frac{\tilde{\delta}}{4} + \frac{\tilde{1}}{m} < \widetilde{\frac{3\delta}{4}} \end{aligned}$$

但是$|\tilde{x_n} - \tilde{x_m}| = |\widetilde{x_n - x_m}|$，所以，当$n, m \geq N$时

$$|x_n - x_m| < \frac{3\delta}{4} \tag{1.15}$$

即$\{x_1, x_2, \cdots\}$是基本有理数列，它就是一个实数，记做a. 现在来证明

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

因为

$$|a - \tilde{x_n}| = \{|x_1 - x_n|, |x_2 - x_n|, \cdots, |x_k - x_n|, \cdots\}$$

由(1.15)容易看出，当$k, n \geq N$时，

$$\delta - |x_k - x_n| > \frac{\delta}{4} > 0$$

所以当$n \geq N$时

$$|a-\tilde{x_n}|<\tilde{\delta}$$

对于任何正实数ε, 取有理数δ适合$0<2\tilde{\delta}<\varepsilon$，那末当$n\geq N$(仍然$N>\frac{4}{\delta}$)时，

$$|a-a_n|\leq|a-\tilde{x_n}|+|\tilde{x_n}-a_n|<\tilde{\delta}+\frac{\tilde{1}}{n}<2\delta<\varepsilon$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证毕. QED.

定理 1.4.14 设$\{a_n\}$是单调增加的实数列:

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq\cdots$$

而且$\{a_n\}$是有上界的，那末$\{a_n\}$必收敛.

证明： (用反证法)假设$\{a_n\}$不收敛. 根据Cauchy收敛原理，那末必存在某个正数ε_0，使得对于任意选取的自然数N，不等式

$$|a_n-a_m|<\varepsilon_0$$

不能对一切大于或等于N的n,m都成立. 于是，当取$N=1$时，必有自然数$n_l,m_1\geq 1$使得

$$|a_{n_1}-a_{m_1}|\geq\varepsilon_0$$

不妨假设$n_1>m_1$，取$N=n_1+l$，必有$n_2,m_2\geq N$使得

$$|a_{n_2}-a_{m_2}|\geq\varepsilon_0$$

不妨设$n_2>m_2$. 这样继续下去，可以得到自然数列

$$m_1<n_1<m_2<n_2<\cdots<m_k<n_k<\cdots$$

使得$|a_{n_k}-a_{m_k}|\geq\varepsilon_0$。但由于$\{a_n\}$是单调增加数列，有$a_{n_k}\geq a_{m_k}$,所以

$$|a_{n_k}-a_{m_k}|=a_{n_k}-a_{m_k}\geq\varepsilon_0$$

从而得到

$$a_{n_k}\geq a_{m_k}+\varepsilon_0\geq a_{n_{k-1}}+\varepsilon_0\geq a_{m_{k-1}}+2\varepsilon_0\geq\cdots\geq a_{m_1}+k\varepsilon_0$$

对于任意给定的正数a，取k充分大，可使得$a_{m_1}+k\varepsilon_0>a$, 这样一来得到

$$a_{n_k}>a$$

这和$\{a_k\}$有上界的假设相矛盾. 所以$\{a_n\}$收敛. QED.

定理 1.4.15 (Cantor区间套定理) 设$I_n = [a_n, b_n](n = 1, 2, \cdots)$是一列单调下降的闭区间.

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

并且它们的长度趋于0, $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，那未必有唯一的实数$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, 且

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

证明： 容易看出，各区间的端点之问有着顺序关系：

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots b_n \leq \cdots b_2 \leq b_1 \tag{1.16}$$

所以$\{a_n\}$是一列单调增加且有上界数列，由定理1.4.14，必存在极限$a = \lim_{n\to\infty} a_n$. 又由$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，立即得知$\{b_n\}$也收敛并且$a = \lim_{n\to\infty} b_n$. 由(1.16)知道$a_n \leq a \leq b_n$对一切自然数$n$成立。所以$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. 显然$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$只含有$a$这一个点. QED.

现在我们用区间套定理来证明关于数集上确界的存在定理.

定理 1.4.16 直线上不空的点集必存在唯一的上确界.

证明： 我们只要考察直线上不空的有上界点集A好了. 这时有K，使得任一$x \in A$适合$x \leq K$. 任意取定一个$a \in A$. 显然有A中的点(例如a)落在区间$[a, K]$里面. 记$a_1 = a, b_1 = K$. 把区间$[a_1, b_1] = [a, K]$等分成为两个闭区间$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$其中必至少有一区间内有$A$中的点. 如果两个小区间都有$A$中的点，那未取右边一个小区同，记之为$[a_2, b_2]$. 如果右边的区闻里面没有$A$中的点，就把右边那个区间丢掉，而令左边的区间为$[a_2, b_2]$，那末$A$中的数都$\leq b_2$而且$[a_2, b_2]$中有$A$的数. 这样地继续平分下去。于是，得判单调下降的闭区间列

$$I_n = [a_n, b_n](n = 1, 2, \cdots)$$

并且$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n} \to 0(n \to \infty)$，而且$A$中的数都$\leq b_n, [a_n, b_n]$中有$A$的数. 根据区间套定理，有唯一的实数$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

我们来证明$a = \sup A$. 对每个$x \in A$，有$x \leq b_n$，令$n \to \infty$就得到$x \leq a$. 又对于任何正数ε，必有$a_n > a - \varepsilon$. 因为有$x \in A \cap [a_n, b_n]$，所以有A中的数$x > a - \varepsilon$. 因此a是A的上确界.

上确界的唯一性是显然的. QED.

同样对下确界有

定理 1.4.17 直线上不空的集B有唯一的下确界.

这个定理也可以由B作集$A=\{x\colon x=-y, y\in B\}$，再利用定理1.4.16来证明。

点集A的上确界(下确界)不一定属于A.

定义 1.4.18 落在某个有限区间中的点集*(数列)*叫作有界集*(数列)*.

定理 1.4.19 (Bolzano-Weierstrass) 任何有界数列必有收敛子数列.

证明: 设数列$\{a_n\}$是有界的，即有正数N，使得$|x_n|\le N$. 于是在两个区间$[-N,0],[0,N]$中必有一个含有$\{x_n\}$的无限多项，记这个区间为I_1(如果两个区同同时含有$\{x_n\}$中无限多项，那末任意取一个作为I_1). 譬如说$I_1=[0,N]$，将I_1等分为二:

$$\left[0,\frac{N}{2}\right],\quad \left[\frac{N}{2},N\right]$$

选其中含有$\{x_n\}$中无限多项的一个，记为I_2. 如此继续下去，得到一列闭区间$I_1,I_2,\cdots$，其中每个$I_n=[a_n,b_n]$含有$\{x_n\}$中无限项。它们适合

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$$

而且其长度$\frac{N}{2^{n-1}}$趋于$0(n\to\infty)$. 由区间套定理，有$a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$$

因为每个I_n中含有$\{x_n\}$中无限多项，取$x_{n_1}\in I_1$, 再取$n_2>n_1$且$x_{n_2}\in I_2$。如此下去。那末有$\{x_n\}$的子数列$\{x_{n_k}\}$适合$x_{n_k}\in I_k$, 即

$$a_k\le x_{n_k}\le b_k\quad(k=1,2,\cdots)$$

所以$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. QED.

定义 1.4.20 设D是直线上的点集，$\mathfrak{O}$是一族开区间. 如果

$$\bigcup_{(a,b)\in\mathfrak{O}}(a,b)\supset D$$

就说区间族$\mathfrak{O}$覆盖D.

定理 1.4.21 (Heine-Borel) 设$\mathfrak{O}$是一族开区闻，覆盖着有界闭集F, 那末必可以从$\mathfrak{O}$中选取有限个开区间来覆盖F.

证明： 用反证法．设$F \subset [a,b]$．如果$\mathfrak{O}$中任意有限个开区间不能覆盖F，将$[a,b]$等分为二，得$I_{11} = \left[a, \frac{a+b}{2}\right], I_{12} = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$,其中至少有一个与$F$ 的交集不空。记$F_{11} = F \cap I_{11}, F_{12} = F \cap I_{12}$，这都是闭集．这时，$F_{11}$和$F_{12}$中必有一个，设为$F_{11}$使得$\mathfrak{O}$中任意有限个开区间都不能覆盖$F_{11}$．因为不然的话，如果$\mathfrak{O}$中有两组有限个开区间就能分别覆盖$F_{11}$和$F_{12}$，那末有限个也就能覆盖$F$。记$F_1 = F, F_2 = F_{11}$，就是说，$F_1, F_2$都不能用$\mathfrak{O}$中有限个开区间予以覆盖。重复这个手续，就会得到一列有界闭集$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset$, 它们分别包含在闭区间$I_1 \supset I_2 \supset \cdots$中，$I_k = [a_k, b_k]$，而且每个$F_k = F \cap I_k, (k = 1, 2, \cdots)$都不能被$\mathfrak{O}$中有限个开区间覆盖．由于$I_k$的长度$|I_k| = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) \to 0 (k \to \infty)$，有唯一的$x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$．因为$F_k \neq \emptyset$，有$x_k \in F_k$．由$a_k \le x_k \le b_k$，得到$x_k \to x_0$．由于$\{x_k\} \subset F$而且$F$是闭集，因此$x_0 \in F$.

因为$\mathfrak{O}$覆盖F，有$(a,b) \in \mathfrak{O}$使$x_0 \in (a,b)$，当k充分大时, $I_k \subset (a,b)$，从而$F_k \subset I_k \subset (a,b) \in \mathfrak{O}$，这说明$\mathfrak{O}$中有一个开区间$(a,b)$就能覆盖$F$，这是矛盾. QED.

下面我们要拓广实数列收敛的意义，这里允许它收敛到$\pm\infty$.

定义 1.4.22 设$\{x_n\}$是一列实数，如果对任何数A必有自然数N使得当$n \ge N$ 时$x_n > A$，*(相应地$x_n < A$)*就称$\{x_n\}$收敛于∞，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. *(相应地，$\{x_n\}$ 收敛于$-\infty$, 记为$x_n \to -\infty$)*

拓广了极限的概念后，可以解除一些定理中关于数列有界或有上界或有下界的限制.

定理 1.4.23 单调数列必有极限*(允许极限是$\pm\infty$)*.

证明： 例如，设$\{x_n\}$是单调增加数列．如果$\{x_n\}$有上界。定理1.4.14已讨论过．如果$\{x_n\}$没有上界，那末对每个自然数k，必有$\{x_n\}$的$a_{n_k} > k$．我们在挑选n_k时注意到使得$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，那末$\{x_{n_k}\}$收敛于$\infty$．再由$\{x_n\}$的单调增加性，易知$\{x_n\}$也收敛于$\infty$. QED.

定理 1.4.24 任何数列必有收敛*(允许收敛于$\pm\infty$)*子数列.

证明： 如果数列$\{x_n\}$是有界的，由定理1.4.19，它必有收敛子数列．如果数列$\{x_n\}$是无界的，那末对每个自然数k, N，必有$x_{n_k}, n_k > N, |x_{n_k}| > k$, 从而存在$\{x_{n_k}\}, |x_{n_k}| > k$，并且$n_l < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$．子数列$\{x_{n_k}\}$中必有无限个是同符号的数，例如$\{x_{n_{kj}}\}$是$\{x_{n_k}\}$的取正号(或负号)的子数列，立即知道$x_{n_{kj}} \to \infty$(或$-\infty$). QED.

下面讨论实数列的上限和下限．随着收敛概念被推广到允许极限值是$\pm\infty$，自然，数集A的上确界$\sup A$、下确界$\inf A$也可推广到允许取士∞.

如果数集A中，可取出一个收敛于∞的数列，这时规定$\sup A = \infty$。如果A中取不出收敛于∞的数列，这时$\sup A$的定义和从前一样．同样，如果A 中可取出一个收敛于$-\infty$的数列时，这时规定$\inf A = -\infty$, 如果A中取不出收敛于$-\infty$的数列，$\inf A$的定义和从前一样.

引理 1.4.25 设$\{x_n\}$是一列实数. 那末

$$\sup_n x_n = \lim_{m\to\infty} \max\{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \tag{1.17}$$

$$\inf_n x_n = \lim_{m\to\infty} \min\{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \tag{1.18}$$

证明: 记$M = \sup\limits_n x_n, y_m = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. 显然$\{y_m\}$是单调增加的数列，它是有极限的. 如果$M = \infty$，那末，根据定义，必有子数列$\{x_{n_k}\}$，使得$x_{n_k} \to \infty$. 由于$y_{n_k} \ge x_{n_k}$，即所以$y_{n_k} \to \infty$，从而(1.17)成立. 如果$M < \infty$，那末，根据定义，一切$x_n \le M$，从而$y_m \le M$. 因此

$$\lim_{m\to\infty} y_m \le M \tag{1.19}$$

反过来，对任何$\varepsilon > 0$，必有某个x_n，使得$x_n > M-\varepsilon$，所以当$m \ge n$时，$y_m > M-\varepsilon$，这样又得到

$$\lim_{m\to\infty} y_m \ge M - \varepsilon$$

令$\varepsilon \to 0$，注意到(1.19)，立即可知(1.17)成立.

同样可证(1.18). QED.

定义 1.4.26 $\{x_n\}$是一列实数，它的所有收敛*(允许收敛于$\pm\infty$)*的子数列的极限值中最小*(最大)*值称为$\{x_n\}$的下限*(上限)*，记作$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n(\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n)$，或记作$\liminf\limits_n x_n(\limsup\limits_n x_n)$.

按定义，显然下式成立:

$$\inf_n x_n \le \varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n \le \sup_n x_n \tag{1.20}$$

例 1.4.27 *1.* 对于$\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \cdots, n^{(-1)^{n-1}}, \cdots\right\}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

2. 对于$\{1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots\}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

3. 对于$\{1!, 2!, \cdots, n!, \cdots\}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

4. 对于$\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

关于数列的上、下限有下面的一些基本性质:

定理 1.4.28 *1.* 任何实数列$\{x_n\}$的上，下限必存在，并且

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \min\{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}\} \tag{1.21}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \max\{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}\} \tag{1.22}$$

2. $\{x_n\}$ 为收敛的数列的充要条件是

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \tag{1.23}$$

3. 设$\{y_n\}$是收敛数列，在下式右边有确定意义(即不出现$\infty+(-\infty)$，或$-\infty+\infty$这种不定形式)时，有

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{1.24}$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{1.25}$$

4. 在下式左边有确定意义(即不出现$\infty+(-\infty)$, 或 $-\infty+\infty$。这种不定形式)时，有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \tag{1.26}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \ge \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \tag{1.27}$$

5. $\{x_n\},\{y_n\}$是两个数列，如果$x_n \le y_n (n=1,2,\cdots)$，那末

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varliminf_{n\to\infty} y_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{1.28}$$

6. α是正数，β是负数，那末

$$\varlimsup_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \varliminf_{n\to\infty} x_n \tag{1.29}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \beta x_n = \beta \varliminf_{n\to\infty} x_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} \beta x_n = \beta \varlimsup_{n\to\infty} x_n \tag{1.30}$$

证明：　1. 第一步先证明(1.21)右边的二次极限确实存在.

为方便超见，记

$$G_{n,m} = \min\{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}\}$$

固定n时，数列$\{G_{n,m}: m=1,2,\cdots\}$是单调下降的. 根据定理1.4.23,它必有极限，把它的极限(可以是$-\infty$)记为

$$G_n = \lim_{m\to\infty} G_{n,m}$$

根据引理1.4.25，$G_n = \inf_{k\ge n} x_k$. 由于集$\{x_k: k\ge n\} \supset \{x_k: k \ge k+1\}$，所以前者的下确界不大于后者的下确界，所以数列$\{G_n\}$又是单调增加的，再用定理1.4.23，它的极限存在(也可以是$\pm\infty$)，记为$G = \lim\limits_{n\to\infty} G_n$. 那末

$$G = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \min\{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}\}$$

存在。

第二步证明G是$\{x_n\}$的某个收敛子数列的极限.

首先，由于$G_n = \inf\limits_{k \geq n} x_k$，对每个$n$，必有$k_n(\geq n, k_{n-1})$使得

$$G_n \leq x_{k_n} < G_n + \frac{1}{n}, \qquad \text{当} G_n > -\infty \text{时} \tag{1.31}$$

$$x_{k_n} < -n, \qquad \text{当} G_n = -\infty \text{时} \tag{1.32}$$

我们找到了子数列$\{x_{n_k}\}$使得

$$G = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$$

第三步我们要证明$\{x_n\}$的任何一个收敛子数列$\{x_{n_k}\}$的极限都不小于G. 由于

$$G_{n_k} = \inf_{m \geq n_k} x_m \leq x_{n_k}$$

所以$G = \lim\limits_{k \to \infty} G_{n_k} \leq \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$ 因此G就是$\{x_n\}$的一切收敛子数列的极限的最小值. 因此$\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n$存在而且就等于$G$。

类似地可以讨论上限. 至于(2-6)的证明留给读者. QED.

对于实函数序列$f_n(t)$，可以仿照上面(i)相应地定义函数列的上限(下限)函数，即

$$\varliminf_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \min\{f_n(t), f_{n+1}(t), \cdots, f_{n+m}(t)\} \tag{1.33}$$

$$\varlimsup_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \max\{f_n(t), f_{n+1}(t), \cdots, f_{n+m}(t)\} \tag{1.34}$$

习题

1. 证明定理1.4.28中(2-6)以及(1.22)式成立.

2. 设$\{x_n\}$的上限是有限值. 证明数$a = \varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n$的充要条件是：对任何$\varepsilon > 0$，满足$x_n > a + \varepsilon$的$x_n$只有有限个，而$x_n > a - \varepsilon$的$x_n$必有无限个.

3. 设$\{x_n\}$是实数列，如果它的一切收敛子数列的极限都是有限的，记这些极限值全体为S，证明S是闭集.

1.5 直线上的点集

前面研究了一般的集和它们的一般性质，介绍了集的运算，集的映照，集的势等等重要概念. 这些内容固然重要，但还不足以描述分析数学中要用到的收敛性，不足以描述极

限概念，还不能满足下面研究测度和积分的需要，我们必须进一步研究点集．关于点集的理论，本书分为两步．第一步先来介绍最常用的实数直线上的点集，也就是实数集的基本概念和性质，这一方面是为满足下面两章测度与积分理论中讨论直线上的勒贝格测度和积分的需要；另一方面也为在泛函分析中所需要的更一般的点集理论提供典型特例．第二步我们将在第四章中着重讨论度量空间的点集．

1.5.1　实数直线和区间

我们用E^1表示实数的全体所成的集，也就是实数直线．每个实数也称为点．

直线上最常用的一种点集是区间，区间有下面几种：

- 点集$(a,b)=\{x\colon a<x<b\}$称为开区间，$-\infty\le a<b\le\infty$
- 点集$[a,b)=\{x\colon a\le x<b\}$称为左闭右开区间，这里$-\infty<a\le b\le\infty$
- 点集$(a,b]=\{x\colon a<x\le b\}$称为左开右闭区间，这里$-\infty\le a\le b<\infty$

  区间$(a,b]$或$[a,b)$统称作半开半闭区间．
- 点集$[a,b]=\{x\colon a\le x\le b\}$称做闭区间，这里$-\infty<a\le b<\infty$

  这些点集统称作区间，可简记为$<a,b>$．

注意，一点a所成的集$\{a\}$也是闭区间，就是$[a,a]$．

定义 1.5.1 设A是一个实数集，如果存在有限数c，使得对于一切$x\in A$都有$x\le c$(或$x\ge c$)，就说A是有上界(或有下界)的．这时必有唯一的有限数M(或m)适合下述两个条件：

1. 对一切$x\in A, x\le M$(或$x\ge m$)；
2. 对任何正数ε, 有$x\in A$使得$x>M-\varepsilon$(或$x<m+\varepsilon$)

称M是A的上确界，m是A的下确界，记M为$\sup\limits_{x\in A}x$，m为$\inf\limits_{x\in A}x$．如果A不是有上界的，规定A的上确界是$+\infty$，即$\sup\limits_{x\in A}x=+\infty$．有时$\sup\limits_{x\in A}x$ 又记做$\sup A$．同样地如果A不是有下界的，规定A的下确界是$-\infty$，即$\inf\limits_{x\in A}x=-\infty$, $\inf\limits_{x\in A}x$又可记为$\inf A$．

1.5.2　开集

定义 1.5.2
- 设x_0是直线上的一点，包含x_0的任何一个开区间(a,b)称做x_0的一个环境(或邻域)．
- 如果δ是一个正数，称$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为x_0的$\delta-$环境，记为$O(x_0,\delta)$．
- 设A是直线上的一个不空的点集，$x_0\in A$，如果存在x_0的环境$(a,b)\subset A$，那末x_0称为点集A的内点．

例如当$a<b$时，任何区间$<a,b>$除端点外的每点都是这个区间的内点.

定义 1.5.3 设G是直线上的一个不空的点集，如果G中每一点都是G的内点，称G是开集.

规定空集是开集.

例如任何开区间(a,b)是开集.

开集的基本性质是:

定理 1.5.4 *1.* 空集$\emptyset$和全直线是开集;

2. 任意一族开集的并集是开集;

3. 有限个开集的交集是开集.

证明:

1. 是显然的.

2. 设$\{G_\alpha\colon\alpha\in\Lambda\}$是一族开集。由开集的定义，要证明$G=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$是开集. 只须对于$G$中任意一点$x_0$，证明存在$x_0$的环境$(a,b)\subset G$就可以了. 因为$x_0\in G$，必有族中的某开集$G_\alpha$，使得$x_0\in G_\alpha$. 因此$x_0$是$G_\alpha$的内点，所以存在$x_0$的一个环境$(a,b)\subset G_\alpha$. 这就是说$x_0$是$G$的内点，即$G$是开集.

3. 设$G_1,G_2,\cdots,G_n$是有限个开集. 令$G=\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i$. 我们只要考虑当$G$不是空集时的情况. 任意取$x_0\in G$，那末$x_0\in G_i(i=1,2,\cdots,n)$. 因为$G_i$是开集，所以存在$x_0$的环境$(a_i,b_i)\subset G_i,(i=1,2,\cdots,n)$ 令$(a,b)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$，即$a=\max\limits_{1\le i\le n}a_i,b=\min\limits_{1\le i\le n}b_i,x_0\in(a,b)$. 因此，$(a,b)$是$x_0$的环境，并且显然$(a,b)\subset(a_i,b_i)\subset G_i(i=1,2,\cdots,n)$, 所以$(a,b)\subset G$，即$x_0$是$G$的内点，$G$是开集.

QED.

在定理1.5.4的(2)中，“任意个开集”，既可以是有限个也可以是无限个. 但是在(3)中，如果把“有限个开集”改为“无限个开集”，那末它们的交集就不一定是开集了. 例如$G_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),n=1,2,\cdots$, 显然它们的交集$G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$，即$G$是只含有一点0的集，它不是开集.

在直线上，开区间是开集.

由(2)可知任意个开区间的并集必是开集. 特别，一族互不相交非空开区间(最多是可列个)$\{(a_i,b_i)\}$的并集$G=\bigcup\limits_i(a_i,b_i)$是开集. 现在我们要证明这正是$E^1$上非空开集的一般形式. 为此引入开集的构成区间概念.

定义 1.5.5 设G是直线上的开集. 如果开区间$(a,b) \subset G$而且端点a,b不属于G，那末称(a,b)为G的一个构成区间.

例如开集$(0,1)\cup(2,3)$的构成区间是$(0,1)$及$(2,3)$.

定理 1.5.6 (开集的构造) 直线上任意一个非空开集可以表示成有限个或可列个互不相交的构成区间的并集. 又当非空开集表示成互不相交的开区间的并集时，这些开区间必是构成区间.

证明： 设G是直线上的一个非空开集，分以下四步来论证:

1 开集中任何一点必含在一个构成区间中. 事实上，任意取$x_0 \in G$，记A_{x_0}为适合条件$x_0 \in (a,b) \subset G$的开区间(a,b)全体所成的区间集. 因为G是开集，A_{x_0}不会空. 记$a_0 = \inf\limits_{(a,b)\in A_{x_0}} a, b_0 = \sup\limits_{(a,b)\in A_{x_0}} b$ 作开区间(a_o,b_0)(其实，$(a_0,b_0) = \bigcup\limits_{(a,b)\subset A_{x_0}} (a,b)$). 显然$x_0 \in (a_0,b_0)$.

现在证明(a_0,b_0)是G的构成区间. 先证$(a_0,b_0) \subset G$. 任意取$x' \in (a_0,b_0)$，不妨设$x' \le x_0$. 由于a_0是下确界，所以必有$(a,b) \in A_{x_0}$使$a_0 < a < x'$，因此$x' \in (a,x_0] \subset (a,b) \subset G$. 同样，如果$x' > x_0$，也可以证明相类似的结果. 因此$(a_0,b_0) \subset G$. 由此顺便得到$(a_0,b_0) \in A_{x_0}$.

再证$a_0 \notin G$: 如果不对，那末$a_0 \in G$，因为G是开集，必有区间(a',b')，使得$a_0 \in (a',b') \subset G$. 这样，$x_0 \in (a',b') \subset (a',b') \cup (a_0,b_0) \subset G$ ，因此，$(a',b_0) \subset G$,而$a' < a_0$，这就和a_0是A_{x_0}中的区间左端点的下确界相矛盾. 所以$x_0 \notin G$. 同样有$b_0 \notin G$. 这就是说(a_0,b_0)是G的构成区间.

2 开集G的任何两个不同的构成区间必不相交. 不然的话，设$(a_1,b_1),(a_2,b_2)$是G的两个不同的构成区间，但相交. 这时必有一个区间的端点在另一个区间内，例如$a_1 \in (a_2,b_2)$，但$(a_2,b_2) \subset G$，这和$a_1 \notin G$矛盾. 因此不同的构成区间不相交. 开集G的构成区间全体最多只有可列个，记为$\{(a_i,b_i), i = 1,2,\cdots\}$.

3 由(1)、(2)得到$G \subset \bigcup\limits_i (a_i,b_i)$. 又由构成区间的定义，有$G \supset \bigcup\limits_i (a_i,b_i)$，所以$G = \bigcup\limits_i (a_i,b_i)$

下面再证非空的互不相交开区间必是它们的并集的构成区间.

4 设$G = \bigcup\limits_i (a_i,b_i)$是一组互不相交的开区间的并集. 现在只要证明每个$(a_i,b_i)$都是$G$的构成区间. 显然$(a_i,b_i) \subset G$。若它不是构成区间，比方说$a_i \in G$，那末必有$j \neq i$使得$a_i \in (a_j,b_j)$, 因而$(a_i,b_i)$与$(a_j,b_j)$相交. 这和假设矛盾. 所以$a_i \notin G$. 同样$b_i \notin G$. 所以$(a_i,b_i)$是构成区间.

QED.

1.5.3 极限点

极限概念是分析数学中的基本概念之一. 为了进一步研究实变函数的需要，我们这里要对直线上点集与极限有关的性质，作仔细的分析.

实数列的极限概念在数学分析中通常是这样叙述的:

定义 1.5.7 设$\{x_n\}$是一列实数，如果存在实数x_0，它有下面的性质：对于任何正数ε，存在自然数N, 使得当$n \geq N$时成立着

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \tag{1.35}$$

那末称数列$\{x_n\}$收敛于x_0，记做$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，或者记为$x_n \to x_0 (n \to \infty)$，并且称$x_0$为$\{x_n\}$的极限。

利用一点的环境不难把收敛定义用下面的充要条件来代替.

引理 1.5.8 直线上点列$\{x_n\}$收敛于x_0的充要条件是对于x_0的任何环境(a,b)，存在自然数N, 使得当$n \geq N$时有

$$x_n \in (a,b) \tag{1.36}$$

证明: 必要性: 设$x_n \to x_0$，那末对x_0的任何环境(a,b)，取正数$\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$，这时必有自然数$N$使得当$n \geq N$时$|x_n - x_0| < \delta$，因此，$x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$.

充分性: 设引理中的条件满足，对x_0的任何环境$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$，有$N$使得当$n \geq N$时$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$，这就是(1.35). QED.

下面要讨论点集的极限点。

定义 1.5.9 设A是实数直线上的点集，x_0是直线上的一点(可以属于A，也可以不属于A)，如果在x_0的任何一个环境(a,b)中，总含有集A中不同于x_0的点，即$((a,b) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. 那末称$x_0$为点集$A$的极限点.

显然，一个点集的内点都是这点集的极限点. 又如当

$$-\infty < a < b < \infty$$

时，区间$< a, b >$的端点是这区间的极限点.

例 1.5.10 点集$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$以0为极限点.

极限点的定义有多种等价的形式.

引理 1.5.11 设A是实数直线上的一个点集，x_0是直线上的一点，那末下面的四件事是等价的:

1. x_0是集A的极限点.
2. 存在集A中点列$\{x_n\}$, $x_n \neq x_0 (n = 1, 2, \cdots)$，使得$x_n \to x_0$.
3. 存在集A中一列互不相同的点$\{x_n\}$，使得$x_n \to x_0$.
4. 在x_0的任何环境(a, b)中必含有A中无限多个点.

证明: 只要证明$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$就可以了.

$(1) \Rightarrow (2)$ 设x_0是A的极限点，那末对每个正整数n，必有$x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A, x_n \neq x_0$，就是说，有$A$中不同于$x_0$的点列$\{x_n\}$，适合

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

因此$x_n \to x_0$，这就是条件(2)。

$(2) \Rightarrow (3)$ 设x_0适合条件(2). 这时点列$\{x_n\}$中必有无限多项彼此不相同. 因为如果点列$\{x_n\}$只由有限多个点组成，必有一个点a在其中重复出现无限次，然而$x_n \to x_0$，那末应该$a = x_0$，但是这与$x_n \neq x_0$冲突. 设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$中互不相同的点组成的子序列，显然，$\{x_{n_k}\}$就是适合(3)中所要求的序列.

$(3) \Rightarrow (4)$ 设$\{x_n\}$是A中互不相同元素组成的序列，并且$x_n \to x_0$. 根据引理1.5.8，对任何x_0的环境(a, b)，必存在N，当$n \geq N$ 时，$x_n \in (a, b)$，即(a, b)含有A中无限个点.

$(4) \Rightarrow (2)$ 是显然的.

QED.

和极限点相对立的是孤立点.

定义 1.5.12 设A是直线上的点集，$x_0 \in A$. 如果x_0有一个环境(a, b)，其中除x_0外不含有A的点，即$((a, b) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$，称$x_0$是$A$的孤立点.

如果不空的点集A中每一点都是孤立点，称A是孤立集.

从定义可知，集A中任何一点x_0，如果x_0不是A的极限点，那末x_0必是A的孤立点. 因此，集A中的内点不是A的孤立点. 一个集A，如果A中每一点都不是A自身的极限点时，A便是孤立集. 集$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$就是孤立集.

例 1.5.13 空集没有极限点.

例 1.5.14 有限点集或发散到无穷远的点列所成的点集都没有极限点，所以是孤立点集.

例 1.5.15 以R_0表示区间$[0,1]$中的有理数全体. 那末区间$[0,1]$ 中任何一点都是R_0的极限点. 除此以外，R_0没有任何其它的极限点.

例 1.5.16 闭区间$[0,1]$的极限点全体就是$[0,1]$.

这些例子说明了直线上点集的极限点的各种可能的情况: (i) 没有极限点(如例1.5.13、1.5.14); (ii)一个点集的极限点可以都不属于这个点集(例1.5.10); (iii)一个点集A的极限点可以一部分在A中，另一部分不在A中，甚至极限点比A本身的点还多(如例1.5.15); (iv)一个点集本身同时就是它自己的极限点全体(如例1.5.16). 为了进一步分析点集和它的极限点的关系，我们引入如下的概念.

1.5.4 闭集

定义 1.5.17 点集A的极限点的全体所成的集称为A的导集，记为A'.

显然，A是孤立集的充要条件是$A \cap A' = \emptyset$.

没有极限点的点集，它的导集是空集. 因而空集的导集是空集.

定义 1.5.18 如果点集A的极限点全部属于A，即$A' \subset A$，称点集A 是闭集.

因此，如果点集A没有极限点，那末A是闭集，从而空集是闭集. 容易看到闭区间是闭集.

从下面的定理可以看出，闭集就是对于极限运算封闭的点集.

定理 1.5.19 点集A为闭集的充要条件是集A中任何一个收敛点列必收敛于A中的一点.

证明： 必要性: 设A是一个闭集，$\{x_n\}$是A中的一个收敛点列，$x_n \to x_0$. 我们要证明$x_0 \in A$. 如果有某个$n, x_n = x_0$，那末自然$x_0 \in A$. 如果对一切$n, x_n \neq x_0$，由引理1.5.11的(2)知道x_0是A的极限点，于是$x_0 \in A' \subset A$，所以$x_0 \in A$.

充分性: 设A中任何一个收敛点列必收敛于A中一点，对于A的任何一个极限点$x_0 \in A'$，由引理1.5.11，有A中的收敛点列$\{x_n\}$ 收敛于x_0，由假设，$x_0 \in A$，所以$A' \subset A$，即A是闭集. QED.

定理 1.5.20 点集A成为闭集的充要条件是A的余集$A^c = E^1 \setminus A$开集.

换句话说，闭集的余集是开集，开集的余集是闭集.

证明： 必要性: 假设A是闭集，那末A^c中任何一点x_0不是A的极限点. 由极限点的定义，存在x_0的环境(a,b)，使得$((a,b) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$，又因$x_0 \in A^c$，因此$(a,b) \subset A^c$，从而$x_0$是$A^c$的内点，所以$A^c$是开集.

充分性：设A的余集A^c是开集，于是对于A^c中每一点x_0，存在x_0的一个环境$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset A^c$，自然$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中没有$A$的点，所以$x_0$不是$A$的极限点．即$A$的极限点必属于$A$，因而$A$是闭集． QED.

从定理1.5.4中开集的基本性质，利用de Morgan关系式及上面定理1.5.20，立即得到闭集的基本性质如下：

定理 1.5.21 *1.* 空集和全直线是闭集；

2. 任意一族闭集的交集是闭集；

3. 有限个闭集的并集是闭集．

证明： 这里只证(2)．

设$\{F_\lambda\}$是一族闭集，它们的余集$F_\lambda^c=E^1\setminus F_\lambda$是开集．由定理1，$\bigcup\limits_\lambda F_\lambda^c$是开集．但是由和通关系$E^1\setminus\bigcup\limits_\lambda F_\lambda^c=\bigcap\limits_\lambda F_\lambda$，而且由定理4，$E^1\setminus\bigcup\limits_\lambda F_\lambda^c$是闭集，所以$\bigcap\limits_\lambda F_\lambda$是闭集． QED.

注意，(3)中的条件“有限个”闭集不能改成“无限个”闭集．

例 1.5.22 $(0,1)=\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$．其中每一项$\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$都是闭集，而这无限多个闭集的和却是开区间$(0,1)$，它不是闭集．

既然闭集的余集是开集，那末从开集的构造可以引入余区间的概念．

定义 1.5.23 设A是直线上的闭集，称A的余集$A^c=E^1\setminus A$的构成区间为A的余区间．

我们又可以得到闭集的构造如下：

定理 1.5.24 直线上的闭集F或是全直线，或是从直线上挖掉有限个或可列个互不相交的开区间*(*即F的余区间*)*所得到的集．

直线上存在不开不闭的集，如区间$(a,b],[a,b)$．直线上既开又闭的点集，只有两个，一个是空集，另一个是全直线．

事实上，如果点集A不是空集但同时既是开集又是闭集，则可证明A必是全直线．

用反证法．假设A不是全直线．由于A是开集，如果A的构成区间是$\{(a_n,b_n)\}$，那末$A=\bigcup\limits_n(a_n,b_n)$．由于$A$ 不是全直线，那末这些构成区间的端点$\{a_n,b_n\}$中至少有一个是有限的，设为$a_1,a_1\notin A$．但由于$(a_1,b_1)\subset A$，所以a_1是A的极限点．又由于A是闭集，$A'\subset A$，从而必须$a_1\in A$．这是矛盾．所以A必是全直线．

由定理1.5.21及集的运算性质，可得到下面的结果：

定理 1.5.25 开集减闭集后的差集仍是开集，闭集减开集后的差集仍是闭集．

证明： 设G是一开集而F是一闭集，由于

$$G \setminus F = G \cap (E^1 \setminus F), \quad F \setminus G = F \cap (E^1 \setminus G)$$

从定理1.5.4，1.5.20及1.5.21即得知$G \setminus F$是开集，$F \setminus G$是闭集. QED.

闭集的最大优点是它对求极限运算是封闭的. 对于一个非闭的集，只要将它的所有极限点补充到该集上就成为闭集了. 下面来证实这一点.

定义 1.5.26 A是一个点集，称$A \cup A'$为A的闭包，记为$\overline{A}$.

定理 1.5.27 集A的闭包是闭集.

证明： 设x_0是$\overline{A} = A \cup A'$的极限点，今证$x_0 \in \overline{A}$. 显然不妨设$x_0 \notin A$. 根据引理1.5.11，存在$\overline{A}$中互不相同的点组成的序列$\{x_n\}$，使得$x_n \to x_0$. 再作A中序列$\{x'_n\}$如下：当$x_n \in A$时，取$x'_n = x_n$；当$x_n \notin A$ (即$x_n \in A'$)时，取x'_n满足$|x'_n - x_n| < \frac{1}{n}$(显然，这是易于做到的). 这样$A$中序列$\{x'_n\}$就满足$x'_n \neq x_0 (n = 1, 2, \cdots)$，而且$x'_n \to x_0$. 再根据引理1.5.11，$x_0 \in A' \subset \overline{A}$. QED.

定理 1.5.28 设A是直线上的点集，那末$x \in \overline{A}$的充要条件是x的每个环境(a, b)与A相交.

证明： 设$x \in \overline{A}$，当$x \in A$时，自然x的每个环境(a, b)与A相交；当$x \notin A$时，x必须属于A'，对x的每个环境(a, b)，$(a, b) \setminus \{x_0\}$与A相交，自然(a, b)也与A相交.

反过来，设x_0的每个环境(a, b)与A相交，如果$x_0 \in A$，自然$x_0 \in \overline{A}$；如果$x_0 \notin A$，那末$((a, b) \setminus \{x_0\})) \cap A = (a, b) \cap A$不空，因此$x_0 \in A'$. 总之$x_0 \in \overline{A}$. QED.

顺便我们得到

定理 1.5.29 设A是直线上的点集，A成为闭集的充要条件是$A = \overline{A}$

证明： 如果$A = \overline{A}$，那末$A. \subset \overline{A} = A$，所以$A$是闭集. 反过来，如果$A$是闭集，那末$A' \subset A$，所以$\overline{A} = A \cup A'A$. QED.

1.5.5 完全集

定义 1.5.30 如果$A \subset A'$，就称A是自密集.

换句话说，当集中的每一个点都是这个集的极限点时，这个集是自密集；另一个说法就是没有孤立点的集就是自密集.

定义 1.5.31 如果$A' = A$，称A是完全集。完全集就是自密闭集,也就是没有孤立点的闭集.

例如闭区间$[a,b](a<b)$，空集及全直线都是完全集.

由孤立点的定义很容易知道，直线上点集A的孤立点必是包含在A的余集中的某两个开区间的公共端点. 因此，闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点。完全集是没有孤立点的闭集，所以，完全集就是没有相邻接的余区间的闭集.

下面举一个重要的完全集的例子，后面要用来说明一些问题。

Cantor集 将闭区间$[0,1]$三等分，去掉中间的一个开区间$I_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，把剩下的两个闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},1\right]$分别再三等分，再各去掉中间的开区间:

$$I_1^{(2)}=\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right),\quad I_2^{(2)}=\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)$$

余下四个闭区间

$$\left[0,\frac{1}{3^2}\right],\left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right],\left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right],\left[\frac{8}{3^2},1\right]$$

又分别把这些闭区间三等分，再各去掉其中问构开区间:

$$I_1^{(3)}=\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right),I_2^{(3)}=\left(\frac{2}{3^3},\frac{3}{3^3}\right),I_3^{(3)}=\left(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right),I_4^{(3)}=\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)$$

这样继续下去，在第n次三等分时去掉的开区间(称为第n级区间)是

$$I_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),I_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\cdots,I_{2^{n-1}}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$$

令$O_c=\bigcup\limits_{n,k}I_k^{(n)}$，这是一个开集，所以$K=[0,1]\setminus O_c$是闭集，称$K$ 为Cantor集.

Cantor集具有下面一些重要性质:

(i) Cantor集是完全集.

事实上，K的余区间就是$\left\{I_k^{(n)}\right\},k=1,2,\cdots,2^{n-1},n=1,2,\cdots$ 以及$(-\infty,0),(1,\infty)$. 这些区间显然是互不相邻的. K是没有相邻接的余区间的闭集，所以K是完全集。

(ii) Cantor集的势是$\aleph$.

用$[0,1]$中数的二进制和三进制小数表示法来证明. 将$[0,1]$ 先用三进位小数表示，三进位有理小数采用有限位小数表示，例如$\frac{1}{3}$表示为0.1，而不采用表示$0.222\cdots$. 显然

$$I_1^{(1)}=(0.1,0.2)$$
$$I_1^{(2)}=(0.01,0.02),I_2^{(2)}=(0.21,0.22)$$

可以看出一般的第n级的余区间$I_k^{(n)}(k=1,2,\cdots,2^{n-1})$形如

$$(0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1, 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}2)$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$都只是0或2. 因此，这个余区间中的实数展成三进位小数时必然形如

$$0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1a_{n+1}\cdots$$

即$[0,1]\setminus K$中的数展成三进位小数时，其中至少有一位是1. 我们考察形如

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots \tag{1.37}$$

的小数，其中每个系数a_n都是0或者2，这种小数全体记为A.

由于$A \subset [0,1]$，而$[0,1]\setminus K$中的数展开成三进位小数(1.37) 中a_n至少有一位是1，所以$[0,1]\setminus K$中没有A的数，因而有$A\subset K$

令B是$[0,1]$的二进位小数表示全体(也采用二进位有理小数的有限位小数表示). 作A到B的映照φ,

$$\varphi\colon x = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{3^m} \mapsto x' = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{2}\frac{1}{2^m}, \quad a_m = 0\text{或}2, m = 1, 2, \cdots$$

这个映照是一一对应，但B的势是$\aleph$，所以A的势也是$\aleph$. 又由$A\subset K\subset[0,1]$，立即知道K的势是$\aleph$.

注 1.5.32 更一般地可以证明：直线上任何非空完全集的势为$\aleph$.

(iii)被挖去的区间$\left\{I_k^{(n)}\colon k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}, n = 1, 2, \cdots\right\}$的长度之和为1.

事实上. 第n级区间$I_k^{(n)}$是$\frac{1}{3^n}$，但第n级区间总共有2^{n-1} 个. 所以被挖去的区间$\{I_k^n\}$的总长度$l = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$。

习题

1. 证明任意点集的内点全体成一开集.

2. 证明任意点集的导集是闭集.

3. 设$f(x)$是区间$[a,b]$上的实连续函数，c是常数. 证明点集$\{x\colon x\in[a,b], f(x)\geq c\}$是闭集，点集$\{x\colon x\in[a,b], f(x)<c\}$ 是开集.

4. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是直线上的有限个集，证明

$$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)' = A_1'\cup A_2'\cup\cdots\cup A_n'$$

5. 记$A^{(1)} = A', A^{(2)} = (A^{(1)})', \cdots, A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$. 试作一集$A$，使$A^{(n)}, n = 1, 2, \cdots$彼此相异.

6. 证明直线上的孤立点集必是有限集或可列集.

7. 证明每个闭集必是可列个开集的交集，每个并集可以表示成可列个闭集的并集.

8. 设$f(x)$是$[a, b]$上任一有限的实函数. 证明它的第一类不连续点全体最多是可列集.

9. 证明直线上开集全体所成的集的势是$\aleph$.

10. 证明直线上闭集全体所成的集的势是$\aleph$，直线上完全集全体所成的集的势也是$\aleph$.

定义 A, B是直线上两个点集，如果$A' \cap B \subset A$称A是相对于B的闭集. 如果对任何$x \in A$，总有一个x的环境(a, b)，使得$(a, b) \cap B \subset A$，称A是相对于B的开集.

11. 证明：A是相对于B的闭集(开集)的充要条件是存在直线上的闭集F (开集G)，使得$A = B \cap F (A = B \cap G)$.

12. 证明求闭包运算具有下面性质：

(i)$\overline{\emptyset} = \emptyset$ (ii)$\overline{A} \supset A$ (iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(上述四个性质又称为Kuratowski闭包公理)

13. 证明$x \in \overline{A}$的充要条件是存在A中一个序列$\{x_n\}$，使得$x_n \to x_0$

14. 证明$\overline{A}$是包含A的最小闭集(即对任何闭集F，如果$F \supset A$，那末$F \supset \overline{A}$). 此题等价的说法是：$\overline{A}$是一切包含A的闭集的交集.

定义 设A是直线上点集，x是直线上的一点。如果在x的任何环境中总含有A中不可列无限的点，那末称x是A的凝聚点.

15. 证明：

- 对任何不可列无限集A，必有凝聚点，而且在A中必有一个点是A的凝聚点.
- 如果x是A的凝聚点，那么x是A的凝聚点的极限点.
- 直线上闭集F的势除了有限、可列外必为$\aleph$.

16. 如果直线上集A的导集A'是有限集或可列集，那末A必是可列集.

17. 设A是直线上非空闭集. 证明：如果A是疏朗完全点集，那末A的任何两个余区间之间必至少夹有另一个余区间.

18. 直线上的完全集A，如果具有如下性质：任伺两个余区间之间必至少夹有一个余区间。问是否A必是疏朗的。

19. 直线上孤立点集全体的势是多大？

20. 把$[0,1]$中数用十进位小数展开，十进位有理小数规定展开成有限位小数，但以6为尾数的有限小数规定展开为无限循环小数。证明$[0,1]$中数的一切展开中不用数字6的全体是完全集.

21. 证明下面几件事是等价的.

    (a) A是疏朗集

    (b) A不包含任何一个非空环境

    (c) $\overline{A}$是疏朗集

    (d) $\overline{A}$的余集$\overline{A}^c$是稠密集

    (e) 任何非空环境(a,b)中必有非空环境$(a',b')\subset(a,b)$，使得(a',b')中不含A中的点。

22. 证册无理数全体不能表示成可列个闭集的并集.

23. 设$<a,b>$或是闭区间$[a,b]$或是开区间(a,b)，$f(x)$是$<a,b>$上定义的有限实函数. 证明当$f(x)$是$<a,b>$上连续函数时，对任何实数c，集$\{x\colon x\in<a,b>, f(x)\geq c\}$是相对于$<a,b>$的闭集；对任何实数$c$，集$\{x\colon x\in<a,b>, f(x)>c\}$ 是相对于$<a,b>$的开集.

24. 是否存在$[0,1]$上的如下函数，它在$[0,1]$的每个有理点上是连续的，而在$[0,1]$的每个无理点上是不连续的.

25. $\{I_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$是直线上一族开区间. 如果它们的交集非空，那末它们的并集必是开区间.

定义 设$\{B_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$是一族集。如果集$M$中任何一点$x$，必存在某个$B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，使得$x$是集$B_\lambda$的内点，那末称$\{B_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$是$M$的覆盖. 特别，如果$\{B_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$中每个$B_\lambda$是开集，那末称$\{B_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$是$M$的开覆盖.

26. 设F是直线上有界闭集，$\{B_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$是$F$的一个覆盖. 证明，必存在$\{B_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$中的有限个集$B_{\lambda_1},B_{\lambda_2},\cdots,B_{\lambda_n}$，使得$B_{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$也成为$F$的覆盖

27. (Lindelöf，Young定理)设A是直线上的一个集，$\{I_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$是$A$ 的一个覆盖. 证明，必存在$\{I_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$中(最多是)可列个集$\{B_{\lambda_n}\colon n=1,2,\cdots\}$ 使得$\{B_{\lambda_n}\}$成为A的覆盖.

28. 设$\{F_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$是一族集，并且每个$F_\lambda$是有界闭集。如果任取有限个集$F_{\lambda_1},F_{\lambda_2},\cdots,F_{\lambda_n}$，总有$\bigcap\limits_{i=1}^{n}F_{\lambda_i}\neq\emptyset$，那末$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\emptyset$

第二章　Lebesgue测度

2.1　Lebesgue可测集

为什么要引入Lebesgue测度，即测量（或度量）集合长度的方法？在平面几何中，我们对线段（区间）可以引入长度的概念。首先，我们引进标准长度度量，而将线段与这一标准长度相比较就可以得到这个线段的长度。在数学分析中，我们通过区间的分划，利用Riemann 积分可以求一曲线围成的平面区域的面积。由于科学的进步，数学的发展，在19世纪末，人们发现Riemann求积分的方法在许多场合已经不再适合了，就如同在19世纪末，物理学的发展，人们发现经典无力已不再适合来描述微观粒子的物理现象，而建立和发展了相对论和量子力学一样，也就是要求人们引进一种不同于Riemann积分的求积分的方法。特别是在三角级数的研究中，人们迫切需要一种新的积分。Lebesgue就是在这种背景下引进Lebesgue积分。为了引进Lebesgue积分，我们将推广长度的概念，使得必线段（区间）更广的一类集合仍然可以求长度，并且具有长度的性质。

2.1.1　外侧度

对于任何一个有限区间$< a, b >$，无论它是闭的、开的或者半开半闭的，我们都规定它的长度为$b-a$。

由开集的构造定理，我们知道任何开集G都是由最多可列个互不相交的开区间$(a_i, b_i)(i \in I)$构成，$G = \bigcup\limits_{i\in I}(a_i, b_i)$。我们规定它的长度$m(G) = \sum\limits_{i\in I}(b_i - a_i)$。这时，如果有一个区间是射线，或者$\sum\limits_{i\in I}(b_i - a_i) = \infty$，我们都规定$G$的长度是$\infty$。容易验证，如果两个开集$G_1$和$G_2$互不相交，则有：

$$m(G_1 \cup G_2) = m(G_1) + m(G_2)$$

对于直线上的一般集合，我们没有如同开集一样的构造定理，但是我们可以引进如下的外测度

定义 2.1.1 设A是直线的子集，令

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_i l(I_i) \colon A \subset \bigcup_i I_i, I_i\text{是开区间}\right\}$$

称$m^*(A)$为A的外测度。

规定空集$\emptyset$的外测度为$0, m^*(\emptyset) = 0$

例 2.1.2 单点集的外测度等于0

证明： 设x_0是直线上的一个点，$A = \{x_0\}$。对于任意的$\varepsilon > 0$，开区间$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \supset A$，所以$m^*(A) \le 2\varepsilon$。 QED.

例 2.1.3 可数无限集的外测度等于0

证明： 设A是直线上的可数无限集，$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$。对于任意的$\varepsilon > 0$，开区间列$\{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})\}$的并$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) \supset A$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) = 2\varepsilon$，所以：$m^*(A) \le 2\varepsilon$。 QED.

引理 2.1.4 设$\{(a_i, b_i)\}$是直线上的至多可列个开区间，如果开区间$(a, b) \subset \bigcup\limits_i (a_i, b_i)$，那么

$$b - a \le \sum_i (b_i - a_i) \tag{2.1}$$

证明： 任取c, d满足：$a < c < d < b$，那么闭区间$[c, d] \subset \bigcup\limits_i (a_i, b_i)$。由Heine-Borel的有限覆盖定理，存在有限个开区间覆盖$[c, d]$，不妨假设为$\{(a_i, b_i) \colon i = 1, 2, \cdots, n\}$。

因为$c \in \bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$，因此存在$i$(不妨假设$i = 1$)使得$c \in (a_1, b_1)$。如果$b_1 > d$，那么$[c, d] \subset (a_1, b_1)$，从而：$d - c \le b_1 - a_1 \le \sum\limits_i (b_i - a_i)$。如果$b_1 \le d$，那么$b_1 \in [c, d]$，因此存在$i$(不妨假设$i = 1$)使得$b_1 \in (a_2, b_2)$，对于$b_2$进行同样的讨论，如此继续下去，我们可以得到区间：$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_k, b_k)$使得$b \in (a_k, b_k), b_{i-1} \in (a_i, b_i)$。于是，

$$\begin{aligned}
\sum_i (b_i - a_i) &\ge \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) \\
&= (b_k - a_k) + \cdots + (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) \\
&= b_k - (a_k - b_{k-1}) - \cdots - (a_2 - b_1) - a_1 \ge b_k - a_1 > c - d
\end{aligned}$$

令$c \to a, d \to b$，我们就得到不等式(2.1)。 QED.

推论 2.1.5 设(a, b)是直线上的开区间，那么：$m^*(a, b) = b - a$。

证明： 由于(a, b)是包含它自己的开区间，由外测度的定义，$m^*(a, b) \le b - a$。

另一方面，由上面的引理，$m^*(a, b) \ge b - a$。 QED.

推论 2.1.6 集合$(0,1)$是不可数的。

定理 2.1.7 (单调性) 设A, B是直线的两个子集，如果$A \subset B$，那么:

$$m^*(A) \le m^*(B)$$

证明: 因为任何包含集合B的开区间集I_i的并也包含集合A，由外测度的定义就得到所要的结果。 QED.

例 2.1.8 对于任何区间$I =< a, b >$，都有: $m^*(I) = b - a$

证明: 对于任意的$\varepsilon > 0, I =< a, b >\subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, 所以: $m^*(I) \le b-a+2\varepsilon$，令$\varepsilon \to 0$，得到: $m^*(I) \le b - a$。

另一方面，任取$\varepsilon > 0$满足: $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$，则开区间$(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \subset I$，由外测度的单调性和推论(2.1.5)得到: $b - a - 2\varepsilon \le m^*(I)$。所以: $m^*(I) \ge b - a$。 QED.

引理 2.1.9 设$\{(a_i, b_i): i \in I\}$是直线上至多可列个互不相交的开区间，如果$\bigcup\limits_{i\in I}(a_i, b_i) \subset (a, b)$，那么:

$$\sum_{i\in I}(b_i - a_i) \le b - a$$

证明: 对于任意的自然数N，我们从I中任取N个元素，其相应的开区间记为: $\{(a_i, b_i): i = 1, 2, \cdots, N\}$，那么

$$\bigcup_{i=1}^{N}(a_i, b_i) \subset \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i) \subset (a, b)$$

由于(a_i, b_i)是互不相交的，我们可以将$\{a_i, b_i\}$按照大小顺序排成一列: 不妨假设$a_1 < a_2 < \cdots < a_N$，那么

$$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le a_3 < \cdots \le a_n < b_n \le b$$

于是,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) &= (b_N - a_N) + \cdots + (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)\\ &= b_N - (a_N - b_{N-1}) - \cdots - (a_3 - b_2) - (a_2 - b_1) - a_1\\ &\le b_N - a_1 \le b - a\end{aligned}$$

令$N \to \infty$，就得到所要证明的。 QED.

引理 2.1.10 设G是直线的开子集，$G=\bigcup\limits_{i\in I}(a_i,b_i)$是$G$的构成区间分解，那么：$m^*(G)=\sum\limits_{i\in I}(b_i-a_i)$。

证明： 由于$\bigcup\limits_{i\in I}(a_i,b_i)$是$G$的覆盖，由外测度的定义，我们有：$m^*(G)\leq\sum\limits_{i\in I}(b_i-a_i)$。

另一方面，对于G的任何开区间覆盖$\{(c_j,d_j)\colon j\in J\}$，当$(a_i,b_i)\cap(c_j,d_j)\neq\emptyset$时，我们将它记为$I_{i,j}$，这时它是一个开区间，并且$\bigcup\limits_{i,j}I_{i,j}\supset G$。由

$$(a_i,b_i)\subset(a_i,b_i)\cap G\subset\bigcup_j(a_i,b_i)\cap(c_j,d_j)\subset(a_i,b_i)$$

我们得到：$(a_i,b_i)=\bigcup\limits_j I_{i,j}$。由引理2.1.4，有：

$$b_i-a_i\leq\sum_j l(I_{i,j})$$

另外，显然有：$\bigcup\limits_i I_{i,j}\subset(c_j,d_j)$，并且对于不同的下标$i$，$I_{i,j}$是互不相交的。由引理2.1.9，我们得到：

$$\sum_i l(I_{i,j})\leq d_j-c_j$$

所以，

$$\sum_i(b_i-a_i)\leq\sum_i\sum_j l(I_{i,j})=\sum_j\sum_i l(I_{i,j})\leq\sum_j(d_j-c_j)$$

于是：$\sum\limits_i(b_i-a_i)\leq m^*(G)$ QED.

推论 2.1.11 设A是直线上的点集，那么

$$m^*(A)=\inf\left\{m^*(O)\colon O\text{是开集，并且：}A\subset O\right\}$$

证明： 记

$$m'(A)=\inf\left\{m^*(O)\colon O\text{是开集，并且：}A\subset O\right\}$$

由引理2.1.10，我们知道：$m^*(A)\leq m'(A)$。

另一方面，对于包含集合A的任何一个开区间族$\{I_i\}$，它的并集$\bigcup\limits_i I_i$是个包含集合A的开集O，如果$O=\bigcup\limits_j(c_j,d_j)$是$O$的构成区间分解，我们可以将开区间族$\{I_i\}$按照$j$进行分类，

记$I_j = \{i \colon I_i \subset (c_j, d_j)\}$，那么$I_j$是互不相交的集合，并且：$\bigcup\limits_{i \in I_j} I_i = (c_j, d_j)$，由引理2.1.4，我们得到：

$$d_j - c_j \leq \sum_{i \in I_j} l(I_i)$$

所以，$m'(A) \leq \sum_j (d_j - c_j) \leq \sum_i l(I_i)$。由此我们得到：$m'(A) \leq m^*(A)$。 QED.

定理 2.1.12 (次可列可加性) 设$\{A_i \colon i \in I\}$是直线的一列子集，如果$A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$，那么：

$$m^*(A) \leq \sum_{i \in I} m^*(A_i) \tag{2.2}$$

证明： 如果$\sum\limits_{i \in I} m^*(A_i) = \infty$，则不等式(2.2)显然成立。因此可以假设$\sum\limits_{i \in I} m^*(A_i) < \infty$。对于任意的$\varepsilon > 0$以及每个$A_i$，由外测度的定义，存在$A_i$的至多可列开区间覆盖$\{I_i^j\}$满足：

$$\sum_j l(I_i^j) < m^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

开区间集合$\{I_i^j\}$覆盖集合A，所以，

$$m^*(A) \leq \sum_{i,j} l(I_i^j) = \sum_i \sum_j l(I_i^j) < \sum_i m^*(A_i) + \varepsilon$$

QED.

2.1.2 可测集

定义 2.1.13 设A是直线上的集合，如果对于任意的正数$\varepsilon > 0$，存在闭集F和开集G满足：$F \subset A \subset G$和$m(G \setminus F) < \varepsilon$，就称集合$A$是*Lebesgue*可测集，简称可测集。

注 2.1.14 对于可测集A，对于任意的$\varepsilon > 0$，都存在闭集$F \subset A$满足：$m^*(F) > m^*(A) - \varepsilon$

事实上，由可测集的定义，存在闭集F和开集O满足：$m^*(O \setminus F) < \varepsilon$。那么，$m^*(F) + m^*(O \setminus F) \geq m^*(O) \geq m^*(A)$，由此就得到所要的不等式。

从可测集的定义，我们容易得到可测集的性质

引理 2.1.15 *1.* 如果A是可测集，那么A的余集$A^c = \mathbb{R} \setminus A$也是可测集

2. 有限个可测集的并集是可测集；有限个可测集的交集是可测集

3. 两个可测集的差集是可测集

4. 零测集是可测集；零测集的子集是可测集

5. 任何区间都是可测集

证明：

1. 因为A是可测集，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在闭集F和开集G满足：$F \subset A \subset G$，且$m(G \setminus F) < \varepsilon$。于是$F^c \supset A^c \supset G^c$，集合$G^c$是闭集，$F^c$是开集，并且$m(F^c \setminus G^c) = m(G \setminus F) < \varepsilon$，所以$A^c$是可测集。

2. 我们只要证明两个集合的情况就可以了。假设A_1, A_2是直线上的两个可测集，记$A = A_1 \cup A_2$。由定义，对于任意的$\varepsilon > 0$，分别存在开集O_1, O_2和闭集F_1, F_2满足：$F_i \subset A_i \subset O_i (i = 1, 2)$，并且：$m^*(O_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2}$。令$F = f_1 \cup F_2, O = F_1 \cup F_2$，那么：$F$是闭集，$O$是开集，满足：$F \subset A \subset O$。由于

$$O \setminus F \subset (O_1 \setminus F_1) \cup (O_2 \setminus F_2)$$

   由外测度的次可加性，我们得到：$m^*(O \setminus F) < \varepsilon$。

   同样，我们可以证明：可测集的交集是可测集。

3. 由$A \setminus B = A \cap B^c$得到

4. 如果集合A是零测集，由推论2.1.11得到，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在开集O使得：$A \subset O, m^*(O) < \varepsilon$。取闭集$F = \emptyset$，就得到$A$是可测集。

5. 显然

QED.

引理 2.1.16 开集是可测集，闭集也是可测集。

证明： 假设O是一个开集，并且包含在一个有限的开区间(c, d)中。如果$O = \bigcup_i (a_i, b_i)$是O的构成区间分解，那么由引理2.1.9，我们有：

$$\sum_i (b_i - a_i) \le d - c < \infty$$

所以对于任意的$\varepsilon > 0$，存在自然数N使得：$\sum_{i=N+1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$。对于每个$(a_i, b_i)(i = 1, 2, \cdots, N)$，我们取闭区间$F_i = [a_i + \frac{\varepsilon}{2^i}, b_i - \frac{\varepsilon}{2^i}]$，令$F = \bigcup_{i=1}^{N} F_i$，$F$是闭集且：

$$\begin{aligned} m^*(O \setminus F) &\le m^*(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} O_i) + m^*(\bigcup_{i=1}^{N} O_i \setminus F) \\ &\le \sum_{i=N+1}^{\infty} (b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{N} m^*(O_i \setminus F_i) < 3\varepsilon \end{aligned}$$

QED.

引理 2.1.17 如果F_1和F_2是直线上的两个互不相交的有界闭集，则

$$m^*(F_1 \cup F_2) = m^*(F_1) + m^*(F_2)$$

证明： 由于F_1和F_2两个互不相交的有界闭集，则存在一个正数δ，对于任何长度小于或者等于δ的开区间至多只能与一个F_i相交。

假若不然，那么对于任何自然数n都存在一个开区间$(a_n, b_n), b_n - a_n < \frac{1}{n}$，并且：$(a_n, b_n) \cap F_i \neq \emptyset$，于是存在$x_n \in F_1, y_n \in F_2$，同时$x_n, y_n \in (a_n, b_n)$。这样$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别是有界闭集$F_1$和$F_2$中的点列，它们存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$和$\{y_{n_k}\}$,假设：$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in F_1, \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 \in F_2$，但是：$|x_{n_k} - y_{n_k}| \leq b_{n_k} - a_{n_k} < \frac{1}{n_k} \to 0$，所以得到：$x_0 = y_0 \in F_1 \cap F_2$，矛盾。

因为：$m^*(F_1 \cup F_2) \leq m^*(F_1) + m^*(F_2)$，我们只要证明另外一个不等号就可以了。

由推论2.1.11，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个有界开集$G \supset F_1 \cup F_2$，满足：$m^*(F_1 \cup F_2) > l(G) - \varepsilon$。将$G$分解成它的构成区间$G = \bigcup\limits_{i\in I} G_i$，如果$b_i - a_i > \delta$，我们将它分解成有限个开区间的并，$(a_i, b_i) = \bigcup\limits_j (a_i^j, b_i^j)$，使得：$b_i^j - a_i^j < \delta/2$，并且：$\sum\limits_j (b_i^j - a_i^j) - (b_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$。由此，我们得到一列开区间$I_i^j$，使得：$G = \bigcup\limits_{i,j} I_i^j$以及

$$m(G) = \sum_i (b_i - a_i) > \sum_{i,j} m(I_i^j) - \sum_i \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \sum_{i,j} m(I_i^j) - \varepsilon$$

所以$m^*(F_1 \cup F_2) > \sum\limits_{i,j} m(I_i^j) - 2\varepsilon$。

由于区间I_i^j至多只能与一个F_i相交，将与F_1相交的区间的并记为G_1，与F_2相交的区间的并记为G_2，则有：$F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$，并且：$G_1 \cup G_2 \subset G, G_1 \cap G_2 = \emptyset$。所以，

$$m^*(F_1) + m^*(F_2) \leq l(G_1) + l(G_2) = l(G_1 \cup G_2) \leq l(G) \leq m^*(F_1 \cup F_2) + 3\varepsilon$$

令$\varepsilon \to 0$，就得到：

$$m^*(F_1) + m^*(F_2) \leq m^*(F_1 \cup F_2)$$

QED.

推论 2.1.18 如果$F_1, F_2, \cdots, F_n$是直线上互不相交的有界闭集，则：

$$m^*(\bigcup_{i=1}^n F_i) = \sum_{i=1}^n m^*(F_i)$$

引理 2.1.19 如果F是有界开集G的闭子集，则：$m^*(G \setminus F) = m(G) - m^*(F)$

证明： 对于开集$G \setminus F$，利用可测集定义的注2.1.14，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在闭集$F_1 \subset G \setminus F$，使得

$$m^*(F_1) > m(G \setminus F) - \varepsilon$$

而F_1和F是两个互不相交的有界闭集，由引理2.1.17得到：

$$m^*(F_1 \cup F) = m^*(F_1) + m^*(F) (\leq m(G))$$

所以，

$$m^*(F) + m(G \setminus F) < m^*(F) + m^*(F_1) + \varepsilon = m^*(F \cup F_1) + \varepsilon \leq m(G) + \varepsilon$$

令$\varepsilon \to 0$，得到：$m^*(F) + m(G \setminus F) \leq m(G)$ QED.

引理 2.1.20 设A是直线上的有界集，如果对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个闭集$F \subset A$，使得：$m^*(F) > m^*(A) - \varepsilon$，那么$A$是可测集。

证明： 由于$m^*(A) < \infty$，所以存在有界开集$G, G \supset A$，并且：$m^*(A) > m(G) - \frac{\varepsilon}{2}$。由假定，存在闭集$F \subset A$满足：$m^*(F) > m^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}$，所以：

$$m^*(F) > m^*(A) - \frac{\varepsilon}{2} > m(G) - \varepsilon$$

而对于有界开集G，由引理2.1.19得到：$m(G \setminus F) = m(G) - m^*(F)$，所以

$$m(G \setminus F) < \varepsilon$$

于是A是可测集。 QED.

特别的，任何有界开集都是可测集。

定义 2.1.21 设A是直线上的集合，如果$m^*(A) = 0$，则称A是零测集。

引理 2.1.22 设$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是$n$个包含在某个有界区间中的可测集，如果$A_i(i = 1, 2, \cdots)$是互不相交的，那么

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A_i)$$

证明： 对于任意的$\varepsilon > 0$，由可测集定义的注2.1.14，对于每个A_i，都存在闭集$F_i \subset A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$满足：$m^*(F_i) > m^*(A_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$，则$F_i (i = 1, 2, \cdots, n)$是互不相交的闭集。令$F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$，则$F$是闭集，且$F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，由不等式

$$
\begin{aligned}
m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} m^*(A_i) < \sum_{i=1}^{n} m^*(F_i) + \varepsilon \\
&= m^*(F) + \varepsilon \leq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

令$\varepsilon \to 0$，得到：$m^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} m^*(A_i)$

QED.

引理 2.1.23 设$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是一列包含在某个有界区间中的可测集，如果$A_n (n = 1, 2, \cdots)$是互不相交的，那么$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$是可测集，并且

$$
m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)
$$

证明： 假设$A_n \subset [a, b]$，由引理2.1.22，对于任意的自然数n，都有：

$$
\sum_{i=1}^{n} m^*(A_i) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq b - a < \infty
$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \leq b - a < \infty$。于是，对于任意的正数$\varepsilon > 0$，对于每个$A_n$，存在闭集$F_n \subset A_n$，且$m^*(F_n) > m^*(A_n) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^n}$，以及存在自然数$N$，使得：$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} m^*(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$。令$F = \bigcup\limits_{n=1}^{N} F_n$，则$F$是闭集，$F \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，并且：

$$
\begin{aligned}
m^*(F) = \sum_{n=1}^{N} m^*(F_n) &> \sum_{n=1}^{N} m^*(A_n) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) - \varepsilon \geq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \varepsilon
\end{aligned}
$$

于是，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$是可测集。对于任意的$N$

$$
\sum_{n=1}^{N} m^*(A_n) < \sum_{n=1}^{N} m^*(F_n) + \varepsilon = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) + \varepsilon \leq m^*(A) + \varepsilon
$$

所以，

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \le m^*(A) + \varepsilon$$

令$\varepsilon \to 0$，得到：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) = m^*(A)$ QED.

引理 2.1.24 设$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是直线上的一列可测集，如果$A_n(n = 1, 2, \cdots)$是互不相交的，那么$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$是可测集，并且

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

证明： 将直线分解成可列个互不相交的有界区间I_n，例如$I_n = (n, n+1](n \in \mathbb{Z})$，令$A_{i,j} = A_i \cap I_j$，则$A_{i,j}$是可测集，并且互不相交。对于固定的$j, I_j$是有界区间，且$A_{i,j} \subset I_j$。由引理2.1.23，得到：$B_j = \bigcup\limits_{i} A_{i,j}$是可测集，$B_j$互不相交，$A = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} B_j$。

对于任意的$\varepsilon > 0$，存在开集G_j和闭集F_j满足：$G_j \supset B_j \supset F_j$，并且

$$m(G_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^{|j|+1}}$$

令$G = \bigcup\limits_{j} G_j, F = \bigcup\limits_{i} F_j$，则$G$是开集，$F$是闭集，并且

$$G \supset A \supset F, \quad G \setminus F \subset \bigcup_{j} (G_j \setminus F_j)$$

所以，

$$m(G \setminus F) < \sum_{j} m(G_j \setminus F_j) < \sum_{j} \frac{\varepsilon}{2^{|j|+1}} < \varepsilon$$

于是A是可测集，并且

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-n}^{n} m^*(B_j) &\le \sum_{j=-n}^{n} (m^*(F_j) + m(G_j \setminus F_j)) \\
&\le \sum_{j=-n}^{n} m^*(F_j) + \varepsilon \le m^*\left(\bigcup_{j=-n}^{n} F_j\right) + \varepsilon \\
&\le m^*(A) + \varepsilon
\end{aligned}$$

由此得到：$\sum\limits_{j} m^*(B_j) \le m^*(A)$，即$\sum\limits_{j} m^*(B_j) = m^*(A)$。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(\bigcup_j A_{n,j}\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} m^*(A_{n,j}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_{n,j})\\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} m^*(B_j) = m^*(A)\end{aligned}$$

QED.

以后，对于可测集A，我们将它的外测度$m^*(A)$记为$m(A)$，称为可测集A的Lebesgue测度。

综上所述，我们得到下面的

定理 2.1.25 *1.* 开集和闭集都是可测集

2. 零测度集是可测集

3. 两个可测集的交是可测集

4. 可测集的余集是可测集

5. 可列个互不相交的可测集的并是可测集

6. 两个可测集的差是可测集

7. 可列个可测集的并是可测集

2.2 可测集的构造

设X是一个固定非空的集合，$\mathfrak{E}$是由X的某些子集构成的集合，我们称它为X上的集类，称X为基本空间。

如果M是X的一个子集，记$\mathfrak{E}\cap M = \{E\cap M\colon E\in\mathfrak{E}\}$，它是$M$上的一个集类。

2.2.1 环与代数

定义 2.2.1 设X是基本空间，$\mathfrak{R}$是X上的一个集类。如果对于任意的$E_1, E_2\in\mathfrak{R}$都有：

$$E_1\cup E_2\in\mathfrak{R}, \qquad E_1\setminus E_2\in\mathfrak{R}$$

则称$\mathfrak{R}$为X上的环。如果$X\in\mathfrak{R}$，并且$\mathfrak{R}$是环就称$\mathfrak{R}$是代数。

例 2.2.2 *1.* 直线上的*Lebesgue*可测集全体构成的集类是一个代数

2. X是任意的集合，X的有限子集全体构成的集类是一个环

3. 直线上有限个左开右闭的有限区间的并构成的集类$\mathfrak{R}_0$是一个环。

环的性质：

1. 环$\mathfrak{R}$中有限个元素的并属于$\mathfrak{R}$

2. $\mathfrak{R}$中元素的交属于$\mathfrak{R}$

$$E_1 \cap E_2 = (E_1 \cup E_2) \setminus ((E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1))$$

3. X上任一个环的交是环

由性质3我们知道X上的任何集类$\mathfrak{E}$都可以张成一个环。因为，X的所有子集构成的集类显然是包含$\mathfrak{E}$的一个环，将包含$\mathfrak{E}$的所有环取交就得到包含$\mathfrak{E}$的最小环，记为$R_0(\mathfrak{E})$。

例 2.2.3 *1.* 如果$\mathfrak{E}$是X中所有单点集构成的集类，则由$\mathfrak{E}$张成的环就是X上所有有限子集构成的环。

2. 如果$\mathfrak{E}$是直线上左开右闭的有限区间组成的集类，那么由$\mathfrak{E}$张成的环就是$\mathfrak{R}_0$。

2.2.2 $\sigma-$环和$\sigma-$代数

定义 2.2.4 设$\mathfrak{E}$是X上的一个环，如果对于任何一列$E_n \in \mathfrak{E}(n = 1, 2, \cdots)$都有：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{E}$$

则称$\mathfrak{E}$为$\sigma-$环。如果$X \in \mathfrak{E}$，就称$\mathfrak{E}$为$\sigma-$代数。

例 2.2.5 *1.* 直线上*Lebesgue*可测集全体构成的集类$\mathfrak{L}$是$\sigma-$环

2. 集合X的所有可列子集构成的集类是$\sigma-$环

3. $\mathfrak{R}_0$不是$\sigma-$环

命题 2.2.6 *1.* 设$\mathfrak{E}$是X上的$\sigma-$环，如果$E_n \in \mathfrak{E}(n = 1, 2, \cdots)$，那么$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{E}$。

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \setminus E_i \right)$$

2. X上$\sigma-$环的交是$\sigma-$环

由此，我们同样可以得到：集合X上的任何集类$\mathfrak{E}$都可以张成一个包含$\mathfrak{E}$的最小$\sigma-$环，记为$S(\mathfrak{E})$。

特别的，由$\mathfrak{R}_0$张成的$\sigma-$环$S(\mathfrak{R}_0)$记为$\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}$中的元素称为直线上的Borel集，由例子2.2.5的(1)，我们知道$S(\mathfrak{R}_0)\subset\mathfrak{L}$，所以Borel集是Lebesgue可测集。

推论 2.2.7 设$\mathfrak{E}$是X上的集类，那么$S(\mathfrak{E})=S(R(\mathfrak{E}))$

2.2.3 Lebesgue可测集的构造

定理 2.2.8 如果A是*Lebesgue*可测集，则必定有G_δ型的集G和F_σ型的集F，$G\supset A\supset F$，并且：$m(G\setminus A)=m(A\setminus F)=0$。

推论 2.2.9 如果A是*Lebesgue*可测集，则A是*Borel*集和一个零测集的差，也是一个*Borel*集和一个零测集的并。

证明： 因为A是Lebesgue可测集，对于任意的$\varepsilon>0$，都存在开集G和闭集F满足：$G\supset A\supset F, m(G\setminus F)<\varepsilon$，所以

$$m(G\setminus A)\le m(G\setminus F)<\varepsilon,\quad m(A\setminus F)\le m(G\setminus F)<\varepsilon$$

取$\varepsilon=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，我们得到$G_n,F_n$满足：$G_n\supset A\supset F_n$，并且

$$m(G_n\setminus A)<\frac{1}{n},\qquad m(A\setminus F_n)<\frac{1}{n}$$

令$G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n, F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则$G$是$G_\delta-$型的集，$F$是$F_\sigma$型的集，它们都是Borel集。

$$m(G\setminus A)\le m(G_n\setminus A)<\frac{1}{n},\quad m(A\setminus F)\le m(A\setminus F_n)<\frac{1}{n}\quad\forall n\ge 1$$

令$n\to\infty$，就得到：$m(G\setminus A)=m(A\setminus F)=0$。 QED.

2.3 Lebesgue测度

2.3.1 测度的基本性质

定理 2.3.1 *m*是直线上的*Lebesgue*测度，它有以下的性质

1. **有限可加性** 设$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是$\mathfrak{L}$中的有限个互不相交的集合，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m(A_i)$$

2. **单调性** 如果集合$E_1, E_2 \in \mathfrak{L}$，且$E_1 \subset E_2$，那么：$m(E_1) \leq m(E_2)$

3. **可减性** 如果集合$E_1, E_2 \in \mathfrak{L}, E_1 \subset E_2$，并且$m(E_2) < \infty$，则

$$m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1)$$

4. **次可列可加性** 设$\{E_n\}$是$\mathfrak{L}$中的一列集合，$E \in \mathfrak{L}$，如果$E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，那么

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

5. 设$\{E_n\}$是$\mathfrak{L}$中的一列集合，如果$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$，则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

6. 设$\{E_n\}$是$\mathfrak{L}$中的一列集合，如果$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$，并且至少有一个$E_n$满足：$m(E_n) < \infty$，那么

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

7. 设$\{E_n\}$是$\mathfrak{L}$中的一列集合，则

$$m(\varliminf_{n\to\infty} E_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} m(E_n)$$

8. 设$\{E_n\}$是$\mathfrak{L}$中的一列集合，如果存在自然数N使得：$m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E_n\right) < \infty$，那么

$$m\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) \geq \varlimsup_{n\to\infty} m(E_n)$$

9. 设$\{E_n\}$是$\mathfrak{L}$中的一列集合，如果$\lim\limits_{n\to\infty} E_n$存在，并且存在自然数$N$使得：$m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E_n\right) < \infty$，那么

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

10. 设$\{E_n\}$是$\mathfrak{L}$中的一列集合，如果存在自然数N使得：$\sum\limits_{n=N}^{\infty} m(E_n) < \infty$，则

$$m\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0$$

证明： 可减性可以由有限可加性直接推出，性质(1)-(4)都已证明。

5. 由于$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$，我们有:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \cdots \cup (E_{n+1} \setminus E_n) \cup \cdots$$

并且其中的每个合并项都是互不相交的，由可列可加性得到:

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1) + m(E_3 \setminus E_2) + \cdots + m(E_{n+1} \setminus E_n) + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} (m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1) + m(E_3 \setminus E_2) + \cdots + m(E_{n+1} \setminus E_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(E_n) \end{aligned}$$

6. 由于$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$，所以: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} E_n$，因此不妨假设$m(E_1) < \infty$。令$F_n = E_1 \setminus E_n$，则$\{F_n\}$是单调增加的集合列。由性质5就得到:

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(F_n)$$

由可减性以及$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = E_1 \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，我们有: $m(F_n) = m(E_1) - m(E_n)$以及$m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right) = m(E_1) - m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)$。代入上式就得到所要证明的。

7. 因为$\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k$，令$F_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k$，则$F_n$是单调增加的集合列。由性质5得到:

$$m\left(\varliminf_{n\to\infty} E_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(F_n)$$

而$m(F_n) \le m(E_n)(n = 1, 2, \cdots)$，所以: $\lim\limits_{n\to\infty} m(F_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} m(E_n)$，即:

$$m\left(\varliminf_{n\to\infty} E_n\right) \le \varliminf_{n\to\infty} m(E_n)$$

8. 因为$\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$，记$F_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$，则$F_n$是单调减少的集合列。又因为存在自然数$N$使得: $m(F_N) = m\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k\right) < \infty$，由性质6得到:

$$m\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(F_n) \ge \varlimsup_{n\to\infty} m(E_n)$$

9. 由性质7和8得到。

10. 因为对于任何自然数n都有:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\subset\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$$

所以,

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n\right)\leq\sum_{n=n}^{\infty}m(E_k)$$

由假设存在自然数N使得: $\sum\limits_{k=N}^{\infty}m(E_k)<\infty$,所以: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}m(E_k)=0$,由此得到:

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n\right)=0$$

QED.

定理 2.3.2 如果A是直线上的可测集,则:

$$m(A)=\sup\left\{m(F)\colon F\subset A,F\text{是闭集}\right\}$$

证明: 令$A_n=[-n,n]\cap A$,则$\{A_n\}$是一列单调增加的有界的可测集,并且$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$。由定理2.3.1的(5)得到:

$$m(A)=\lim_{n\to\infty}m(A_n)$$

如果$m(A)<\infty$,则对于任意的$\varepsilon>0$,存在自然数N,当$n\geq N$时,

$$m(A_n)>m(A)-\frac{\varepsilon}{2}$$

而A_N是有界的可测集,所以存在闭集$F\subset A_N$使得: $m(F)>m(A_N)-\frac{\varepsilon}{2}$,所以

$$m(F)>m(A)-\varepsilon$$

命题成立。

如果$m(A)=\infty$,则对于任意的$M>0$,存在自然数N,使得$m(A_N)>M+1$。而A_N是有界的可测集,所以存在闭集$F\subset A_N$满足: $m(F)>m(A_N)-1$。由此得到$m(F)>M$,于是

$$\sup\left\{m(F)\colon F\subset A,F\text{是闭集}\right\}=\infty$$

QED.

2.3.2 测度的平移不变性和反射不变性

设a是一个实数，直线的平移变换τ_a:

$$\tau_a\colon x \mapsto x + a, \quad x \in E^1$$

反射变换τ:

$$\tau\colon x \mapsto -x, \quad x \in E^1$$

因为直线上的开区间经过平移变换之后还是开区间，并且长度保持不变，所以开集经过平移变换之后也还是开集，它同样保持长度不变。闭集经过平移变换之后还是闭集，所以可测集经过平移变换之后还是可测集，并且保持测度不变。由此，我们得到

定理 2.3.3 设A是直线上的可测集，τ_a是直线上的平移变换，则$\tau_a(A)$也是可测集，并且$m(\tau_a A) = m(A)$。

对于反射变换，我们有同样的结论

定理 2.3.4 设A是直线上的可测集，τ是直线上的反射变换，则$\tau(A)$也是可测集，并且$m(\tau(A)) = m(A)$。

第三章 Lebesgue可测函数

3.1 可测函数的定义和基本性质

3.1.1 可测函数的定义

要对函数求积分，除了将区间的长度延拓到集合上之外，Lebesgue的另外一个重要想法就是在求积分时先将函数的值域作剖分，而不是与Riemann积分那样将函数的定义域进行剖分。为此，我们引入如下的定义

定义 3.1.1 设E是直线$\mathbb{R}$上的一个集合，f是E上的函数。

1. 如果对于一切实数c，集合$E(f \geq c)$都是*Lebesgue*可测集，就称f是*Lebesgue*可测函数
2. 如果对于一切实数c，集合$E(f \geq c)$都是*Borel*可测集，就称f是*Lebesgue*可测函数

例 3.1.2 1. 区间$[a, b]$上定义的连续函数f是*Borel*函数，也是*Lebesgue*可测函数

2. 设E是一个零测集，那么定义在它上的任何函数都是可测函数
3. f是直线$\mathbb{R}$上定义的函数，它分别在有限个互不相交的有限区间$< a_i, b_i > (i = 1, 2, \cdots, n)$上去常数$\alpha_i$，而在这些集合之外取值为$0$，那么$f$是*Borel*函数。

   我们称f为直线上的阶梯函数，这类函数在实变函数理论中是一个非常重要的函数类。
4. 直线上存在不可测的函数。例如，取直线上的*Lebesgue*不可测集Z。χ_Z为Z上的特征函数，则χ_Z是不可测的。

定理 3.1.3 设f是E上的实函数，f在E上是*Lebesgue(*或*Borel)*可测函数的充要条件是对于任意的实数$c, d (c < d)$，集合$E(c \leq f < d)$是*Lebesgue*可测集（或*Borel*可测集）。

证明： 必要性：因为

$$E(c \leq f < d) = E(f \geq c) \setminus E(f \geq d)$$

充分性：

$$E(f \geq c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(c \leq f < c+n)$$

QED.

3.1.2 可测函数的基本性质

定理 3.1.4 设f是集合E上的实函数，则

1. 若f是E上的可测函数，那么E是可测集
2. 若f是E上的可测函数，E_1是E的可测子集，将f限制在E_1上得到的函数f_1也是可测函数
3. 若E_1, E_2是两个互不相交的可测集，$E = E_1 \cup E_2$，则f在E上可测的充要条件是f限制在$E_i(i=1,2)$上都是可测的。
4. 集合E是可测集的充要条件是E上的特征函数χ_E是直线$\mathbb{R}$上的可测函数

证明：

1. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(f \geq -n)$
2. $E_1(f \geq c) = E(f \geq c) \cap E_1$
3. $E(f \geq c) = E_1(f \geq c) \cup E_2(f \cup c)$，必要性由2得到。
4.
$$\mathbb{R}(\chi_E \geq c) = \begin{cases} \mathbb{R}, & c \leq 0 \\ E, & 0 < c \leq 1 \\ \emptyset, & c > 1 \end{cases}$$

QED.

定理 3.1.5 设f是E上的实函数，则下面等价；

1. 对于任意的$c \in \mathbb{R}$，$E(f \geq c)$是可测集
2. 对于任意的$c \in \mathbb{R}$，$E(f > c)$是可测集
3. 对于任意的$c \in \mathbb{R}$，$E(f \leq c)$是可测集
4. 对于任意的$c \in \mathbb{R}$，$E(f < c)$是可测集

证明： 首先，由这四个条件中的任何一个都可以得出E是可测集。

(1) $\Rightarrow$ (2)：$E(f>c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f\geq c+\frac{1}{n})$

(2) $\Rightarrow$ (3)：$E(f\leq c)=E\setminus E(f>c)$

(3) $\Rightarrow$ (4)：$E(f<c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f\leq c-\frac{1}{n})$

(4) $\Rightarrow$ (1)：$E(f\geq c)=E\setminus E(f<c)$ QED.

定理 3.1.6 设f,g是可测集E上的两个可测函数，那么

1. 对于任意的$\alpha\in\mathbb{R}$，αf是E上的可测函数

2. $f+g$是E上的可测函数

3. fg以及f/g(如果对于任意的$x\in E,g(x)\neq 0$)都是E上的可测函数

4. $\max\{f,g\}$和$\min\{f,g\}$都是E上的可测函数

证明： (1) 如果$\alpha=0$，那么$\alpha f=0$显然可测。

如果$\alpha>0$，那么：$E(\alpha f\geq c)=E(f\geq\frac{\alpha}{c})$

如果$\alpha<0$，那么：$E(\alpha f\geq c)=E(f\leq\frac{\alpha}{c})$

(2) 记有理数的全体为：$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$，那么

$$E(f+g>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f>r_n)\cup E(f>c-r_n)$$

事实上，对于任何有理数r_n，显然有：$E(f>r_n)\cup E(f>c-r_n)\subset E(f+g>c)$。另一方面，如果$x\in E(f+g>c)$，即$x$满足：$f(x)+g(x)>c$，则：$f(x)>c-g(x)$。因此，存在有理数$r_n$满足：$f(x)>r_n>c-g(x)$，即$f(x)>r_n,g(x)>c-r_n$。

(3) 利用等式：$fg=\frac{(f+g)^2}{4}-\frac{(f-g)^2}{4}$，我们只要证明：如果$f$是可测函数，那么$f^2$是可测函数就可以了。

$$E(f^2\geq c)=\begin{cases}E, & c\leq 0\\ E(f\geq\sqrt{c})\cup E(f\leq-\sqrt{c}), & c>0\end{cases}$$

对于函数f/g，我们只要证明$1/g$是可测函数。

$$E\left(\frac{1}{g}>c\right)=\begin{cases}E(0<g<\frac{1}{c}), & c>0\\ E(g>0), & c=0\\ E(g>0)\cup E(g<\frac{1}{c}), & c<0\end{cases}$$

(4) $E(\max\{f,g\}\geq c)=E(f\geq c)\cup E(g\geq c)$，而$\min\{f,g\}=-\max\{-f,-g\}$

QED.

推论 3.1.7 *1.* 可测函数的线性组合是可测函数

2. 可测函数的绝对值函数是可测函数

3.2 可测函数列的极限

定理 3.2.1 设$\{f_n\}$是E上的一列可测函数，则当$\{f_n\}$的上确界、下确界、上限和下限函数分别是有限函数时，它们都是E上的可测函数。

证明： 记$F_n(x) = \max\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$，那么$F_n$是单调增加的可测函数列，它的极限就是$\{f_n\}$的上确界函数$F$，即$F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$，利用等式:

$$E(F > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c)$$

就得到F是可测函数。

如果记$G_{n,m} = \max\{f_n, f_{n+1}, \cdots, f_{n+m}\}$，对于固定的$n$, $G_{n,m}$是一列单调增加的可测函数，它的极限函数$G_n(x) = \sup\limits_{k\geq n} f_k$是可测函数。而$G_n$是一列单调下降的可测函数列，它的极限函数$G$就是$\{f_n\}$的上限函数，利用等式

$$E(G \geq c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(G_n \geq c)$$

就得到G是可测函数。 QED.

推论 3.2.2 设$\{f_n\}$是E上的一列可测函数，如果对于任意的$x \in E$，极限$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$都存在，并且有限，那么$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$是可测的。

3.2.1 Lebesgue可测函数和Borel可测函数

引理 3.2.3 设f是E上的可测函数，则存在一列$\{f_n\}$，其中每个f_n都是互不相交的可测集的特征函数的线性组合，满足：f_n收敛于f。

证明： 对于自然数n，取

$$E_j^{(n)} = E\left(\frac{j}{n} \leq f < \frac{j+1}{n}\right), \qquad j = -n^2, -n^2+1, \cdots, n^2-1$$

令：$f_n = \sum\limits_{j=-n^2}^{n^2-1} \frac{j}{n}\chi_{E_j^{(n)}}$，则$f_n$是互不相交的可测集上的特征函数的线性组合。下面证明f_n收敛于f。

对于任意的$x \in E$，存在自然数N使得：$|f(x)| < N$。则对于任意的$n \geq N$，存在自然数j满足：$\frac{j}{n} \leq f(x) < \frac{j+1}{n}, -n^2 \leq j \leq n^2-1$，即$x \in E_j^{(n)}$，所以：$f_n(x) = \frac{j}{n}$，$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$。 QED.

推论 3.2.4 设f是E上有界的可测函数，则存在可测集上的特征函数的线性组合的函数列$\{f_n\}$一致收敛于f。

任何Borel集都是Lebesgue可测集，而任何Lebesgue可测集都可以表示成一个Borel集和一个零测集的并或差。任何Borel可测函数都是Lebesgue可测函数。反过来，我们有下面的定理:

定理 3.2.5 设E是直线$\mathbb{R}$上的可测集，f是E上的*Lebesgue*可测函数，则存在直线上的*Borel*可测函数h满足：$m(E(f \neq h)) = 0$。

证明： 由引理3.2.3，E上存在一列特征函数的线性组合的可测函数列$\{f_n\}$收敛于f，我们将它表示成：$f_n = \sum\limits_{i=1}^{l_n} \alpha_i^{(n)} \chi_{E_i^{(n)}}$。由于$E_i^{(n)}$是Lebesgue可测函数，所以存在*Borel*可测集$B_i^{(n)}$ 满足：$B_i^{(n)} \subset E_i^{(n)}$且$m(E_i^{(n)} \setminus B_i^{(n)}) = 0$。令

$$h_n = \sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i^{(n)} \chi_{B_i^{(n)}}$$

则h_n是直线上的Borel函数，并且：$E(h_n \neq f_n) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l_n} (E_i^{(n)} \setminus B_i^{(n)})$，因此：$m(E(h_n \neq f_n)) = 0$。

记$E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(h_n \neq f_n)$，则$m(E_0) = 0$。

下面我们要利用h_n来构造Borel函数h。

对于任意的$x \in E \setminus E_0$，显然$h_n(x) = f_n(x) \to f(x)$，但在E_0上，$h_n(x)$的极限情况不清楚。由于E_0是零测集，所以存在Borel集B_0: $B_0 \supset E_0$且$m(B_0) = 0$，记$B_1 = \mathbb{R} \setminus B_0$，它是Borel集。令

$$h'_n(x) = \chi_{B_1}(x) h_n(x)$$

h'_n是Borel函数，当$x \in E \cap B_1$时，$h'_n(x) \to f(x)$；当$x \notin E \cap B_1$时，$h'_n(x) = 0 \to 0$。因此，$h = \lim\limits_{n\to\infty} h'_n$是Borel函数，$E(f \neq h) \subset E \setminus E \cap B_1 = E \cap B_0$，所以$m(E(f \neq h)) = 0$。

QED.

3.2.2 几乎处处

定义 3.2.6 设E是直线$\mathbb{R}$上的集合，命题P是与E中的点有关的一个命题，如果存在一个零测度集$E_0 \subset E$使得：当$x \in E \setminus E_0$时，命题P成立，我们就称命题P在E上几乎处处成立。

例 3.2.7 *1.* 设f, g是E上的两个函数，如果存在一个零测集$E_0 \subset E$满足：$f(x) = g(x), x \in E \setminus E_0$，我们称函数$f$和$g$在$E$上几乎处处相等，记为：$f \doteq g$。

2. 设$\{f_n\}$是集合E上的一列函数，如果存在一个零测集$E_0 \subset E$满足：对于任意的$x \in E \setminus E_0, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，称函数列$\{f_n\}$在$E$上几乎处处收敛于$f$，记为：$f_n \to f(a.e.)$

定理 3.2.8 设f是E上的可测函数，如果g是E上的函数，并且在E上$g \doteq f$，那么g也是E上的可测函数。

证明： 因为$g \doteq f$，因此存在$E_0 \subset E$满足：$m(E_0) = 0$并且在$E_1 = E \setminus E_0$上，$g = f$。将函数f, g分别限制在集合E_0和E_1上，我们得到f_0, f_1和g_0, g_1。由于E_0, E_1是E的互不相交的可测子集，因此f_0和f_1分别是E_0和E_1上的可测函数。在E_1上，$g_1 = f_1$，因此g_1是E_1上的可测函数；因为E_0是零测集，它上面的任何函数都是可测的，所以g_1是E_0上的可测函数。由此，我们得到：g是E上的可测函数。 QED.

定理 3.2.9 设$\{f_n\}$是E上的一列可测函数，如果$\{f_n\}$几乎处处收敛，则存在E上的可测函数f满足：$f_n \to f(a.e)$。

证明： 因为$\{f_n\}$几乎处处收敛，所以存在零测集$E_0 \subset E$，f_n在集合$E_1 = E \setminus E_0$上处处收敛，我们将它的极限函数记为$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E_1$。则$f$是$E_1$上的可测函数。如果当$x \in E_0$时，我们规定$f(x) = 0$，我们就将$f$的定义域延拓到$E$上，由于零测集上的任何函数都是可测的，所以延拓得到的函数f是E上的可测函数，并且$f_n \to f(a.e)$。 QED.

定理 3.2.10 设$\{f_n\}$是E上的可测函数列，如果$f_n \to f(a.e.), \quad g_n \to g(a.e.)$，则$f \doteq g$。

证明： 由假设存在零测集$E_1 \subset E$和$E_2 \subset E$满足：$f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in E \setminus E_1$以及$f_n(x) \to g(x), \quad \forall x \in E \setminus E_2$。令$E_0 = E_1 \cup E_2$，则$m(E_0) = 0$，并且在集合$E \setminus E_0$上都有：$f_n(x) \to f(x)$和$f_n(x) \to g(x)$，所以当$x \in E \setminus E_0$时，$f(x) = g(x)$ 即$f \doteq g$。 QED.

3.2.3 Egoroff定理

Egoroff定理描述了点点收敛和一致收敛的关系。

定理 3.2.11 (Egoroff定理) 设E是直线上测度有限的可测集，即$m(E) < \infty$，$\{f_n\}$是E上的可测函数列。如果$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛于f，则对于任意的$\delta > 0$，存在E的可测子集E_δ满足：$m(E \setminus E_\delta) < \delta$，并且$\{f_n\}$在$E_\delta$上一致收敛于$f$。

证明： 不失一般性，我们可以假设$\{f_n\}$点点收敛于f。则：

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E\left(|f_m - f| < \frac{1}{k}\right), \quad \forall k \geq 1$$

记$E_{m,k}=E\left(|f_m-f|<\frac{1}{k}\right),B_{n,k}=\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}E_{m,k}=E\left(|f_m-f|<\frac{1}{k},\forall m\geq n\right)$，则对于固定的$k$，$B_{n,k}$是单调增加的集合列，并且$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_{n,k}$，所以$m(E)=\lim\limits_{n\to\infty}m(B_{n,k})$。由于$m(E)<\infty$，所以对于$\delta>0$，存在$n_k$满足:

$$m(E)-m(B_{n_k,k})<\frac{\delta}{2^k}$$

并且我们可以取n_k满足：$n_{k+1}>n_k$。令

$$F=\bigcap_{k=1}^{\infty}B_{n_k,k}$$

则我们有:

$$m(E\setminus F)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\setminus B_{n_k,k})\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m(E\setminus B_{n_k,k})<\delta$$

以及对于任意的$\varepsilon>0$，我们只要取k_0满足$1/k_0<\varepsilon$，那么当$n\geq n_{k_0}$时，

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{k}\leq\frac{1}{k_0}<\varepsilon,\qquad\forall x\in F$$

所以，在F上$\{f_n\}$一致收敛于f。 QED.

3.3 可测函数和连续函数

定义 3.3.1 (连续函数) 设f是E上的函数，$x_0\in E$，如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x\in E$并且满足$|x-x_0|<\delta$时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

则称f在x_0处连续。如果函数f在E中的每一点处都连续，就称f在E上连续。

注 3.3.2 函数f在x_0处连续的充要条件是对于E中收敛于x_0的任意点列$\{x_n\}$都有$f(x_n)\to f(x_0)$。

命题 3.3.3 设$F_1,F_2,\cdots,F_n$是直线$\mathbb{R}$上的n个互不相交的闭集，定义$F=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i$上的函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\chi_{F_i}(x)$$

则f是F上的连续函数。

证明： 设$\{x_n\}$是F中的点列，它收敛于$x_0 \in F$，不妨假设$x_0 \in F_1$，则x_n只有有限多个点落在集合$F \setminus F_1$中，否则它有个极限点在F_1之外，与$x_0 \in F_1$矛盾。所以当n充分大时，$f(x_n) = \alpha_1$。 QED.

命题 3.3.4 设$\{f_n\}$是E上的一列连续函数，且f_n在E上一致收敛于f，那么f是E上的连续函数。

定理 3.3.5 (Lusin定理) 设f是E上的$Lebesgue$可测函数，则对于任意的$\delta > 0$，存在E的闭子集E_δ满足：$m(E \setminus E_\delta) < \delta$，并且$f$限制在$E_\delta$上是连续函数。

证明： 首先假设$m(E) < \infty$。令

$$E_{n,k} = E\left(\frac{n}{k} \leq f < \frac{n+1}{k}\right), \qquad n \in \mathfrak{Z}, k \in mathfrakN$$

显然对于任意的自然数k，$E = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} E_{n,k}$，并且$E_{n,k} \cap E_{m,k} = \emptyset (n \neq m)$。所以

$$m(E) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(E_{n,k}) < \infty$$

所以存在n_k，满足：$\sum\limits_{|n|=n_k+1}^{\infty} m(E_{n,k}) < \frac{\delta}{2^{k+1}}$。

当$|n| \leq n_k$时，作闭集$F_{n,k} \subset E_{n,k}$满足：

$$\sum_{n=-n_k}^{n_k} [m(E_{n,k}) - m(F_{n,k})] < \frac{\delta}{2^{k+1}}$$

记$F_k = \bigcup\limits_{n=-n_k}^{n_k} F_{n,k}$，则$E \setminus F_k = \bigcup\limits_{|n|=n_k+1}^{\infty} E_{n,k} \bigcup \bigcup\limits_{n=-n_k}^{n_k} (E_{n,k} \setminus F_{n,k})$，所以

$$m(E \setminus F_k) < \frac{\delta}{2^k}$$

在集合F_k上作函数

$$f_k(x) = \sum_{n=-n_k}^{n_k} \frac{k}{n} \chi_{F_{n,k}}$$

则f_k是F_k上的连续函数，并且对于任意的$x \in F_k$都有：

$$0 \leq f(x) - f_k(x) \leq \frac{1}{k}$$

因此，在$E_\delta = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$上函数列$f_k$一致收敛于$f$，并且：$m(E \setminus E_\delta) = E\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (E \setminus F_k)\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \delta$。

当$m(E)=\infty$时，我们首先将直线分解成一列有限集合I_n，例如取$I_n=(-n,-n+1]\cup(n-1,n]$，令$E_n=E\cap I_n$，那么E_n是一列互不相交的可测集，并且$m(E_n)<\infty$。所以存在闭集$F_n\subset E_n$满足：$m(E_n\setminus F_n)<\frac{\delta}{2^n}$，$f$限制在$F_n$上是连续函数。令$E_\delta=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则$E_\delta$是闭集，$f$在$E_\delta$上连续，并且：$m(E\setminus E_\delta<\delta)$。 QED.

引理 3.3.6 设F是直线上的闭集，f是F上的连续函数，则存在直线上的连续函数h满足：$h(x)=f(x),\forall x\in F$。

证明： 令$O=\mathbb{R}\setminus F=\bigcup\limits_n(a_n,b_n)$是开集$O$的构成区间分解，$a_n,b_n\in F$。在有限的区间$(a_n,b_n)$上，用连接点$(a_n,f(a_n)),(b_n,f(b_n))$的线段来定义函数$h$，如果$b_n=\infty$或者$a_n=-\infty$，则用平行线$h(x)=f(a_n),\forall x>a_n$或者$h(x)=f(b_n),\forall x<b_n$。

显然函数h在开集O中是连续的，下面证明h在F上也是连续的。

任取$x_0\in F$，由于h在F上是连续的，所以对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x\in F\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

如果区间$(x_0-\delta,x_0)$中没有F的点，那么x_0是O的某个构成区间(a_n,b_n)的右断点$b_n=x_0$。因为h在区间(a_n,b_n)中是线性函数，所以存在$\eta>0$使得当$x\in(\eta,x_0)$时，

$$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$$

如果区间$(x_0-\delta,x_0)$中含有F的点，例如$\eta\in F\cap(x_0-\delta,x_0)$，则当$x\in[\eta,x_0)\cap F$时，$h(x)=f(x),h(x_0)=f(x_0)$，所以：$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$。

若$x\in[\eta,x_0)\setminus F$，那么有$F$的余区间$(a_m,b_m)\subset(\eta,x_0)$，其中$a_m,b_m\in F$。因此，

$$|h(a_m)-h(x_0)|<\varepsilon,\qquad |h(b_m)-h(x_0)|<\varepsilon$$

而$h(x)$介于$h(a_m)$和$h(b_m)$之间，所以

$$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$$

由此得到h在x_0处是左连续的，同样可以证明h在x_0处是右连续的。 QED.

定理 3.3.7 (Lusin定理) 设f是E上的可测函数，则对于任意的$\delta>0$，存在直线上的连续函数h满足：

$$m(E(f\neq h))<\delta$$

推论 3.3.8 设f是E上的可测函数，并且$|f(x)| \leq M(a.e.)$，则对于任意的$\delta > 0$，存在直线上的连续函数h满足:

$$m(E(f \neq h)) < \delta, \qquad \text{以及} \quad |h(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

第四章 Lebesgue积分

4.1 测度有限的集合上有界可测函数的积分

假设E是直线$\mathbb{R}$上的可测集，在这一节中我们都约定$m(E) < \infty$。

定义 4.1.1 设f是E上的有界可测函数，即存在m, M满足：$m \leq f(x) < M(\forall x \in E)$。在$[m, M]$中任取一个分点组$D$: $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$，记

$$\delta(D) = \max\{y_k - y_{k-1} \colon k = 1, 2, \cdots, n\}, \quad E_k = E(y_{k-1} \leq f < y_k)$$

在分点组D中任取一组数ξ_k: $y_{k-1} \leq \xi_k < y_k$，作和:

$$S(D) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k m(E_k)$$

称$S(D)$为f在分点组D下的一个和数。

如果存在数S，它满足如下条件：对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得对于任意的分点组D，当$\delta(D) < \delta$时，函数f在分点组D下的任意一个和数都满足:

$$|S(D) - S| < \varepsilon$$

称$S = \lim\limits_{\delta(D) \to 0} S(D)$为函数$f$在$E$上的*Lebesgue*积分。

这时称函数f在E上是*Lebesgue*可积的，记为

$$S = \int_E f(x)dm(x) = \int_E f(x)dx$$

很容易验证：S与m, M的选取无关。如果$E = [a, b]$，我们也将积分写成:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

与Riemann积分一样，我们也可以引进上、下和数:

$$\bar{S}(D)=\sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k), \qquad \underline{S}(D)=\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k)$$

例 4.1.2 如果E是零测度集，f是E上的有界函数（这时f也是可测的），则对于任意的分点组D，$S(D)=0$，因此$S=\int_E f(x)dx=0$。

例 4.1.3 区间$[0,1]$上$Dirichlet$函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$$

$D(x)$在$[0,1]$区间上是$Riemann$不可积的函数。显然D是$[0,1]$上的有界可测函数，容易验证$\int_0^1 D(x)dx=0$。

定理 4.1.4 设f是E上的有界可测函数，那么函数f在E上是可积的。

证明: 设D_1,D_2是$[m,M]$的两个分点组，我们可以将它们合并组成一个新的分点组D: $D=D_1\cup D_2$。D可以看成在D_1中加入D_2的点构成的分点组。例如当D_1中的相邻分点是$y_{i-1}^{(1)},y_i^{(1)}$时，相应的$\underline{S}(D_1)$中的项是$y_{i-1}^{(1)}m(E(y_{i-1}^{(1)}\le f<y_i^{(1)}))$，如果把它们看成$D$的分点时，它们就不一定再相邻了，假设其中增加了某些分点

$$y_{i-1}^{(1)}=y_{i-1,0}<y_{i-1,1}<\cdots<y_{i-1,k_i}=y_i^{(1)}$$

那末相应的$\underline{S}(D)$中的项是

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k_i} y_{i,j} m(E(y_{i,j-1}\le f<y_{i,j})) &\ge y_{i-1}^{(1)}\sum_{j=0}^{k_i} m(E(y_{i,j-1}\le f<y_{i,j}))\\ &= y_{i-1}^{(1)} m(E(y_{i-1}^{(1)}\le f<y_i^{(1)}))\end{aligned}$$

所以: $\underline{S}(D_1)\le\underline{S}(S)$ 类似地有$\bar{S}(D_1)\ge\bar{S}(S)$，即在一个分点组中如果增加了分点，那末“小和”不减，“大和”不增. 从而，对任何两个分点组D_1,D_2都有

$$\underline{S}(D_1)\le\underline{S}(D)\le\bar{S}(D)\le\bar{S}(D_2)$$

即$\underline{S}(D_1)\le\bar{S}(D_2)$ 因此数集$\{\underline{S}(D)\}$中的一切数不超过数集$\{\bar{S}(D)\}$中任何一个数. 这就得到: $\underline{S}\le\overline{S}$

第二步，证明$\underline{S}=\overline{S}$: 事实上，设$D$为任一分点组，那么

$$
\begin{aligned}
0 \le \overline{S} - \underline{S} &\le \overline{S}(D) - \underline{S}(D) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) m(E_k) \le \delta(D) m(E)
\end{aligned}
$$

如果取分点组D使得$\delta(D) \to 0$，就得到$\underline{S} = \overline{S}$

第三步，取$S = \underline{S}$，现在来证明S满足积分的定义：对任何$\varepsilon > 0$，取$\delta = \frac{\varepsilon}{m(E)+1}$. 对任何分点组$D$，当$\delta(D) < \delta$时，

$$
\begin{aligned}
S - S(D) = \overline{S} - S(D) &\le \overline{S}(D) - S(D) \\
&\le \overline{S}(D) - \underline{S}(D) \le \delta(D) m(E) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
S(D) - S = S(D) - \underline{S} &\le S(D) - \underline{S}(D) \\
&\le \overline{S}(D) - \underline{S}(D) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

所以：$|S - S(D)| < \varepsilon$。

QED.

引理 4.1.5 设f是E上的可测函数，$m \le f \le M$，那末

$$
m \cdot m(E) \le \int_E f(x) dx \le M \cdot m(E)
$$

证明： 任取正数ε，那末$f(E) \subset (m - \varepsilon, M + \varepsilon)$，那么对于$(m - \varepsilon, M + \varepsilon)$的任一分点组$D$都有

$$
(m - \varepsilon) m(E) \le S(D) \le (M + \varepsilon) m(E)
$$

先令$\delta(D) \to 0$，再令$\varepsilon \to 0$，就得到所要的不等式。 QED.

定理 4.1.6 (有限可加性) 设f是E上有界可测函数，如果E分解成有限个互不相交的可测集$E_1, E_2, \ldots, E_n$的并，那末

$$
\int_E f(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x) dx
$$

证明： 设$m \le f < M$，D是$[m, M]$的任一分点组$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = M$。由于$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$是$E$的互不相交的分解，所以$E_{ij} = E_i(y_{j-1} \le f < y_j)(j = 1, 2, \cdots, k)$也是互不相交的，并且:

$$E(y_{j-1} \le f < y_j) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i(y_{j-1} \le f < y_j)$$

设ξ_j: $y_{j-1} \le \xi_j < y_j$，那么

$$\begin{aligned} S(D) &= \sum_{j=1}^{k} \xi_j m(E(y_{j-1} \le f < y_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \xi_j \sum_{i=1}^{n} m(E_i(y_{j-1} \le f < y_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \xi_j m(E_i(y_{j-1} \le f_i < y_j)) = \sum_{i=1}^{n} S(D, f_i) \end{aligned}$$

其中$f_i = f|_{E_i}$，令$\delta(D) \to 0$，就得到:

$$\int_E f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)dx$$

QED.

积分的有限可加性是Riemann积分中的有限可加性的发展. 以后我们还要证明积分有可列可加性.

例 4.1.7 设f是$[a, b]$上的函数，$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，$f$在$[x_0, x_1], (x_{i-1}, x_i](i = 2, 3, \cdots, n)$上取常数值$\alpha_i$，那末$f$在$[a, b]$上是*Lebesgue*可积的，而且

$$\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$$

证明： 事实上，由Lebesgue积分的定义，f在$[x_0, x_1](x_{i-1}, x_i](i = 2, 3, \cdots, n)$上是Lebesgue可积的，而且

$$\int_{(x_{i-1}, x_i]} f(x)dx = \alpha_i(x_i - x_{i-1}) = (R)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

由积分的有限可加性就得到所要证明的。 QED.

定理 4.1.8 设f, g是E上两个有界可测函数，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，那末，

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx$$

证明： 分成两种情况:

$$\int_E \alpha f(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx \tag{4.1}$$

$$\int_E (f(x)+g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx \tag{4.2}$$

等式(4.1)可直接从积分的定义得出，下面证明等式(4.2)

设m, M满足：$m \le f, g, f+g < M$。取分点组$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$，记

$$E_{i,j} = E(y_{i-1} \le f < y_i, y_{j-1} \le g < y_j)$$

则$E_{i,j}(i,j=1,2,\cdots,n)$是互不相交的，并且$E = \bigcup\limits_{i,j=1}^{n} E_{i,j}$。则:

$$\begin{aligned}\int_{E_{i,j}} (f(x)+g(x))dx &\le (y_i + y_j)m(E_{i,j}) \\ &\le (2\delta(D) + y_{i-1} + y_{j-1})m(E_{i,j}) \\ &\le 2\delta(D)m(E_{i,j}) + \int_{E_{i,j}} f(x)dx + \int_{E_{i,j}} g(x)dx\end{aligned}$$

所以：$\int_E (f(x)+g(x))dx \le 2\delta(D)m(E) + \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$。另一方面，

$$\begin{aligned}\int_{E_{i,j}} f(x)dx + \int_{E_{i,j}} g(x)dx &\le y_i m(E_{i,j}) + y_j m(E_{i,j}) \\ &= (y_i + y_j)m(E_{i,j}) \le (2\delta(D) + y_{i-1} + y_{j-1})m(E_{i,j}) \\ &\le 2\delta(D)m(E_{i,j}) + \int_{E_{i,j}} (f(x)+g(x))dx\end{aligned}$$

所以：$\int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx \le 2\delta(D)m(E) + \int_E (f(x)+g(x))dx$

令$\delta(D) \to 0$，就得到要证明的等式。 QED.

定理 4.1.9 (单调性) 设f, g是F上的两个有界可测函数，而且$f \ge g(a.e.)$，那末

$$\int_E f(x)dx \ge \int_E g(x)dx$$

特别的，当$f \doteq g$时，

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$$

证明： 利用积分的线性，我们只要证明当$h \geq 0(a.e.)$时

$$\int_E h(x)dx \geq 0$$

这是显然的。 QED.

推论 4.1.10 设f是E上有界可测函数，那末

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|\,dx$$

定理 4.1.11 设f 是E上有界可测函数，而且$f \geq 0(a.e.)$. 如果$\int_E f(x)dx = 0$，那末$f \doteq 0$.

证明： 对于任意的$\alpha > 0$，由积分的有限可加性，

$$\begin{aligned} 0 = \int_E f(x)dx &= \int_{E(f\geq\alpha)} f(x)dx + \int_{E(f<\alpha)} f(x)dx \\ &\geq \int_{E(f\geq\alpha)} f(x)dx \geq \alpha \cdot m(E(f \geq \alpha)) \end{aligned}$$

所以得到：$m(E(f \geq \alpha)) = 0$。而

$$m(E(f > 0)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f \geq \frac{1}{n})$$

因此，$m(E(f > 0)) = 0$。 QED.

虽然我们还可以进一步介绍积分的一些重要性质，为了避免与无界函数及无限测度情况下积分的性质在叙述上太多重复，所以我们将有界可测函数积分就介绍到此.

我们来讨论读者自然是很关心的问题，Lebesgue积分和Riemann积分是什么关系. 下面的定理说明Lebesgue积分是比Riemann积分更广的一种积分.

定理 4.1.12 设f是定义在$[a, b]$上的函数，如果它是*Riemann*可积函数，那末，它必是*Lebegue*可积的，而且

$$\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$$

证明： 由于f在$[a, b]$上是Riemann可积的，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得对于$[a, b]$的任意分点组D: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，当$\delta(D) = \max\{x_k - x_{k-1} \colon k = 1, 2, \cdots, n\} < \delta$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - (R)\int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

其中$\xi_k\colon x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$是任意的。

对于区间$[a,b]$的分点组$D\colon a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$构造两个函数$\psi$和$\varphi$如下:

$$\psi(x) = \begin{cases} \sup\{f(x)\colon x \in (x_{k-1}, x_k]\}, & x \in (x_{k-1}, x_k] \\ f(a), & x = a \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \inf\{f(x)\colon x \in (x_{k-1}, x_k]\}, & x \in (x_{k-1}, x_k] \\ f(a), & x = a \end{cases}$$

显然: $\varphi(x) \leq f \leq \psi(x)$，并且$\psi$和$\varphi$都是可测函数。

取区间$[a,b]$的一列分点组$\{D_n\}$使得D_{n+1}是由D_n添加一些点得到的，并且$\delta(D_n) \to 0$。对于每个分点组D_n，有上面的构造都存在可测函数ψ_n和φ_n。由于D_{n+1}是由D_n添加一些点得到的，我们有: $\psi_n(x) \geq \psi_{n+1}(x)$以及$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$，由此我们有:

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \varphi_n \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq \psi_n \leq \cdots \psi_2 \leq \psi_1$$

令$\underline{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n, \overline{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$，则$\underline{f}$和$\overline{f}$都是可测函数，$\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$，并且:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\overline{S}_R(D_n) = (R)\int_a^b f(x)dx$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\underline{S}_R(D_n) = (R)\int_a^b f(x)dx$$

由不等式:

$$\begin{aligned}\overline{S}_R(D_n) = \int_a^b \psi_n(x)dx &\geq \int_a^b \overline{f}(x)dx \geq \int_a^b \underline{f}(x)dx \\ &\geq \int_a^b \varphi_n(x)dx = \underline{S}_R(D_n)\end{aligned}$$

令$n \to \infty$，我们得到:

$$\int_a^b \overline{f}(x)dx = \int_a^b \underline{f}(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$$

由此得到: $\int_a^b(\overline{f}(x) - \underline{f}(x))dx = 0$，而$\overline{f} - \underline{f} \geq 0$，所以: $\overline{f} \doteq \underline{f}$，因此: $\overline{f} = \underline{f} = f(a.e.)$。这样就证明了$f$是可测函数，并且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \underline{f}(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$$

QED.

4.2 一般可测集上可测函数的积分

非负函数的积分 设E是直线$\mathbb{R}$上的可测集，从这节开始我们不再假设$m(E) < \infty$，f是E上非负的可测函数。对于任意的$N > 0$，我们引入函数:

$$[f]_N(x) = \begin{cases} f(x), & 若 f(x) \le N \\ N, & 若 f(x) > N \end{cases}$$

对于直线上的任何可测集E，我们都可以找到一列单调增加的、测度有限的子集$\{E_n\}$满足：$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，例如：$E_n = E \cap [-n, n]$。这样的子集列我们称为$E$的测度有限的单调覆盖。

引理 4.2.1 设f是E上的非负可测函数，$\left\{E_n^{(i)}\right\}$ $(i = 1, 2)$是E的两列测度有限单调覆盖，$\left\{M_n^{(i)}\right\}$ $(i = 1, 2)$是两列趋向于$+\infty$的单调增加正数列，如果

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n^{(1)}} [f]_{M_n^{(1)}} dx < \infty$$

那末，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n^{(2)}} [f]_{M_n^{(2)}} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n^{(1)}} [f]_{M_n^{(1)}} dx$$

证明： 记$S = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n^{(1)}} [f]_{M_n^{(1)}} dx$，那么，

$$\int_{E_n^{(1)}} [f]_{M_n^{(1)}} dx \le S$$

设A是E的任一测度有限的可测子集，M是任意的正数. 当$M_n^{(1)} > M$时，有下式

$$\begin{aligned} \int_A [f]_M(x) dx &= \int_{A\cap E_n^{(1)}} [f]_M dx + \int_{A\setminus E_n^{(1)}} [f]_M dx \\ &\le \int_{A\cap E_n^{(1)}} [f]_{M_n^{(1)}} dx + M \cdot m(A \setminus E_n^{(1)}) \\ &\le S + M \cdot m(A \setminus E_n^{(1)}) \end{aligned}$$

由于$A \setminus E_n^{(1)}$是单调下降的集合列，并且$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A \setminus E_n^{(1)}) = \emptyset$以及$m(A) < \infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty} m(A \setminus E_n^{(1)}) = 0$$

于是，我们得到:

$$\int_A [f]_M(x)dx \le S$$

特别地，我们有：

$$\int_{M_n^{(2)}} [f]_{M_n^{(2)}}(x)dx \le S$$

所以得到：$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{M_n^{(2)}} [f]_{M_n^{(2)}}(x)dx \le S$。将上面证明过程中的$i=1$改成$i=2$，我们就得到：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n^{(2)}} [f]_{M_n^{(2)}}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n^{(1)}} [f]_{M_n^{(1)}}(x)dx$$

QED.

定义 4.2.2 设E是直线$\mathbb{R}$上的可测集，$\{E_n\}$是E的测度有限的单调覆盖，f是E上非负的可测函数，$\{M_n\}$是一列收敛于$+\infty$的正数。如果极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} [f]_{M_n}(x)dx < \infty$$

我们就称f是可积的，这个极限值就规定为f的积分，记为

$$\int_E f(x)dx$$

根据引理4.2.1，我们知道这样定义的积分是确定的。换句话说，函数f在E上的可积性以及积分的值与测度有限单调覆盖列$\{E_n\}$的选取无关，也与正数列$\{M_n\}$的选取无关。

当集合E的测度有限，函数f有界时，按照这个定义和前面定义的积分是一致的。

例 4.2.3 考察$(0,\infty)$上的函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \ge 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x < 1 \end{cases}$$

则函数f是$(0,\infty)$上的非负可积函数.

证明： 对于自然数n，取$E_n = \left[\frac{1}{n^2}, n\right]$作为$(0,\infty)$的单调增加的、测度有限覆盖，取$M_n = n$，则：

$$\begin{aligned}\int_{E_n} [f]_n(x)dx &= \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^n \frac{1}{x^2}dx \\ &= 3 - \frac{3}{n}\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，我们得到：$\int_0^\infty f(x)dx = 3$。 QED.

一般函数的积分 设E是直线$\mathbb{R}$中的集合，f是E上的实函数。我们引入函数f的正部f_+和负部f_-:

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当} f(x)\geq 0\\ 0, & \text{当} f(x)<0\end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases}-f(x), & \text{当} f(x)\leq 0\\ 0, & \text{当} f(x)>0\end{cases}$$

函数f_+和f_-显然满足以下关系:

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x), \qquad |f|(x)=f_+(x)+f_-(x)$$

定义 4.2.4 设E是直线上的可测集，f是E上的可测函数. 如果f的正部f_+、负部f_-都是关于$Lebesgue$可积的，我们就称f是$Lebesgue$可积的，并且f在E上的积分规定为:

$$\int_E f(x)dx=\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx$$

下面我们介绍积分的一些重要性质，先证明一个引理.

引理 4.2.5 设f是E上的可积函数，g是E上可测函数，而且$|g|\leq f$，那末g也是可积的。

证明: 由于$|g|\leq f$，所以有$g_+\leq f, g_-\leq f$。设$\{E_n\}$是E的测度有限单调覆盖，对任何自然数n，显然有

$$\int_{E_n}[g_+]_n(x)dx\leq\int_{E_n}[f]_n(x)dx\leq\int_E f(x)dx$$

所以g_+是可积的. 同理g_-也是可积的. QED.

引理4.2.53常常被用来证明可测函数的可积性.

定理 4.2.6 (有限可加性) 设E, E_1, E_2都是可测集，并且$E=E_1\cup E_2, E_1\cap E_2=\emptyset$，$f$是$E$上的可测函数，那末，$f$在$E$上可积的充要条件是$f$在$E_1, E_2$上可积. 这时有:

$$\int_E f(x)dx=\int_{E_1}f(x)dx+\int_{E_1}f(x)dx$$

证明: 先假设$f\geq 0$。假设$\{E_n\}$是E的测度有限单调覆盖，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=E$，则: $E_1=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_1\cap E_n), E_2=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_2\cap E_n)$。若记$f_1=f|_{E_1}, f_2=f|_{E_2}$，那么,

$$[f_1]_n=[f]_n|_{E_1}, \qquad [f_2]_n=[f]_n|_{E_2}$$

利用有界函数积分的有限可加性，对任何n有

$$\begin{aligned}\int_{E_n}[f]_n(x)dx &= \int_{E_1\cap E_n}[f]_n(x)dx + \int_{E_2\cap E_n}[f]_n(x)dx\\ &= \int_{E_1\cap E_n}[f_1]_n(x)dx + \int_{E_2\cap E_n}[f_2]_n(x)dx\\ &\le \int_{E_1} f_1(x)dx + \int_{E_2} f_2(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx\end{aligned}$$

由此得到：如果f在E_1, E_2上可积，那么f在E上可积，并且：

$$\int_E f(x)dx \le \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$$

另一方面，由于：$\int_{E_1\cap E_n}[f_1]_n(x)dx \le \int_{E_1}[f_1]_n dx \le \int_E f(x)dx$，得到：$f_1$在$E_1$上可积，同样可以得到：$f_2$在$E_2$上可积。在等式

$$\int_{E_n}[f]_n(x)dx = \int_{E_1\cap E_n}[f]_n(x)dx + \int_{E_2\cap E_n}[f]_n(x)dx$$

中令$n\to\infty$，就得到所要证明的。

对于一般的f: $f = f_+ - f_-$，则对于f_+和f_-有限可加性成立。因此，

$$\begin{aligned}\int_E f(x)dx &= \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx\\ &= \left\{\int_{E_1} f_+(x)dx + \int_{E_2} f_+(x)dx\right\} - \left\{\int_{E_1} f_-(x)dx + \int_{E_2} f_-(x)dx\right\}\\ &= \left\{\int_{E_1} f_+(x)dx - \int_{E_1} f_-(x)dx\right\} + \left\{\int_{E_2} f_+(x)dx - \int_{E_2} f_-(x)dx\right\}\\ &= \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx\end{aligned}$$

QED.

定理4.2.6显然可以推广到当集E分解成有限个互不相交的可测集时的情况，定理4.2.6称为积分的有限可加性. 稍后，我们将证明积分具有可列可加性.

为了证明积分具有线性，先证一个引理.

引理 4.2.7 设f, g是集E上两个非负实函数，那末，对任何$N > 0$，

$$[f+g]_N \le [f]_N + [g]_N \le [f+g]_{2N}$$

证明: 如果$f+g<N$，那么：$[f+g]_N = f+g = [f]_N + [g]_N$。如果$f+g \ge N$，那么：$[f+g]_N = N$，这时$[f]_N + [g]_N \ge N$。因此左边的不等式成立。

因为：$[f]_N + [g]_N \le f+g$以及$[f]_N + [g]_N \le 2N$，所以：$[f]_N + [g]_N \le [f+g]_{2N}$ QED.

定理 4.2.8 (积分的线性) 设f, g 是E上两个可积函数，那末，对任何两个常数$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\alpha f + \beta g$也是可积函数，而且

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx$$

证明： 我们只要证明下面两个等式:

$$\int_E \alpha f(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx \tag{4.3}$$

$$\int_E (f(x) + g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx \tag{4.4}$$

假设$\{E_n\}$是E的测度有限单调覆盖。先证明等式(4.3)。

当$f \geq 0$时，若$\alpha > 0$，则：$[\alpha f]_n = \alpha [f]_{\frac{n}{\alpha}}$，所以

$$\int_{E_n} [\alpha f]_n(x)dx = \alpha \int_{E_n} [f]_{\frac{n}{\alpha}} \leq \alpha \int_E f(x)dx$$

所以：αf可积，并且令$n \to \infty$，由上面的第一个等式就得到:

$$\int_E \alpha f(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx$$

如果$\alpha = 0$，显然等式(4.3)成立。

如果$\alpha < 0$，则：$[\alpha f]_+ = 0, [\alpha f]_- = (-\alpha)[f]_{\frac{n}{-\alpha}}$。因此，$\alpha f$可积，并且:

$$\int_E \alpha f(x)dx = -\int_E [\alpha f]_- dx = -(-\alpha) \int_E f(x)dx$$

对于一般的f: $f = f_+ - f_-$，对f_+, f_-利用已证明的结果就可以得到。

下面证明等式(4.4)。

如果$f \geq 0, g \geq 0$，那么由不等式:

$$\int_{E_n} [f+g]_n(x)dx \leq \int_{E_n} [f]_n(x)dx + \int_{E_n} [g]_n(x)dx$$

得到$f+g$可积，并且:

$$\int_E (f+g)dx \leq \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

另一方面，

$$\int_{E_n} [f]_n(x)dx + \int_{E_n} [g]_n(x)dx = \int_{E_n} ([f]_n(x)[g]_n(x))dx \leq \int_{E_n} [f+g]_{2n}dx$$

令$n \to \infty$，就得到:

$$\int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx \le \int_E (f+g)dx$$

对于一般的f, g，利用不等式:

$$(f+g)_+ \le f_+ + g_+, \qquad (f+g)_- \le f_- + g_-$$

就得到$f+g$可积，并且由等式:

$$f+g = (f+g)_+ - (f+g)_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

得到: $(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+$。利用已证明的结论就得到:

$$\int_E (f+g)dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

QED.

定理 4.2.9 设f, g是E上两个可测函数，那末

1. 如果$f \doteq 0$，那末f是可积的，并且

$$\int_E f(x)dx = 0 \tag{4.5}$$

反之，如果f在E上满足$f \ge 0(a.e.)$，并且等式*(4.5)*成立，那末$f \doteq 0$.

2. **单调性:** 如果f, g是E上可积函数，并且$f \le g(a.e.)$，那末

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$$

3. **绝对可积性:** 如果f在E上可积，那么$|f|$在E上也可积，并且

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \le \int_E |f|(x)dx$$

证明: (1) 第一部分是显然的. 第二部分的证法和有界函数的定理4.1.11的证法相同.

(2) 只要证明: 如果$f \ge 0(a.e.)$，那么: $\int_E f(x)dx \ge 0$。设$\{E_n\}$是E的测度有限单调覆盖，那么，$[f]_n \ge 0(a.e.)$，于是: $\int_{E_n} [f]_n(x)dx \ge 0$，令$n \to \infty$，就得到: $\int_E f(x)dx \ge 0$。

(3) 当f可积时，由积分的定义f_+, f_-都可积，有积分的线性$|f| = f_+ + f_-$可积，由$-|f| \le f \le |f|$，得到: $\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f|(x)dx$ QED.

函数f是Lebesgue可积的，那么它的绝对值函数$|f|$也是Lebesgue可积的。这个结论在广义Riemann积分中是不成立的。例如区间$(0,1]$上的函数:

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

它是广义Riemann可积函数，但是$|f|$不是广义Riemann可积的。我们注意，这个函数f在$(0,1]$上的Lebesgue积分是不存在的。

定理 4.2.10 (全连续性) 设f是E上可积函数，那末对任何$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当e是E 的任何一个可测子集，而且$m(e) < \delta$时，就成立

$$\int_e |f|\, dx < \varepsilon$$

证明: 我们不妨假设$f \geq 0$，否则我们用函数$|f|$来取代f。设$\{E_n\}$是E的测度有限单调覆盖，所以:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f]_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

因此，存在N满足:

$$\int_E f(x)dx - \int_{E_N}[f]_N(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

取$\delta = \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$，那么

$$\begin{aligned}
\int_e f(x)dx &= \int_e [f(x) - [f]_N(x)]dx + \int_e [f]_N(x)dx \\
&\leq \int_E [f(x) - [f]_N(x)]dx + N\cdot m(e) \\
&\leq \int_E f(x)dx - \int_{E_N}[f]_N(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

QED.

定理 4.2.11 (可列可加性) 设f是E上可测函数，如果$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，$E_n$是$E$的可测子集，而且$E_n \cap E_m = \emptyset (n \neq m)$，那末，$f$在$E$上可积的充要条件是

1. f在$E_n (n = 1, 2, \cdots)$上可积;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f|\, dx < \infty$

证明： 必要性：设f在E上可积，由$E = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} E_i\right)$
根据积分的有限可加性，f在E_n上可积，且

$$\begin{aligned}\int_E |f|(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} |f|(x)dx + \int_{\bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty}} |f|(x)dx \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} |f|\, dx\end{aligned}$$

所以，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|(x)dx \leq \int_E |f|(x)dx < \infty$$

充分性：设$\{F_n\}$是E的测度有限单调覆盖，那末集合列：

$$F_n \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

也是E的测度有限单调覆盖，所以

$$\begin{aligned}\int_{F_n \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right)} [|f|]_n(x)dx &= \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} (F_n \cap E_i)} [|f|]_n(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{F_n \cap E_i} [|f|]_n(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} |f|(x)dx < \infty\end{aligned}$$

令$n \to \infty$，得到$|f|$可积，所以f可积，并且：

$$\int_E |f|(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|(x)dx$$

所以，

$$\left| \int_E f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)dx \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{E_i} |f|\, dx \to 0$$

QED.

定理 4.2.12 设f是区间$[a, b]$上的可积函数，则对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$[a, b]$上的连续函数φ，满足：

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon$$

证明： 对任何$\varepsilon > 0$，由f_+和f_-的积分定义可知，存在N使得

$$\int_a^b |f(x) - [f]_N(x)|\, dx = \int_a^b [f_+ - [f_+]_N] dx + \int_a^b [f_- - [f_-]_N] dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

取$\delta = \frac{\varepsilon}{3N+1}$，对函数$[f]_N$用Lusin定理，就存在$[a,b]$上连续函数$\varphi$：$|\varphi(x)| \leq N$，和$[a,b]$的可测子集$E_\delta$，且$m(E_\delta) < \delta$，当$x \in [a,b] \setminus E_\delta$时，$\varphi(x) = [f]_N(x)$. 因此

$$\int_a^b |[f]_N - \varphi|\, dx = \int_{E_\delta} |[f]_N - \varphi|\, dx \leq \frac{2\varepsilon N}{3(N+1)} < \frac{2\varepsilon}{3}$$

由此得到

$$\int_a^b |f - \varphi|\, dx \leq \int_a^b |f - [f]_N|\, dx + \int_a^b |[f]_N - \varphi|\, dx < \varepsilon$$

QED.

4.3 极限定理

在这一节里，我们将看到新的积分在处理积分和极限交换顺序时，所要求的条件比Riemann积分要弱得多. 本节中一些基本定理在一般分析数学中被经常引用.

4.3.1 控制收敛定理

设$\{f_n\}$是E上一列可测函数，F是E上非负可测函数，如果：$|f_n(x)| \leq F(x)(a.e.)(\forall n \geq 1)$，则称$F$是$\{f_n\}$的控制函数.

定理 4.3.1 (Lebesgue控制收敛定理) 设$\{f_n\}$是E上的一列可测函数，F是E上非负可积函数，并且F是$\{f_n\}$的控制函数. 如果$\{f_n\}$几乎处处收敛于可测函数f，那末f在E上是可积的，并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx$$

证明： 由于f_n几乎处处收敛于f，而$|f_n| \leq F(a.e.)$，所以：$|f| \leq F(a.e.)$。由F的可积性得到f是可积的。

首先假设$m(E) < \infty$。对于任意的$\varepsilon > 0$，由积分的全连续性，对于函数F，存在$\delta > 0$，对于E的任何可测子集e，如果$m(e) < \delta$，就有：

$$\int_e F(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

由于f_n几乎处处收敛于f，由Egoroff定理，对于上述的$\delta > 0$，存在E的可测子集E_δ满足：$m(E \setminus E_\delta) < \delta$，并且$f_n$在$E_\delta$上一致收敛于$f$。于是，对于上述的$\varepsilon > 0$，存在$N$，当$n \geq N$时，$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2m(E)+1}$， $\forall x \in E_\delta$。所以，当$n \geq N$时，有：

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E f(x)dx\right| &= \left|\int_E [f_n(x) - f(x)]dx\right| \\
&\leq \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leq \int_{E\setminus E_\delta} |f_n(x) - f(x)|\, dx + \int_{E_\delta} |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leq \int_{E\setminus E_\delta} 2F(x)dx + \varepsilon \cdot m(E) < \varepsilon
\end{aligned}$$

对于一般的E，设$\{E_n\}$是E的一列测度有限的单调覆盖，由积分的定义：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} [F]_n(x)dx = \int_E F(x)dx$$

所以，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在自然数N，当$n \geq N$时

$$0 \leq \int_E F(x)dx - \int_{E_n} [F]_n(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

我们将积分$\int_E [f_n(x) - f(x)]dx$分解成：

$$\left|\int_E [f_n(x) - f(x)]dx\right| \leq \left|\int_{E_k} [f_n(x) - f(x)]dx\right| + \left|\int_{E\setminus E_k} [f_n(x) - f(x)]dx\right|$$

其中，

$$\begin{aligned}
\left|\int_{E\setminus E_k} [f_n(x) - f(x)]dx\right| &\leq \int_{E\setminus E_k} 2F(x)dx \\
&= 2\left\{\int_E F(x)dx - \int_{E_k} F(x)dx\right\} \\
&\leq 2\left\{\int_E F(x)dx - \int_{E_k} [F]_k(x)dx\right\} < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

由已经证明的结果，当n趋于无限大时，第一项趋于0。由此得到：

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

QED.

控制收敛定理的特殊情况便是下面的有界控制收敛定理：

推论 4.3.2 设E是测度有限的可测集，$\{f_n\}$是E上一列可测函数，且存在常数K，使得$|f_n(x)| \le K$. 如果f_n在E上几乎处处收敛于可测函数f，那末

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

下面我们举一些控制收敛定理的具体应用的例子.

定理 4.3.3 设f是区间$[a,b]$上的有界函数，则f在区间$[a,b]$上*Riemann*可积的充要条件是f在$[a,b]$上几乎处处连续。

证明： 对于区间$[a,b]$的一个分点组D: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，我们有上、下函数$\psi, \varphi$，参考定理4.1.12的证明。取一列分点组$D_n$: $D_n \subset D_{n+1}, \delta(D_n) \to 0$，则$\psi_n$单调下降收敛于$\overline{f}$，而$\varphi_n$单调增加收敛于$\underline{f}$，并且:

$$\underline{f} \le f \le \overline{f}$$

如果f是Riemann可积的，则我们知道f是Lebesgue可积的，并且: $\underline{f} \doteq f \doteq \overline{f}$。令: $E_1 = E(\underline{f} \ne f) \cup E(f \ne \overline{f}) \cup \bigcup\limits_n D_n$，这里$E = [a,b]$，则$E_1$是零测集，下面证明$f$在$[a,b] \setminus E_1$中的每一点都连续。设$x_0 \in E \setminus E_1$，则:

$$\psi_n(x_0) \to f(x_0), \qquad \varphi_n(x_0) \to f(x_0)$$

所以对于任意的$\varepsilon > 0$，存在自然数N满足:

$$0 \le \psi_N(x_0) - f(x_0) < \varepsilon, \quad 0 \le f(x_0) - \varphi_N(x_0) < \varepsilon$$

对于N，由于$x_0 \notin D_n$，所以存在D_N的相邻分点$x_1^{(N)}, x_2^{(N)}$使得: $x_0 \in (x_1^{(N)}, x_2^{(N)})$。取$\delta = \min\left\{x_2^{(N)} - x_0, x_0 - x_1^{(N)}\right\}$，则对于任意的$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$都有:

$$f(x) \le \psi_N(x) = \psi_N(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$$
$$f(x) \ge \varphi_N(x) = \varphi_N(x_0) > f(x_0) - \varepsilon$$

所以，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，即$f$在$x_0$处连续。

反过来，假设f在$[a,b]$上几乎处处连续，$|f| \le K$ 设x_0是函数f的一个连续点，则对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$时，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 因此，如果取$[a,b]$的分点组$D_n$，并且$\delta(D_n) < \delta$，则$D_n$中有相邻的分点$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}$使得: $x_0 \in (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，于是，

$$f(x_0) \geq \varphi_n(x_0) \geq f(x_0) - \varepsilon$$
$$f(x_0) \leq \psi_n(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$$
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = f(x_0)$$
$$\therefore \quad \underline{f}(x_0) = \overline{f}(x_0) = f(x_0)$$
$$\therefore \quad \overline{f} \doteq \underline{f}$$

由ψ_n和φ_n的构造，我们知道：$|\varphi_n| \leq K, |\psi_n| \leq K$。由Lebesgue控制收敛定理得到：

$$\underline{S}(D_n) = (R)\int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b \varphi_n(x)dx \to \int_a^b \underline{f}(x)dx$$
$$\overline{S}(D_n) = (R)\int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b \psi_n(x)dx \to \int_a^b \overline{f}(x)dx$$

所以f的Riemann上、下和相等，即fRiemann可积。 QED.

现在再举一些控制收敛定理的应用.

定理 4.3.4 设$f(x,t)$是定义在矩形$[a,b]\times[c,d]$ 上的函数，如果对于$[c,d]$中任何一个固定的t, $f(x,t)$关于x在$[a,b]$上是可测的，而当$t' \to t$时，$f(x,t')$在$[a,b]$上几乎处处收敛于$f(x,t)$，并且存在$[a,b]$上可积函数F，使得$|f(x,t)| \leq F(x)(a.e.)$. 那末，当$t \in [c,d]$时，积分

$$I(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

存在，而且是t的连续函数.

证明： 对任何固定的t，由F的可积性，立即推知$f(x,t)$是x 的可积函数，因而$I(t)$存在.

下面证明$I(t)$是t的连续函数：对于任意的$t_0 \in [c,d]$，任取$[c,d]$中一列$\{t_n\}$，如果$t_n \to t_0$，这时作为x的函数序列$\{f(x,t_n)\}$有控制可积函数$F(x)$，由定理4.3.1，得到

$$\lim_{n\to\infty} I(t_n) = I(t_0)$$

这就是说t_0是$I(t)$的连续点. QED.

定理 4.3.5 设$f(x,t)$是矩形$[a,b]\times[c,d]$上的二元函数，固定$t \in [c,d]$, $f(x,t)$是x的可积函数. 如果对几乎所有的x，函数$f(x,t)$对t有偏导数，并且存在$[a,b]$上可积函数$F(x)$，使得

$$\left|\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\right| \leq F(x) \quad a.e. \tag{4.6}$$

那末，$I(t)$在$[c,d]$上具有导函数，并且

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \tag{4.7}$$

4.3.2 Levi引理和Fatou引理

下面介绍两个与控制收敛定理同等重要而且也是常用的收敛定理.

定理 4.3.6 (Levi引理) 设$\{f_n\}$是E上可积函数的单调增加序列，如果$\int_E f_n(x)dx \le M < \infty$，那末，$f_n$几乎处处收敛于$E$上的可积函数$f$，而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

证明： 设$\{E_n\}$是E的测度有限单调覆盖。由于$\{f_n\}$是单调增加的函数列，不妨假设$f_n \ge 0$(否则，可以考虑$f_n - f_1$)，令$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$。

下面证明$E(f=\infty)$是零测集。

对于任意的$N>0$,

$$0 \le [f_1]_N \le [f_2]_N \le \cdots \le [f_n]_N \le \cdots \to [f]_N \tag{4.8}$$

由Lebesgue控制收敛定理，

$$\int_{E_N}[f]_N dx = \lim_{n\to\infty}\int_{E_N}[f_n]_N dx \le \lim_{n\to\infty}\int_E f_n dx$$

由于当$f(x)\ge N$时，$[f]_N = N$，所以：$E([f]_N = N)$是可测集。由

$$Nm(E_n(f\ge N)) = Nm(E_n([f]_N = N)) \le \int_{E_N}[f]_N dx \le M$$

得到：$m(E_n(f \ge N)) \le \frac{M}{N}$。集合$E_n(f \ge N)$关于$N$是单调较少的可测集列，并且：$\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} E_n(f\ge N) = E_n(f=\infty)$，所以

$$m(E_n(f=\infty)) = \lim_{N\to\infty} E_n(f\ge N) = 0$$

$E(f=\infty) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n f=\infty$，而$E_n(f=\infty)$是单调增加的，所以$m(E(f=\infty))=0$。因此，我们可以对函数$f$作简单的修正，仍然记为$f$，当原来的$f(x)=\infty$时，就将它的函数值修改成0。这样，我们就得到$f_n$几乎处处收敛于$f$，由不等式(4.8)，得到$f$是可积函数，并且它是$f_n$的控制函数。再由Lebesgue控制收敛定理，我们就得到:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$$

QED.

本引理还有一种常用的级数形式:

定理 4.3.7 设$\{u_n\}$是E上非负的可积函数序列，并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)dx<\infty$，那末$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$几乎处处收敛$E$上一个可积函数$u$，并且

$$\int_E udx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_ndx$$

定理 4.3.8 (Fatou引理) 设$\{f_n\}$是E上一列可积函数，如果有E上的可积函数h满足: $f_n\geq h(a.e.)(\forall n)$，而且

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx<\infty$$

那末函数$\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n$是$E$上的可积函数，而且

$$\int_E\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)dx\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$$

证明: 令:

$$F_{n,m}(x)=\min\{f_n(x),f_{n+1}(x),\cdots,f_{n+m}(x)\}$$

则$F_{n,m}(x)\geq h(x)$。对于固定的$n,F_{n,m}$是单调下降的函数列，由Levi引理，它几乎处处收敛于E上的一个可积函数F_n，并且:

$$\lim_{m\to\infty}\int_E F_{n,m}(x)dx=\int_E F_n(x)dx$$

而$\{F_n\}$是单调增加的可积函数列，由不等式:

$$\int_E F_{n,m}(x)dx\leq\min\left\{\int_E f_ndx,\int_E f_{n+1}dx,\cdots,\int_E f_{n+m}dx\right\}$$

令$m\to\infty$，我们得到:

$$\int_E F_n(x)dx\leq\inf_{m\geq n}\int_E f_m(x)dx$$

所以:

$$\sup_{n\geq 1}\int_E F_n dx \leq \sup_{n\geq 1}\inf_{m\geq n}\int_E f_m(x)dx = \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n dx < \infty$$

利用Levi引理，得到F_n几乎处处收敛于E上的可积函数F，并且:

$$\int_E F dx = \lim_{n\to\infty}\int_E F_n dx \leq \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n dx$$

即:

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n dx \leq \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n dx$$

QED.

4.3.3 极限定理的注

上面是介绍三种极限定理的内容本身及某些应用. 此外，我们还要说明两个问题:

第一，控制收敛定理、Levi定理以及Fatou定理三者是等价的. 所谓“等价”，就是指如果其中有一个定理用某种途径先设证明，那末其它两个便可由它推出. 本教材是采用先证控制收敛定理，然后推出Levi定理，最后再推出Fatou定理. 读者如果有兴趣，可自行假设另一个定理成立，而推出其它两个定理.

第二，这些收敛定理的基本条件是不可缺少的.

下面举一些例来说明这个问题.

例 4.3.9 控制收敛定理中控制函数的可积性是不可缺少的。例如，取$E=(0,\infty)$以及函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x\in(0,n] \\ 0, & x\in(n,\infty) \end{cases}$$

显然，控制$\{f_n\}$的函数F，必须满足$F\geq 1$，它在$(0,\infty)$上不是可积的. 函数列$\{f_n\}$的极限函数$f\equiv 1$，在$(0,\infty)$上不是可积的.

再举一个控制收敛函数的可积性不可缺少的例子.

例 4.3.10 设$E=(0,\infty)$，取E上的函数列

$$f_n(x) = \frac{n}{(nx)^2+1}$$

显然，在E上$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$，但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n}{(nx)^2+1}dx = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

函数列$\{f_n\}$虽然处处收敛，但不能逐项积分，其原因是在于不存在可积的控制函数.

例 4.3.11 *Levi*引理中$\{f_n\}$的积分序列$\int_E f_n dx$有上界这个条件是不可缺少的. 例如，$[0,1]$区间上的函数列：

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{x}, & x \in \left[\frac{1}{n}, n\right] \\ 0, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

显然$\{f_n\}$是单调增加序列，而$\int\limits_0^1 f_n dx \to \infty$。$f_n$的极限函数是

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

这是熟知的不可积函数。

此外，例4.3.9中函数列也可作为Levi定理中有上界这个条件不可少的反例.

Fatou引理中存在可积的h，使$h \le f_n$，以及$\varliminf\limits_{n\to\infty} \int_E f_n dx < \infty$ 读者自己作出这两个条件不可少的例.

第五章　微分和积分

5.1　单调函数

在这一节中我们将讨论单调函数的连续性、可微性以及可积性.

定义 5.1.1 设f是点集A上的函数，如果对于A中的任何两点x_1, x_2，当$x_1 < x_2$时，不等式

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

成立．就称f是A上的单调增加函数．如果$f(x_1) < f(x_2)$成立，就称f是A上严格单调增加函数．如果当$x_1 < x_2$时，不等式

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

成立，就称f是A上的单调下降函数．类似有严格单调下降函数的概念．单调增加或单调下降的函数，统称为单调函数.

和数学分析中一样，对任一函数f，如果f在x_0点的右方极限$f(x_0+0)$存在，就称$f(x_0+0) - f(x_0)$为f在x_0点的右方跳跃度，类似地定义左方跳跃度．如果右(左)方跳跃度为0，称f在x_0点右(左)方连续．又称x_0为f的右(左)连续点．如果$f(x_0+0), f(x_0-0)$都存在，但$f(x_0+0), f(x_0-0), f(x_0)$不全相等，就称$x_0$是$f$的第一类不连续点．如果$f$的一个不连续点不是第一类的，就称为第二类不连续点.

下面是有关单调函数连续性的定理.

定理 5.1.2 设f是$[a, b]$上单调增加函数，那末

1. *f的不连续点全是第一类不连续点;*
2. *f的不连续点全体最多是可列集;*
3. *f在不连续点的左、右方跳跃度都是非负的，并且所有跳跃度的总和不超过$f(b) - f(a)$.*

证明： (1) 对$[a,b)$中任何点x_0，证明$f(x_0+0)$存在：因为$x_0\in[a,b)$，所以存在自然数N，当$n\geq N$时，$x_0+\frac{1}{n}\in[a,b)$。由函数单调性，便知道$\left\{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)\right\}$是单调下降数列，并且有下界，因而有极限，记它为$\tau$，显然$\tau\geq f(x_0)$. 现在来证明$\tau=f(x_0+0)$.

事实上，对任何$\varepsilon>0$，存在n，使得

$$0\leq f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-\tau<\varepsilon$$

因此对任何$x\in(x_0,x_0+\frac{1}{n})$，

$$0\leq f(x)-\tau\leq f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-\tau<\varepsilon$$

这就是说$f(x_0+0)=\tau$.

类似可以证明，对任何$x\in(a,b],f(x_0-0)$存在.

(2) 从上面的证明中可以看出，对于任意的$x\in(a,b)$有：$f(x-0)\leq f(x)\leq f(x+0)$，同时，$f(a)\leq f(a+0),f(b-0)\leq f(b)$。所以对$[a,b]$上任何一点，它的左、右方跳跃度总是非负的. 记$f$的不连续点全体为$E$. 设$c>0,E_c=E(f(x+0)-f(x-0)\geq c)$.

在E_c中任取p个点$a\leq x_1<x_2<\cdots<x_p\leq b$，再取分点$\xi_i$满足：$x_i<\xi_i<x_{i+1}(i=1,2,\cdots,p-1)$以及$\xi_0=a,\xi_p=b$。由函数$f$的单调性，显然有$f(\xi_{i-1})\leq f(x_i-0)\leq f(x_i+0)\leq f(\xi_i)$，所以

$$f(x_i+0)-f(x_i-0)\leq f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})$$

于是

$$cp\leq\sum_{i=1}^{p}[f(x_i+0)-f(x_i-0)]\leq\sum_{i=1}^{p}[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})]\leq f(b)-f(a) \tag{5.1}$$

因此，p总是有限的，即E_c是有限的. 而$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}$，因此，$E$最多是可列集.

(3)有上面的不等式(5.1)得到。 QED.

关于单调函数的可积性，有如下定理.

推论 5.1.3 设f是$[a,b]$上单调增加函数，那末f在$[a,b]$上是$Riemann$可积函数，也是$Lebesgue$可积函数。

5.1.1 单调函数的导数

现在转到单调函数的微分性质的讨论. 为此先将数学分析中在一点的导数概念作更细致地考察.

定义 5.1.4 设f是$[a,b]$上的有限函数，$x_0\in[a,b]$，对收敛于零的数列$\{h_n\}$，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

存在(这里极限值可取$\pm\infty$)，记为$D_{\{h_n\}}f(x_0)$，称它是f在x_0点的一个导出数，特别，当$h_n>0(n=1,2,\cdots)$时，称$D_{\{h_n\}}f(x_0)$是f在x_0点的一个右方导出数；当$h_n<0(n=1,2,\cdots)$时，称$D_{\{h_n\}}f(x_0)$是f在x_0点的一个左方导出数.

记f在zo点的右方导出数的上确界为$D^+f(x_0)$，下确界为$D_+f(x_0)$，分别称为f在x_0点的右方上导数、右方下导数. 类似地定义在x_0点的左方上、下导数，记左方上、下导数为$D^-f(x_0),D_-f(x_0)$。

例 5.1.5 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

这个函数在$x=0$点有不止一个导出数。如果取$h_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，易知$D_{\{h_n\}}f(0)=\infty$；如果取$h_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}},D_{\{h_n\}}f(0)=-\infty$ 。事实上，可以证明，对任何λ：$-\infty\le\lambda\le\infty$，我们总可以取适当$\{h_n\}$，使得$D_{\{h_n\}}=\lambda$. 也就是说，$f$在$x=0$点导出数全体是$[-infty,\infty]$. f在$x=0$点的左方或右方导出数全体也是$[-\infty,\infty]$.

对于一般的函数，有如下导出数的定理.

定义 5.1.6 设f是$[a,b]$上的有限函数，如果在x点的一切导出数相等，就称f在x点具有导数，记导出数的公共值为$f'(x)$. 并称$f'(x)$为f在x点的导数. 如果在x点导数存在并且导数是有限值，称x为x的可微分的点。

例 5.1.7 符号函数$f(x)=\operatorname{sgn}x$在$x=0$点具有导数$f'(0)=\infty$. 注意，此时f在$x=0$点并不连续.

由此可见，我们这里的导数概念和数学分析中导数概念略有差别. 数学分析中所说的导数存在的含义是不仅要求导数存在，而且要求导数是有限的，即可微.

现在考察单调函数的可微性. 我们要引入一个概念，为简单起见，先考察连续函数情况

定义 5.1.8 设f是$[a,b]$上的连续函数，$x\in(a,b)$，如果有$\xi\in(x,b)$满足:

$$g(\xi)<g(x)$$

称x是f的右受控点，简称为右控点. 同样可定义x是f的左受控点，简称为左控点.

例如，当f是$[a,b]$上严格单调增加连续函数时，(a,b)中所有点都是f的右控点；当f是$[a,b]$上严格单调下降函数时，(a,b)中所有点都是f的左控点. 又如$[-1,1]$上的函数$f(x)=x^2, x=0$ 是它的左控点，又是它的右控点.

引理 5.1.9 (F.Riesz) 设f在$[a,b]$上连续，那末f的右控点(相应地左控点)全体E是一开集. 又如果$\{(a_k,b_k)\}$是构成区间集，那末

$$g(a_k) \leq g(b_k) \qquad (\text{或者} \quad g(a_k) \geq g(b_k))$$

证明： 任取$x_0 \in E$，有$\xi > x_0$满足$f(x_0) < f(\xi)$. 由f的连续性知道，存在$\delta > 0$，使得$a < x_0-\delta < x_0+\delta < b$，而且当$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$时，$f(x) < f(\xi)$。所以$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中一切点都是右控点，即$x_0$是$E$的内点. 因此$E$是开集.

设$\{(a_k,b_k)\}$是E的构成区间集，我们证明：当$x \in (a_k,b_k)$ 时，

$$f(x) \leq f(b_k) \tag{5.2}$$

假如不对，则有$x_0 \in (a_k,b_k)$满足：$f(x_0) > f(b_k)$. 由于x_0是右控点，所以有$\xi > x_0, f(x_0) < f(\xi)$. 在$(x_0,b)$中这种$\xi$的上确界记为$x_1$. 显然$f(x_1) \geq f(x_0) > f(b_k)$，所以$x_1 \neq b_k$。如果$b_k < x_1$，那么：由$f(b_k) < f(x_1)$得到：$b_k$是右控点，这就与假设$b_k$是$E$的构成区间端点(从而$b_k \notin E$) 矛盾. 如果$x_1 < b_k$，那么$x_0 < x_1 < b_k$得到：$x_1 \in E$，因而又存在$\xi > x_1$使得$f(x_0) \leq f(x_1) < f(\xi)$，这又与假设$x_1$是适合$f(x_0) < f(\xi), x_0 < \xi$的$\xi$的上确界矛盾. 所以等式(5.2)成立。令$x \to a_k$，由等式(5.2)便得到所要证明的。左控点的情况可以同样证明。 QED.

我们后面要用到的实际上并不限于f为连续函数，因此要有下面的概念.

定义 5.1.10 设f是$[a,b]$上函数，不连续点都是第一类的. 对于$x \in (a,b)$，如果有$\xi \in (x,b)$，使得

$$\max\{f(x), f(x+0), f(x-0)\} < f(\xi)$$

称x是f的右控点；类似地，如果有$\xi \in (a,x)$使得上式成立，就称x是f的左控点.

对于这类函数f，我们引入记号：

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \max\{f(x), f(x+0), f(x-0)\}, & x \in (a,b) \\ f(a+0), & x = a \\ f(b-0), & x = b \end{cases}$$

引理 5.1.11 (F.Riesz) 设f是$[a,b]$上的函数，其不连续点都是第一类的，那末f的右控点*(*相应地左控点*)*全体E是开集. 又如果$\{(a_k,b_k)\}$是E的构成区间，那末

$$f(a_k+0)\le \hat{f}(b_k) \qquad \text{或者} \quad f(b_k-0)\le f(\hat{a}_k) \tag{5.3}$$

定理 5.1.12 单调函数几乎处处有有限导数.

证明： 我们不妨假设f是$[a,b]$上单调增加函数.

记E是函数$f(x)$在(a,b)中的连续点全体. 由于f是单调增加的，其一切导出数都是非负的. 因此我们只要证明：使得

$$D^+f=D_+f=D^-f=D_-f<\infty$$

不成立的点全体是零集. 证明分如下几步.

第一步，记$E_\infty^+=E(D^+f=\infty)$是零测集。对于任意的$c>0$，令$g(x)=f(x)-cx, E_c=E(D^+f>c)$。函数$g(x)$最多只有第一类不连续点，由F.Riesz引理，它的右控点集O是开集。如果$O=\bigcup\limits_n(a_n,b_n)$是$O$的构成区间分解，那么：$g(a_k+0)\le\hat{g}(b_k)$，即：

$$b_n-a_n\le\frac{1}{c}(f(b_n+0)-f(a_n+0))$$

由于f是单调增加函数，$\hat{f}(b_k)=f(b_k+0)$，当$b_k=b$时，$f(b_k+0)$应换成$f(b_k-0)$。

如果$x\in E_c$，那末有$\xi>c$满足：

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}>c \tag{5.4}$$

这个不等式等价于$g(x)<g(\xi)$. 由于$x\in E_c$，x是g的连续点，所以$g(x)=\hat{g}(x)$，由此x是g的右控点. 即：$E_c\subset O$，由此得到

$$m^*(E_c)\le m(O)\le\sum_k(b_k-a_k)\le\frac{1}{c}\sum_k(f(b_k+0)-f(a_k+0))\le\frac{f(b-0)-f(a+0)}{c}$$

所以：$m^*(E_\infty^+)\le m^*(E_c)\le\frac{1}{c}(f(b)-f(a))$，令$c\to\infty$，就得到：$m(E_\infty^+)=0$。

第二步，证明$M=E(D^+f>D_-f)$也是零测集。设c,r 是两个有理数，$c>r$. 记$M_{c,r}=E(D^+f>c>r>D_-f)$. 显然$M=\bigcup\limits_{c>r}M_{c,r}$，其中$\cup$是对一切$c>r$的有理数组$(c,r)$求并. 因此只要证明每个$M_{c,r}$的测度是零就可以了.

反证法，假若不然，则存在开集$O\supset M_{c,r}, O\subset(a,b)$满足：$m(O)<\frac{c}{r}m^*(M_{c,r})$。设$O=\bigcup\limits_n I_n$是$O$的构成区间分解。

在开区间I_n中考虑函数$h(x)=f(x)-rx$，由F.Riesz引理，函数$h(x)$的左控点全体是一个开集$O_n\subset I_n$，如果$O_n=\bigcup\limits_k(a_k,b_k),(a_k,b_k)\subset I_n$是$O_n$的构成区间，那么：$g(b_k-0)\le \hat{g}(a_k)$，即：

$$f(b_k-0)-f(a_k+0)\le r(b_k-a_k)$$

这里我们利用了等式$\hat{f}(a_k)=f(a_k+0)$。

当$x\in M_{c,r}$时，存在ξ满足

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<r,\quad \xi<x$$

这个不等式就是$h(x)<h(\xi),\xi<x$，而x是函数h的连续点，所以$\hat{h}(x)=h(x)$，即x是函数h左控点，所以：$M_{c,r}\cap I_n\subset O_n$。

在区间(a_k,b_k)中，我们考虑函数：$g(x)=f(x)-cx$。与第一步证明一样，当$x\in M_{c,r}\cap(a_k,b_k)$时，$x$属于函数$g$的右控点集$G_k$，并且：

$$m^*(M_{c,k}\cap(a_k,b_k))\le\frac{1}{c}(f(b_k-0)-f(a_k+0))\le\frac{r}{c}(b_k-a_k)$$

而(a_k,b_k)是I_n中互不相交的开集，$\bigcup\limits_k(a_k,b_k)\subset I_n$，所以：$m^*(M_{c,r}\cap I_n)\le\frac{r}{c}m(I_n)$。由此得到：$m(O)<\frac{c}{r}m^*(M_{c,r})\le m(O)$，矛盾。

第三步，证$E(D^-f>D_+f)$是零测集。只要利用变换：$h(x)=-f(-x)$就可以将集合：$E(D^-f>D_+f)$转变成$E(D^+h>D_-h)$。

综上所述，就得到$D^-f=D_-f=D^+f=D_+f<\infty$几乎处处成立。 QED.

对于单调增加函数，不仅有上述深刻的导数定理，而且由它还可以得到很有用的逐项求导定理.

定理 5.1.13 设f是$[a,b]$上的单调增加函数，那末，f'是可积函数，而且

$$\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)$$

证明： 当$x\ge b$时，我们假设$f(x)=f(b)$. 对任何自然数n，作函数

$$\varphi_n(x)=\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$$

它是$[a,b]$上的可积函数，而且$\varphi_n\ge 0$. 由于：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left\{\int_a^b f(t+\frac{1}{n})dt-\int_a^b f(t)dt\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left\{\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt\right\}\\ &= f(b)-f(a+0)<\infty\end{aligned}$$

由Fatou引理得到：$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f'(x)(a.e.)$是可积的，并且:

$$\int_a^b f'(t)dt=\int_a^b \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)dt\le \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)dt\le f(b)-f(a)$$

QED.

5.2 有界变差函数

定义 5.2.1 设f是$[a,b]$上的有限函数，在$[a,b]$上任取一组分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

作和式

$$V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

称它为f对分点组$x_0,x_1,\cdots,x_n$的变差. 如果对一切可能的分点组，变差所形成的数集$\{V_f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$有界，就称$f$是$[a,b]$上的有界变差函数. 记

$$\bigvee_a^b(f)=\sup_{x_0,x_1,\cdots,x_n} V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$$

称$\bigvee\limits_a^b(f)$是f在$[a,b]$上的全变差. 当x在$[a,b]$上变化时，称在$[a,x]$上的全变差$\bigvee\limits_a^x(f)$为f在$[a,b]$上的全变差函数.

区间$[a,b]$上有界变差函数全体所成的函数类记为$V[a,b]$。

例 5.2.2 区间$[a,b]$上的任何单调增加函数都是有界变差的。

证明： 对于区间$[a,b]$的任何分点组：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，

$$\begin{aligned}V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)&=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=f(b)-f(a)\end{aligned}$$

所以，f是有界变差的，而且$\bigvee\limits_a^b(f)=f(b)-f(a)$. QED.

例 5.2.3 设f在区间$[a,b]$上满足$Lipschitz$条件，即存在常数M满足:

$$|f(x)-f(y)|\leq M\,|x-y|\,,\quad \forall x,y\in[a,b]$$

那末，f是有界变差函数.

证明： 对于区间$[a,b]$的任何分点组：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，

$$\begin{aligned}V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)&=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\leq M\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|=M(b-a)\end{aligned}$$

所以$\bigvee\limits_a^b(f)\leq M(b-a)$. QED.

连续函数不一定是有界变差函数。

例 5.2.4 函数f是定义在$[0,1]$上，

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

f是$[0,1]$上的连续函数，它不是有界变差函数。

证明： 对于任意的自然数，取区间$[0,1]$分点组

$$x_0=0,\quad x_i=\frac{1}{(n-1-i)\pi+\frac{\pi}{2}}(i=1,2,\cdots,n-1),\quad x_n=1$$

那末

$$
\begin{aligned}
V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\
&\geq \sum_{i=2}^{n-1}\left|x_i\sin\frac{1}{x_i}-x_{i-1}\sin\frac{1}{x_{i-1}}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(k-1)\pi+\frac{\pi}{2}}\right) > \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

所以$\bigvee\limits_0^1(f)=\infty$. QED.

定理 5.2.5 有界变差函数具有下面一些性质:

1. 当$f\in V[a,b]$时，f是有界函数.
2. 如果$f,g\in V[a,b],\alpha,\beta$是两个常数，那末：$\alpha f+\beta g\in V[a,b]$而且;
$$\bigvee_a^b(\alpha f+\beta g)\leq|\alpha|\bigvee_a^b(f)+|\beta|\bigvee_a^b(g)$$
3. 如果$f,g\in V[a,b]$，那么$fg\in V[a,b]$
4. 如果$f\in V[a,b]$，而且$\bigvee\limits_a^b(f)=0$，那么f是常数.
5. 如果$[c,d]\subset[a,b]$，并且$f\in V[a,b]$，那末$f\in V[c,d]$。并且对于任意的c: $a<c<b$有;
$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^d(f)$$
6. 设$\{g_n\}$是$V[a,b]$中的一列函数，并且数集$\left\{\bigvee\limits_a^b(g_n)\right\}$有界，如果$g_n$点点收敛于函数$f$，那么$f\in V[a,b]$，而且:
$$\bigvee_a^b(f)\leq\sup_{n\geq1}\bigvee_a^b(g_n)$$

证明： (6) 任取$[a,b]$的分点组：$a=x_0<x_1\cdots<x_k=b$. 由于

$$V_{g_n}(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{k}|g_n(x_i)-g_n(x_{i-1})|$$

令$n\to\infty$，我们得到:

$$V_f(x_0,x_1,\cdots,x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|g_n(x_i)-g_n(x_{i-1})|\le\sup_{n\ge1}\bigvee_a^b(g_n)<\infty$$

QED.

定理 5.2.6 (Jordan分解定理) 设f是$[a,b]$上的有界变差函数，那末f可分解成两个单调增加函数的差.

证明： 作函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)+f(x)\right\},\quad \psi(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)-f(x)\right\}$$

对于任意的$x,x'\in[a,b],x<x'$，由

$$|f(x')-f(x)|=V_f(x,x')\le\bigvee_x^{x'}(f)=\bigvee_a^{x'}(f)-\bigvee_a^x(f)$$

得到函数φ,ψ是单调增加函数. QED.

推论 5.2.7 有界变差函数的不连续点都是第一类的；不连续点全体最多是一可列集；有界变差函数是$Riemann$可积的；有界变差函数几乎处处有有限导数，而且导函数是可积的.

显然，有界变差函数分解为两个单调增加函数的差时，这种分解不是唯一的. 例如把φ,ψ同加一个相同的常数或同加一个相同的单调增加函数时，仍然是它的一个分解.

定理 5.2.8 设f是$[a,b]$上的有界变差函数，那末唯一地存在在(a,b)上右连续的有界变差函数g，使得

1. 在(a,b)中$f(x)$的连续点上$g(x)=f(x)$;
2. $g(a)=f(a),g(b)=f(b)$,
3. $$\bigvee_a^b(g)\le\bigvee_a^b(f)$$

证明： 对于$x\in(a,b)$，令$g(x)=f(x+0)$. 对于任意的$x_0\in(a,b)$，由$f(x_0+0)$的定义，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当x满足：$0<x-x_0<\delta$时，

$$|f(x)-f(x_0+0)|<\varepsilon$$

由此得到：$|f(x+0)-f(x_0+0)|\le\varepsilon$，所以在开区间$(a,b)$中$g$是右连续函数。

对于$[a,b]$的分点组$a=x_0<x_1<x_2<\cdots x_n=b$，我们取分点组：$y_0<y_1<\cdots<y_n=b$，它满足：$x_i<y_i<x_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$。则：

$$V_f(y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n)\le\bigvee_a^b(f)$$

令$y_i\to x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，我们得到：$V_g(x_0,x_1,\cdots,x_n)\le\bigvee\limits_a^b(f)$。所以$g$是有界变差函数，并且：$\bigvee\limits_a^b(g)\le\bigvee\limits_a^b(f)$。

显然满足定理条件的g是唯一确定的. QED.

习题

1. $[a,b]$上任何两个单调函数，如果在一稠密集上相等，那末它们有相同的连续点，并且在不连续点的跳跃度一致.

2. 单调函数全体的势是$\aleph$.

3. 设f是$[a,b]$上单调函数，当把它的不连续点的值修改成右连续(或左连续)时所得的函数记为$\bar{f}$. 证明，$f,\bar{f}$具有相同的可微分点.

4. 设E是直线上测度为零的集，试作一直线上单调增加函数$f(x)$，使得当$x\in E$时，$f'(x)=\infty$.

5. 设f是$[a,b]$上的连续函数，如果存在M，使得在每个点x，f总有一个右方导出数Df满足：$|Df|\le M$。那末，满足Lipschitz条件.

6. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1+x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

由φ作函数f：当$x\ge 0$时，$f(x)=\sqrt{x}\varphi(x)$；当$x<0$时，$f(x)=-\sqrt{-x}\varphi(x)$. 问，$f(x)$在$x=0$点导数是否存在?

7. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处有有限导数. 证明对任何$\delta>0$，存在可测集$E_\delta\subset[a,b],m([a,b]\setminus E_\delta)<\delta$，使得对任何$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，对一切$x\in E_\delta,x'\in[a,b]$，当$|x'-x|<\eta$时，成立着

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right|<\varepsilon$$

8. 设α是一实数，函数

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在α取什么值时，f是$[0,1]$上的有界变差函数?

9. 设f是$[a,b]$上的有限函数，在$[a,b]$上取一分点组$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记

$$V_f^2(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}-\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right|$$

如果对一切分点组，数集$\{V_f^2(x_0,x_1,\cdots,x_n)\}$有上界. 证明这种函数满足Lipschitz条件. 更进一步证明，在每点x，$D^+f(x)=D_+f(x), D^-f(x)=D_-f(x)$, 如记$f'_+(x)=D^+f(x), f'_-(x)=D^-f(x)$，证明，$f'_+, f'_-$是有界变差函数.

10. 当区间$[a,b]$上的函数满足$|f(x')-f(x)|\le k\,|x'-x|^\alpha(\alpha>0, k$是常数)时，称$f(x)$满足$\alpha-$次Hölder条件。证明：当$\alpha>1$，$f(x)$恒为常数. 并作一个不满足任何次Hölder条件的有界变差函数，又设$\alpha<1$为已知，作一函数满足α次Hölder条件，但不是有界变差的.

11. 设f是$[a,b]$上的有界变差函数，那末几乎处处成立着

$$\frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f)=|f'(x)|$$

12. 设f是$[a,b]$上有界变差函数. 对任何分点组$a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_n=b$，记$P_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum'(f(x_i)-f(x_{i-1})), \sum'$表示满足$f(x_i)-f(x_{i-1})\ge 0$的$i$求和，称$P_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$为正变差，而称$P_a^b(f)=\sup\{P_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)\}$ 为正全变差. 证明(i)对任何$c(a<c<b)P_a^b(f)=P_a^c(f)+P_c^b(f)$; (ii)$P_a^x(f)=p(x)$，这里$p(x)$是$f$的正变差函数. 对负变差函数也有类似结果.

13. 证明，函数f在$[a,b]$上满足Lipschitz条件的充要条件是对任何$\varepsilon>0$ ，存在$\delta>0$，使得任何有限个区间$(a_k,b_k)(k=1,2,\cdots,n)$，只要$\sum\limits_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$时，总有$\sum\limits_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$

14. 设f是$[a,b]$上单调函数. 那末f将$[a,b]$上Borel集映照成$(-\infty,\infty)$上的Borel集。又如果$f'(x)$处处存在，并且是有限函数，那末f 将$[a,b]$上零测集映照成$(-\infty,\infty)$上的零测集.

15. 设f是$[a,b]$上有界变差函数，并且连续。证明：对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当分点组$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$的$\max\limits_i(x_i-x_{i-1})<\delta$时，总有

$$V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n) > \bigvee_a^b(f)-\varepsilon$$

16. 设f是$[a,b]$上有限函数. 证明f在$[a,b]$上的连续点全体是Borel 集。

17. 设f在(a,b)上处处存在有限导数. 证明: f'不能在(a,b)上有第一类不连续点.

18. 作一个在(a,b)上连续的函数f，要求它在(a,b)上处处具有有限的导数，并且f'在(a,b)上不连续点全体具有正的测度.

19. 求出跳跃函数的全变差.

20. 设$E\subset[a,b]$(a,b可以是无限大)，并且是可测集. 证明几乎所有E中的点是E的全密点.

5.3 不定积分

这一节，我们讨论牛顿一莱布尼兹公式

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a) \tag{5.5}$$

成立的条件问题. 这是微积分学中一个基本问题. 在Riemann积分情况下，通常的结论是(i)如果f是$[a,b]$上连续函数，那末不定积分$(R)\int_a^x f(t)dt$是f的一个原函数; (ii)如果F是连续函数，的一个原函数，那末等式(5.5)成立. 这就是说，“积分”与“求导”是互为逆运算. 可是，连续的假设，在许多场合显得要求太高，甚至成为进一步研究的障碍. 由于这个公式无论在实际应用或理论研究中都很重要。公式(5.5)究竟在怎样较弱条件下成立的问题就曾是人们研究的一个课题. 下面用Lebesgue积分和点集分析方法来研究这个问题.

5.3.1 不定积分的求导

和Riemann积分一样，如果f是$[a,b]$上可积函数，那末称$\int_a^x f(t)dt(x\in[a,b])$是$f$的不定积分. 现在先考察不定积分的求导问题.

定理 5.3.1 设f是$[a,b]$上可积函数，那末

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt \doteq f(x) \tag{5.6}$$

证明: 因为函数f可以分解成: $f=f^+-f^-$，而$\int_a^x f^+(t)dt$和$\int_a^x f^-(t)dt$是两个单调增加函数，所以: $\int_a^x f(t)dt$是有界变差函数，$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$几乎处处存在，并且

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt \doteq \frac{d}{dx}\int_a^x f^+(t)dt - \frac{d}{dx}\int_a^x f^-(t)dt$$

由定理5.1.13得到：$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$是可积函数，并且：

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt\right| dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}\int_a^x f^+(t)dtdx + \int_a^b \frac{d}{dx}\int_a^x f^-(t)dtdx \\ &\le \int_a^b f^+(t)dt + \int_a^b f^-(t)dt = \int_a^b |f|(t)dt\end{aligned}$$

如果f是$[a,b]$上的连续函数，那么等式(5.6)显然成立。

如果f是可测函数，由定理4.2.12，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$[a,b]$上的连续函数φ满足：

$$\int_a^b |f(t) - \varphi(t)|\, dt < \varepsilon$$

对函数$f-\varphi$应用上面得到的结论，我们有：

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt - f(x)\right| dx &\le \int_a^b \left|\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt - \varphi(x)\right| dx + \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\, dx \\ &\le \int_a^b \left|\frac{d}{dx}\int_a^x [f(t)-\varphi(t)]dt\right| dx + \varepsilon \\ &\le \int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\, dt + \varepsilon < 2\varepsilon\end{aligned}$$

由于ε是任意的，我们得到等式(5.6)。 QED.

5.3.2 Lebesgue点

定义 5.3.2 设f是$[a,b]$上可积函数，$x_0 \in (a,b)$，如果对任何$h_1 \ge 0, h_2 \ge 0, h = h_1 + h_2 \ne 0$，有：

$$\lim_{h_1+h_2\to 0} \frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2} |f(x) - f(x_0)|\, dx = 0$$

称x_0是f的*Lebesgue*点.

Lebesgue点是经典分析中有用的一个概念.

定理 5.3.3 设f在$[a,b]$上是可积的，x_0是f的*Lebesgue*点，那末

$$\left.\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt\right|_{x=x_0} = f(x_0)$$

证明： 由不等式

$$\left|\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2} f(t)dt - f(x_0)\right| = \frac{1}{h_1+h_2}\left|\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}[f(t)-f(x_0)]dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(t)-f(x_0)|\,dt \to 0$$

就得到所要证明的。 QED.

但是，等式(5.6)成立的点未必是Lebesgue点. Lebesgue点比等式(5.6)成立要强.

定理 5.3.4 设f是$[a,b]$上*Lebesgue*可积函数，那末$[a,b]$上几乎所有的点都是*Lebesgue*点。

证明： 对于任意的r，函数$|f(x)-r|$是$[a,b]$上可积函数. 所以等式

$$\frac{d}{dx}\int_a^x |f(t)-r|\,dt = |f(x)-r|$$

几乎处处成立，记等式成立的x全体为E_r，则：$m(E_r) = b-a$。令$E = \bigcap\left\{E_r : r\text{为有理数}\right\}$，则$m(E)=b-a$。下面证明$E$中点都是Lebesgue点:

任取$x_0\in E$, 对于任意的$\varepsilon>0$，取有理数r满足：$|f(x_0)-r_0|<\varepsilon$. 因此对任何$h_1\geq 0, h_2\geq 0, h=h_1+h_2>0$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\,dx \leq \frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-r_0|\,dx + |f(x_0)-r_0|$$

令$h\to 0$，得到:

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\,dx \leq |f(x_0)-r|+\varepsilon < 2\varepsilon$$

由于ε是任意的，所以

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\,dx = 0$$

QED.

5.4 全连续函数

下面讨论怎样的函数$F(x)$能写成一个可积函数$f(t)$的不定积分. 如果$F(x)$能写成

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \tag{5.7}$$

显然，$F(x)$是$[a,b]$上连续有界变差函数. 但不是所有的连续的有界变差函数都能写成上面形式. 积

分有更强的连续性，即全连续性. 能够成为某个可积函数的不定积分的函数$F(x)$，它要求函数具有比普通连续性更强的连续性，将这种连续性抽象出来，引入如下定义:

定义 5.4.1 设F是$[a,b]$上的有限函数，如果对任何$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$\{(a_i,b_i)\}$是$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间，其总长度$\sum\limits_i (b_i - a_i) < \delta$时，不等式

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon \tag{5.8}$$

成立. 那末称F在$[a,b]$上全连续，或称做绝对连续函数.

例 5.4.2 设f在$[a,b]$上满足$Lipschitz$条件，那末f是全连续函数.

证明: 由假设，存在正数M，当$x,y \in [a,b]$时，

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$$

对于任意的有限个互不相交的开区间$\{(a_i,b_i)\}$，我们有:

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| \leq M \sum_i (b_i - a_i)$$

QED.

全连续函数有下面的简单性质.

定理 5.4.3 *1.* $[a,b]$上的全连续函数是连续的;

2. 两个全连续函数的线性组合、乘积仍是全连续函数;

3. $[a,b]$上全连续函数是有界变差函数.

推论 5.4.4 全连续函数几乎处处有有限导数，而且导函数是可积的.

下面是全连续函数的一个重要性质.

定理 5.4.5 设F是$[a,b]$上的全连续函数，而且$F' \doteq 0$，那末F是常数.

证明: 我们只要证明$F(b) = F(a)$。对任何$\varepsilon > 0$, 由$F(x)$的全连续性，存在$\delta > 0$，当$\{(a_i,b_i)\}$是有限个总长度小于δ的互不相交的开区间时，

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

记$E_0=\{x\colon x\in(a,b),f'(x)=0\}$，由假设：$m([a,b]\setminus E_0)=0$. 由测度的定义，对上面的$\delta$，存在开集$O,O\supset[a,b]\setminus E_0$，而且$m(O)<\delta$. 记$O$的构成区间为$\{(a_i,b_i)\}$.

另一方面，当$y_0\in E\setminus O\subset E_0$时，$F'(y_0)=0$. 所以存在正数$h$，当$y\in(y_0-h,y_0+h)$时，

$$\left|\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}\right|<\varepsilon$$

这时开集族$\{(a_i,b_i)\}\bigcup\{(y_0-h,y_0+h)\colon y_0\in[a,b]\setminus O\}$覆盖了$[a,b]$. 根据Borel覆盖定理，可从中选出有限个来覆盖$[a,b]$，设它们是

$$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_k,b_k),(y_1-h_1,y_1+h_1),(y_2-h_2,y_2+h_2),\cdots,(y_l-h_l,y_l+h_l)$$

取区间$[a,b]$的一个分点组：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，这个分点组是由$\{a_i,b_i,y_j\}$中插入一些点组成，它满足：任意的分点区间$(x_{i-1},x_i)$有以下三类组成：

- (x_{i-1},x_i)包含在某个(a_j,b_j)中，所有这种i的全体记为I，其他的记为II
- $x_{i-1}=y_j$，而且$(x_{i-1},x_i)\subset(y_j,y_j+h_j)$
- $x_i=y_j$，而且$(x_{i-1},x_i)\subset(y_j-h_j,y_j)$

由此得到

$$\begin{aligned}|F(b)-F(a)|&\leq\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|\\&=\sum_{I}|F(x_i)-F(x_{i-1})|+\sum_{II}|F(x_i)-F(x_{i-1})|\\&\leq\varepsilon+\varepsilon\sum_{II}(x_i-x_{i-1})\leq\varepsilon+\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

由于ε是任意的，便得到$F(b)=F(a)$. QED.

5.4.1 Newton-Leibniz公式

利用上述定理立即得到下列定理

定理 5.4.6 *Newton-Leibniz*公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)dt$$

成立的充要条件是$F(x)$是全连续函数，这时$f(x)\doteq F'(x)$。

证明： 必要性：由积分的绝对连续性得到。

充分性：因为$F(x)$是全连续的，$F'(x)$是可积的. 令

$$G(x)=\int_a^x F'(t)dt+F(a)$$

$G(x)$是全连续函数，并且$G'(x)\doteq F'(x)$。所以$G(x)-F(x)$是常数，即$G(x)\equiv F(x)$。 QED.

通过上面的讨论，清楚地看出：利用Lebesgue积分这一工具，把过去数学分析中原函数、不定积分、Newton-Leibniz公式之间相互关系的讨论深入了一大步.

习题

1. 证明：函数F是$[a,b]$上全连续的充要条件是对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对任何一族互不相交的开区间$\{(a_i,b_i)\}$，只要$\sum\limits_i(b_i-a_i)<\delta$时，总有

$$\sum_i |F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon$$

2. 设F是$[a,b]$上全连续函数，G是$[c,d]$上全连续函数，而且$\mathfrak{R}(F)\subset[c,d]$. 证明$G\circ F$是$[a,b]$上全连续函数.

3. 设F是$[a,b]$上单调增加的函数，对任何集$E\subset[a,b]$，记$F(E)=\{F(x)\colon x\in E\}$. 证明$F$是$[a,b]$上全连续函数的充要条件是如果$E$是Borel集，$m(E)=0$有$m(F(E))=0$.

4. 证明F在$[a,b]$上是满足Lipschtiz条件的函数的充要条件：F是$[a,b]$上有界可测函数的不定积分。

5. 设f是$[a,b]$上满足下面条件的函数：对任何$a\le x_1<x_2<x_3\le b$，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

称这种函数为凸(向下)函数(注意，它的等价定义是：对任何$x,y\in[a,b], f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$). 证明凸(向下)函数$f$是$(a,b)$中连续函数. 如果$f$又在$a,b$两点连续，那末$f$是$[a,b]$上全连续函数，按5.2节习题9的记号，证明$f'_+$在$[a,b)$上处处存在，并且是单调增加函数.

6. 设f是$[a,b]$上全连续函数，证明f的$\bigvee\limits_a^x(f),p(x),n(x)$都是全连续函数。

7. 设f是$[a,b]$上全连续函数，证明

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx=\bigvee_a^b(f)$$