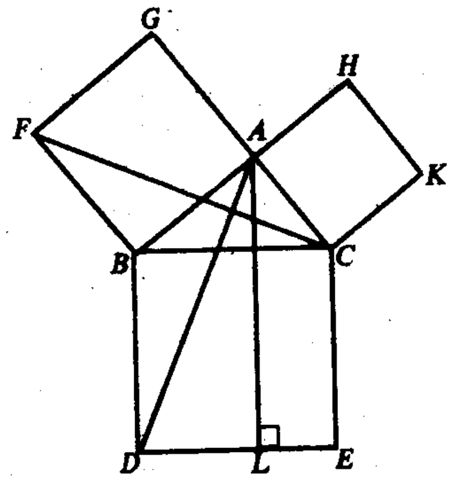
《算法数学》

作者　李煌



内容提要

本书《算法数学》是作者根据计算机科学专业的数理基础课程必修课：大学物理，微积分，离散数学，高等代数，初等数论等学科的教学大纲内的知识形成的一些对于某些算法数学应用问题的计算和方法的总结，在需要读者学习的同时又需要读者去亲自思考才能更好的从本书中获得一些有用的知识。

本书所选内容丰富，短小精简，难度适中，因此是计算机科学专业的学生对于算法数学知识应用上的一个有意义的快速回顾和及时补充，但同时也可以给数学系的科学工作者一些数学研究上的参考，也可供中学生和其它工科专业大学生在业余时间阅读，以提高其数学思维能力或开拓视野之用。

前　言

随着中学教育，甚至是大学教育的普及，越来越多的中学生和大学生不满足于仅仅学习知识，被动的接受知识，或者停留在为了考试学习知识的层面，而是希望通过一些有效的途径找寻发现知识的能力，或者参与知识发现的过程和并对知识的存在再思考，而最终的目的是使得自身的思维获得一个有效的开启，从而导致在今后的工作和学习中形成自我的一个清晰地认识和自我风格的培养或者确立。

同时更为重要的是随着社会的不断前进和发展，目前的中学生和大学生的学习任务较之以前会更加繁重，不仅是体力上的更是脑力上的，因此作为一名大学讲师和学者，我又不希望学生再通过课本以外的途径学习可能并不科学和理性的知识，这样只会更加增加学生的负担，而且后果是学生会逐渐在那些课外的学习中增加与日俱增的竞争压力和急于求成的心理或者学习到一些非科学的思维对未来研究工作不利，并由此可能产生对书本知识的蔑视或者旁观情绪，因此本人将自己通过平时在教学和科研工作总结出来的并没有脱离目前计算机专业教学大纲所规定的最基本的知识，来让计算机专业的学生在普通日常的学习中就发现他们所学的知识所蕴含的内涵和营养，而且这个工作将会引起一些共鸣，让后面更多的教育工作者或者学生来继续我们在所学的课本上平凡和无趣的知识上发现一些能引起我们思考或者启迪我们思维的知识。

本人目前被单位南昌理工学院派往本科时期的母校华中科技大学国家光电实验室做访问学者，书稿是在访学期间挤出宝贵的时间完成的，由于访学期间忙于工作和学习，可能在书中会有一些不如人意的表达，但更多的可能是学术上的水平限制给您带来的不满足感或者不快，但是只要能够达到本书的目的，启发计算机科学专业的大学生学习算法数学的兴趣和灵感就足够了，至于要更进一步的学习和研究算法数学则必须看更深更难的学术著作，而这本书只是一个开始，一个引路！

总而言之由于本书全部内容为本人研究所得，限于本人学术水平，书中难免有些疏忽和错误，恳请读者批评指正！最后最为重要的是在此要感谢 God 和父母对我无私的帮助，特别感谢邱小林博士，李贤喻教授，沈克勇教授，苑鸿骥博士，陈志龙博士，罗木贵教授，刘复祥教授，黄学光副教授，谢书良教授，胡荣群硕士，等前辈对我在科研工作上的帮助，最后感谢本人以前在武汉理工大学计算机系研究生时期的导师钟珞教授和目前的访学导师长江学者冯丹教授在我学习和工作中的教导！

李 煌 17104394@qq.com

2010 年 5 月于 华中科技大学国家光电实验室

目 录

第一章 微（积）分

第一节 高阶导数

定理 1.0：

如果函数 $f(x)$ 满足条件：（1）在半闭区间 $[a,+\infty)$ 上有定义，（2）在此半闭区间上有一直到 $n+1$ 阶的连续导数 $f'(x),\cdots,f^{(n)}(x)$，$f^{(n+1)}(x)$ 则：必然存在一个 ξ，$a<\xi<x$，满足下面的等式：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(n+1)!\left(f(x)-f(a)\right)}{(x-a)^{n+1}}=f^{(n+1)}(\xi)$$

下面证明定理 1.0：

由泰勒公式：

如果函数 $f(x)$ 满足条件：（1）在半闭区间 $[a,+\infty)$ 上有定义，（2）在此半闭区间上有一直到 n+1 阶的连续导数 $f'(x),\cdots,f^{(n)}(x)$，$f^{(n+1)}(x)$ 则：必然存在一个 ξ，$a<\xi<x$，满足下面的等式：

$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^{k}+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$ 其中：

$$a<\xi<x$$

所以：

$$\frac{(n+1)\ !\left(f(x)\text{-}f(a)\right)}{(x\text{-}a)^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!f^{(k)}(a)}{k!(x\text{-}a)^{n+1\text{-}k}}+f^{n+1}(\xi)$$

其中：

$$a<\xi<x$$

所以：当 $x\to+\infty$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!f^{(k)}(a)}{k!(x\text{-}a)^{n+1\text{-}k}}$的极限为 0，所以：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(n+1)\ !\left(f(x)\text{-}f(a)\right)}{(x\text{-}a)^{n+1}}=f^{(n+1)}(\xi)$$

所以：定理 1.0 成立。

证明结束。

定理 1.1：

如果函数 $f(x)$ 满足条件：（1）在半闭区间 $\left[0,+\infty\right)$ 上有定义，（2）在此半闭区间上有一直到 n+1 阶的连续导数 $f^{'}(x),\cdots,f^{(n)}(x)$，$f^{(n+1)}(x)$，则：必然存在一个 ξ，$0<\xi<x$，满足下面的等式：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(n+1)\ !\left(f(x)-f(0)\right)}{x^{n+1}}=f^{(n+1)}(\xi)$$

下面证明定理 1.1：

由马克劳林公式：

如果函数 $f(x)$ 满足条件：（1）在半闭区间 $\left[0,+\infty\right)$ 上有定义，（2）在此半闭区间上有一直到 n+1 阶的连续导数

$f^{'}(x),\cdots,f^{(n)}(x)$，$f^{(n+1)}(x)$，则：必然存在一个$\xi$，$0<\xi<x$，满足下面的等式：

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^{k}+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$$

所以：

$$\frac{(n+1)\ !(f(x)-f(0))}{x^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!f^{(k)}(0)}{k!x^{n+1-k}}+f^{(n+1)}(\xi)$$

所以：当$x\to+\infty$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!f^{(k)}(0)}{k!x^{n+1-k}}$的极限为 0，所以：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(n+1)\ !(f(x)-f(0))}{x^{n+1}}=f^{(n+1)}(\xi),$$

其中：

$$0<\xi<x$$

所以：定理 1.1 成立

证明结束。

定理 1. 2：

如果函数$f(x)$满足条件：（1）在半闭区间$(-\infty,a]$上有定义，（2）在此半闭区间上有一直到 n+1 阶的连续导数$f^{'}(x),\cdots,f^{(n)}(x)$，$f^{(n+1)}(x)$，则：必然存在一个$\xi$，$x<\xi<a$，满足下面的等式：

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(n+1)\ !(f(x)-f(a))}{(x-a)^{n+1}}=f^{(n+1)}(\xi)$$

下面证明定理 1.2：

由泰勒公式：

如果函数 $f(x)$ 满足条件：（1）在半闭区间 $\left(-\infty,a\right]$ 上有定义，（2）在此半闭区间上有一直到 n+1 阶的连续导数 $f'(x),\cdots,f^{(n)}(x)$，$f^{(n+1)}(x)$，则：必然存在一个 ξ，$x<\xi<a$，满足下面的等式：

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^{k}+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$ 其中：

$$x<\xi<a$$

所以：

$$\frac{(n+1)\ !\left(f(x)-f(a)\right)}{(x-a)^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!f^{(k)}(a)}{k!(x-a)^{n+1-k}}+f^{n+1}(\xi),$$

其中：

$$x<\xi<a$$

所以：当 $x\to-\infty$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!f^{(k)}(a)}{k!(x-a)^{n+1-k}}$ 的极限为 0，所以：

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(n+1)\ !\left(f(x)-f(a)\right)}{(x-a)^{n+1}}=f^{(n+1)}(\xi)$$

所以：定理 1.2 成立。

证明结束。

定理 1.3：

如果函数 $f(x)$ 满足条件：（1）在半闭区间 $\left(-\infty,0\right]$ 上有定义，（2）在此半闭区间上有一直到 n+1 阶的连续导数 $f^{'}(x),\cdots,f^{(n)}\left(x\right)$，$f^{(n+1)}\left(x\right)$，则：必然存在一个 ξ，$x<\xi<0$，满足下面的等式：

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(n+1\right)\ !\left(f\left(x\right)-f(0)\right)}{x^{n+1}}=f^{(n+1)}\left(\xi\right)$$

其中： $x<\xi<0$

下面证明定理 1.3：

由马克劳林公式：

如果函数 $f(x)$ 满足条件：（1）在半闭区间 $\left(-\infty,0\right]$ 上有定义，（2）在此半闭区间上有一直到 n+1 阶的连续导数 $f^{'}(x),\cdots,f^{(n)}\left(x\right)$，$f^{(n+1)}\left(x\right)$，则：必然存在一个 ξ，$x<\xi<0$，满足下面的等式：

$$f(x)=f\left(0\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}\left(0\right)x^{k}+\frac{1}{\left(n+1\right)!}f^{(n+1)}\left(\xi\right)x^{n+1}$$

其中： $x<\xi<0$

所以：$$\frac{\left(n+1\right)\ !\left(f\left(x\right)-f(0)\right)}{x^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(n+1\right)!f^{(k)}\left(0\right)}{k!x^{n+1-k}}+f^{n+1}\left(\xi\right)$$

所以：$x \to -\infty$，$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!f^{(k)}(0)}{k!x^{n+1-k}}$ 的极限为 0，

所以：

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(n+1)\ !\left(f(x)-f(0)\right)}{x^{n+1}} = f^{(n+1)}(\xi)$$

其中： $x < \xi < 0$

所以：定理 1.3 成立

证明结束。

定理 1. 4：

前提 1.4.1：如果可以将某个特定的函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数，并且把展开式进行到 $x-a$ 的任意高的次幂，并且得到的级数的和收敛并等于 $f(x)$

前提 1.4.2：如果该函数 $f(x)$ 又可以展开成马克劳林级数，并且把展开式进行到 x 的任意高次幂，并且得到的级数的和收敛并等于 $f(x)$

则有结论：$\sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} C_n^k (-a)^{(n-k)} \right) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

其中 $n \ge k \ge 0$，k 在该等式中是某个固定的整数值。

符号说明：$f^{(n)}(a)$ 表示 $f(x)$ 的 n 阶导数在 $x=a$ 的数值，$f^{(k)}(0)$ 表示 $f(x)$ 的 k 阶导数在 $x=0$ 的数值。

下面证明定理 1.4：

因为：如果可以将某个特定的函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数，并且把展开式进行到 $x-a$ 的任意高的次幂，并且得到的级数的和收敛并等于 $f(x)$，形式如下：

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

又因为：如果又可将某个特定该函数 $f(x)$ 展开成马克劳林级数，并且把展开式进行到 x 的任意高次幂，并且得到的级数的和收敛并等于 $f(x)$，形式如下：

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

所以：$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k=f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$ 且形式相同。

所以：泰勒级数中 x^k 的系数必须和马克劳林级数是一样的，而前者泰勒级数中 x^k 的系数是：

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}C_n^k(-a)^{(n-k)}\right)$$

后者马克劳林级数中 x^k 的系数是：

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

所以：

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}C_n^k(-a)^{(n-k)}\right)=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

证明结束。

思考 1.0：证明：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\left(f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right)}{h^2}=f''(x)$

（提示用洛必塔法则）为了减轻读者负担给出证明：

因为：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\left(f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right)}{h^2}$ 属于：$\frac{0}{0}$ 类型

所以：

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\left(f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(f'(x+h)-f'(x)\right)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$$

证明结束。

思考 1.1：读者自己发现类似思考 1.0 的二阶导数，三阶 ⋯ n 阶导数极限等式。

第二节 $\sqrt{1\pm\left(\frac{v}{C}\right)^2}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}}$ 的近似在物理学上的应用

定理 1.5：

当 $v << C$ 时：$\sqrt{1\pm\left(\frac{v}{C}\right)^2}\approx 1\pm\frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2$

证明定理 1.5：

因为当 $v << C$ 时：

$$\sqrt{1\pm\left(\frac{v}{C}\right)^2}=1\pm\frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{v}{C}\right)^4\pm\frac{1}{16}\left(\frac{v}{C}\right)^6-\frac{5}{128}\left(\frac{v}{C}\right)^8\pm\cdots$$

当 $v << C$ 时：

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{v}{C}\right)^4\pm\frac{1}{16}\left(\frac{v}{C}\right)^6-\frac{5}{128}\left(\frac{v}{C}\right)^8\pm\cdots\approx 0$$

所以：当 $v << C$ 时：

$$\sqrt{1\pm\left(\frac{v}{C}\right)^2}\approx 1\pm\frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2$$

定理 1.5 证明结束。

定理 1.6：

当 $v << C$ 时：$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}}\approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2$

证明定理 1.6：

因为当 $v << C$ 时：

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{C}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{v}{C}\right)^6 + \frac{35}{128}\left(\frac{v}{C}\right)^{12} + \cdots$$

当 $v << C$ 时：

$$\frac{3}{8}\left(\frac{v}{C}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{v}{C}\right)^6 + \frac{35}{128}\left(\frac{v}{C}\right)^{12} + \cdots \approx 0$$

所以：当 $v << C$ 时：

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2$$

定理 1.6 证明结束。

应用 1.0：

定理 1.5 推导宏观低速下的物体动能表达式：$E_k \approx \frac{1}{2}mv^2$

定理 1.6 推导宏观低速下的物体动能表达式：$E_k \approx \frac{1}{2}m_0v^2$

具体分析过程：在大学物理课本中我们知道一个常用的物理公式：物体动能=物体总能量-物体静止时候的核能，该公式在大学物理课本中用数学语言表示为：$E_K = mc^2 - m_0c^2$，其中：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}}$$

下面给出两种不同的推导物体动能 E_K 在宏观低速下的形式：

第一种推导方法：定理 1.6 推导宏观低速下的物体动能表达式（也是大学物理课本上使用的方法）

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 \Rightarrow \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}} - 1\right)$$

因为是宏观低速，所以物体的速度远远小于光的速度，所以满足条件： $v << C$，所以由（定理 1.6）当 $v << C$ 时：

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2$$

所以： $$E_K = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}} - 1\right) \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}m_0v^2$$

所以： $$E_K \approx \frac{1}{2}m_0v^2$$

第二种推导方法：定理 1.5 推导宏观低速下的物体动能表达式

因为：
$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}}$$

因为：物体是在宏观低速运动，所以物体的速度远远小于光的速度，所以满足条件：$v<<C$，所以由（定理 1.5）当 $v<<C$ 时：

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2$$

所以：
$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{C}\right)^2}}\approx\frac{m_0}{1-\left(\frac{v^2}{2C^2}\right)}=\frac{m_0C^2}{C^2-\frac{v^2}{2}}$$

所以：$m\approx\dfrac{m_0C^2}{C^2-\frac{v^2}{2}}, mC^2-\dfrac{mv^2}{2}\approx m_0C^2$， $mC^2-m_0C^2\approx\dfrac{1}{2}mv^2$

所以：
$$E_k\approx\frac{1}{2}mv^2$$

思考 1.2: 用定理 1.5 推出的动能表达式 和用定理 1.6 推出的动能表达式哪个更精确？哪个的推导过程更加简洁？您有何看法可以和本书作者通过 qq:17104394 交流。

思考 1.3：用微积分证明下面四个恒等式，其中有些是欧拉首先发现的，本书重复发现了一些：

$$\operatorname{ctg}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + n\pi}$$

$$\csc x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + n\pi}$$

$$\csc^2 x = \frac{1}{x^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + (n\pi)^2}{\left(x^2 - (n\pi)^2\right)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{e} - 1} = 1.5 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (4n\pi)^2}$$

这四个恒等式都可以用大学里学的微积分知识很容易的证明，但对微积分学没学过的读者可能有些困难，可以通过作者的 QQ:17104394 索要证明过程。

第三节　积分与数学建模

问题：一个现实中的现象，一列火车以恒定加速度a，从左到右水平驶过一个村庄，村庄的铁轨边上站着一个静止不动的农夫，火车某一节车厢内的顶部水平放着一面镜子，镜面朝下，与镜面垂直的正下方的车厢底部正好有一个光源，在火车加速到速度 v 的时刻，该光源垂直对着镜子发射一束激光，已知光的速度是 c，并且规定光在任何不同的参考系内都是恒定不变的速度，求在火车车厢内的人看到的该激光来回一次的时间t_1+t_2与火车外村庄的铁轨边上站着一个静止不动的农夫观察到的该激光来回一次的时间 T 的关系。

解答：首先建立坐标系：

规定将激光垂直射向镜子的方向为 x 轴，火车行驶方向为 y 轴。

(a)：当激光垂直射向镜子，并且到达镜子时候的运动方程：

当激光射向镜子的时候，农夫看到的光线是遵守下面两个运动的叠加：水平方向从左到右的（y 轴），和火车一样以初速度 v，加速度 a 向前行驶，垂直方向（x 轴）以恒定不变的速度向上射向镜子。

$$\begin{cases} y = vt_1 + \dfrac{1}{2}at_1^{\ 2} \\ x = ct_1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{vx}{c} + \frac{ax^2}{2c^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{c} + \frac{ax}{c^2}$$

由微积分的曲线长度公式知道距离为：

$$L = \int_A^B \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

因此在农夫看来，光线在车厢内达到车顶的时间t_1内走了距离：

$$L_1 = \int_{A=0}^{B=ct_1} \sqrt{1+\left(\frac{v}{c}+\frac{ax}{c^2}\right)^2}\,dx$$

(b): 由于激光从车厢底部发射，并射到镜面的时候火车已经运行了一段时间t_1，此时火车的速度变为：$v+at_1$，但是激光由于垂直射到镜面，而立刻改变方向由镜面射向地面，水平方向还是以加速度 a，但初速度变为$v+at_1$，从左向右沿着（x 轴正方向上），遵守的两个运动的叠加，方程如下：

$$\begin{cases} y=\left(v+at_1\right)t_2+\dfrac{1}{2}at_2{}^2 \\ x=ct_2 \end{cases} \Rightarrow y=\left(v+at_1\right)\frac{x}{c}+\frac{1}{2}a\left(\frac{x}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\left(v+at_1\right)}{c}+\frac{ax}{c^2}$$

由微积分的曲线长度公式知道距离为：

$$L = \int_{A}^{B} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

因此在农夫看来，光线在车顶又被镜子反射会地面的时间t_2内走了距离：

$$L_2 = \int_{A=0}^{B=ct_2} \sqrt{1+\left(\frac{v+at_1}{c}+\frac{ax}{c^2}\right)^2}\,dx$$

(c): 虽然火车内的人看到激光射向了地面并且观测完了这个过程，但农夫还没有看到激光射到了地面，因为农夫剩下多于车厢内的人的观测时间没有用完，因此虽然激光已经到达地面但它还必须跟随着火车运行一段时间来用掉这段多余的时间后，农夫才

能看到激光射到地面，这时候的火车和激光 y 向速度达到了 $v+a\left(t_1+t_2\right)$，但 x 向速度激光由于已经到达地面没有镜子反射了速度不存在了，因此激光跟随火车以初速 $v+a\left(t_1+t_2\right)$，加速度 a，并且在时间 $T-t_1-t_2$ 时间内运行了距离如下：

$$s=\left(v+a\left(t_1+t_2\right)\right)\left(T-t_1-t_2\right)+\frac{1}{2}a\left(T-t_1-t_2\right)^2$$

化简得到：
$$s=\left(T-t_1-t_2\right)\left[v+\frac{1}{2}a\left(T+t_1+t_2\right)\right]$$

有了（a）（b）（c）的分析，我们可以知道农夫看到的光线实际上走的距离是 L_1+L_2+s，而光线在农夫看来 走的这段距离用的时间是 T，而光速是不变的 c，所以可以得到下面的方程：

$$L_1+L_2+s=cT$$

将前面的结果代入可以得到：

$$\int_0^{ct_1}\sqrt{1+\left(\frac{v}{c}+\frac{ax}{c^2}\right)^2}dx+\int_0^{ct_2}\sqrt{1+\left(\frac{v+at_1}{c}+\frac{ax}{c^2}\right)^2}dx+\left(T-t_1-t_2\right)\left[v+\frac{1}{2}a\left(T+t_1+t_2\right)\right]=cT$$

注意：这个方程中的 t_1,t_2 是车厢内人看到光来回一次的真实时间，T 是农夫观测光一个来回所用的观测的虚幻时间。而且这个方程告诉我们加速度和速度都可以让时间发生虚幻的改变，而且加速度有可能是人类制造时空机器的唯一途径，因为速度是需要使用接近无限的能量来获取达到接近光速的速度时，从而才会有明显的虚幻效果，而加速度仅仅需要的是能提供超强引力场的大质量黑洞来获得，这在工程上是比提高速度更能实际实现的。

显然如果当火车的初速度为 v，加速度 a 为 0 的时候该方程化为：

$$\sqrt{1+\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left(ct_1\right)+\sqrt{1+\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left(ct_2\right)+\left(T-t_1-t_2\right)v=cT$$

进一步化简可以得到：

$$T=\frac{\left(\sqrt{c^2+v^2}-v\right)\left(t_1+t_2\right)}{c-v}$$

这个结论可以明确的告诉我们，在匀速运动的火车的车厢内的人看到的光线上下运行来回一次的时间是 t_1+t_2，对车内的人来说这是光线来回一次所需的真实的时间，而农夫看到的光线来回一次的真实时间是 T， T 对于时间 t_1+t_2 来说是虚幻时间，它们之间在火车和农夫的相对速度存在的时候是不相等的，只有当火车和农夫之间的相对速度为 0 的时候才能相等，换句话说农夫要想测量到真实的时间必须和火车的速度完全一样才行 。读者也可以从数学表达式上来看：

$$T=\frac{\left(\sqrt{c^2+v^2}-v\right)\left(t_1+t_2\right)}{c-v}$$

显然可以看出： $T\ge t_1+t_2$，且当： $v=0$ 的时候，取等号。而如果令 $t_1+t_2=t$，是火车内的真实时间，T 是农夫的观测的火车内的时间则是虚幻时间，关系如下：

$$T=\frac{\left(\sqrt{c^2+v^2}-v\right)\ t}{c-v}$$

因此同一物理事件，在不同的参考系，观察出来的时间是不同的。

进一步分析：如果以速度 v 匀速运动的火车车厢内的人去测量农夫身边的一段铁轨的长度，显然车厢内的人会将车厢通过该段铁轨的长度通过关系式：$l = vt$ 计算出来，而农夫来测量火车经过这段铁轨的距离会通过关系式：$L = vT$ 计算出来，所以：

$$\frac{l}{L} = \frac{t}{T}$$

再由：
$$\frac{t}{T} = \frac{c - v}{\left(\sqrt{c^2 + v^2} - v\right)}$$

所以：
$$l = \frac{(c - v)\ L}{\sqrt{c^2 + v^2} - v}$$

显然 $l \le L$,车厢内的人测量到的铁轨对他来说是真实的长度但是相对于农夫测量的铁轨长度却变短了，因为农夫测量到的长度对火车上来的人来说是虚幻的长度，换句话说，当你以速度 v 匀速运动时候，你看到的物体都会变短，这个长度是对你是真实的，但对农夫来说却是虚幻的，在质量下也存在这种虚幻性，但具体分析就留给读者，只给出结果，当你在以速度 v 运动的火车上看到车外的物体的质量都会变大即质量膨胀了，但被观测的物体本身观测自己的时候得到的是真实的质量，而你所看到的物体在观察你到时候，虽然你自己的质量对你自己测量是真实的，但是他们会觉得你的质量变大了即你的质量也膨胀了，对他们来说看到的是你的虚幻的质量，但这也不是你所能改变的事实，对他们来说测量你的质量 M 和你真实的质量 m 满足关系：

$$M = \frac{\left(\sqrt{c^2 + v^2} - v\right)m}{c - v}$$

最后抽象出农夫列车问题的数学内涵，而抛开可以分析清楚但又容易让人误解的相对性观测方式的具体探讨，而从数学上抽象出下面的容易让人理解并符合客观真实的三个基本：时间，质量和尺度的数学模型：

$$T=\frac{\left(\sqrt{c^2+v^2}-v\right)t}{c-v},M=\frac{\left(\sqrt{c^2+v^2}-v\right)m}{c-v},L=\frac{(c-v)l}{\sqrt{c^2+v^2}-v}$$

注意：上面的公式中 t,m,l 是物体在和对其观测的观测者之间的相对运动速度为 0 时候的静止测量数值，而 T,M,L 则是物体在和对其观测的观测者之间的相对运动速度为 v 时候的运动测量数值。

现在我们由上面的质量公式：

$$M=\frac{\left(\sqrt{c^2+v^2}-v\right)m}{c-v}$$

开始由纯粹的数学理性来获得理论物理中，动能，动量和牛顿第二定理的虚幻和真实相对的数学模型。具体步骤如下：

因为首先推导动能表达式（使用条件：$v<<C$ 和定理 1.5）：

$$M=m\left(\frac{\sqrt{C^2+v^2}-v}{C-v}\right)=\frac{mC^2}{(C-v)\left(\sqrt{C^2+v^2}+v\right)}=\frac{mC^2}{(C-v)C\sqrt{1+\left(\frac{v}{C}\right)^2}+(C-v)v}$$

所以：$$\Rightarrow M\approx\frac{mC^2}{(C-v)C\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2\right)+(C-v)v}=\frac{m}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{C}\right)^3}$$

$$\Rightarrow MC^2-mC^2\approx\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{v}{C}\right)$$

所以动能：　$$E=\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{v}{C}\right)$$

再用反演技巧推导牛顿第二定理与动量的虚幻表达式：

因为：

$$E=\int_0^v M\frac{dv}{dt}\left(\frac{3v}{2C}+1\right)vdt=\int_0^v M\left(\frac{3v^2}{2C}\right)dv+\int_0^v Mvdv=\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{v}{C}\right)$$

所以：得到牛顿第二定理的虚幻表达式：

$$F=M\frac{dv}{dt}\left(\frac{3v}{2C}+1\right)$$

又因为：
$$F=\frac{dP}{dt}$$

所以：得到动量的虚幻表达式

得到：
$$P=Mv\left(\frac{3v}{4C}+1\right)$$

因此我们得到了下面三个基本的合外力，动能，动量的理论物理基础的数学模型如下：

$$F=M\frac{dv}{dt}\left(\frac{3v}{2C}+1\right)，\ E=\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{v}{C}\right)，\ P=Mv\left(\frac{3v}{4C}+1\right)$$

再次使用条件：$v<<C$

所以：$M\approx m$，$\left(\frac{3v}{2C}+1\right)\approx 1$，$\left(1+\frac{v}{C}\right)\approx 1$，$\left(\frac{3v}{4C}+1\right)\approx 1$

所以：$F\approx m\frac{dv}{dt}$，$E\approx\frac{1}{2}mv^2$，$P\approx mv$

注意：这样就获得了我们熟知的牛顿力学的基础公式。

由于光子没有静止质量，因此光子没有静止动量，而只有运动动量，所以它的动量表达式：$P=\frac{7h}{4\lambda}$

推导过程如下：

因为：$P=Mv\left(\frac{3v}{4C}+1\right)$

因为：$v=C$

所以：$P=Mv\left(\frac{3v}{4C}+1\right)=MC\left(\frac{3C}{4C}+1\right)=\frac{7}{4}MC$

因为：$E=\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{v}{C}\right)$

因为：$v=C$

所以：$E=\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{v}{C}\right)=\frac{1}{2}MC^2\left(1+\frac{C}{C}\right)=MC^2$

因为：$E=\frac{hC}{\lambda}$

所以：$MC^2=\frac{hC}{\lambda}$ ，所以：$MC=\frac{h}{\lambda}$

所以：$P=\frac{7}{4}MC=\frac{7h}{4\lambda}$

证明结束。

但加速度，平均速度，这些都不存在相对性的虚幻表达式，因为这些是理论物理的原始定义，这再次说明数学是人类唯一可以信任的绝对真实理性有唯一标准的科学，而物理的虚幻和真实

却是相对的。下面让我们从虚幻的物理世界回到可爱真实的数学世界，进入第二章的学习。

本章补充：

引力红移：引力红移是天文物理的一个非常重要的基础问题，是指光线经过恒星表面的引力场时波长会变长，且由于光速不变，频率则会变小，其价值被用于精确估算恒星的大小和质量，下面给出引力红移数学表达式推导：

$$v=\omega r\ ,\ \phi=\frac{-\omega^2r^2}{2},\ \phi=\frac{-GM}{r},\ f=f_0\left(\frac{c-v}{\sqrt{c^2+v^2}-v}\right)$$

所以：$f=f_0\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^3\right)=f_0\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi\sqrt{-2\phi}}{c^3}\right)$

$$\Rightarrow\frac{f_0-f}{f_0}=-\left(\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi\sqrt{-2\phi}}{c^3}\right)=\frac{GM}{rc^2}\left(1+\frac{\sqrt{2GMr}}{rc}\right)$$

对于恒星而言，不可能得到可靠的计算结果，因为恒星的质量 M 和半径 r 一般都是未知的，但是对于太阳，由于其质量 M 和半径 r 已知，则可以通过 $\frac{GM}{rc^2}\left(1+\frac{\sqrt{2GMr}}{rc}\right)$ 算出光线频率红向移动的偏移率。

补完。

第二章　代数方程

第一节　一元 n 次方程 $x^n+px+q=0$

定理 2.0：

如果方程：$x^n+px+q=0$ 有解：$x=A$，则方程 $x^n-px^{n-1}=(-q)^{n-1}$ 有解：$x=A^{n-1}+p$。

定理 2.0 可以告诉我们代数方程很多对称性。

例如：$x^5+13x+17=0$ 有解：$x=A$，则方程 $x^5-13x^4-17^4=0$ 有解：$x=A^4+13$

定理 2.0 的证明如下：

因为：将单个的方程：$x^n+px+q=0$ 等效为下面的方程组：

$$\begin{cases} x^n+ax=0 \\ bx+q=0 \\ a+b=p \end{cases}$$

并继续等效下去：

所以：

$$\begin{cases} x^n+ax=0 \Rightarrow x\left(x^{n-1}+a\right)=0 \\ bx+q=0 \Rightarrow b^{n-1}x^{n-1}=(-q)^{n-1} \\ a+b=p \Rightarrow -a=b-p \end{cases}$$

所以：$\begin{cases} x^n + ax = 0 \Rightarrow x^{n-1} = -a \\ bx + q = 0 \\ a + b = p \end{cases}$

所以：$\begin{cases} x^n + ax = 0 \\ bx + q = 0 \Rightarrow b^{n-1}(-a) = (-q)^{n-1} \\ a + b = p \end{cases}$

所以：$\begin{cases} x^n + ax = 0 \\ bx + q = 0 \Rightarrow b^{n-1}(b-p) = (-q)^{n-1} \\ a + b = p \end{cases}$

所以：$\begin{cases} x^n + ax = 0 \\ bx + q = 0 \Rightarrow b^n - pb^{n-1} = (-q)^{n-1} \\ a + b = p \\ b = p - a = p + x^{n-1} \end{cases}$

所以：通过方程：$x^n + px + q = 0$通过等效变换得到一个新的方程：$b^n - pb^{n-1} = (-q)^{n-1}$，这个新的方程的根：$b = p + x^{n-1}$，即新方程的根等于老方程的根的 n-1 次方加上 p。

所以：如果方程：$x^n + px + q = 0$有解：$x = A$，则方程$x^n - px^{n-1} = (-q)^{n-1}$有解：$x = A^{n-1} + p$。其中：两个方程中的$p,q$完全相同。

所以定理 2.0 成立。证完！

定理 2.0 给出一个明显的推论说如果已知方程：$x^n+ax^{n-1}+b=0$ 有通解公式并知道通解公式的具体形式，则：$x^n+px+q=0$ 也有通解公式，且后者的通解公式可以通过前者的通解公式获得。

推论 2.0：如果 n 为正奇数，如果方程：$x^n+px+(q)^{\frac{1}{n-1}}=0$ 有解：$x=A$，$x^n+px-(q)^{\frac{1}{n-1}}=0$ 有解：$x=B$，则方程 $x^n-px^{n-1}=q$ 有解：$x_1=A^{n-1}+p,x_2=B^{n-1}+p$。其中：两个方程中的 p,q 完全相同。

推论 2.1：如果 n 为正偶数，如果方程：$x^n+px-(q)^{\frac{1}{n-1}}=0$ 有解：$x=A$，则方程 $x^n-px^{n-1}=q$ 有解：$x=A^{n-1}+p$。其中：两个方程中的 p,q 完全相同。

推论 2.0 和推论 2.1 说明：如果方程：$x^n+px+q=0$ 有通解公式，并知道通解公式的具体形式，则方程：$x^n+ax^{n-1}+b=0$ 也有通解公式，且后者的通解公式可以通过前者的通解公式获得。

思考 2.0： 用伽罗华群理论证明：方程：$x^5+px+q=0$ 是否存在一般情况下根式解？

第二节　一元 n 次方程 $x^n+px^{n-1}=q$

分析：

由：方程：$x^n+px^{n-1}=q$，则有：$x^{n-1}\left(x+p\right)=q$

所以：
$$x=\frac{q}{x^{n-1}}-p$$

所以：
$$x=\frac{q}{\left(\frac{q}{x^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p$$

所以：
$$x=\frac{q}{\left(\frac{q}{\left(\frac{q}{x^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p$$

所以：
$$x=\frac{q}{\left(\frac{q}{\left(\frac{q}{\left(\frac{q}{x^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p$$

所以：

$$x=\frac{q}{\left(\dfrac{q}{\left(\dfrac{q}{\left(\dfrac{q}{\left(\dfrac{q}{x^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p$$

所以：

$$x=\frac{q}{\left(\dfrac{q}{\left(\dfrac{q}{\left(\dfrac{q}{\left(\dfrac{q}{(\cdots)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p\right)^{n-1}}-p$$

$$\vdots$$

无限迭代

结论：一元 n 次方程 $x^n + px^{n-1} = q$ 的解可以由 无限迭代连续分式形式表示。

分析结束。

定理 2.1：

如果方程：$x^n + px^{n-2} + q = 0$ 有解：$x = A$，则方程：$x^n = p^n (q - x)^{n-2}$ 有解：$x = A^n + q$。

定理 2.1 证明如下：

因为：将单个方程：$x^n + px^{n-2} + q = 0$ 等效为下面的方程组

$$\begin{cases} x^n + a = 0 \\ px^{n-2} + b = 0 \\ a + b = q \end{cases}$$

所以：

$$\begin{cases} x^n + a = 0 \Rightarrow x^n = -a \\ px^{n-2} + b = 0 \Rightarrow p\dfrac{x^n}{x^2} = -b \\ a + b = q \Rightarrow a - q = -b \end{cases}$$

所以：

$$\begin{cases} x^n + a = 0 \\ px^{n-2} + b = 0 \Rightarrow bx^2 = ap \\ a + b = q \end{cases}$$

所以：
$$\begin{cases} x^n + a = 0 \\ px^{n-2} + b = 0 \Rightarrow b\left(a^2\right)^{\frac{1}{n}} = ap \\ a + b = q \end{cases}$$

所以：
$$\begin{cases} x^n + a = 0 \\ px^{n-2} + b = 0 \Rightarrow b^n\left(a^2\right) = p^n a^n \\ a + b = q \end{cases}$$

所以：
$$\begin{cases} x^n + a = 0 \\ px^{n-2} + b = 0 \Rightarrow b^n = p^n a^{n-2} \\ a + b = q \end{cases}$$

所以：
$$\begin{cases} x^n + a = 0 \\ px^{n-2} + b = 0 \Rightarrow b^n = p^n\left(q-b\right)^{n-2} \\ a + b = q \\ b = q - a = q + x^n \end{cases}$$

所以：通过方程：$x^n + px^{n-2} + q = 0$ 通过等效变换得到一个新的方程：$b^n = p^n\left(q-b\right)^{n-2}$，这个新的方程的根：$b = q + x^n$，即新方程的根等于老方程的根的 n 次方加上 q

所以：如果方程：$x^n + px^{n-2} + q = 0$ 有解：$x = A$，则方程：$x^n = p^n\left(q-x\right)^{n-2}$ 有解：$x = A^n + q$

所以定理 2.1 成立，证明结束。

例如：用定理 2.1 可以证明下面的平凡恒等式成立：

$$\left(\log^{n}_{\pm\sqrt{\frac{-pn}{n+q}}}\right)\ln(n+q)=\left(\log^{n}_{\pm\sqrt{\frac{-pn}{n+q}}}\right)\ln p+\left(\log^{n}_{\pm\sqrt{\frac{-pn}{n+q}}}-2\right)\ln(-n)$$

例如：高次方程：$x^6-p^6x^2-2p^6qx-p^6q^2=0$ 有解：

$$x=\left(\frac{27q^2}{2}+p^3-\frac{q}{2}\sqrt{729q^2+108p^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$+\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{27q^2}{2}+p^3+\frac{q}{2}\sqrt{729q^2+108p^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

定理 2. 2：

如果方程：$x^5+px+q=0$ 有两个不同的解：$x_1=w$，$x_2=k$，并且已知 A，A 满足：$k-w=A$， 则 k 的解析表达式必是：

$$\frac{A}{2}\pm\frac{\sqrt{-25A^2\pm10\sqrt{5A^4-20p}}}{10}$$

四者中之一

本定理的证明在本章思考 2.2 中给出详细过程，读者可以先思考一下如何证明，实在想不出来就去看思考 2.2 的答案。

定理 2.3： $x^n + px^{kn} = q$ 有解：

$$x = \cos\left(\frac{2\pi + 2mk\pi}{kn}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi + 2mk\pi}{kn}\right)$$

其中：

$$k = \frac{2\pi i}{\ln\left(\frac{q}{p+1}\right)} + 1\ ;\ m = \frac{\ln\left(\frac{p+1}{q}\right)}{\frac{4\pi^2}{\ln\left(\frac{q}{p+1}\right)} - 2\pi i}$$

下面证明定理 2.3：

构造方程：

$$x^n + px^{kn} = p(\cos 2mk\pi + i\sin 2mk\pi) + \cos\left(\frac{2\pi}{k} + 2m\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{k} + 2m\pi\right)$$

显然该方程有解：

$$x = \cos\left(\frac{2\pi + 2mk\pi}{kn}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi + 2mk\pi}{kn}\right)$$

令： $2mk\pi = \frac{2\pi}{k} + 2m\pi$， 所以： $2mk^2\pi = 2\pi + 2mk\pi$

所以： $(p+1)e^{i2mk\pi} = q$

所以： $e^{i2mk\pi} = \frac{q}{p+1}$

所以： $i2mk\pi = \ln\frac{q}{p+1}$

所以： $2mk\pi = \frac{\ln\frac{q}{p+1}}{i} = i\ln\frac{p+1}{q}$

所以：
$$ki\ln\frac{p+1}{q}=2\pi+i\ln\frac{p+1}{q}$$

所以：
$$k=\frac{2\pi}{i\ln\frac{p+1}{q}}+1=\frac{2\pi i}{\ln\frac{q}{p+1}}+1$$

所以：
$$m=\frac{i\ln\frac{p+1}{q}}{2\pi k}=\frac{\ln\frac{p+1}{q}}{\frac{4\pi^2}{\ln\frac{q}{p+1}}-2\pi i}$$

证明结束。

定理 2. 4：

$x^{kt}+px^k+q=0$，有解 $x=A$,则方程：$x^t-px^{t-1}=(-q)^{t-1}$ 有解：$x=A^{kt-k}+p$

（证明仿效定理 2.0，略去）。

定理 2.4 也可以告诉我们代数方程很多对称性。

例如：当：$k=\log_x^y$，$t=n$ 时，$y^n+py+q=0$，有解 $y=A$，则方程：$x^n-px^{n-1}=(-q)^{n-1}$ 有解：$x=A^{n-1}+p$。

例如：当：$t=\log_x^y$ 时，方程：$y^k+px^k+q=0$ 有解：

$$x=A=\left(\frac{-q-y^k}{p}\right)^{\frac{1}{k}}$$

则方程：
$$x^{\log_A^y}-px^{\log_A^y-1}=(-q)^{\log_A^y-1}$$

有解：
$$x=\left(\frac{y}{A}\right)^k+p=\frac{y^kp}{-q-y^k}+p=\frac{pq}{q+y^k}$$

所以：$\left(\frac{pq}{q+y^k}\right)^{\log^{y}_{\left(\frac{-q-y^k}{p}\right)^{\frac{1}{k}}}} - p\left(\frac{pq}{q+y^k}\right)^{\log^{y}_{\left(\frac{-q-y^k}{p}\right)^{\frac{1}{k}}}-1} = (-q)^{\log^{y}_{\left(\frac{-q-y^k}{p}\right)^{\frac{1}{k}}}-1}$

例如：
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log^{1}_{-2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\log^{1}_{-2}-1} = (-1)^{\log^{1}_{-2}-1}$$
$$\left(\frac{1}{0}\right)^{\log^{-1}_{0}} - \left(\frac{1}{0}\right)^{\log^{-1}_{0}-1} = (-1)^{\log^{-1}_{0}-1}$$

思考 2.1：用方程：$x^5+x+1=0$ 判断下面结论是否正确：

方程：$x^5+px+q=0$ 的解是：$x=y-\frac{q}{p}$

其中：y 是方程：$y^4\left(1+\frac{5q}{p}\right)-\frac{10q^2}{p^2}y^3+\left(p+\frac{10q^3}{p^3}\right)y^2-\frac{5q^4}{p^4}y+\frac{q^5}{p^5}=0$

的其中一个根。或者：y 是方程：

$y^4\left(\frac{5q}{p}\right)-\frac{10q^2}{p^2}y^3+\left(p+\frac{10q^3}{p^3}\right)y^2-\left(\frac{5q^4}{p^4}+p\right)y+\frac{q^5}{p^5}=0$ 的其中一个根。

思考 2.2：证明定理 2.2：（为了减轻读者负担下面给出证明）

证明：因为已知：$k-w=A$，所以：$k=A+w$

因为方程：$x^5+px+q=0$ 有两个不同的解：$x_1=w$，$x_2=k$

所以：$w^5+pw+q=0$，$k^5+pk+q=0$

所以：$(A+w)^5+p(A+w)+q=0$

所以：$A^5+5A^4w+10A^3w^2+10A^2w^3+5Aw^4+w^5+pA+pw+q=0$

所以：$A^5+5A^4w+10A^3w^2+10A^2w^3+5Aw^4+pA=0$

因为：$w \neq k$，$k-w=A$，所以：$A \neq 0$

所以：$A^4+5A^3w+10A^2w^2+10Aw^3+5w^4+p=0$

所以一元四次方程：$5x^4+10Ax^3+10A^2x^2+5A^3x+A^4+p=0$的根是$w$，

所以：k 是必是$\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{-25A^2 \pm 10\sqrt{5A^4-20p}}}{10}$四者中之一

证明结束。

进一步思考：因为：$w^5+pw+q=0$，所以：$-p=\frac{w^5+q}{w}$，又因为：k 必是$\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{-25A^2 \pm 10\sqrt{5A^4-20p}}}{10}$四者中之一，所以：k 必是$\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{-25A^2 \pm 10\sqrt{5A^4+20\left(\frac{w^5+q}{w}\right)}}}{10}$四者中之一，因为 w 求出：必是$-\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{-25A^2 \pm 10\sqrt{5A^4-20p}}}{10}$四者中之一，所以：k 必是

$$\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{-25A^2 \pm 10\sqrt{5A^4+20\left(\left(-\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{-25A^2 \pm 10\sqrt{5A^4-20p}}}{10}\right)^4+\frac{q}{\left(-\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{-25A^2 \pm 10\sqrt{5A^4-20p}}}{10}\right)}\right)}}}{10}$$

四者中之一，方程的任意系数 q,p 都在这个复杂的关于方程的根 k 的表达式中出现了。再由伽罗华的理论，我们可知：**一般高次方程的两根之差没有根式表达式，否则一般高次就存在根式解了。**

第三节　经典回顾：$x^3+px+q=0$

分析：

三次方程：$x^3+px+q=0$，让 $x=k\sin\theta, k\neq 0$

$(k\sin\theta)^3+pk\sin\theta+q=0$，整理成：

$$(\sin\theta)^3+\frac{p\sin\theta}{k^2}+\frac{q}{k^3}=0 \tag{0}$$

由三倍角公式：

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，整理成：

$$\sin^3\theta-\frac{3\sin\theta}{4}+\frac{\sin 3\theta}{4}=0 \tag{1}$$

对比（0）和（1）可得：$\frac{p}{k^2}=-\frac{3}{4},\frac{q}{k^3}=\frac{\sin 3\theta}{4}$

所以：

$$k=\pm 2i\sqrt{\frac{p}{3}} \tag{2}$$

所以：

$$\sin 3\theta=\frac{4q}{\left(\pm 2i\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}=\frac{q}{\mp 2i\sqrt{\frac{p^3}{27}}}=\pm\frac{qi}{2}\sqrt{\frac{27}{p^3}} \tag{3}$$

接下来关键一步

由欧拉公式：

$$\sin 3\theta=\frac{e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}}{2i} \tag{4}$$

由：（3）=（4） 得到：

$$\sin 3\theta = \frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} = \pm \frac{qi}{2}\sqrt{\frac{27}{p^3}}$$

整理得：

$$e^{i3\theta} - e^{-i3\theta} \pm q\sqrt{\frac{27}{p^3}} = 0 \tag{5}$$

令 $e^{i3\theta} = t$，则： $e^{-i3\theta} = \frac{1}{t}$

则：（5）化为：

$$t - \frac{1}{t} \pm q\sqrt{\frac{27}{p^3}} = 0$$

方程两边同乘以 t，进一步将（5）化为一元二次方程：

$$t^2 \pm q\sqrt{\frac{27}{p^3}}t - 1 = 0$$

所以求解该一元二次方程获得：

$$t = \frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}} \pm \sqrt{\frac{27q^2}{p^3} + 4}}{2}$$

即：

$$e^{i3\theta} = \frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}} \pm \sqrt{\frac{27q^2}{p^3} + 4}}{2} \tag{6}$$

对（6）两边取对数：

$$i3\theta=\ln\left(\frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\pm\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}+4}}{2}\right)$$

所以：

$$\theta=\frac{\ln\left(\frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\pm\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}+4}}{2}\right)}{3i} \qquad (7)$$

由 （2）和（7）：

得到： $x^3+px+q=0$方程的根为：

$$x=k\sin\theta=\pm 2i\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{\ln\left(\frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\pm\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}+4}}{2}\right)}{3i}\right),\quad p\neq 0 \qquad (8)$$

进一步分析 （8） 与 卡丹公式的关系：

将（2）： $k=\pm 2i\sqrt{\frac{p}{3}}$和 欧拉公式： $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

代入$x=k\sin\theta$得到：

$$x=\pm 2i\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) \qquad (9)$$

再将（7）代入（9）中得到：

$$x=\pm 2i\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{e^{i\frac{\ln\left(\frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\pm\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}+4}}{2}\right)}{3i}}-e^{-i\frac{\ln\left(\frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\pm\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}+4}}{2}\right)}{3i}}}{2i}\right)$$

化简得：

$$x=\pm\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\left(\frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\pm\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}+4}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\pm\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}+4}}{2}\right)^{\frac{-1}{3}}\right)$$

$$=\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{\frac{p}{3}}{\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

进一步化简：

$$x=\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

看到卡丹公式的身影了！

总结论：（1）卡丹公式可由欧拉方程和正弦函数三倍角公式获得。

（2）得到：$x^3+px+q=0$方程的复根公式为：

$$x=\pm 2i\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{\ln\left(\frac{\mp q\sqrt{\frac{27}{p^3}}\pm\sqrt{\frac{27q^2}{p^3}+4}}{2}\right)}{3i}\right),\ p\neq 0$$

分析结束。

定理 2.5：

$x^3\text{-}px^2=q$ 有解：

$$x=\left(\frac{\sqrt{q}}{2}+\sqrt{\frac{q}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\sqrt{q}}{2}-\sqrt{\frac{q}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{p}{3}$$

证明略，读者自己完成，提示证明用定理 2.0 的推论 2.0 并配合卡丹公式完成。

定理 2.6：

$x^n+\left(b-\left(\frac{-q}{b}\right)^{n-1}\right)x+q=0$ 有解：$x=\frac{-q}{b}$。

例如：$x^5+\left(13-\frac{17^4}{13^4}\right)x+17=0$，有解：$x=\frac{-17}{13}$。

定理 2.7：

$x^n+px+q=0$ 有解： $x=\frac{-q}{b}$ 或者 $x=(-a)^{\frac{1}{n-1}}$， a,b 满足：

$$\begin{cases} b^{n-1}a=-(-q)^{n-1} \\ b+a=p \end{cases}$$

下面证明定理 2.7：

因为：将单个的方程： $x^n+px+q=0$ 等效为下面的方程组：

$$\begin{cases} x^n+ax=0 \\ bx+q=0 \\ a+b=p \end{cases}$$

所以：
$$\begin{cases} x^{n-1}=-a \\ b^{n-1}a=-(-q)^{n-1} \Rightarrow -a=\left(\frac{-q}{b}\right)^{n-1} \\ b+a=p \end{cases}$$

所以：
$$x=(-a)^{\frac{1}{n-1}} \text{ 或者： } x=\frac{-q}{b}$$

所以： $x^n+px+q=0$ 有解： $x=\frac{-q}{b}$ 或者 $x=(-a)^{\frac{1}{n-1}}$， a,b 满足：

$$\begin{cases} b^{n-1}a=-(-q)^{n-1} \\ b+a=p \end{cases}$$

证明结束！

从定理 2.7 也可以看出来，之所以高次方程不能找到易于理解而且简单通用的解析解公式，都是因为方程组中第一个方程的 b 的次幂与 a 的次幂不相同，因此导致该方程组不能使用 一元二次方程的性质来求解，这是非常遗憾的事情，也是导致世界如此复杂和奇妙的根源。

思考 2.3：用卡丹公式证明下面的恒等式：

$$d=\left(\frac{kd}{2}+\sqrt{\frac{k^2d^2}{4}+\frac{\left(k-d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{kd}{2}-\sqrt{\frac{k^2d^2}{4}+\frac{\left(k-d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

为了减轻读者负担，这里给出思考 2.5 的证明：

证明：构造一个三次方程：$x^3+\left(k-d^2\right)x-kd=0$

显然该方程的根：

$$x=d$$

而应用卡尔丹公式求解会得到：

$$x=\left(\frac{kd}{2}+\sqrt{\frac{k^2d^2}{4}+\frac{\left(k-d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{kd}{2}-\sqrt{\frac{k^2d^2}{4}+\frac{\left(k-d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

所以：$d=\left(\frac{kd}{2}+\sqrt{\frac{k^2d^2}{4}+\frac{\left(k-d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{kd}{2}-\sqrt{\frac{k^2d^2}{4}+\frac{\left(k-d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$

所以：思考 2.3 成立，证明结束！

思考 2.4：用卡丹公式和一元二次方程证明下面的恒等式：

$$d=\left(4kd+\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{\frac{4k-d^2}{3}}\right)$$

为了减轻读者负担，这里给出思考 2.4 的证明：

证明：

因为：构造一个三次方程：$x^3+\left(4k-4d^2\right)x-8kd=0$

显然该方程的根：

$$x=2d$$

而应用卡尔丹公式求解会得到：

$$x=\left(4kd+\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(4kd-\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

所以：

$$2d=\left(4kd+\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(4kd-\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

所以构造一个一元二次方程：

$$x^2-2dx+\frac{4d^2-4k}{3}=0$$

所以：
$$x=\frac{2d\pm\sqrt{4d^2+\frac{16k-16d^2}{3}}}{2}=d\pm\sqrt{\frac{4k-d^2}{3}}$$

所以：
$$d+\sqrt{\frac{4k\text{-}d^2}{3}}=\left(4kd+\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

所以：
$$d=\left(4kd+\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{4k\text{-}d^2}{3}}$$

这就是思考 2.4 的证明结果。

或者：
$$d-\sqrt{\frac{4k\text{-}d^2}{3}}=\left(4kd-\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

这就是思考 2.5 的证明结果。

思考 2.5：用卡丹公式和一元二次方程证明下面的恒等式：

$$d=\left(4kd-\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sqrt{\frac{4k-d^2}{3}}\right)$$

读者可以看上面思考 2.4 最下面的结论也就证明了思考 2.5

思考 2.6：通过下面的不定方程组：

$$\begin{cases} p=\left(4gd-\sqrt{16k^2d^2+\frac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ q=\sqrt{\frac{4k-d^2}{3}} \end{cases}$$

计算出用 p,d 表示 g 的函数关系式：$g=f_0(p,d,k)$，

计算出用 q,d 表示 k 的函数关系式：$k=f_1(q,d)$

猜想 2.0：当函数：$g=f_0(p,d,k)$和函数：$k=f_1(q,d)$中的对除去 2 以外的所有某个固定的任意偶整数d，p，q跑遍任意小于d的素数的时候，两个函数的交点一定存在。

思考 2.7：通过下面的不定方程组：

$$\begin{cases} p=\left(4gd+\sqrt{16k^2d^2+\dfrac{\left(4k-4d^2\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ q=-\sqrt{\dfrac{4k-d^2}{3}} \end{cases}$$

计算出用p,d表示g的函数关系式：$g=f_0(p,d,k)$，

计算出用q,d表示k的函数关系式：$k=f_1(q,d)$

猜想 2.1：当函数：$g=f_0(p,d,k)$和函数：$k=f_1(q,d)$中的对除去 2 以外的所有某个固定的任意偶整数d，p，q跑遍任意小于d的素数的时候，两个函数的交点一定存在。提示：证明猜想 2.0，猜想 2.1 等价于证明哥德巴赫猜想。

第三章　二项式系数C_n^k

第一节　C_n^k的整除性质

定理 3.0：

任意自然数$p>1$,不存在任何一个自然数n，使得自然数k在范围：$1\le k\le n-1$之内都有：$p^2\left|C_n^k\right.$

符号说明：（符号 0）$A\left|B\right.$ 表示B除以A 所得余数 为 0。

（符号 1）C_n^k 表示 二项式系数

该定理证明的分析如下：

反证法：

假设：任意自然数$p>1$,必然存在一个自然数n，使得自然数k在范围：$1\le k\le n-1$之内都有：$p^2\left|C_n^k\right.$

所以（0）成立：

$$p^2\left|(a+1)^n-1-a^n\right. \qquad (0)$$

关键步骤开始（递推思想）：

当：$a=1$时，由（0） 知道：$p^2\left|(1+1)^n-1-1^n\right.$，即：

$$p^2\left|2^n-2\right. \qquad (1)$$

当：$a=2$时，由（0） 知道：$p^2\left|(2+1)^n-1-2^n\right.$，即：

$$p^2\left|3^n-2^n-1\right. \qquad (2)$$

关键的一个代数技巧出现：

因为：$3^n - 2^n - 1 = 3^n - 2^n - (3-2) = (3^n - 3) - (2^n - 2)$ （3）

由于 （1），（2） 都成立 ，再由于（3）

得到（4）成立：

$$p^2 \left| 3^n - 3 \right. \qquad (4)$$

接下来当：$a = 3$ 由（1）知道：$p^2 \left| (3+1)^n - 1 - 3^n \right.$ ，即：

$$p^2 \left| 4^n - 3^n - 1 \right. \qquad (5)$$

相同的代数技巧：

因为：

$$4^n - 3^n - 1 = 4^n - 3^n - (4-3) = (4^n - 4) - (3^n - 3) \qquad (6)$$

由于 （4），（5） 都成立，再由于 （6）

得到（7）成立：

$$p^2 \left| 4^n - 4 \right. \text{成立} \qquad (7)$$

$$\vdots$$

依次类推，我们可以得到下面这个结论：

对于任意自然数 m，有 $p^2 \left| m^n - m \right.$

所以：取 $m = p$，则有 $p^2 \left| p^n - p \right.$

所以：$p \left| p^{n-1} - 1 \right.$ 成立

显然 $p \left| p^{n-1} - 1 \right.$ 是 错误的，所以原来的假设是不成立的

因此就证明了定理 0：任意自然数 $p > 1$,不存在任何一个自然数 n，使得自然数 k 在范围：$1 \le k \le n-1$ 之内都有：$p^2 \left| C_n^k \right.$。分析结束。

第二节　费尔马小定理

费尔马小定理：如果：p 是素数，m 为整数，则：$p \mid m^p - m$。

分析：

证明前的准备工作：

定理 3.1：一个恒等式：如果 p 是奇数，m 为正自然数，则：

$$m^p - m = \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left(-m^p + (-1)^{(k+1)} \sum_{i=1}^{m} (m+i)^{p-k} \right)$$

定理 3.2：除了 2 之外其余一切素数都是奇数。

定理 3.3：如果 p 是素数，正自然数 k 在范围 $1 \le k \le p-1$ 之内都满足：$p \mid C_p^k$。

由于定理 3.2，定理 3.3 在一般的数论教材中都有证明并作为定理出现，这里就不再证明了，这里着重证明定理 3.1：

因为：p 是奇数，$m \ge 1$，且 $m \in N$，所以由二项式定理：

$$m^p = (m+1-1)^p = (m+1)^p - 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (-1)^k (m+1)^{p-k} \quad （1）$$

$$(m+1)^p = (m+2-1)^p = (m+2)^p - 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (-1)^k (m+2)^{p-k} \quad （2）$$

将（2）代入（1）得到（3）

$$m^p = (m+2)^p - 2 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (-1)^k \left((m+2)^{p-k} + (m+1)^{p-k} \right) \quad （3）$$

由二项式定理可知：

$$(m+2)^p = (m+3-1)^p = (m+3)^p - 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (-1)^k (m+3)^{p-k} \quad （4）$$

$$\left(m+3\right)^p=\left(m+4-1\right)^p=\left(m+4\right)^p-1+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\left(-1\right)^k\left(m+4\right)^{p-k} \quad (5)$$

将（4）代入（3）得到（6），再将（5）代入（6）得到（7）：

$$m^p=\left(m+4\right)^p-4+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\left(-1\right)^k\left(\left(m+2\right)^{p-k}+\left(m+1\right)^{p-k}+\left(m+4\right)^{p-k}+\left(m+3\right)^{p-k}\right)$$

再由二项式定理可知：

$$\left(m+4\right)^p=\left(m+5-1\right)^p=\left(m+5\right)^p-1+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\left(-1\right)^k\left(m+5\right)^{p-k} \quad (8)$$

将（8）代入（7）得到（9）：

$$m^p=\left(m+5\right)^p-5+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\left(-1\right)^k\left(\left(m+2\right)^{p-k}+\left(m+1\right)^{p-k}+\left(m+4\right)^{p-k}+\left(m+3\right)^{p-k}+\left(m+5\right)^{p-k}\right)\vdots$$

依次类推可得到结论：

$$m^p=\left(m+m\right)^p-m+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\left(-1\right)^k\left(\left(m+2\right)^{p-k}+\left(m+1\right)^{p-k}+\left(m+4\right)^{p-k}+\left(m+3\right)^{p-k}+\left(m+5\right)^{p-k}+\cdots+\left(m+m\right)^{p-k}\right)$$

$$=2m^p+\left(\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k m^p\right)-m+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\left(\left(-1\right)^k\sum_{i=1}^{m}\left(m+i\right)^{p-k}\right)$$

所以：

$$m^p-m=\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\left(-m^p+\left(-1\right)^{(k+1)}\sum_{i=1}^{m}\left(m+i\right)^{p-k}\right)$$

其中：p 是奇数

证明结束。

再来证明费尔马小定理：

由定理 3.1，定理 3.2，定理 3.3 知道：当 p 是奇素数时，m 为正自然数，$p\,|\,m^p-m$ 成立。

当 m 为负自然数时，则：$-m$ 为正自然数，则：$m^p-m=-\left(\left(-m\right)^p-\left(-m\right)\right)$，再由上面的结论，显然：$p\left|m^p-m\right.$ 也成立。

当 m 等于 0 的时，显然：$p\left|m^p-m\right.$ 成立。

当 p 为偶素数 2 时：$m^2-m=m\left(m-1\right)$，显然 $m,m-1$ 两个数中必有一个偶整数，$2\left|m^2-m\right.$ 成立。

分析结束。

思考 3.0：证明定理 3.4：如果 p 是奇数，m 为正自然数则：

$$m^p-m=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k i^{p-k}\left(-1\right)^{k+1}$$

显然通过（定理 3.4）（定理 3.2）（定理 3.3）也可以证明费尔马小定理。希望读者自己动脑筋给出证明，由于证明很难读者可以通过作者的 QQ:17104394 索要证明过程。

第三节 二项式定理

定理 3.5： $(a-b)^n = a^n - b^n - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (a-b)^k b^{n-k}$ 且 $n \in Z^+$

证明如下：

因为：$a^n = (a-b+b)^n = (a-b)^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (a-b)^k b^{n-k}$ 且 $n \in Z^+$

所以：$(a-b)^n = a^n - b^n - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (a-b)^k b^{n-k}$

证明结束。

思考 3.1： 证明下面的恒等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^{k+1} y^k (x+y)^{\alpha-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k x^{\alpha-k}$$

其中：$0 < |y| < |x|$，且 x, y 同正或者同负

其中：α 是实数

第四章 素数

第一节 黎曼 zeta 级数

定义 4.0：黎曼 zeta 级数：

$$S(n)=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots+\frac{1}{i^n}+\frac{1}{(i+1)^n}+\cdots$$

定理 4.0：

黎曼 zeta 级数等价于下面的式：

$$S(n)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{7^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)+\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{1-\left(\left(p_0{}^{-n}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(p_i{}^{-n}\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-p_j{}^{-n}\right)\right)\right)}$$

其中 $p_0=2, i$ 是正自然数，p_i 是按照顺序依次排列的正奇素数，规定：$p_1=3$，$p_2=5, p_3=7, p_4=11, p_5=13, p_6=17, p_7=19, \cdots$ 按照连续的素数排列下去。

下面证明 定理 4.0：

由于：

$$S(n)=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots+\frac{1}{i^n}+\frac{1}{(i+1)^n}+\cdots$$

所以：

$$\frac{1}{2^n}S(n)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots+\frac{1}{(2i)^n}+\frac{1}{(2i+2)^n}+\cdots \quad (1)$$

则：

$$S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\cdots$$

则：

$$\frac{1}{3^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{21^n}+\frac{1}{27^n}+\frac{1}{33^n}+\frac{1}{39^n}+\cdots \quad (2)$$

所以：

$$S(n)-\frac{1}{3^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}S(n)=S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}+\frac{1}{23^n}+\frac{1}{25^n}+\cdots$$

则：

$$\frac{1}{5^n}\left(S(n)-\frac{1}{3^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}S(n)\right)=\frac{1}{5^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right) \quad (3)$$
$$=\frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}+\frac{1}{55^n}+\frac{1}{65^n}+\frac{1}{85^n}+\frac{1}{95^n}+\frac{1}{115^n}+\frac{1}{125^n}+\cdots$$

所以：

$$S(n)-\frac{1}{5^n}\left(S(n)-\frac{1}{3^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}S(n)\right)-\frac{1}{3^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}S(n)$$
$$=S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$
$$=1+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}+\frac{1}{23^n}+\frac{1}{29^n}+\frac{1}{31^n}+\frac{1}{37^n}+\frac{1}{41^n}+\frac{1}{43^n}+\frac{1}{47^n}+\frac{1}{49^n}+\cdots$$

则：

$$\frac{1}{7^n}\left(S(n)-\frac{1}{5^n}\left(S(n)-\frac{1}{3^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}S(n)\right)-\frac{1}{3^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}S(n)\right)$$
$$=\frac{1}{7^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$
$$=\frac{1}{7^n}+\frac{1}{49^n}+\frac{1}{77^n}+\frac{1}{91^n}+\frac{1}{119^n}+\frac{1}{133^n}+\frac{1}{161^n}+\frac{1}{203^n}+\frac{1}{217^n}+\frac{1}{259^n}+\cdots \quad (4)$$

$$\vdots$$

反复这样下去，来获得与（1），（2），（3），（4）类似的（5），（6）…由于（1），（2），（3），（4）…中各项都没有相同的单项，但这些项中的各个单项又都存在于 S 中，根据容斥原理：所以可以获得方程：（1）+（2）+（3）+（4）+…=S(n)-1，即得到该方程：

$$\frac{1}{2^n}S(n)+\frac{1}{3^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{5^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$
$$+\frac{1}{7^n}S(n)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)+\cdots+\cdots=S(n)-1$$

将方程化简后求解可以得到：

$$S(n)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{7^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)+\cdots\right)}$$
$$=\frac{1}{1-\left(\left(p_0^{-n}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(P_i^{-n}\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-p_j^{-n}\right)\right)\right)}$$

证毕。

定理 4.1：关于 1 的恒等式：

$$1=\left(\left(p_i^{-1}\right)+\sum_{j=i+1}^{\infty}\left(P_j^{-1}\prod_{k=i}^{j-1}\left(1-p_k^{-1}\right)\right)\right)$$

其中 i 是正自然数和 0，p_i 是按照顺序依次排列的正奇素数，例如：$p_0=2$， $p_1=3$， $p_2=5,p_3=7,p_4=11,p_5=13,p_6=17,p_7=19\cdots$，按照连续的素数排列下去。

下面证明定理 4.1

进一步讨论调和级数：

$$S(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{i}+\frac{1}{(i+1)}+\cdots$$

该调和级数是发散的即：

$$S(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{i}+\frac{1}{(i+1)}+\cdots=+\infty$$

再由：

$$S(n)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{7^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)+\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{1-\left(\left(p_0{}^{-n}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(P_i{}^{-n}\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-p_j{}^{-n}\right)\right)\right)}$$

当：$n=1$ 时：

$$S(1)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{1-\left(\left(p_0{}^{-1}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(P_i{}^{-1}\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-p_j{}^{-1}\right)\right)\right)}$$

又因为：

$$S(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{i}+\frac{1}{(i+1)}+\cdots=+\infty$$

由于为了达到正无穷大的极限，分母必须为 0

所以：
$$1=\left(p_0{}^{-1}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(P_i{}^{-1}\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-p_j{}^{-1}\right)\right)$$

为了读者看的更加清楚即：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

再由该式子还可以明显获得无穷多关于 1 的恒等式：

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$1=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{11}\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$\vdots$$

如此反复可以得到无限组（因为素数是无限多的）关于 1 的等式，最后总结得到关于 1 的恒等式的通式：

$$1=\left(p_i^{-1}\right)+\sum_{j=i+1}^{\infty}\left(P_j^{-1}\prod_{k=i}^{j-1}\left(1\text{-}p_k^{-1}\right)\right)$$

其中：$i\geq 0$。

定理 4.1 证明完毕。

第二节　圆周率与素数

定理 4. 2：

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{29^2}+\frac{1}{31^2}+\cdots$$

分析：

该圆周率等式的前 1 到 7 项的分母出现了连续 7 个素数，分别是：5，7，11，13，17，19，23，而且这 7 个连续的素数的规律是 2，4 公差循环。唯一漏掉的素数 3，其平方 9 也出现在等式左边的分母上，而且目前所知的分母在 10 之内的该类型的圆周率公式仅 2 个，分别是欧拉发现的：

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{25^2}+\cdots$$

所以定理 4.2 是一个有潜在价值的等式，当你第一次看到这个等式的时候，会觉得很难证明，其实证明非常简单：因为

$$\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{72}=\frac{\pi^2}{9}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{25^2}+\cdots$$

所以： $\frac{\pi^2}{72}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{27^2}+\frac{1}{33^2}+\frac{1}{39^2}+\frac{1}{45^2}+\frac{1}{51^2}+\frac{1}{57^2}+\frac{1}{63^2}+\cdots$

所以： $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{72}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{29^2}+\frac{1}{31^2}+\cdots$

所以：$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{29^2}+\frac{1}{31^2}+\cdots$

所以：定理 4.2 成立。

证明结束。

虽然欧拉先发现了$\frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6}$，但他忘了公布$\frac{\pi^2}{9}$，导致后人遗忘了定理 4.2，本书认为这是欧拉故意开的玩笑。

思考 4.0：还存在$\frac{\pi^2}{2},\frac{\pi^2}{3},\frac{\pi^2}{4},\frac{\pi^2}{5},\frac{\pi^2}{7},\frac{\pi^2}{10}$由整数的平方倒数之和构成的形式吗？

思考 4.1：欧拉还有哪些为大家所熟知的数学方法虽然大家熟知，但大家却很少使用过？这个思考 4.1 就在本章的前面和下面的章节有答案。

第三节　孪生素数

猜想 4.2：p,q 是一对孪生素数，且 $0<p$，$q=p+2$ 则：q 与 q^2 之间至少有一对孪生素数。

思考 4.2：

p，$q=p+2$， p,q 都是素数的充要条件：$4(p\text{-}1)!+(q+2)\equiv 0(\bmod pq)$，希望读者自己动脑筋给出证明，证明需要用到中国剩余定理来计算，对某些读者会有难度，可以通过作者的 QQ:17104394 索要证明过程。

第五章　不定方程

第一节　不等式与费尔马方程

定理 5.0：

已知：费尔马方程：$x^n + y^n = z^n$，规定：$x < y < z, x, y, z, n \in Z^+, n \geq 2$

则可以得到结论：$x > n(z-y)$

注明：该不等式是首先被德国物理学家数学家热尔曼发现的，但是她的证明方法非常复杂，下面给出这个不等式最简洁的证明：

由第三章第三节中二项式定理：

$$(z-y)^n = z^n - y^n - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (z-y)^k y^{n-k}$$

又因为：$x^n + y^n = z^n$，所以：$x^n = z^n - y^n$

所以：

$$(z-y)^n = x^n - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (z-y)^k y^{n-k}$$

又因为：$x < y < z, x, y, z, n \in Z^+, n \geq 2$

所以：

$$(z-y)^n = x^n - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (z-y)^k y^{n-k} > 0$$

即：

$$x^n > \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (z-y)^k y^{n-k} \geq C_n^1 (z-y) y^{n-1}$$

即：

$$x^n > C_n^1 (z-y) y^{n-1}$$

即：

$$x^n = x \cdot x^{n-1} > n(z-y) y^{n-1}$$

因为：$x < y < z, x, y, z, n \in Z^+, n \geq 2$，所以：$0 < x^{n-1} < y^{n-1}$

所以：$x > n(z-y)$

证明完毕。

思考 5.0：关于该不等式是否还有其它证明，请读者自己思考，如果实在没有别的思路，可以通过 qq:17104394 向作者索要另外新的证明。

第二节　欧拉猜想和费尔马猜想

预备 5.0：欧拉猜想：

不定方程：$x^n+y^n+z^n=w^n, n\ge 4$ 没有非 0 正整数解。

预备 5.1：费尔马猜想：

不定方程：$x^n+y^n=z^n$，$n\ge 3$ 没有非 0 正整数解。

定理 5. 1：

费尔马猜想不成立，则欧拉猜想也不成立，欧拉猜想成立，则费尔马猜想一定成立。

证明定理 5.1，证明如下：

费马方程：$x^n+y^n=z^n$，将方程两边平方，得到$\left(x^n+y^n\right)^2=\left(z^n\right)^2$

又因为：

$$\left(x^n+y^n\right)^2=x^{2n}+y^{2n}+2x^ny^n=x^{2n}+y^n\left(y^n+x^n\right)+x^ny^n=\left(x^2\right)^n+(yz)^n+(xy)^n$$
$$\left(x^n+y^n\right)^2=x^{2n}+y^{2n}+2x^ny^n=y^{2n}+x^n\left(x^n+y^n\right)+x^ny^n=\left(y^2\right)^n+(xz)^n+(xy)^n$$

得到欧拉方程：

$$\left(x^2\right)^n+(yz)^n+(xy)^n=\left(z^2\right)^n \text{ 和 } \left(y^2\right)^n+(xz)^n+(xy)^n=\left(z^2\right)^n$$

所以：费马方程可以转换为两个与之等价的欧拉方程的形式。所以，费马方程如果存在整数解，则欧拉方程：

$$\left(x^2\right)^n+(yz)^n+(xy)^n=\left(z^2\right)^n，\left(y^2\right)^n+(xz)^n+(xy)^n=\left(z^2\right)^n$$

也存在整数解，即证明了定理 1 的前半句话：费尔马猜想不成立，则欧拉猜想也不成立。

接下来：如果欧拉方程：$x^n+y^n+z^n=w^n, n\ge 4$ 没有非 0 整数解

的猜想成立，

$$\left(x^2\right)^n+\left(yz\right)^n+\left(xy\right)^n=\left(z^2\right)^n,\ n\geq 4$$

$$\left(y^2\right)^n+\left(xz\right)^n+\left(xy\right)^n=\left(z^2\right)^n,\ n\geq 4$$

这两个方程中的x,y,z是完全相同，由于这两个方程都为欧拉方程，因此这两个方程其整数解是不存在的，因此x,y,z不能同时都为非0整数，所以$x^n+y^n=z^n,n\geq 4$有整数解也是不成立的，即费马猜想也成立。即证明了定理 5.1 的后半句话：欧拉猜想成立，则费尔马猜想一定成立。定理 5.1 证明结束。

思考 5.1

费尔马说自己有一个关于其猜想的初等证明是否是一个谎言呢？如果是谎言，为何数学家也要撒谎呢？数学家的的谎言是善意的还是恶意的呢？法尔廷斯曾经说过除了黎曼猜想再也没什么难题可以让他去研究了，还有一个数学家保罗·厄多斯说过：一个数学家必须是在每个星期都有一些新的研究工作才成为数学家，这句话表明了数学家也喜欢吹牛吗？如果是，他们的信心和信念来自何处？请读者有何看法请和本书作者通过 qq:17104394 交流。

思考 5.2 在费马猜想不成立的情况下，方程：

$x^n+y^n+z^n=w^n,n\geq 3$的整数解个数是否少于，多于，等于$x^n+y^n=z^n$，$n\geq 3$的整数解的个数呢？

思考 5.3 证明恒等式：

$$\left(2a_1b\right)^2+\left(2a_2b\right)^2+\left(2a_3b\right)^2+\cdots+\left(2a_{n-2}b\right)^2+$$
$$\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_{n-2}{}^2-b^2\right)^2=\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_{n-2}{}^2+b^2\right)^2,\ n\ge 3$$

本章补充：三角函数的一个基本问题

该问题是：任意给一个三角函数的表达式，能否化为单一的一个三角函数表示。例如：将 $\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}\beta}$ ；$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 化为单一的一个三角函数。本书给出的答案是（有趣的是答案就是证明本身）：

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}\beta},\text{其中：}\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\mathrm{ctg}\beta+1\right)^2+1}}\right)$$

第六章　组合数学

第一节　习题

习题 6.0：某君举步上高楼，或上一个台阶，或上二个台阶，问此君上 n 级台阶高楼有多少种不同的方式？

答案 a：$f(n)=f(n-1)+f(n-2), f(1)=1, f(2)=2$，其中：n 是台阶个数为正整数，$f(n)$ 是爬楼梯的不同方法数。

答案 b：$f(n)=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_{i+\frac{n}{2}}^{2i}$，n 是台阶个数其为正偶整数。

$$f(n)=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{i+\frac{n+1}{2}}^{2i+1}$$，n 是台阶个数其为正奇整数。

习题 6.1：某君举步上高楼，或上一个台阶，或上二个台阶，或上三个台阶，问此君上 n 级台阶高楼有多少种不同的方式？

答案 a：$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-3), f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4$，其中：$n$ 是台阶个数为正整数，$f(n)$ 是爬楼梯的不同方法数。

答案 b：$f(n)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-3i}{2} \right\rfloor} C_{n-3i-j}^{j} C_{n-2i-j}^{i}$，$n$ 是台阶个数为正整数，$f(n)$ 是爬楼梯的不同方法数。

习题 6.2：某君举步上高楼，或上一个台阶，或上二个台阶，或上 k 个台阶，问此君上 n 级台阶高楼有多少种不同的方式？

答案 a：$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-k)$，初值：

$$f(1)=1,f(2)=2,f(3)=4,\cdots f(k-1)=f(k-2)+f(k-3),f(k)=1+\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}C_{k-j}^{j}$$

其中：n 是台阶个数为正整数，$f(n)$ 是爬楼梯的不同方法数。

答案 b：$f(n)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-ki}{2}\right\rfloor}C_{n-ki-j}^{j}C_{n-(k-1)i-j}^{i}$

其中：n 是台阶个数为正整数，$f(n)$ 是爬楼梯的不同方法数。

习题 6.3：某君举步上高楼，或上一个台阶，或上二个台阶，或上三个台阶，…或上 k 个台阶，问此君上 n 级台阶高楼有多少种不同的方式？

答案 a：$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)+f(n-4)+\cdots+f(n-k)$，初值：

$$\begin{aligned}&f(1)=1,f(2)=2,f(3)=4,\cdots f(k-1)=f(k-2)+f(k-3)+\cdots f(0),\\&f(k)=f(k-1)+f(k-2)+f(k-3)+\cdots f(0)\end{aligned}$$

其中：n 是台阶个数为正整数，$f(n)$ 是爬楼梯的不同方法数。

答案 b：

$$f(n)=\sum_{i_k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}\sum_{i_{k-1}=0}^{\left\lfloor\frac{n-ki_k}{k-1}\right\rfloor}\cdots\sum_{i_2=0}^{\left\lfloor\frac{n-ki_k-(k-1)i_{k-1}-\cdots-3i_3}{2}\right\rfloor}\frac{(i_2+i_3+i_4+\cdots+i_k)!}{i_2!i_3!i_4!\cdots i_k!}C_{n-(k-1)i_k-(k-2)i_{k-1}-(k-3)i_{k-2}-\cdots-2i_3-i_2}^{i_2+i_3+i_4+\cdots+i_k}$$

其中：n 是台阶个数为正整数，$f(n)$ 是爬楼梯的不同方法数。

习题 6.4：求公差为 d 的等差数列的等 n 次幂的和：$s(d,n)$ 的递归表达式：

$S(d,n)=1+(1+d)^n+(1+2d)^n+(1+3d)^n+\cdots+(1+(k-2)d)^n+(1+(k-1)d)^n$

$n\ge 2$，$k,d\in Z^+$

答案：

$$S(d,n)=\frac{(kd+1)^{n+1}-kd^{n+1}-1-\sum_{i=1}^{n-1}C_{n+1}^{i}S(d,i)d^{n+1-i}}{(n+1)d}$$

习题 6.5：求伯努利数和欧拉数的递归表达式：

答案：$E_0=1,E_1=1,B_0=-1$，$B_1=\frac{1}{6}$，$n\ge k\ge 1,n,k\in Z^+$

（1）：$E_n=(2n-1)\,!\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_kE_{n-k}}{(2k)\,!(2n-2k)\,!}$

（2）：$B_n=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}B_k\left(2^{2n-2k-1}-1\right)B_{n-k}}{\left(2^{2n-1}-1\right)(2k)\,!(2n-2k)\,!}$

提示：利用欧拉的系数对比法，并利用 $ctgx,\csc x,tgx,\sec x$ 的幂级数展开和导数关系：$(\csc x)^{(1)}=-ctgx\csc x,(\sec x)^{(1)}=tgx\sec x$

习题 6.6：利用递归数列：$a_n=aa_{n-1}-a_{n-2};a_0=0;a_1=1$，给出一个方程使得该方程的根是：$\cos\frac{p\pi}{q};\forall p,q\in Z$，答案实例：

（1）：$\cos\frac{\pi}{17},\cos\frac{3\pi}{17},\cos\frac{5\pi}{17},\cos\frac{7\pi}{17},\cos\frac{9\pi}{17},\cos\frac{11\pi}{17},\cos\frac{13\pi}{17},\cos\frac{15\pi}{17},\frac{1}{2}$

这九个实数是方程：

$$x^9-2x^7-\frac{x^6}{8}+\frac{21}{16}x^5+\frac{5}{32}x^4-\frac{5}{16}x^3-\frac{3}{64}x^2+\frac{5}{256}x+\frac{1}{512}=0$$

的九个根。

（2）：$\cos\frac{2\pi}{19},\cos\frac{4\pi}{19},\cos\frac{6\pi}{19},\cos\frac{8\pi}{19},\cos\frac{10\pi}{19},\cos\frac{12\pi}{19},\cos\frac{14\pi}{19},\cos\frac{16\pi}{19},\cos\frac{18\pi}{19}$

这九个实数是方程：

$$x^9-2x^7+\frac{x^8}{2}+\frac{21}{16}x^5-\frac{7}{8}x^6-\frac{5}{16}x^3+\frac{15}{32}x^4+\frac{5}{256}x-\frac{5}{64}x^2+\frac{1}{512}=0$$

的九个根。

习题 6.7: 编写 c 语言非递归程序实现下面的递归数列某一项的计算：

$$L(n)=L(n-1)+L(n-2)+L(n-3),L(0)=2,L(1)=1,L(2)=3$$

提示用公式计算：

$$f(n)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-3i}{2}\right\rfloor}\frac{n-i}{n-2i-j}C_{n-2i-j}^{i}C_{n-3i-j}^{j}$$

由于 c 语言对算法数学很重要，是一个基本要求，所以下面给出程序：

```
可以在 vc++6.0 下编译运行
#include <stdio.h>
#include<string.h>
double c(long int n,long int m)
{
	double t1,t2;
	long p,i;
	t1=1;
	t2=1;
```

```
        p=n;
        if((n==0)||(m==0))
        return 1;
        else
    {
          for (i=1;i<=m;i++)
          {
            t1=t1*p;
            p=p-1;
          }
          for(i=m;i>0;i--)
          t2=t2*i;
         return (t1/t2);
     }
}
void main (void)
{
   unsigned long i,j,n;
   double t;
   while(1)
   {
     t=0;
     scanf("%lu",&n);
     for (i=0;i<=(int)(n/3);i++)
       for(j=0;j<=(int)((n-(3*i))/2);j++)
        t=t+c(n-3*i-j,j)*c(n-2*i-j,i)*(n-i)/(n-2*i-j);
     printf("\nL%lu=%f\n\n",n,t);
     }
}
```

思考 6.0: 递归是什么意思，分形数学和递归有何关联？

本章习题很难，需要过程的读者可以和作者通过 qq:17104394 索取

本章补充：（以下程序可以在 vc++6.0 下运行）

为了进一步提高读者的程序的思维能力，补充三个 C 语言编写的经典小程序，一个是走迷宫，一个是八皇后，一个阶乘计算，作为研究组合数学的工具。注明：下面三个程序没有用什么特别算法，只是形式化描述，但已够用！

补充 1：走迷宫

在一个 n*m 的迷宫里,每一个坐标点有两种可能:0 或 1,0 表示该位置允许通过,1 表示该位置不允许通过，如地图：

$$
\begin{array}{ccccccc}
1&1&1&1&1&1&1\\
1&\boxed{1}&1&0&0&0&1\\
1&1&0&1&0&1&1\\
1&0&0&1&1&0&1\\
1&0&1&0&0&1&1\\
1&0&0&0&1&\boxed{0}&1\\
1&1&1&1&1&1&1
\end{array}
$$

说明：该程序是以这个地图为迷宫，并且规定计算机从框 1 处开始走这个迷宫，走出迷宫的目标是框 0，程序将给出一条路径从起点走到终点的位置，规定行号，列号来定位一个通路或者绝壁。

```
/*作者：李煌老师备课《人工智能》写于 2004 年 10 月 1 号 */
#include<stdio.h>
void main()     /*走迷宫*/
{
int i,g,k,j,xx,yy,gx=5,gy=5,b[100][100];
struct ly
{
int x;
int y;
int d;
} a[100];
```

```
b[0][0]=1;b[0][1]=1;b[0][2]=1;b[0][3]=1;b[0][4]=1;b[0][5]=1;
b[0][6]=1;b[1][0]=1;b[1][1]=1;b[1][2]=1;b[1][3]=0;b[1][4]=0;
b[1][5]=0;b[1][6]=1;b[2][0]=1;b[2][1]=1;b[2][2]=0;b[2][3]=1;
b[2][4]=0;b[2][5]=1;b[2][6]=1;b[3][0]=1;b[3][1]=0;b[3][2]=0;
b[3][3]=1;b[3][4]=1;b[3][5]=0;b[3][6]=1;b[4][0]=1;b[4][1]=0;
b[4][2]=1;b[4][3]=0;b[4][4]=0;b[4][5]=1;b[4][6]=1;b[5][0]=1;
b[5][1]=0;b[5][2]=0;b[5][3]=0;b[5][4]=1;b[5][5]=0;b[5][6]=1;
b[6][0]=1;b[6][1]=1;b[6][2]=1;b[6][3]=1;b[6][4]=1;b[6][5]=1;
b[6][6]=1;
i=1;
a[i].x=1;
a[i].y=1;
a[i].d=1;
while(1)
{
g=1;
for (k=i-1;k>=1;k--)
{
xx=a[i].x-a[k].x;
yy=a[i].y-a[k].y;
if(xx==0 && yy==0)
g=0;
if(a[i].d==9)
g=0;
if(b[a[i].x][a[i].y]==1)
g=0;
}
if ((a[i].x !=gx || a[i].y !=gy) && g==1)
{
i=i+1;
a[i].d=1;
if(a[i-1].d==1)
{ a[i].x=a[i-1].x;
a[i].y=a[i-1].y+1;
}
if(a[i-1].d==2)
{ a[i].x=a[i-1].x+1;
```

```
a[i].y=a[i-1].y+1;
}
if(a[i-1].d==3)
{
a[i].x=a[i-1].x+1;
a[i].y=a[i-1].y;
}
if(a[i-1].d==4)
{
a[i].x=a[i-1].x+1;
a[i].y=a[i-1].y-1;
}
if(a[i-1].d==5)
{
a[i].x=a[i-1].x;
a[i].y=a[i-1].y-1;
}
if(a[i-1].d==6)
{
a[i].x=a[i-1].x-1;
a[i].y=a[i-1].y-1;
}
if(a[i-1].d==7)
{
a[i].x=a[i-1].x-1;
a[i].y=a[i-1].y;
}
if(a[i-1].d==8)
{
a[i].x=a[i-1].x-1;
a[i].y=a[i-1].y+1;
}
continue;}
if (g==0)
{
i--;
a[i].d++;
```

```
if(i==1 && a[i].d==9)      /*这是迷宫没路可走的判断语句应该加的位置
*/
{
printf("mei lu ke zou\n");
break;
}
}
if (a[i].x==gx && a[i].y==gy)
{
for(j=1;j<=i-1;j++)
printf("(%d,%d) —>",a[j].x,a[j].y);
printf("(%d,%d)",a[i].x,a[i].y);
printf("\n");
break;
}
}
}
```

运行结果：

(1,1) —> (2,2) —>(3,2) —>(4,3) —>(4,4) —>(5,5)

补充 2：八皇后问题：

八皇后问题是一个古老而著名的问题，是回溯算法的典型例题。该问题是十九世纪著名的数学家高斯 1850 年提出：在8×8格的国际象棋上摆放八个皇后，使其不能互相攻击，即任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上，问有多少种摆法。高斯认为有 76 种方案。1854 年在柏林的象棋杂志上不同的作者发表了 40 种不同的解，后来人用图论方法解出 92 种结果。

注明：以上关于八皇后的资料出自百度百科

/*作者：李煌老师备课《人工智能》写于 2004 年 10 月 1 日*/

```
#include <stdio.h>
 main()    /* 8 皇后的所有解*/
{  int i,g,k,j,n=8,s,x,y,a[20];
   i=1;s=0;a[1]=1;a[0]=1;
printf("\n-------------------------------------------------\n");
  while(1)
  {   g=1;
   for (k=i-1;k>=1;k--)
      {
       x=a[i]-a[k];
       if(x<0) x=-x;
       if(x==0||x==i-k)
       g=0;
      }
      if (i<n && g==1)
       {i++;a[i]=1;continue;}
       if (i<=n && g==0)
       for (j=1;j<=n;j++)
       if(a[i]==n) i--;
      if (i<=n && g==0)
      a[i]=a[i]+1;
      if (g==1 && i==n)
    {
     s++;
     for(j=1;j<=n;j++)
     printf("%d",a[j]);
     printf("  ");
     }
      if (i==n && g==1)
      for (j=1;j<=n;j++)
      if(a[i]==n) i--;
      if(i<=n && g==1)
      a[i]=a[i]+1;
      if (a[0]==2 && g==0 && i==n)
      {      break;
      } }
```

```
    printf("\n-------------------------------------\n");
    printf("%d 皇后有%d 个解\n",n,s);
    getchar();
    }
```

运行结果：

```
------------------------------------------------
15863724  16837425  17468253  17582463  24683175  25713864  25741863
26174835  26831475  27368514  27581463  28613574  31758246  35281746
35286471  35714286  35841726  36258174  36271485  36275184  36418572
36428571  36814752  36815724  36824175  37285146  37286415  38471625
41582736  41586372  42586137  42736815  42736851  42751863  42857136
42861357  46152837  46827135  46831752  47185263  47382516  47526138
47531682  48136275  48157263  48531726  51468273  51842736  51863724
52468317  52473861  52617483  52814736  53168247  53172864  53847162
57138642  57142863  57248136  57263148  57263184  57413862  58413627
58417263  61528374  62713584  62714853  63175824  63184275  63185247
63571428  63581427  63724815  63728514  63741825  64158273  64285713
64713528  64718253  68241753  71386425  72418536  72631485  73168524
73825164  74258136  74286135  75316824  82417536  82531746  83162574
84136275
-------------------------------------
8 皇后有 92 个解
```

补充 3：阶乘计算：

阶乘(factorial)是基斯顿·卡曼(Christian Kramp, 1760 -1826)于 1808 年发明的运算符号。阶乘，也是数学里的一种术语。

任何大于 1 的自然数 n 阶乘表示方法：

$n!=1\times2\times3\times\ldots\ldots\times n$ 或 $n!=n\times(n-1)!$

或者我们很少看见过的：f（n）=（f（n−1）+f（n−2))（n−1）；f（0）=f（1）=1，n!=f（n）这种形式出现在错排问题中，在一般的组合数学课本中都有介绍。

注明：以上关于阶乘介绍的资料出自百度百科和文献[1]

```
//作者：李煌老师 email: 420111197702177316@163.com
//qq: 17104394
//写于 2009年4月14日下午
#define sss 65100
#define ppp 1
#include <iostream.h>
#include <iomanip.h>
#include <stdio.h>
void main()
{
unsigned short
s[sss],ss[sss],i,k[sss],kk[sss],kkk[sss],kkkk[sss],t[2],m,jw,jww,
aa;
unsigned long j;
double n=0.0;
char lk='\001';
while(1)
{
    cout<<"//作者：李煌老师备课《c语言程序设计》写的程序"<<endl;
    cout<<"//用于计算大整数的阶乘和连续阶乘之和："<<endl;
     cout<<"//1～17110阶乘，并计算连续阶乘和，计算"<<endl;
     cout<<"//范围如右：1！+…+17110！"<<endl;
    cout<<"//作者：南昌理工学院计算机系李煌老师,写于2009年4
    月14日下午"<<endl;
    cout<<"//EMAIL：420111197702177316@
    163.COM"<<endl;
    cout<<"//QQ：17104394"<<endl;
    cout<<"//软件版权：南昌理工学院计算机系李煌老师软件工作室！
    "<<endl<<endl;
     if (lk=='\001')
     printf("请输入一个数字告诉计算机计算到多少为止？");
     else
     {
     printf("您输入的不是数字，请重新输入一个数字告诉计算机计算到
多少为止！");
    lk='\001';
     }
```

```
mv:  scanf("%lf",&n);
    if((n<0.0)&&(lk=='\001')||(n>17110.0))
    {
    if (n>17110.0)
     printf("您输入的数字超过了计算范围，请重新输入！");
    else
     printf("您输入的不是合法数字，请重新输入！");
     n=0.0;
     goto mv;
    }

     cout<<endl;
     cout<<endl;

     for(i=0;i<=sss-1;i++)
     {
          s[i]=0;
        ss[i]=0;
     }
    j=(unsigned long)n;
     m=1;
     k[0]=1;
          for(i=1;i<=sss-1;i++)
               k[i]=0;
     if ((unsigned long)n==0)
     {
       m=0;
       goto next;
    }
while(j<=(unsigned long)n)
     {
         kk[0]=1;
           kkk[0]=1;
     for(i=1;i<=sss-1;i++)
     {
          kk[i]=0;
         kkk[i]=0;
```

```
    }
     while (m<=j)
         {
         t[0]=m%10;
            t[1]=m/10;
            jw=0;

        for(aa=0;aa<=sss-1;aa++)
         {
         kk[aa]=(((k[aa]*t[0])%10)+jw)%10;
         jw=(k[aa]*t[0])/10+(((k[aa]*t[0])%10)+jw)/10;
         }
         jw=0;
        for(aa=0;aa<=sss-1;aa++)
         {
         kkk[aa]=(((k[aa]*t[1])%10)+jw)%10;
         jw=(k[aa]*t[1])/10+(((k[aa]*t[1])%10)+jw)/10;
     }
         k[0]=kkkk[0]=kk[0];
            jw=0;
            jww=0;
          ss[0]=(((s[0]+k[0])%10)+jww)%10;
       jww=(s[0]+k[0])/10+((((s[0]+k[0])%10)+jww)/10);
            s[0]=ss[0];
              for(aa=1;aa<=sss-1;aa++)
         {
        k[aa]=(((kk[aa]+kkk[(aa-1)])%10)+jw)%10;

jw=(kk[aa]+kkk[(aa-1)])/10+(((kk[aa]+kkk[(aa-1)])%10)+jw)/10;
         ss[aa]=(((s[aa]+k[aa])%10)+jww)%10;
        jww=(s[aa]+k[aa])/10+((((s[aa]+k[aa])%10)+jww)/10);
         s[aa]=ss[aa];
     }

next: if(ppp)
{
 cout<<"李煌备课写的代码"<<endl;
```

```
 if(m==0)
 {cout<<setw(2)<<" 0 "<<"的阶乘=";
  goto ne;
 }
cout<<setw(2)<<m<<"的阶乘=";
ne:aa=sss-1;
while (aa>=1)
{
if ((k[aa]==0)&&(k[(aa-1)]!=0))
goto loop;
aa=aa-1;
}
loop: aa=aa-1;
      while(aa>=1)
      {
       cout<<k[aa];
       aa=aa-1;
       }
cout<<k[0]<<endl;
}
if (m==0)
break;
m=m+1;
}
j=j+1;
}
cout<<endl<<endl<<"李煌备课写的代码"<<endl;
if ((unsigned long)n==0)
          {
         cout<<" 0 !=";
           s[0]=1;
           goto nextnext;
           }
  for(j=1;j<=((unsigned long)n-1);j++)
         cout<<j<<"!+";
     cout<<j<<"!"<<endl<<'=';
nextnext: aa=sss-1;
```

```
while (aa>=1)
{
if ((s[aa]==0)&&(s[(aa-1)]!=0))
goto loop1;
aa=aa-1;
}
loop1: aa=aa-1;
      while(aa>=1)
      {cout<<s[aa];
       aa=aa-1;
       }
cout<<s[0]<<endl<<endl;
 if((unsigned long)n==0)
{
     break;
}
xne: n=0.0;
}
lk=getchar();
if(lk=='q')
{
  cout<<endl<<"由于您按了键盘上的Q字母健使您退出了软件系统，给您
带来了不便请您原谅！"<<endl;
}
else
{
     if(lk=='v')
     cout<<" / / 软件版本号：1.0‖时间：二零零九年四月一十四
号‖"<<endl;
     goto xne;
}
}
```

运行程序，输入 17110，可以得到 17110 的阶乘结果：

17110!
=4413619987970073757472229381922324561025129790301521429786317640
74043259831035179832779147501041860040729104324191367945600116902
62639119254611882154227950608615419420073158119389327136111207761
07245567486493756588059370026194398103387085670107056493837372909
68546568197614446513668301791302433926682309930497593786911089819
21095195622446060835408832188998721701056453469711512226781511077
84194828150663399946168079270090669097901199251840702401670678793
03859427277183007433464386518756024813885198921081515586266749115
93878104245320800345018636529113355883896813837260362800503219966
94370457340745995724170386991846103955697236153009279153405917903
21427144878190409393127152223604110721959564549363141872967212322
52171806605311122870546023135131614424198246487095591926065716332
84837258508704234572338628810662936877466976688713300727952955687
66328867834283968568004102017509977014186597590572772050436954566
68066503130978071354244374817097579501499975377749089790028649475
27177102610064633538670917491576470300712536913545225408316047873
07884116021347093092103226242381744599299508071886760172703784331
88615489711284735836349645674579932048631734564730351845874393635
04735346927091798833821514478817356666720207974859417771540067861
60901919122142733842341879876739584123659373065296136260780911103
41269636712156731419442906284784213211965421786231717163683846936
17241011078413487235923474800832099880942918564003782958854840594
96120344071186199813558993989418492592396899347622750355361283236
61255953994681149646706951698021227409483924040683659456792064017
31203598417512704649802229018896236463587461975386750397627972448
84072310087177812519407088528463099271254876741385024253142836281
62414201960833307724963008436540196010190780574961367449693265713
82121110238831167479622037799595259488908493979663994208991043487
97558034176106169898349516879491708835372536634347830075561117553
24281743911002019298576817974156188171306470168874829182074830851
69156557496287791390516821793668606940764969393248472090802009019
70565769734748182952458065920996013701832179072365495744583078026
91315493066923499510458401382551946247635688193989113985487815143
30341861509652656885790194288988169532288911949065860375414700934
41312393595479811690448491185949263207201920333686979915471157913

33470526971496257453907371528383314085375276420563866441696768320
69096805197935706841657930906579428616725356066514139477939794803
82591083037322982783936449261802598748803481040869676809960013069
21282214515031195722345599810208225295564097891484110907571604215
97704623602143114548489920040446215969046033163936395633938604838
94887351074063620834870598147705247543259687725482549960640136335
18214085578214231285470019630925029536135242410130922508433442018
02196016216868526853384895502190957010901578711701061304606179970
27561298767352800166235279842968164970252314140746385864669387685
19244293089816440280011758057408003223120325202067584942131827432
79875335700463635318191799603045324469585753155146281471741968578
13530726080487807621862070549808958942209179859755996911353527617
44805968275273624546556546342947601588245291995023020116609337864
57320662997378379167395318714752809186212278820822525830820905055
62249550310797629875562899385485957104337976518758985620764024865
21742129974902766093485494334213437123924006585074851929781782089
83015208812511599310343798549586173113411737454724053012570972571
60567510476658061752895871368815719530232587385758181637906933820
06677705858279398171672292090696614252970641137732382569441601567
68175610505873818879075568402848849036108420088331864604593109947
68968721495189075674710412581874583242711725262890898495628764157
66411244497790244085487910726745422232559024239320547264501714552
43042445765637704524060608277831580265463644105164052874564226655
14433386682802384607578096176942176170628374709070098461324805761
69754561717933609386433390477104146652118687364365753106928386449
42016985240442548567998692119442324977427394552051489563615422258
03276493380100802655421446391784045246740582630404806036343930103
24779645078162723558828491303609162743616705200302526940955086878
37751920734590646340287475090914781651873628003310931863030263368
60259399906251053303910015618523307901994784992388181069112103924
80561681032923393896208720550989360639899077248581432389681157150
47186967104814154035624802469887646385538261854488611703673837767
04959098740644031106701076012580047618725486677584069717473924163
95305403090412039174208169616087070136535526573282887483870580003
00836448475497764512529752584893649735632740546978385849918143846
41415010556263237716426826099321143935443793359494358286731895199
84423668748068629246075341220855108080540249380951468733382375722

3938226113343919807227534089230509687328626468749111547256309298226767997214112392440916489216609019182166885293046740864009244999
1625871335277629071957539228450617516083598063159791358725782858638781835942426262490365017434957934095544107722742509759420721546
8486016351260053706633050874109214262383224500080249161060897179974623895051001618856706364118662461087223855483947863251172378554
7267762567985827162097045268312896711901773064118822543509013079363840686164704192019322135674962185148188873049648836829964027324
5264114002316434293888176908605544103978864557542118867509877833155850064547207201619715430465611082091015480495612103609758410736
1775718160344559303316773154073591879311612066944128943719963937410137606908188992939771650000821507071739204392268577176407619242
9559039861476509965828854513040593095898613428801555379821734086254050250391576895918589241036798550910943325082000646309822515529
6638504720826485394957595550209636550750481367715339245551241247230534698462534215404705056723633406029959700564016300598426577148
9390999454282200171063326863714083045379427123072935872950122240990790173322299513603411287016151837626850309713911314444571489188
5652057740112256477999272474086539708837113386497701390363195218802503636484126782042676559394534164765844625161118180125157115238558124042580174627244058231722572348375638434563209454099027934307
5095792764983561275024045437982105519966509833548371826872865471542196116417529769437305933802985383785005847261067826264786942488
2068120448411015579447704857221849541423238634026238951507899274630868676245540968705049565679796002376541456057018544938576180287
1571357280007486933614714232053755252683967399449130351288912221041095055070282736609832236696961471021711433582902791531498840735
9626623275285477610935994041451638119028593410204551876542197893923760037950651878776610120634898912818691314309793517700387442659
3563829627985269881679056294151560193697438368287695127531101732025269023926555502774650929768321487420502769696580744890332628088
6959824988838894740813465317075066034917169132872622702878440433804509234338053539805970908171492980513153708799231225214091289862
6912615755132171811281166244083124539772374634422810585787274262873631614812226627704957251762361464855846071291331952415550124488
7637870606925602385668461542306563211227781019001947091716045768530157676630630663187821239762397762540875659613825746664628059804

4989022387536348888499029011600422561864881397455627876494160685841963339235953250150031635169695726679006979037526440811105292618
68978708896490587708736350026901208582261120705334274768371743105
04485326037363869639856091688461829655557448125092457703980348452
09263980373208134471748720178371964806141614279537991239877346023
60282117378807591946655456046868335387285500838171286780377789914
24310626014381539906460290983172032519986549473466024933540916633
16750001943407218107990540296713069821821674791817662472852286873
63386029614129129852966687747232508081635581499928932443576315641
95060842921849880653635875592603022879389530629316404435041156082
17849141253910435055908299301394891378731002479501140309886892183
48542996767917256697560303272774630266949958077542272320448162845
41094101327057807266732272271643277955773055543203945523593726130
73306486214220729180996746594093588978615150014633510425653956796
11105562156830415923338579120993612390011400706749205400570465399
71198788146747143128447797393878575664036211376171828172198695984
72601924810740782734091245190995386229216416296983779958692232387
15947007033466270083846620269372534618541260062920964522252846790
36946484669533552893973652648806710795929504075970531652310380359
06566211420933887937048355019193076494296522465951864291331529159
36377248467123112337104257840520543888618025790364260326761806639
94325619098569729446831362268455027477882389332013773223851520417
03455097213607107717357203069057749548758750031293661473572532018
04443520863706040703188158977086497038476000560098792665208339412
05139884732397962920407683977030027146505453242004767652314959763
58675295566500534228450098700976134497588840521905112406664408938
48047294199419537519625705046699653725850263917729381050978818635
73447306888159257016252895659899968079118835399134992958328120796
29553172391913348921899523312481698228311274006441064054297219573
93290802441128965775139191149096288337123495071519332481809734252
70215395288434574918404954557336182976275083834914651235651633704
01033993253499684804742947281575769820695984845360883641997767353
66301875758289623063786393588849904718286735046650039290460609284
35881979774632694902579107060917459789902272658288528605360806349
80571058895676384701138361047001216723454954909774967019300063116
81662637226004262601492156294138250068543983078155054577731978587
28351171053338239888441992451515248690519684302744011231329383584

57489781265701271016562447902365851920604777555723086258128194125
69407793018584047700185784030095772972132561484146972314715043373
07775919527514086648976207565883255394507036892420085762100223247
78559734196050364020885005689726212742841692418163797071304689456
64237649773178511131976659627725992711839498939428789230063889669
47909894312763489972073938372856148955790379515931848788518100365
46707005907928798892005431674919111419549991108334626449306126128
27192520361577963780720501720668827592284502352355023623888973370
05168284196363355570839565625527176152739556826045753215238549147
92496680106361033644842185033986336104059998167979577231752555380
93503158952377421467164200874589491695671731415033389330162228127
51662442822914915303117914850552273777142456099961983624124161896
61833243468805169067799447100666398357005197708193346107788368539
15073502099040157506522768562243845795409481747445423433606859264
20971135490909257658193723830108118774449944715217146799199289493
04675822306332592498886024347408683004376390718248514468859899039
20195227260453965850485432754391621618954077225499968641662440760
35365840203030964258161773292938912387603144047436165972111686757
03820754549175826832419810263049589995137332878504559675010158335
61442550219355457555016775946380203504585143681718681570447776672
30181007261432792970914183342679626121529907131697253849252537564
35466150699985160196355346673645333720463985806762130729909635482
07189622716359155797660021361615735533192125205415330288290661792
01148644010855107898763923534379965436661039845048227773979350884
15922996545804331674495033413486483654312280210305013683963778652
95243457299237929154200929036716069459127712560140306689462153298
19535804496847196863045623230960621893771763459280982554889930658
28309270475196650232559870088418455567161308025560685734506937583
82492898371247225944691841590854843707979858839444748059142149438
06674053750880716303768603815283191917042467190992942867014024113
23375572431735770767497318146876563308526227729020826683221517137
67312719468892523066759573451958561090028066298439317471008737249
04568685185196240021273780960207121359993483701124172990348121497
91372897032970849312124778999606306604867127546094618299071947734
24634612880110054117211800715504780681775875356881699936157236470
22422704269653164314640195576990242551695181677034879445196320772
29728011945626163376028012731715569432681512525958399927000284504

9458542427221417283996311195636924230623329767615233540954441287
6008507497797881874932007249864983988618107130304973922409301357556473343489882787531333422849304384245767588080583949285916628674784134906437080215601302052197577057224698313369642534115000253432405276672971254290659094597210821006299589652891317256158929402162332421920672681617747157049762443119532803400482673474833709052062306626610288048802012572611669551408835016961919672934885627986601529322174943927261345686858068235865114646932019890110060655920070379458680851613939542651924372469671498966663038193889257038196338755728337750163707712137355062918319165784467709364028232558189170732991195571948283482873608073556225832515738073040402194248284318484861048464398036009451720743822868957759390551406267757598135135547814272334193958746854173094403513493656017283193918182567162819322359041503869730413720303578505689653176228174072110165422431829961417513857652298125581927283389496175412419427029967640976881429852144735960241042474222716207956411407726943060737454840013281297424271149168690047252643594286763594820639184404047573063128263957518912263509529384268057941801780018581933923228765681315684845174136180643048932796626099233095133535899691037915219946457564626336982749188011451245786240761218358300416114288801173414441185756274825261807959375657862137822294974652634322203234983511815856855250317491953396724277879215981165648230904405703859937838829050866262164313053829323277228225661138918953468780930124520576199226636118625601622493939939605133854544817879861320659786597829549382245892137409322973506304031631181116426456628430164751368337326465268057315278834097257654939030823155546059581402639220886517889001987250682792947145805745720262141131535056350816969508948597589182467343019153705204026659551319504206542299165418296486267166549802015838958981254972179723003204870026377118168725625853561452843390030463649640559737293503562232761322745318824050558580781969186868230135396150380597897854268527982131105415404907985506598393904904077347075206422567828409370698562442123218400383910604720376632061544327849054455614204914780512771578742157179953548041805499610281548947067237192704115924276377303683544068104860299842671663852545507957346851882245644835176612618633765041980186876331630865315441336834742824458292742673604291271356603018991427941650913670633533880405894199523141020419062583365834462

38365786207218510369996771875311643383899588772703437763047913225
78161056300691381835821930839594242301865748156560247630353246636
88974128965177959164966224076113383192035647165188975710424197537
04733853006922713129770513651731055609452215269081095210655456345
91142529434425475929473944606008166326945225207527464571590363210
11679154901635499960074216531921365992906934073492514481160501092
07838638671788861806572449077562760038665310466910312650789695890
46694128425958463941938856962625969541255829612576923618904287767
01390698374694622292062462815401421933479520720135880624305710672
59986556851208043652074942574277519914902187320671619689524212049
78179825466871683656845465053765232230687097539761465501636876631
84484660010747680416826758725275567245042130142750137102942042502
98458898127074086340205164825460299998201035495546143618453983782
27384538349125705538543174937728920401166225502367205083591540361
11843636497691801572866410335357392456004737891414839437820952155
60709767662283051496581544867479488490322439499720312749659114814
43579563148596902241769514745330672667433811614975532163197777490
45220002666373933502879795649440375666424788604426163386529012350
59486225653415409587084205911397427045273757387399274960980499980
11179222480386307159370168053210771700114614040609051375390323338
14431255231235109394910817996327948881473284524839537684258754703
77956823667848412856211423066480539745875160731269494239902124591
96264048649512666654964442511621051987107291814785049235883431710
67022798031845601917790814134939066230752648544850296972220126883
31315464607600665884198089002266502999352174879646619702216812223
21176882454404305765227986911548008806234837355429019630877861377
20618797238608617182394501005138545861924074499035608854316975904
84418413248623753398644888830502464560393597695497057450399799494
81403622656069048213318380198285851029062621943978590929576411928
67161705464827277739887228347393379078589082297910147405921606465
68664062257800569018867123834189358070904170582677007858678939296
99157681769550168826293178451914862792503848750106626983320947204
32184907182048898303878070182298685792734088724561756294092353103
62506148334120521059289645846848470631339782065379100809189412901
13663391411009971042213908569751726470557095148811573557270004526
72020984245239452739614571793849077034629090507088672712197597763
03169888545937331932031078449367149224448493085554233073814646260

7860401697326989926396654571625205939493061634435417196630110361078137391473066694702296793590927528361148951025209299917372108677022551550334906061439102022640627893127325289706458980725415210526026125047169293343140715990422053396306059129512822375213857368303185339811450928133031230007382429052243717973057825011728437822204133536104235207832622794456942524874116826615937766803853075573774673108715549086374941199032498775945664758177573730127709872571298324244730351472915629265113895148625709890523695811635169838538994618449007241021144692162629296732493389294018640623863870613816894666344496037552176932287197888757119223180871377863295422190675827325031730357554074830893062311284995091486142603984331732475527385606302377726474386730431626002628142842097791925846755989844153297681327872510458614077954568492722700862184015809037401816938170232141343530400857053048699765783425226328988608251864988044823411091454655732424424616859537297437658193948084803381683715827024125138061799260786033701982920692392601337988919650070624882981380312434352530221809536075639293808607419813733351954451994098161584723078005246598747986467339705730375586436287962160106166375686041014936773318082686505332810385451710024420332528611329729793705016830871959273389328685682591401603693870409225509955713784992271022706613929096119416043189782089395209498550219698262038223496374506687658124286269524014265969541769397537740649984117752746286217745960895530680046989363048941949401840791349333960103101414339279372351547904784031897861367375863362114414881232862873913815667106849166032686413525431197482372615743227772312337663911999740408279031217452066874662862918748530916931396371993878993743117545201271371417330706916752722340852411090677113720089246008256974494494713119679003268675499119627966102859693517209902263639894052925635427671984893291882146698319108654463307459528480910635050626112946298823236781052480652368496604705027821226406224919158478151082309386514044524642752067608459434881858154834973919276501608984940359603326406302487300404970772870780443644625247791971126931270556004193620801415779834740409669189486111574557850839243555827993043313348792033623986247269506955756452729897898753448217200315736697495190246648466654495273213178016915071910914708744314623720284545742456006207092949518815969030868236109434779752638003016262222479862273889442370542563414309410805697210315861

5742342850292182958554138471740476489777626037666930552971268121
2
4882285187562095161537930097054689637964404380898627358208255526
5
5678508503048543779726642558108264366396508696369951515830613373
8
2009056363323037323458717876396379932594444368022209614781116089
5
3568526788610832024384274210088144153645420911024883451582268297
5
1513236405290839937236693945227276751107940852106088540566644641
6
5116407972044378082006156451581654007541494473609525125552839695
7
4139943980736952655112294439950408710987556037987343459785934715
0
7956348195540102037146624517176363999443714928795530584701089052
9
4507265360069582568370462924381445183076204423451873587977232231
3
7096684250141660381761957718011604050550572780805801726086834401
0
6169010517514999814845095458989015619485349499935713370915573262
8
7135405902738816575261332528636523332820802049352124575726867635
0
1400479782069578056432538138254010643818284249954971779932526006
8
4890040940179414223839267875889861599970662198698147405370308862
3
3665403842880585404581581395833379465574008468848663827796411935
4
7257189629467206381003344776116876312990337365622368353628646866
3
5847332747396237189306372444502546192719420904013696567902698328
1
7004458784577450304443623755293630495257318150763231460465398285
1
5022207490497407715348333625386671081301919532108831541372210376
3
4406436435397768338738899914561793299677230176908795602427778723
3
3296120443954777620401192097982135195431627721982073922529671913
1
0175336440540687620327939388912576320877727135683326242626968301
0
7463964719648776301052185375905537740050740279653558881433439100
4
5994524645920918955971203821520740516061747963178336146861391224
4
2170679394826902638541437782440480425218331243447862915309273456
0
6883217116700503321021252762687342153151977919290371584959310089
6
2718468434289075453984612249438334162204232545951815269485409379
7
6193656875075380865506967348009902521717302542681006907909543717
1
7053981328277739490953172191391933774193896003198255061850687288
5
9533916128566869148479147729200015871707758305401919879873148784
4
9699140927884590617714104466749739045574300348559617340309770674
4
6457273321546565031650348754377769420186940216612018787665916276
3
5595047780577411288813074673164538505399379628168853731868167888
5
6895529012812684313268718743037187288109487074991092121182575509
5
0525539293265945658646135174425243716474454091674079122473973419
3
1643920132271898067727898647004086355952883146418195325958645960
1

2271134223186536716369231914026190561802794782456026646989362877 2
2261751884776637423639429028969642125482653469467924140046631761 9
1355347358808069733916138034385906946622390603090352262068210154 4
1053599797576532642895853736438729389863175849798731483209885357 1
6708245667257135571870176250174656168453941657619387231822525723 4
5482706007500993248413918291553750113024000351411614077059082247 8
2359484028047586239738632711863976013544364643824040156048834115 0
9149023857704933246235533590727036974047033038411078900550347620 7
2999315276024991185169782889500045212644763709543827889615016816 0
7199683657449990824926778792194872403207755150504095812837466620 2
2667963189584710027976153639868534519589701195321950219914128446 9
8914856497505550150344384880954124886251432877259094550026171024 1
5594466721011385300699035623140559885866797976639331625403020856 6
9399163475044742470689953772592364234974509036970994985874148091 2
5001586045039031289960406569325060131007869617342266808161836238 5
7967032771133514835939255218816395849363928272414247060038770124 9
7318865174973508834855104344602558688429942222866743560543627892 5
9015566948947774194596794932900363200637435455425304972235055291 9
4183863284468045427140880471960509958339675093656599967235923034 6
1995648555182846297357702818249997504005560958091637427107771088 6
6918966723574460112690324761398122839435926926741493225726057275 4
9820733548762923081788722343149748286025229616692470569278940954 5
3743183287511396161990136686424728149387752897296870596316749177 0
4343339895295935974862993360946509780968123660174170847897697947 6
4414122705212820403158137954940674557700384695123141792600595688 6
3271669931981794470233097690742092842598392243664103773523518303 6
9452259222474708638914636381537959227618576724993469931709909158 9
7579469020887427970999242174599998003613820041471329849960448507 6
7562351062516129284062965560684181417367667934276059794191136718 6
0217974853995964852247790429071509454828546373836116922226906867 7
2016117044239719615996856636887619815398567056881212169850549225 9
8040242662804378809239860272763204302305805226919227219927094955 0
1722792757264685147085922249985174307691549554832972394196168894 2
1966507313472804123291079707847716968523184635449550523112885646 9
1559523953198118742184833820448282962291280058152982652406896936 8
6056502158425144560331623245185290696810918381321081742045089167 2
6132215528699080476898267272625106707917932509462584047202518836 2

529638416092077054891370584889317644473965687906803274428133608 40
5823960505107908092676179374343281230172662170900579267544757608 0
5476218195840699435392123398726558806085833424990817531875720572 5
5148858303446969683078741653099148780368043573853651165252690157 1
9517263365456824644300375791413353062077005778006148863235784688 3
7214053575454852027906256231965879159588415497240013295366028087 3
0268832797990168414501734835565151763286561542175640612786349693 9
6706878304270033344205158416528095917406388436912771595681621164 1
3522304921841655654890578373579390488555674606215127950363708797 5
4923430844752860731309035313651588996920088681487177764436433080 8
2566088084556970566580425798736685451440860051340431579780823915 2
1626620062398843231886300867664285289014711354450158122074740061 1
4319284302791883631440782254840123110199424267298999475761739652 8
3930896310944369970138815842949745122437248619768287567832354649 1
8757179863824151158668298627033799648867307033965956549391341964 5
8888821126060827453043702976020707184454620937095722559700626508 6
9184532203584500701698534883861167069897758300598614518160359529 1
3345503920905228682157162580408988541707339838200560231080039303 5
0354419238843251736066908696756620294743426739733886882163548801 0
4476737870345770278124747668863629879890505828729421862147689710 5
4489358574795196676699623040742718784022979068531205249941573517 9
3035006268044403912881805578511134700050786287771879952831853707 5
5219896229355819709250525945857954712817396247431701158556382967 7
3452532123869391744866746269025848677184845655905913367977251979 4
0120892921636387788860368080577907621349595648679392142503354467 9
2364008887220775797296888886034392248123628319939537098553546624 7
0181841243115411820844396479668407835246974246860642011624356472 6
8079923442091406879777810606908954153149851248261219077592036609 0
9218663111467502459096819456451129605315718947065633998901907391 1
5265997015468072499204452081029297589385446046817380657854660718 6
3451250345540118034025101626424790951211580148282743584618284691 3
5347705974976122443969090802793053826793773730696115997368706945 6
6286719553466085012214890809159452622229058212534089038077628552 7
7690805596193490484316873271168200914321440925344848431243468635 0
9150333275712040735040482492883693158649470911845940002885141563 9
0691451760100378574986703131209768915211903898547431507190335318 7
1357387027584574994063332173266077407977070171736724924838077058 3

18985676177085503954066810915441253623790026166409792756422160052
12803886466545532398516040394486052529461502086777583374782423110
31977055541321397066229830517050930472287739179433370784330529438
88048648259225531580126412537838002067626190242096046621719653702
13478023399957128545758054240021967614275546414855056211627174822
68835821749344131422161938644251209809837647740432011908901499912
41468171435667153903432019757823931786844751565383900105077799612
05826022481474672124222450418095497100213357393062981484763233295
39346689141251709130299247486740784436140781216834076992322020021
97525629601082458754542105249322459314592479145371628513951490443
45115707260002305789458532987691389791110046308128186611352207759
97084989924668846923757866743275042367505482805589054026481609592
24617309839146634447117209368858504669241913553981231738389666595
76550998438741125955860328008629288686058681115396324952616720432
94359724936112064179930802694942702068734445341712127004442966401
92278800593143923211150147328280092092138975843552108185363034496
48292289297760379192784722683475687771399661444473584554732826040
92644845434351123310029160422676383146328980582452509769060853780
23070562991079477130604649003621986128601407991282177330519246280
07591685745554607694250463700842704475247346808061061868124330380
37116002020990495641599280541136253832326753699472957653985285465
17187744522430738792144660275211757245622381249558331338325410707
38966593229200574024460652760801771356979382333551470156104905593
23906895138933265757772275352596001296073974832863170931237203038
96802163892597130480185401876166767017433333574171377399182763469
43664789442566986643904276863505063265841490256495837297808456314
27228285971661620446307589409466214136682320719529356844793832017
71598542291665450774349978533906267146704374541418191852715327697
79752932232374707267182313676603943394653160101649404724078535414
60473070920086008654476158802883792340621353643510321801463907215
24975300690376888324876472767918912069070407764948108744748784210
19964722934006992452054378795302398035527792083481897450333217492
27448810129045717978556249721461120924033837690122683734746815170
31510366119787976285506886315219461353311444547717334180142269685
87035743203840736398237905984901372808865741078368716120765686517
03417979126498696485343482442120180558990274723328487194192720703
93044690510106513532049512769344229324317044042398579898479829749

1976753818644058471495128560454539703984189632454112313617706393 9
1188139989228702407940984084029999293207274583156887094587965282 2
1578288223078693030179465188459952481627286459416982637299472173 9
4846125455924230279171534410947708416934689650969093531716024739 8
3460262663801955877112025677290926048345165330317017814683368833 9
5919718799968433015474862748513451342174089204265212309646382532 8
7364744264798988195574105216153403585041988811216180479803281527 3
0957493363375321592499314727973076079826679334584532476542233071 2
2174040136311343687813376234301787942677276219082804101743951748 8
7442190692239173562790165337252089823690782753895733052432892480 3
6309292733439810273286968701104362319062317381950680215160487399 7
2594991878918894202879457557984459585386653400291532126162599438 0
7775053011903304459497732811349801593769133544639239946325309286 1
1519444783564875744310764151083618389253550239864967344740702124 4
7828747762836306932253356707061846940496857855636786258803897849 0
5639615276950380666373911719151304565220269915351809816964851424 6
2551265547241715721129786360660517647905084063607068774856464801 8
6125153329826683275230445623455349304084041088157427955570288906 3
3290195186961913935785967959958954492879359111025236764141738349 9
3712781137175293525279420016795155523700698148278240172820562801 9
3585574018469375270280408428020559676913756961694435408308228150 1
9891878313524174650636607691034019533229161045805334457315157317 4
7921545787496541869571879267761147574540623871383088861800361804 4
6357342616489130846316496525959862121962982587913449773971506979 0
6067213142396485766431460057689605542713625447263975058501189582 9
8280411152320522471748601534621573180520747186100177971394012062 9
5970516192702209221259254530159497013889865815751281678990332008 0
2587865529442428107244203763561325084553956128724660756422619012 6
0733649624957494910675530701798151727288409305328243670034707554 4
6075031208940242134787051380080659026968258138417346945638909379 0
1938070465813369732031449537262722478770738926031854255855641707 1
7410484041308878867712396291909993107313901091183516483051118280 8
4968247619279183182369465292284894504572697869761377635805598896 5
4612846534580350257023341062652573096172241078675339458417193889 1
4521971408437667136167062056838343491577769478593875802566821933 2
1966155569911846948032479567386590222816902109588433537704080918 6
7630917630550648722172515259498271606317214661964319593566622850 3

15196057707109711203344802432718674258114631764855624001391660280
08962359539705565201606267275087078758481653044104385861373864151
56369549777146683422234824578230140261445622294833523153221018165
18346453560315191040695544374690178467470356625748762658883263630
88431957727165916032698107292598699882994112008101506332406221011
18517111540751358781439633898701387619198957673797893186583331621
47840125875377883983559628342651051675309617109638559752602340099
24932737595194725118693848991715577303530095902319286408560871890
98617069948770664062739990977134125591944740564527690302554542244
79287535427488848991032544608260707167610939868230912295394486443
57234359216719023138771236294926667359644353717919016922184221244
19946119621539903450790709561457768026318449610492667960403895471
60607414999492669094938361479636490942188418238496264307873015229
08559934265983825958745418247924239294469732680498833869639845116
08032401653905178432438562950064094512073563958316074135345460316
17892970619556198517409435805202210618552937033891308600672467093
39638652812499270793367605323840580693406343639082821768788416261
57431124709988167679223948476034637506651657260628305718310133826
76006255592835772512495022745111530298384290565365453453815651621
95281637019824138084485554001633422749881386804680366643304964534
13087667439309395327929846352851771059193684075905504806657607821
63934465560768916901825733745449829193219741187925963802413888621
15903634732039907225568455838507612180947309650417411235929541738
26084469036014785210111333171417869516970301477927305111203012023
72151547870184780183735801447854821470692197200967650373523865699
83831933856463536531938340524111709818775165776626053841702960738
36249281035739318302671966959983028174011516852905575193691856689
32776236913666514323186973893424628410005483875510561933158755942
76851836954007533641107473606940655067633514480422019705084313636
69162551593407991661458213906838185980490759965986202609725089135
78271791582368793445056521388676406511625163147747409221023942233
72353475612746494984945929079078854522210618735656652887972681364
68866408119206009383914804758269084388061793074785958899129023181
83639348059188181307467011517055110155938637656825069470638268680
06018641132764605327698284893147967637279410372558029513972719845
76213628921690902204175098655449756703654794854826232584408011084
84910931516400210413003028736107334537225210621202836822082540277

036944027871186749296180399781133582477279958251252087287107890601651541105483257906224919581558645899442076223237895888232908900889043299314469557303564049795090720361636337574262561569238851529487147752405960717228025852440882677742065640458919854851328500057720161582309955704335397709207819633425329494638235501743361037416977105511682987567664405287179847338488823937208275881945794082233811316713381346234703473722491080796312078530621234566991051539735933823126151685540934576511982586111230021235306729398544229528238217899277137965744492108954644341461503605399355054823140699043896255379483998024875521054764985647181702073687583167612813105970897302083212991928107509619102238290175350211861089039584706194672116808997264099562353021834715901482808348767191249897007223746138709748504623106437271379301937312685786191723325588576736945689411071696944013454822839845197188165155643304254288227993266860432106186863912161491887720556229500360395186834551412428622565949100391880175634013562857727209133409590715560626091140475671300409120893089859558411278542026825847580552280075292389490638787200289714804521174873873868298265556847733358034832758068282672548699130535059659859094530464510211515047102034162079520513881262097671750740829137661355026006220965820689315002516192897449379519416951980742183717811919077815947552956301690144548353576242133439090575812656090420035763840998418622544874666177855969468853677728973311575571967208979353445607284982226676871183994608752649520586689406743618275458368422441261207965770532707495426794342570349795310199539149213002640532169052539899071472555484633568961764042848586523405242547128412336693175710042903030167408166804516814542326515247825186243243372315767266499105411251542456361102272627749585475451430702949069725611251377941744131080549561575761766294991643343677343739995444779516239234716762632470789785617568717439090057717739248099879771842666363081208483454439719842435767581348030230039243459085891589853237616193562163814107488062357818888289792646598319399514571955414750639849218727782122050701327364820235965989156340600694788345381269494180178738502316953278490956887144556732122673936158552371412431638068184918168021797183516339833332131246886443451868919528850232714606320313908208236806195986288027928904269156232511826622724862756935540632145122612536998248652593766718120111116754884166863408785487407586527585589424

26391422193042117872208156700240527254582314163377542484153324587
38981607741748617621454975549977675077093347295181005937698906655
31382171717064096702474217804846575655633023289363551786527913108
76378336783008013157435596326708056766041288044083144514096233744
50611884723996971802673314321218301281550591492958145687362850885
94729890761648971495655095778434157492319880165918288855794987939
02073106376851090749661621718530100922239889890425645702155117850
87141591978935944977402011726968125575851154413645340930449643826
26476843252420050217231259800124409079676689276065940855777089881
95237494384345153769274279435410932557837335111057529011396365148
17060963794706105322321998468427802886457945321524532172448996673
25978216384210412042169806141808804836746793144052594169500604881
21113999284170449467970759366163831932693443139859975205135571424
29821072755254306500845463832280085035309195915704016089730890493
71605474581274684952098332328016216904031824046095364605876219713
90045454900252033092636451950828756798664014242279240661893550805
24979304887116623530411333654709312890855290395553569059082812376
29269603613569965675224549151454445588825059114264339524022869069
77567575361279354232961129310000507182458367499637595277758137108
49927595953740719063092897686670156004080494449975150599703074475
38493593100002679496733287465658146799689097381244690661000379042
59328296386456219688003868430579076219865992620246107920455014179
52893160391901978879297047528370187826257430982345919877561038778
61206831040530751763035676960938748464202595817857369514931671321
21659850402845058809657124574007299241660468700310749638295248527
86924852009769352501782693623703041660935254497169223784543218885
48427665998572423510506068039535401485779408824143332770781350088
95190717608235518250268855583000628738358603846929706250057558871
36002277619068190819015166102872538215026965327867007152651099905
49045827566438650267245011383703912489101413085580867507510739245
78228493081603438357886666321737210987762291012203622620835477877
08703895108146258830038207635881813530489333122623554364127100157
65624842676736944198877000652263432383395891986035912251973565065
07782602004791629844818831971658569202237556866381544685705848204
05929150477322573898791302649572765561694758981790641108566975445
35488914991724772137933453040008487420492349873949312729333948492
91478110297597089331858757300832047077443386250341777816695561791

47160431620760603322413539344078350288420081473639808977829394289
69950784259876507510320727020490600183500620884126651222930878575
34121304259139372723175231508875118891128762024056314442029639319
78283170226780539966131277910830232600878642381926486130931415492
91696912180886115190762690383005974733389500282672906422152445575
11656860703583524661178653332228489497767193643891402490495679566
69885047027576387928400215100379554416534517397778664206237961090
96053732130515756671205984568520342093599180917767198340418195630
43035365970756777766790421220585967204301812257826584505806987342
96562964051184256400769653652062139039812210454418762344184832850
36045354445874506824001598803409324442213827744116543821798311591
52624784738480165457559752794404186663914381132778002102628558962
66495582979519108905149307534401500366457279938505146620173812234
92470007306171822310947012303415869689919363462560694100115271589
04034268556987153726916777009678348646851914826072308633136474169
16389805297735250594418260211571038297681099347445520406012167914
30462453355554028690650698520780390874403767689114468872205566700
90854776901197732635398702641376187489412903010052790898541043562
26255490571119437954017950437708443264209683277704724481677213100
23169578279204645039689828013648872897561052589884715827016956247
01422020528285004784273227411849333416341833136463862003717302442
28154937606619080088534088172762859421301033106275107952593471918
42046697881396064479342723999306179337162872157246309158981067430
69355757437542117341718726722129838056334753103773213169694486714
58508633727149791765158239389918859515274706511719715088989367709
99113700325753125504244590442157927820747044193812641116019224633
77765300904648642595826488726450791848428683077615661540155643892
06817399124987136905741075075541007855488944556906456408349545063
73422172944152622634871931390224687183467533230224109870384680698
89209661234522266609438842620036762742158943326973649401127559439
14372855679017320378004399620876046231728798325750404636160100615
00500980477373473755368357706523266769500556952577884405787850825
38256307231726494205100071874196182541863238497398018436552001269
49432288505529333413996035082751586098047196686792410298306859156
90550973108743292314914356420417173375086751339158237040884828295
64905941963132089397333818706782678072991237185848960942722409530
96546350859452203931781575702295612949871617437538106420734368547

83663700735501095890163785164506981747335761699315657801668170209
20749525778037299581966206969649466683093024537743184300539594413
06379287956068845287107814621432504794841662509663312705884257014
76300413453835634621376750459204477674570089374714235164548871221
95659446679929086723367206363209937380211812112784575284066384144
00334108193655051408565780524557372202334741017686470837575836663
11811493224623995767026268602983940907524331556452960319374901580
87351486252767424978142201420921728180988174984619584152683764009
32821533692414035759446167330537986317930299643198399871616137972
88806688131401923926639547999757424383884961193945019944019067730
77650599868651939571537386255322343452291862494227261678189943668
38822157383780495909153007615795164090756721887265968208889741472
30768670842858660284668694367313218637641723031934581816293089026
41655735060815308021185902855537203377836866013717651555211717750
67798018031394037935212625466456776486606669015445224353737970143
02530806978002965411642634331794576119651241599642949363920494639
24747370207345852151193055243133859544586081054555681323820756355
16557797071205488848463196806759886131884859968869579717847315308
62699593375269525844278138889076283053017414864722160523217436857
38800902876685747423878011978414141915300864432823090780954606329
90624965429626651130627655416187605791784937059175713763403200890
83492890857971403089989120352315018293154865187759771884697260684
63318408593165156556933839969835430675744333407430137620925831138
72812385768382780729485648092798897921293934504401619985443901932
26516097006507720226331224564715968767301020824504221808430554134
67820052851521810661471332009498702587560994124654753786812395487
41428544920840552993932833241038189206668301459793565790110317768
56124163955656149440316339541665621147871919827997213350975629862
17460770945885933880201006250337905976734182281236302575085872702
35245734832505896873672247522958934393509317985831520427644022115
94392907185543941277743594603647023289438175483045237856949633038
62022923754777168851243054831106904482471857694297169243678261116
57645636293106309536411746399980422326066213849879350129595722867
16079884071182326857925752896472563796097071506836427023934683868
87385560581995407229062027646138084981129525080972093508287082850
97381085405160105000978115868766393321041592427444165795312011865
04531386649448401759487633650956662346397318985419206834120657584

2512473469179408400772653809826298037269925500640109815698814712264647279663662264714158964439627045018617443174454812756079284168113730785229383034176165704156685264875410732007898857536690918832981366720387962246003073376522249078034869959144031416286330191057818512936272793339312104661653608515005505398527219409972620758605182928344942210534472869935822674948676042170425295504151394033593016011296260424232212552619413210086600481274170350472490463969941832861264194404238479230970536766869039879153722141960901302085774533008888219785377602291468163179251470916758892695065729658032010500846522701349715543371338738035303792340603343651834059259821616027568683086891645397452902167380153839645340490682657433215733146727534252752668380032789873876519768033374130266037489373423624219850312198944135073288122173308167018953752507231784386481785067674443981947121765607595061574831025860629988252864902491588853720042240144536247807366595373300925489521453683692495493242687704307085814315073199106873442842464840012099311208243736828070077716042936313842070159113027005062072652127425930717090921193960971724901323616922216610932968608939014162455494045960137303130980510850106918628765520253986358650011940865946233088948812619996272933889722451816314854474346637695010261248839885089160631109881981482827751745462223505179809150400519815112610468956851870673185087212447566745395103360328557978449315753824411481939553823238911510974348566126976153890480184049915247069136900911281071603101338195574589178646255942194716067989766332187453915907655774748395684284108541572099591468451100990368674204394205576672833854909799828435728162138434364524046801224158764593328352962445735287762912330747406905339215113503206722599457126172034447498235428698896408525152417749885474075386415089800614193099633499995778370442950501122024529954720796406124259870832073707780212062117903052655298329347535357727240538280539645923243949794423104807857878421751294383154614028854406925812929969345355654459749218870593807685887196121429970190668855666537309231822540987497230601906479375696932684785505452934844712919532022002317905486753329685736753045414655323584952159035255414317194532670340287444952517375803422721428154096298916201501216581994511577505941820238170528145177515753493963802725324228634691214829211592734925224457435742515793979205662777172032451624100323106997230496531303689885308025429011

09737154976665384880156687306450252283447058245375160740345143421
231735292320821183901255522123149312234511069713418377081058782514
98595458785968316778407111265902701459418312215121314126193726048
15783494230556209061707179412421517421463426711097320936891509051
30118740651561647508294975265207881700568559716856774302238992193
33531879713298146049197679551201065889893420745897477173018851133
16056472732626685899285601075870043261509534710058177941963878651
57944756833956486668039131825077663126056660592343917846018497169
74625218349069429324850610342587871002060778921966763372386290483
57044176458205167249854070609678841338641606493921260610091947695
86783129746585031295722762489118439349927274944629070176920842320
30742226368509810029702917377188367173859819516454656343031880770
960268550744480756006154864049202278561524743432906313071854125232
22651938743652791111875648872403071763236953425495520369558413411
22853307460214472192933595894717270272009464975494705744216848900
63628165545119622227614294342278491994841083643506671754462016660
01034389122024122508200300045014390481492166665821251702152349088
77471682274328215629705964330379251962162215666901018398097236792
97344239080889491528960113098453382979551576294177774140289348896
95413942346037685227853808500739501090618229597750806208658611294
84363373827330864260493725174703575784053327358999532537160110249
99105311645244573621308513184832861389817047114587084317394052110
58288131048476143344221732812063279634262114282415845188468974999
62905954192748718988745188288526956981812750850518406046026834059
33273391662361841591941590410749607909906837547192845782870996596
89410773142215478727522930330588461618310328479149815570713098172
63766038492583295542358190863792714986815473749235951778170432663
45273773991027267179237737491608969065896535306091368962047494761
78103424038069140128979023639502997980303673161228076148838396645
11293173684552992046703997381324785297514088017969841683614167692
69759781275485625300147173476434524111087238705707007513983459993
14776128695380634263305226162776602322061276190863192229067620058
28351824036508050067215288238974852996931735095170214783571151275
92265845743273781525037107395618841529092309693504353968911598713
24457319064742391186742081894370545825214871693030537873030293276
56869416191551557423004482250703198590410620973287762158149422432
83018286900363845329343752945893864361897628476334850270229856616

8686627408973129781567742705062651077178001314407852941661630061372801354705367615864135132909095388599647270454884914529110009291
5012989931869264462948507930402599325750079746324275823660555283303648605926515646784074949073453302406514214579939020289697226074
1441620447177912573363508554684570642023271384529465223936693206424855116850532463950614968136779571573423137436176306192794899790
6409707182994356075370841212638667524362015528533169850610442056640837223704778498116180486641878199096277176052748862263012035586
7899664505379646172985173196371617839384292329077249732069127528892038496318409870231522971914376160551772857262360486008700574523
7175942395483436864481455193957606396621091037997043866469539679035764743360515643976868305216812679265128748219104268039392606589
5355520337320790710678498592476504749374309196460448005972672819186500109867508483081388684445622512520326158668014843089457319674
0510048902225944352151128243148111356998671835776260188960482682621439752268023202750179373664324038798905894062780290240549808714
0925821802839595283044234028001649886338603623882871257465872827280029933014375762093218707304298749101487314644485159625397327516
5432938606533577681581614306120664258300313830506586175134005410112827937522246883716695469653668915881181295974407485058249214571
8978694539733702865112286607173053488626183531389966965122204568933356292882625650907903775821773424993466613809163029718900611615
4290233329449003849313649059801031886038810639501596343368076183292449196201780578125027838920346835161389739173078770114405709086
1321217414374329239909174040366514125191815234732456119717035302223942059533821089488589293509724352086750824178151962535454324764
7455102655112341824391844697190713874960997905138081665489011204845292083227164401429277266068386808721431597085335212374510604981
0280250137539970772959568495712864109102989806190403362031049636300817727066244934827642992794734742627169260417220692117651650335
3472014312224328960916399511527041132327261115522993735079675838562553419935968055585754460751663965347696714247353219713414965354
2652357080011744617944124584073574829904891300952269028049932880620997577395812806636854683155846253071391405507653591414109912297
8503799213431706088173968935116099376559371645350762386287063915853363509043604185520423080345376182467507873557260528518659392524
455470432075534681476466132258634440706411843081730995691985243450

16799288187145177885259426786522697342494867170711330083821110033
37487625025079109383058118385545018915687372547432163643887296954
17994304662710993209858332452490291169237368142388950208120096533
25969283539620048511999034438604217123125151075631796592765825832
41533451348632888348131148501260866681235257949037051083438933226
11846190615319233536492583088699661954703175501502171327801264839
24980487547677488071103567082062417607779211023109099969671176159
29753121090056106895640198007716813695636905373634046912421106978
16318702207456874637356922002351567892557916391492634162244219632
73339486963710759894679433755696474652710523899650652122349253028
27221530362479590217067444003885234497837984261923212662459372252
26088358953935910751587232603682719756828797848232859848530433878
71042696483819714827568582737474951533303748294013956203203233245
69101069887033921202730129824411111107943153856374173770320882412
93216900390973599145894522991672024969318703828241055600150107134
54489039321804190449988307374414887766959173903631001111205766738
41504107949391084461774768945711846338431498910964549898644918441
05781819377677295447467038412657905694173736476999095974456644004
02553635842373418116159159055758586086910408038669858411623549187
61597177999580312412302904792348407838666715141579073355053098504
20423238968340060270221848333095073034591587806809993915377657518
43485753805197162515937229859535579965422346891761492421128143986
32140290779075527179158211967180391826760517415929114686441491516
08606238547100882921243682672326074036556014959883812294348876826
78990381438820688846229257127094408792518647611925706309747554845
50229747906315588903677394486974190993798238674010612012853705352
28889935457192851586525611730216891253215819264969569101889608733
93429408528187872512315029333275238217848471176956595582478284206
76430308602019173218239230764613765208771197324018502082426032625
03773825163472549726471841913687807138644468912683183066065740969
22527419567514827539424051644699275719519584889351831571005236205
48714104517350116550278780071866342607664111884361892434452324548
55300065384082070234578014166560951420923212981765580771646138572
00561107047439428722944006576734860467065873373378989702087860795
67829342300874792531173647764396782301166570604809326010206956214
90123938245030966626725474068577839604922017454120017607706177008
11603419090028114025988146607230760394191072966354822134893132280

8754640164668660379890179724279186048314547625580440932296023797 3
5956980362379842170284909870547783043835599460373623121380674650 7
9138720576249201960104501088934451286754106460109632551768538431 5
6155307717462098488563360432509743666937026710460211010350694634 6
8522814016983426874005113944941903004705385622147092835249991440 0
7609583839446126298023729253631004991841187252074438560707394222 1
3213700403569881163573793135524581089708436285378525729121098434 6
1210920402097216919608645797792455912417890405424076206474684613 1
6946466689298873205386702149629477572822566252543688026739949887 5
2741589749501620145809514395753964686640039013492124449873127709 9
3615864147910474225775299152764084806358737642221334607984317568 6
9054334881121305497998698627621070905623209211802496371792278707 9
3272446446425930615894944743906050248976089920743806145334355313 0
7029898557864390175024019232874761040289780955483996932774762515 6
5949330189131250669913722921426257820161372672627639608938851158 7
4648235949308595649358910297434985778570739551334098613218912705 2
3330449618842493774013045754330094978238420717843158439501690478 5
5622406584595728500816082508617641756406384313624081422409697617 4
0613918878044246310663278913535597081616689584685195350508586817 2
7072808170389372689114955192781729870287099270274077156249667144 4
8687376603377884173862547550194662502256937930432766891364344890 6
6093592318776448202266846745310354733556695577932009107559629350 3
2999248844789821348803397514201274696501245717800870389737890379 4
5142919975020916274412238505851366355670411951342058029218189672 6
0759444214294349976256049216881134079019935392812434778466265228 6
3483106769291403272474388754094025358769261193168137920437302459 5
1460636081905557524681577537904279962080011298329805489758716830 70
5422717758261599502656341223896823436803294602022101939483494716 8
7675319804354752894026037316117134052343773222476058255993263284 9
1699425581297969102789607299027177393556872454403325593631702096 6
6122033862012157332313615958344730935036545610589697815995363096 1
4276533427059206558820732307607100879884698845272958244297495349 3
6090836073375900067676269389181495495783619775417757994513621021 6
0736687710845136965977500682206988234559466636076131760416633765 3
9645201147384283784919817631455446149416623132679208394632304834 0
9612034423125162372143610122556615877778238691102293851690525121 3
4484366422998551102049400025515612689531284618283485877179303906 4

5662922560162914559735341893930873500361994030062926739683024186
12393545359351240529789282889022482614739190518493409274966253861
71761575581154037800479667012305351005077555089213015401958401167
66795034765688605972612055592537947395045442976147937758951158998
49909517631264620578367470370263473289055522356836999428066729040
19457596447293025183173788008045744339412370806266509552769036370
10446797272339117498274424148561025727339306984784073065972989144
51722271710787413803171490006468926601022468041563783180557431866
01507119821220206374967002802832568688173941540444725126890976162
95905485163567169337995847007063610087506286179262483320847348865
06196148500348635093373479759843997450798643858417287290978177164
47210834454842819291985673938367693179764274705511447384987569627
47204114151857705341252705036254280711165492877909889793093765841
63669283607134863163234132176648629013504616950526465844031083201
70705712986858499142160114779437612597747337976239355235531691504
61315852687064819847197869531864269211658595141629756520443445986
61202651457456314162431582549251469814008875871512017668009078771
77481471749960015824278540390052921899320028094611955342953047170
69574030847831036486477052238775592246910075264670314874601572394
29873607800471457238886714617497948619514788532398219359887622712
94928678489333443446201442888510167190199194376171637984663236631
83692805539743473991354744988846148071117993156218951059240787562
42457033119779302644445896589118453646655001274578057090105647450
10210199792337400666526660808147521019482650444345724566327544470
83020609304004735442550033991697834192635766660269090566009079997
57411208721922165208086203239732386900904517461058213191665576920
54560764450478132441339441020477818797987486692492685375108447263
90062255997735709512779028750515939660576869554922140014710509793
56731288375785621720621594038559995792515553548687537427646880565
66374330636423292744269516156859057482372874413192776351434572265
87842507296223962589854224179922339588831682308478308218994138251
57695425501371694868558954118069024818826120484825888043284172548
88890660932932825484897767339814073386855508921105725839325578943
87882443776384322434226833757479680024526717199987661118008710676
20248390689562201280238231009414051552392928049821075949129792816
17747157217427186497439601782090989059541023586065674069365436969
58645433777607653575528896042933732948991927402373425327247775384
6

35484063182759241035158557638853822128458386386953765108388249122
09558893355753149253337995168209673771498508515744015102319794903
09261233003894946022934716915858939320668473890172942302884695811
82524837470262958309684587144533129699550328983771155903318516176
97544329546658699441794007033810766095782422073158690467627932127
06038910676123359354629759143388216252779937553465651946643135553
20217490561268287947860841732981298006505332842567928168509279912
32300138024856120784829841106506467934088001189997611769374457248
02639139809846532447300075393905800668006479320070556539787829321
59452747955371086244894258262446213889355125047194883000086005120
47816075179144924915573099071881998419370314647149241423412825175
25550243859179513628571453724679108873008188055141747220997050279
84368833292998651406668131143268608818285686649706813401722962100
56205592156070881358654938635362727745582260408535623355117805904
71819693631750067755926743315403028658552553186677789986828613952
77109753254045562794854273564711842770106018436161316695274888814
72907158720955852421265774835561889260148896551030462426342476503
90559666183222646028716371435141941728799736865619983000243157250
27251178299581083904362884015969216417168909684148170499785079004
01186828958211773575218330632828192439126365939329223634594510245
83911480731722697288229165798591515515735993956775462913783609204
93571962818540394231792152413298780239483068737396871078699868643
45860420847098953316080700836445151189295485499097687280149119830
35321659029894702700672678827763640620567276789361843804580944147
00300690249740374064017198395101824816490463546083549470211859577
72114966725907381120323643310631951706376553934767368490210113914
09986439549117095335674728124960494822469946839317621391970599258
97037608768748566960984750763738218698388146023551817208193819454
299022718052085194255930500197326275047628723323276322270904787620
66961822209415455294893370669164147642771145754208521021135851823
93006035277179848494576382652742935902222697288251153988316709633
98502242156473157886172650866122911861427052442762700511743196564
28536563499786847355592026136054110000645142257241831417081028021
43083188113006359848171537590636829185736875922497571354982113720
01055765659171786235068869270107653950356649096807949538288094710
10577186925196234583389538776985723025803197990538528872576730635
92969471416088592101202134583207072970620029152832678563295891991

79196403793012268014197458539581297713413104096759856810592262292
41528250924544759958340356130553475418669736004699918205914041082
63598416374383006948067977439564692557730116188338719201214817657
77268457053852862705795597451150863562212234076073835855863009873
12751100054995201731241952266662206149603753757893084655088530398
12687857955452502447440240938690739988996419020671654213716515604
83547610091794480782255487891485736332063730614457459895325237599
67308728955338677607408937417773116467314062551159054064238170407
06742375098503070610755148708932369459964502530286449800084093759
94732272384658299889854107656079618099204931441122368773409230929
39168074710693021652658979093325322452494411668872228697440836944
39880822259953172480000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000

第七章　密码学

第一节　加密概念

定义 7.0：什么是加密：

一个加密 S 可以用数学符号描述如下：

$$S=\{P, C, K, E, D\}$$

其中

P——明文空间，表示全体可能出现的明文集合，

C——密文空间，表示全体可能出现的密文集合，

K——密钥空间，密钥是加密算法中的可变参数，

E——加密算法，由一些公式、法则或程序构成，

D——解密算法，它是 E 的逆。

各符号之间有如下关系：

$C = Ek(P)$，表示：用 K 中的加密密钥，用 E 对明文 P 加密后得到密文 C

$P = Dk(C) = Dk(Ek(P))$，表示：用 K 中的解密密钥，用 D 对密文 C 解密后得明文 P

定义 7.1：什么是对称加密：

一个对称加密系统 S 可以用数学符号描述如下：

$$S=\{P, C, K, E, D\}$$

其中

P——明文空间，表示全体可能出现的明文集合，

C——密文空间，表示全体可能出现的密文集合，

K——公钥和私钥相同，

E——加密算法，由一些公式、法则或程序构成，

D——解密算法，它是 E 的逆。

各符号之间有如下关系：

C = Ek(P), 表示：用 K，用 E 对明文 P 加密后得到密文 C

P = Dk(C) = Dk(Ek(P)), 表示：用 K 中的解密密钥，用 D 对密文 C 解密后得明文 P

定义 7.2：什么是非对称加密系统：

一个对称加密系统 S 可以用数学符号描述如下：

$$S=\{P, C, EK, E, DK, D\}$$

其中

P——明文空间，表示全体可能出现的明文集合，

C——密文空间，表示全体可能出现的密文集合，

EK——公开公钥，

DK——保密私钥，

E——加密算法，由一些公式、法则或程序构成，

D——解密算法，它是 E 的逆。

各符号之间有如下关系：

C = Ek(P), 表示：用 EK 公开公钥，用 E 对明文 P 加密后得到密文 C

P = Dk(C) = Dk(Ek(P)), 表示：用 DK 保密私钥，用 D 对密文 C 解密后得明文 P

定义 7.3：不可破译的密码：

一个密码，如果无论密码分析者截获了多少密文和用什么技术方法进行攻击都不能被攻破，则称为是绝对不可破译的。绝对不可破译的密码在理论上是存在的，但是却不可以实际使用的理想密码。

已知结论 0：密码学界在理论上已经证明了任何实际可以使用的密码如果在足够资源的使用下都能够被破解。

定义 7.5：一个实际使用的密码算法的安全性：

如果不能被密码分析者根据可以利用的有效资源在有效时间内所破译，则称为是计算上的不可破译。

定义 7.6：一个实际使用的密码算法的安全性的判断标准：

根据已知结论 0 我们知道，一个实际使用的密码算法是在理论上一定能被破解的，再根据定义 5，我们知道一个密码算法的安全性取决于密码分析者手中可以利用达到破解效果的资源，因此如果一个实际使用的密码算法如果让密码分析者所必须的最小有效破解资源越大约安全。例如加密算法 1 需要至少 100 台 A 计算机就能在有效时间内破解，而加密算法 2 却需要至少 1000 台 A 计算机才能在有效时间内破解，则加密算法 2 的安全性更高。

第二节　对称加密

常识 7.0：对称加密是落后的加密算法体制，但其安全性要高于公钥加密算法但在实际使用上并不安全和方便，并且设计难度很低。

常识 7.1：如果用数论来设计对称加密算法那将可以做到完全无法破解的程度，但密文的体积会是原来明文的数倍，所以很少用来实际加密明文，而一般工程界用布尔逻辑和抽象代数设计对称加密算法，因为这样做会让密文和明文比不会过大，并且加密速度很快，对明文的大小也没有限制，但用布尔逻辑和抽象代数设计难度大，安全性低。

常识 7.2：用数论知识设计对称密码非常简单，而且安全性非常高，但用布尔逻辑和抽象代数设计难度大，而且设计出来对称加密算法安全性不高，一般会在合理的时间范围内被破解。

常识 7.3：对称加密就类似于 私人小轿车的门，当司机离开自己的轿车时，用自己保管的钥匙关上车门，才离开，当回来时，再用自己的保管的钥匙打开车门，换句话说 关门和开门 都是拥有私人轿车钥匙的司机保管的钥匙来完成，而这把钥匙是由司机来秘密保管的，而对称加密算法就是将明文用私钥加密，而解密的时候再用私钥解密，加密密钥和解密密钥是同一把钥匙的一种加密算法。

定理 7.0：下面的这个算法是一个安全的对称加密算法

（1）　随机给两个任意巨大的正整数 n 和 d，$d^2 < n$，并且对 n 和 d 保密，且 n 是多个大素数的乘积得到的；

（2）　加密：每次加密时随机给出任意巨大的正整数 w，且 w 是多个大素数的乘积得到的，并且对于正整数明文 m（例如李煌的身份证号码 420111197702177316 作为明文）满足：$m < d$，通过下面的计算（计算为：$C = nw + md + mn$）变为密文 C，然后丢弃 w；

（3）　解密：$m = \dfrac{C \bmod n}{d}$。

证明：该算法解密是可逆的

因为：$m < d$，$d^2 < n$

所以：$md < d^2 < n$

因为：$C = nw + md + mn$

所以：$md = C \bmod n$

所以：$m = \dfrac{C \bmod n}{d}$

证明该算法是对称的：

因为加密方程：$C = nw + md + mn$，用了保密密钥：n 和 d

因为解密方程：$m = \dfrac{C \bmod n}{d}$，用了保密密钥：n 和 d

所以：加密和解密用的密钥是完全一样的。

所以：该算法是对称加密算法。

证明该算法的安全性：

因为方程：$C = nw + md + mn$ 中对敌人来说有 n, w, m, d 四个未知数，只有一个已知数 C，在这种情况下是无法破解的。

假设：敌人知道 一个明文 m_1 对应的密文 C_1，即敌人知道方程：$C_1 = nw_1 + m_1 d + m_1 n$ 中的 m_1, C_1,但是还有三个未知数 n, w_1, d，这种情况下还是无法破解的。

假设：敌人知道 一个明文 m_1 对应的密文 C_1，并且还知道另外一个明文 m_2 对应的密文 C_2，即敌人知道方程组：

$$\begin{cases} C_1 = nw_1 + m_1 d + m_1 n \\ C_2 = nw_2 + m_2 d + m_2 n \end{cases}$$

该方程组有 2 个方程，4 个未知数，无法求解，即无法破解，推广假设敌人知道 n 组明文和密文对，就有 n 个方程，$n + 2$ 个未知数，还是无法求解，既无法破解，所以该算法可以对抗这种攻击，而其它方式的攻击不存在，所以该算法是安全的。所以定理 7.0 成立。

思考 7.0： 请读者用你所学过的数学知识设计一个对称加密算法，最好是用数论的知识。

第三节　非对称加密

常识 7.4：为什么加密算法要公开，而不能保密

原因：如果一个加密算法不公开的话，就无法做成加密软件和加密机器商业公开出售并直接用在需要大量使用的商业和军事领域，因为加密软件也好，加密机器也好一旦出售公开使用或者在军事战争中由于酷刑折磨下的无可奈何地出卖或者战利品中的偶然截获，这些加密软件或者加密机器就能落入黑客或者机器分析师的手中，然后被黑客或者机器分析师快速精确地分析出对应的加密算法，再交给数学家来破解，这样一来还是等效于被公开了算法。当然如果一个加密算法不公开也没有任何途径或者手段落入破解方的手中，那这个加密算法要想被破解几乎是不可能的，这就是为什么古代的很多密码至今未被破解的原因，因为只有加密的人和加密的人最信赖的朋友才知道明文是怎么被加密的，但是这种不公开的加密只用于极其保密或者最高机密的场合，无法商业使用也无法在战争中大规模使用，而且总让人担心泄密或者带来实际使用上的不方便，因此没有太大的实用价值。因此设计加密算法如果是通过保密加密算法本身来作为加密的安全前提那就不能算的上是设计加密算法，因为这样的加密算法任何一个人都能够设计。

常识 7.5: 通过在一个可以修改的软件中设计一个口令密码想避免让非法用户使用的想法是无法做到的。

原因：因为不管是合法还是非法的用户输入了口令后，软件系统都会根据口令来判断是否正确，不正确跳到退出，正确跳到继续进入，而黑客会利用技术手段找到软件在判断后的那个跳转

语句，将其修改为不管正确还是错误都跳到继续进入的地方或者修改为错就跳到继续进入，正确就退出。这就是为何任何商业软件都能被盗版的原因，因为这种想通过口令密码避免非法用户使用的想法就是无法做到的。因此为了避免这种灾难，可以将软件判断口令是否正确而相应跳转的部分做成不可修改的方式给用户使用，例如将判断口令是否正确而相应跳转的这部分程序代码做到一个只读存储器中。

常识 7.6：什么是公钥加密算法，公钥算法的设计难度在哪？

一个公钥加密算法，加密的部分使用加密公钥，解密的时候使用保密私钥，是一种非对称加密方式，非对称加密算法类似于关门的过程，任何人都可以把房门关上，是公开的，关房门是任何人都可以做到的，而只有那些拥有钥匙的人才能打开房门，而这些钥匙是需要保密保管的，只能放在那些有权利打开房门的人手中。

公钥算法设计的难度：

第一：公钥加密和私钥解密的数学关联是单向哈希函数，就是通过公钥加密是很容易的，而通过公钥推出私钥是困难的从而导致破解很难，就像关门容易，但如果没有钥匙则开门很难。

第二：私钥必须唯一，不能存在其它私钥，就类似于开房门的钥匙必须是一把，如果其余所有别人家的钥匙中有一户人家的钥匙也能开你们家的大门，那你家的大门就不安全了。

第三：加密后的密文必须能够通过私钥解密成明文，这就类似于门关上了，必须能有钥匙打开这门，如果任何钥匙都无法打开这扇门，也失去了门的作用。

常识 7.7：$\gcd(x,y)=1$表示x,y两个整数只有公约数 1，也就是x,y互素。例如：27 和 4 就是互素的，即：$\gcd(27,4)=1$，但是 33 和 55 不是互素的，因为：$\gcd(33,55)=11$。

定理 7.1：下面的这个算法是一个安全的公钥加密算法

该算法基于的数学难题是：已知n,s，$\gcd(n,s)=1$，求x,y满足方程：

$$\begin{cases} nx \equiv 1 \pmod{y} \\ sx \equiv 1 \pmod{y} \end{cases}$$

算法如下（m是明文，满足$0<m<q$）：

（1）选取 2 随机整数：q,s任意大，满足：$\gcd(q,s)=1$，$q<s$；

（2）通过：$p=sq-1$和方程：$qd \equiv 1 \pmod{sp}$，先后依次计算出 p,d；

（3）计算：$n=pq+d$，满足：$\gcd(n,s)=1$，公开n,s,保密p,q，丢弃d，若不满足$\gcd(n,s)=1$，则跳回（1）重新开始；

（4）加密：$C=tn+ws+m$,满足：t,w,v为每次加密时取的随机整数，且t,w,v任意大，满足：$\gcd(t,s)=1$，$\gcd(w,n)=1$，$\gcd(t,w)=1$，$\gcd(t,n)=1$，$\gcd(w,s)=1$，$0<(t+w-v)<m$，加密完成后丢弃t,w,n,s，传送密文C,v；

（5） 解密：$m=\dfrac{((Cq-v) \bmod p)-(((Cq-v) \bmod p) \bmod q)}{q}$。

说明：为了满足 $0<m<q$，又不公开q的数值，可以给出q位数的数值或者比q还小很多的数值或者比q还小很多的数值的位数值，为了（3）中容易满足：$\gcd(n,s)=1$，可将（1）中的s取为多个中型大小的素数（例如500位的素数）的乘积。（4）中为了满足：$\gcd(t,s)=1$，$\gcd(w,n)=1$，$\gcd(t,w)=1$，$\gcd(t,n)=1$，$\gcd(w,s)=1$，可以将 t,w 取为多个中型大小的素数（例如 500 位的素数）的乘积。

证明如下：

（a）首先证明该算法符合公钥加密算法的体制要求。

算法中的步骤（1），（2），（3）产生了公开的公钥：n,s 和保密的私钥：p,q。算法中的步骤（4）用公开的公钥 n,s 对明文 m 加密，产生了不可理解的密文 C,v。算法中的步骤（5）用保密的私钥 p,q 对密文 C,v 解密，并将密文 C,v 还原为明文 m。显然这符合公钥算法的基本体制要求。

（b）其次证明加密和解密是可逆的

因为：$C=tn+ws+m$

所以：$Cq=tnq+wsq+mq$

所以：$Cq-v=tnq+wsq+mq-v$

因为：$n=pq+d$

所以：$Cq-v=tnq+wsq+mq-v=t(pq+d)q+wsq+mq-v$

所以：$Cq-v=tpq^2+t(qd-1+1)+w(sq-1+1)+mq-v$

所以：$Cq-v=tpq^2+t(qd-1)+w(sq-1)+(t+w-v+mq)$

因为：$p = sq - 1$

所以：$\gcd(q, p) = 1$

因为：$\gcd(q, s) = 1$

所以：$\gcd(q, sp) = 1$

所以方程：$qd \equiv 1 (\bmod sp)$ 存在解 d

因为：$0 < (t + w - v) < m$

所以：$0 < (t + w - v + mq) < m(q + 1) < p$

所以：$(Cq - v) \bmod p = (t + w - v + mq)$

因为：$0 < m < q$

所以：$0 < (t + w - v) < q$

所以：$((Cq - v) \bmod p) \bmod q = t + w - v$

所以：$((Cq - v) \bmod p) - (((Cq - v) \bmod p) \bmod q) = mq$

所以：$m = \dfrac{((Cq - v) \bmod p) - (((Cq - v) \bmod p) \bmod q)}{q}$

所以：解密是可逆的。

（c）证明该算法的安全性：证明通过公钥无法得到私钥

因为：q 保密，且 q 与 s 没有任何数学关联

所以：通过 s 完全无法得到 q

因为：$p = sq - 1$ 是一个方程，敌人只知道一个已知数 s，两个未知数 p, q 和这一个方程

所以：通过 s 和该方程，敌人无法得到 p, q

因为：$n = pq + d = (sp - q)q + d = sq + d - q^2$

因为：保密 q，丢弃 d；

所以：虽然 n,s 公开，但方程：$n = sq + d - q^2$ 中有两个未知数，却只有一个方程，所以敌人无法通过 n,s 知道 q 和 d 是多少，也就更不可能知道 p 是多少，所以：通过 n 无法得到 p,q

所以：通过公开的公钥 n,s 无法得到保密的私钥 p,q。

（d）该算法私钥的唯一性

该算法的私钥唯一性这点是由

数学难题：已知 n,s，$\gcd(n,s) = 1$，求 x,y 满足方程：

$$\begin{cases} nx \equiv 1 \pmod y \\ sx \equiv 1 \pmod y \end{cases} \text{和条件：} x < s < y$$

保障的。因为凡是满足这个方程的 x,y 都可以用来解密，x 作用相当于 q，y 的作用相当于 p，但是这个方程的解 x,y 却无法有效获得，因为这是一道数学难题相当于求解方程：

$$\begin{cases} nx - 1 = ay \\ sx - 1 = by \end{cases}$$

即：
$$x = \frac{a-b}{as-nb}, y = \frac{n-s}{as-nb}$$

但 a,b 未知，x,y 是待求量也是未知的，所以这在数学上是没办法求解的，只能用计算机去穷尽搜索。

（e） 是否可以用程序实现：

购买本书的读者，该算法的实现程序源代码可以通过本书作者的QQ：17104394 索要。该算法的演示可执行程序在下面的网址下载：http://download.csdn.net/source/2051618

所以由（a），(b)，(c)，(d),（e）的证明我们可以知道 定理 7.1 成立。

本章结束！

思考 7.1: 请读者用你所学过的数学知识设计一个非对称公钥加密算法，最好是用数论的知识。

总参考文献

[1]　卢开澄．组合数学．北京：清华大学出版社

[2]　洪帆．离散数学．武汉：华中科技大学出版社

[3]　胡迪炳，李元杰，李曼云．大学物理.武汉：华中科技大学出版社

[4]　数学教研室．复变函数．西北电讯工程学院

[5]　冯登国．信息安全导论．武汉：武汉大学出版社

[6]　闵嗣鹤．初等数论．北京：高等教育出版社

[7]　数学手册编写组．数学手册．北京：高等教育出版社

[8]　爱因斯坦.狭义与广义相对论浅说.北京：北京大学出版社