第 38 卷第 4 期
2006 年 12 月
郑州大学学报(理学版)
J. of Zhengzhou Univ. (Nat. Sci. Ed.)
Vol. 38 No. 4
Dec. 2006

一类多投递员中国邮路问题动态规划模型研究

费 蓉， 崔杜武， 王战敏， 梁 琨

(西安理工大学计算机科学与工程学院 西安 710048)

摘要：采用动态规划决策思想，针对 KPCPP 问题，建立了一套算法体系. 该类问题不能直接应用于决策思想，通过弧点转换算法，构建了该问题适用于决策的模型. 在此模型基础上，提出了多阶段决策过程模型转换算法，得到的模型符合多阶段决策过程需求；在动态规划的基础上，提出了一个新的搜索算法 KMDPA，首次实现了该类问题的动态规划模型求解，并对该算法体系的理论性和有效性做出了证明.

关键词：动态规划；KPCPP；KMDPA 算法

中图分类号：O 412 **文章编号**：1671－6841(2006)04－0102－05

0 引言

当邮递员数目 $k \geqslant 2$ 时，同时投递邮件，全程街道均投递，任务完成后返回邮局，如何分配使完成任务时间最短？该问题是在中国邮递员问题[1-2]的基础上发展起来的，此处记为 KPCPP(k postmen Chinese postman problem)[3].

动态规划实质是分治思想和解决冗余[4-5]. 文献[4]已证明一般情形 KPCPP 问题是 NPC[6]的. 本文针对 KPCPP 问题，结合动态规划的决策过程思想，提出了一个新的搜索算法 KMDPA(k postmen decision process algorithm)，实现了该类问题的动态规划思想求解. 针对决策思想不能直接求解该问题，提出了弧点转换算法 CEPA(convert edge to point algorithm)，使其模型能够转换为适用于决策的模型. 对于求解可应用于决策的模型，提出了多阶段决策过程模型转换算法 MDPMCA(multistep decision process model convert algorithm)[7]，使该模型符合多阶段决策过程需求，可用 KMDPA 算法求解此类 KPCPP 问题.

1 邮递员数目 k 与 v_0 相关的 KPCPP 问题

1.1 基本定义

定义 1 设 v_i 为节点，$1 \leqslant i \leqslant n$，设节点集 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$；若 v_i、v_j 之间有弧连接，定义该弧为 a_{ij}，设弧集 $A = \{a_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ i \neq j\}$；定义弧 a_{ij} 长为 w_{ij}，设权值集合 $W = \{w_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n,\ i \neq j\}$，设 $S_w = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} w_{ij}$.

定义 2 设 x_{km} 为第 k 阶段的状态变量，设 X_k 为第 k 阶段的允许状态集合，即 $X_k = \{x_{km} \mid 1 \leqslant m \leqslant n\}$.

定义 3 设 x_{n+1} 为终端变量，X_{n+1} 为终端集合.

定义 4 定义一个动态规划函数模型$(k, x_k, u_k(x_k), d_k, f_k(x_k))$，其中，$k$ 为阶段数，按过程的演化划分；x_k 为状态数，由各段的位置确定；$u_k(x_k)$ 表示为从各个状态出发的走向；指标函数 $d_k(x_k, u_k(x_k))$ 为相邻两状态间的距离；最优值函数 $f_k(x_k)$ 是由 x_k 出发到终点的最短距离；基本方程如下：

收稿日期：2006-05-01
作者简介：费蓉(1980－)，女，博士研究生，主要从事决策分析与支持、最优化理论及虚拟现实研究；E-mail：annyfei@hotmail.com.

$$x_{k+1} = u_k(x_k);\ d_{kn} = (x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{j=k}^{n} d_j(x_j, u_j);$$

$$f_k(x_k) = \min[d_k(x_k, u_k(x_k)) + f_{k+1}(x_{k+1})], k = n, \cdots, 1; f_{n+1}(x_{n+1}) = 0.$$

已知使指标函数 d_{kn} 达到最优值的策略是从 k 开始的后步子过程的最优策略，记作 $p_{kn}^* = \{u_k^*, \cdots, u_n^*\}$，$p_{1n}^*$ 是全过程的最优策略. 从初始状态 $x_1^*(=x_1^*)$ 出发，过程按照最优策略 p_{1n}^* 和状态转移方程演变经历所得的状态序列 $\{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$ 称最优轨线. 综上，对该问题作相关定义：

定义 5　对于邮递员数目 k 与 v_0 相关的 KPCPP 问题，使指标函数 d_{kn} 达到相对最优值的策略是全过程的相对最优策略，过程按照最优策略 p_{kn}^* 和状态转移方程演变经历所得的状态序列称为相对最优轨线.

定义 6　对于邮递员数目 k 与 v_0 相关的 KPCPP 问题，定义 M 为其 d_{kn} 阈值，规定对任何 $W(G)$，总有 $W(G) \geqslant kM$，使最大指标函数 d_{kn} 对应的 $|d_{kn} - M|$ 达到最小的轨线组，称为全过程的相对最优轨线组.

1.2　问题描述

根据上述定义，对邮递员数目 k 与 v_0 相关的 KPCPP 问题作如下描述：

连通无向网络 $G = \langle V, A; W\rangle$，对每一弧 a_{ij}，有一权 $w_{ij} \geqslant 0$. 从 G 中顶点 v_0 出发，K 与顶点相接的弧函数数目相一致，同时沿网络中的弧行走 k 条路线，经过每条弧至少一次，结束回到出发点，这样 k 条路线称为投递路线，耗时最少的投递路线，称为最优投递路线.

2　算法及定理

标准动态规划具有明显的阶段划分和状态转移方程，适用于理论上的分析. 在实际应用中，许多问题的阶段划分并不明显. 对于 KPCPP 问题，可采用如下算法，进行标准动态规划模型的近似转换.

2.1　算法 1(CEPA 算法)

Step 0　定义弧 a_{ij} 为函数 $a_k(v_i, v_j) = w_{ij}$，$1 \leqslant k \leqslant m$，$m$ 为 G 中弧数目；

Step 1　从 $k = 1$ 开始，逐一搜索弧函数，直到所有具有公共端点的弧函数均被连接，$G \rightarrow G'$ 转换完毕，否则，执行 Step 2；

Step 2　取 a_k 作为 G' 的一个顶点；找与其有公共端点的弧函数 $a_s(v_i, v_l) = w_{il}$，连接两点，记作弧 v_{ks}，权值 $e_{ks} = 0$.

重新定义网络 $G' = \langle A, V; E\rangle$，其中，顶点集 $A = \{a_k(v_i, v_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n, i \neq j, 1 \leqslant k \leqslant m\}$，弧集 $V = \{v_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant m, i \neq j\}$，权值集 $E = \{e_{ls} \mid 1 \leqslant l \leqslant m, 1 \leqslant s \leqslant m, l \neq s\}$.

下面给出一个经过算法 1 处理的实例，见图 1. 图 1 经过算法 1 转化为图 2.

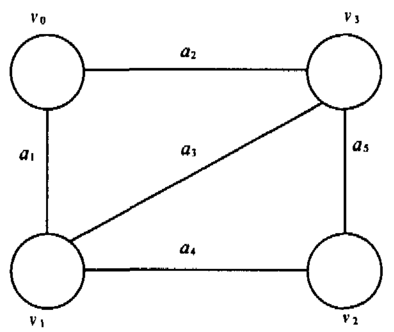

图 1　原始路径图

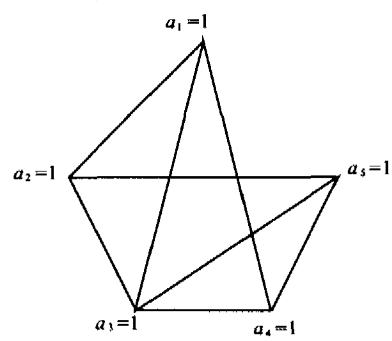

图 2　经算法 1 处理的结果图

性质 1　算法执行完毕后，必不存在弧 v_{ij}，满足 G' 中的弧函数 a_i、a_j 对应在网络 G 中的两弧不相连，$1 \leqslant i < m$，$1 \leqslant j < m$，$i \neq j$.

证明　已知图 G 中两弧 a_i 与 a_j 不相连，设存在弧 v_{ij}，$1 \leqslant i < m$，$1 \leqslant j < m$，$i \neq j$，满足 a_i 与 a_j 与两弧函数对应在网络 G' 中的两节点间有弧连接. 算法执行完毕后，根据算法 1 的 Step 2，总有 a_i 与 a_j 两个弧函

数有公共端点,即对应在G中的两弧相连,与已知相矛盾.所以,算法执行完毕,对于已调整好的网络G'中任意a_i,$1 \leqslant i < m$,当a_i与a_j对应在网络G中的弧无公共端点时,必不存在弧v_{ij},$1 \leqslant j < m, i \neq j$,连于$G'$的节点$a_i$与$a_j$之间.证毕.

2.2 算法2(MDPMCA算法)

算法1完成了G中弧和点的转化,把对弧的遍历问题,转换为对点的搜索,对网络G',这一算法具有普遍意义.但在求解KPCPP问题上,网络G'不适于动态规划分段决策思想.我们提出多阶段决策过程模型转换算法MDPMCA,使该模型符合多阶段决策过程需求,能够进行动态求解.其中涉及到的附属状态变量,是指与原状态变量属性保持一致,因此,遍历附属状态与遍历原状态具有一致性.

MDPMCA算法描述如下:

Step 0 设定终端集合X_{n+1}初始为空;

Step 1 在网络G'中,找以出发点v_0为端点的弧函数,加入终端集合X_{n+1};

Step 2 执行第1步,直到A中无以v_0为端点的弧函数;

Step 3 取X_{n+1}中一个状态变量a_k做新建模型N_k的初始状态,同时,取X_{n+1}中其余任意状态变量a_j,作为终结状态;若X_{n+1}中所有其余状态均已作过终态,建立a_k的附属状态做终态;

Step 4 对状态a_k,搜索在G'中与其有弧连接的状态变量,加入第2阶段的允许状态集,同时,搜索在G'中与终态有弧连接的状态变量,加入终态前一阶段的允许状态集;

Step 5 建立所有状态变量的附属状态变量,模型N_k中其余每一阶段的允许状态集合,均为网络G'所有节点集合,对应在N中为属性不一致的所有状态集合;此种允许状态集合共分为$2(m-2)$个;

Step 6 依照网络G'连接路径分阶段连接模型中所有路径,对于附属状态,属性一致的状态变量之间加弧连接;多阶段决策过程模型N_k建立完毕;

Step 7 重复执行3~6步,直到终端集合X_{n+1}内所有状态变量均已做过第一阶段初始状态,所有模型建立完毕,该算法终止.

至此,我们建立起所有用于MDPMCA算法求解该问题的多阶段决策过程模型N_k.针对多阶段决策过程模型N_k,我们对邮递员数目k与v_0相关的KPCPP问题描述如下:

多阶段决策过程模型$N_k = \langle A, V; E \rangle$,令$z = 2m(m-1) + 2$($m$对应为网络$G'$中节点数),其中,$A = \{a_p(v_i, v_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n, i \neq j, 1 \leqslant p \leqslant z\}$,$V = \{v_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant z, 1 \leqslant j \leqslant z, i \neq j\}$,$E = \{e_{ls} \mid 1 \leqslant l \leqslant z, 1 \leqslant s \leqslant z, l \neq s\}$;求解一组包含$k$条轨线的相对最优轨线组,其中,$k$值与以$v_0$为顶点的状态变量数目具有一致性,使从终端集合$X_{n+1}$中的状态变量出发遍历所有状态变量再回终端集合$X_{n+1}$,总耗时最少.

算法2执行结束后,对于任意多阶段决策过程模型X_k,根据算法第2步,存在4个独立的允许状态集,根据算法第4步,允许状态集合共分为$2(m-2)$个,满足每个允许状态集合内部不存在通路,共有$2m$个独立允许状态集.因此,根据多段决策分段原则,一定可以分成阶段数$k = 2m-1$的多阶段决策过程模型.

性质2 对建好的$\forall N_k$,总可分为$2m-1$个阶段.

2.3 算法3(KMDPA算法)

引理1 任何$W(G)$,总有s_w/k为其最高阈值.

证明 反证法.设存在一数$m > s_w/k$,满足最高限定测试条件,根据定义6,总有$W(G) \geqslant km$.存在一种情况,当$W(G) = s_w$时,即所有弧无重复,K条路径平均分配,此时,存在正数$L = s_w/k$使得$W(G) = kL$,满足定义6,即L亦可做阈值,已知$L > m$,故假设不成立,证毕.

此处,取$M = s_w/k$.

定理1 对图G,其相对最优轨线组的充分必要条件是,该轨线组对应的最大指标函数d_{kn}无限趋近于s_w/k,即$|\max(d_{kn}) - s_w/k|$最小.

证明 必要性.对于原图G,如果一组轨线为该图对应的相对最优轨线组,则有$|\max(d_{kn}) - s_w/k|$最小.否则,可以找到其他轨线组对应的最大d'_{kn}无限趋近于s_w/k,这与定义6相矛盾.

充分性.如果有$|\max(d_{kn}) - s_w/k|$最小,即该组轨线对应的最大d_{kn}无限趋近于s_w/k,据此,我们得出,

该轨线的 $W(G) \leqslant kd_{km}$，即该 $W(G)$ 无限趋近于 s_w. 假设该图存在另一相对最优轨线组，其 $|\max(d'_{km}) - s_w/k|$ 并非最小，则该轨线的 $W(G)'$ 较之 $W(G)$，存在两种情况：

1) 当 $d'_{km} > d_{km}$ 时，对 d'_{km} 而言，存在耗时更少的 d_{km}，该 d'_{km} 对应的轨线组并非耗时最少，矛盾.

2) 当 $d'_{km} < d_{km}$ 时，对 d'_{km} 而言，并非无限趋近于 s_w/k，则有当 $d'_{km} > s_w/k$ 时，因 $d'_{km} < d_{km}$，可得出 d'_{km} 比 d_{km} 更趋近于 s_w/k，与已知矛盾；当 $d'_{km} < s_w/k$ 时，根据引理 1，该情况不存在.

综上，可知充分性得证. 证毕.

推论（k 值与以 v_0 为顶点的弧数目保持一致的 KPCPP 问题优化条件）　对于 N_k 组中的每个节点 $a_p(v_i, v_j)$，设 $\mathrm{Groop}_k((a_1,\cdots),\cdots,(a_k,\cdots))$ 为从原图 G 中的 v_0 出发回到 v_0 的轨线组，某一轨线组时间消耗最少的充要条件是对所有包含轨线，其 $|\max(d_{km}) - s_w/k|$ 相对其他轨线组最小.

根据定理 1 及其推论，结合动态规划中的决策思想，以下提出一个搜索算法 KMDPA 求解邮递员数目 k 与 v_0 相关的 KPCPP 问题，提出该算法所具备的一些性质，并证明其正确性.

KMDPA 算法描述如下：

Step 0　定义集合 X_l 为空，取 X_{n+1} 中非 a_k 的其他状态变量及其连接的变量，放入 X_l；

Step 1　取以 a_k 出发的多阶段决策模型 N_k 进行正向搜索，取 $i = 1$；

Step 2　从第 i 阶段始端 a_k 出发，

1) 若第 $i+1$ 允许状态集中某状态变量遍历次数小于 2 且非 a_k 附属状态变量，满足 $f_k(x_k) = \min[d_k(x_k, u_k(x_k)) + f_{k+1}(x_{k+1})]$，选其为下一策略走向；

2) 若所有状态遍历次数等于 2，选取 a_k 附属状态变量的状态为下一策略走向；

Step 3　若该状态变量与前一状态变量 a_l 公共端点为 a_k 的终止端点，则 $e_{kl} = a_k$，记录 a_k、a_l 各遍历 1 次，否则，$e_{kl} = 0$，记录 a_l 遍历 1 次，$d_i = e_{kl} + a_k$；

Step 4　i ++；当 $i \leqslant 2(m+1)$ 时，执行 2、3 步，否则，转入 5 步；

Step 5　取 d_{km} 最小值的决策，找出该轨线；

Step 6　比较 d_{km} 与 s_w/k，$d_{km} = s_w/k$ 时，停止，否则，若前一循环过程的 $d_{km} = 0$，转 6 步，否则，比较该 d_{km} 与前一循环过程的 d_{km}：

1) 两值均 $> s_w/k$ 或两值均 $< s_w/k$ 时，X_l 中状态变量存在未标记变量，若该值与 s_w/k 之差绝对值 $\geqslant$ 前一 d_{km} 与 s_w/k 之差绝对值，将拆去的状态变量放回模型并连接各通路，转 7 步；若该值与 s_w/k 之差绝对值 $\leqslant$ 前一 d_{km} 与 s_w/k 之差绝对值，保留该 d_{km} 及其对应轨线，转 7 步；否则，X_l 中状态变量均已标记，保留与 s_w/k 之差绝对值较小的 d_{km} 及其轨线，转 8 步；

2) 一值 $s_w > /k$ 同时另一值 $< s_w/k$ 时，若 X_l 中状态变量均已标记，保留与 s_w/k 之差绝对值较小的 d_{km} 及其轨线，转 8 步；否则，X_l 中状态变量存在未标记变量，转 7 步；

Step 7　对 N_k，拆去 X_l 中一个未标记的状态变量及其连接通路，标记该状态变量已拆过，重组 N'_k，对其执行 1 ～ 6 步；

Step 8　判断本组模型是否搜索完毕，若未结束，搜索保留 d_{km} 的对应轨线，对其未包含的状态变量，标记为已拆过，其余状态变量还原为未标记，遍历次数清零，执行 1 ～ 7 步；否则，转 9 步；

Step 9　判断所有组序是否搜索完毕，若未结束，对 N_k 调换顺序，重复执行 1 ～ 8 步，否则，转 10 步；

Step 10　比较各组结果，每组结果中的最长 d_{km} 进行比较，取其 min，选定该组策略对应轨线为相对最优轨线.

至此，我们最终记录的 d_{km} 组及其对应轨线即为所求，算法完备.

定理 2　算法结束后，对于最优轨线组，保证其节点完备性，同时满足 k 值与以 v_0 为顶点的弧数目保持一致的 KPCPP 问题优化条件.

证明　算法结束后，如果存在节点未被访问，则其一定在某模型重组过程中被拆除，未经遍历. 根据算法 Step 8，搜索保留 d_{km} 的对应轨线，对其未包含的状态变量，标记为已拆过，其余状态变量还原为未标记，可知每个状态变量，若未遍历，在以下模型重建过程中，必不能拆除，根据算法 2、3 步，在其后的遍历过程必被

遍历到,故当算法结束,必不存在节点未被访问.

算法结束后,对求得的相对最优轨线组,若存在 $|\max(d_{km})-s_w/k|$ 并非相对最小,根据算法 6 步可知,因还存在判断条件为真,算法不能结束,这与算法矛盾.故算法结束后,满足 k 值与以 v_0 为顶点的弧数目保持一致的 KPCPP 问题优化条件.证毕.

2.4 算法的有效性验证

应用上述算法体系,得到了图 1 的相对最优路径组:$k=2, v_0-v_1-v_2-v_3-v_0, v_0-v_1-v_3-v_0$.

3 结束语

本文通过算法体系,建立起邮递员数目 k 与 v_0 相关的 KPCPP 问题多阶段决策过程模型 N_k,首次在动态规划基础上提出了 KMDPA 算法,有效地解决了模型组的相对最优轨线问题,可应用于计算机网络通信、交通运输等众多领域.该算法保证了模型转换过程中路径的完整性,但同时也存在着维数过大时不能提高速度的问题[8],在以后的研究中,将着重这一方面的分析和研究.

参考文献:

[1] RICHARD J. Discrete mathematics[M]. 6th ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005.

[2] KOH K M, THE H H. On directed postman problem[J]. Nanyang University Journal, 1974/1975, (Ⅷ/Ⅸ): 14-25.

[3] 王权禾. 几类多投递员中国邮路问题[J]. 中国科技大学学报, 1995, 4: 454-460.

[4] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. The Macmillan Press Ltd, 1976.

[5] BELLMAN R E, DREYFUS S E. Applied dynamic programming[M]. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

[6] BOR-REN L, YUNG-CHUAN L, TSUNG Y. Implementation of a three-phase high-power-factor rectifier with NPC topology[J]. Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2004, 40(1): 180-189.

[7] 王士同. 多阶段模糊决策问题的模糊启发式搜索算法 FDA[J]. 计算机研究与发展, 1998, 35(7): 652-656.

[8] SARTAJ S. Data structures, algorithms, and applications in C++[M]. Beijing: China Machine Press, 1999.

Motion Planning Algorithms for Certain Many Postmen Chinese Postmen Problems

FEI Rong, CUI Du-wu, WANG Zhan-min, LIANG Kun

(*School of Computer Science and Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an* 710048, *China*)

Abstract: A motion planning algorithm KMDPA(k postmen decision process algorithm) is presented in order to solve a kind of many postmen Chinese problems in which k is equal to the number of the edges of start vertex. The CEPA(convert edge to point algorithm) that makes the model of this many postmen Chinese postmen problem apply to decision-making is given, and then, MDPMCA(multistep decision process model convert algorithm) is given to make this model meet the demand of the multistep decision process. KMDPA can be used to solve the problem. In the end, the validity and theory of this algorithm are proved.

Key words: motion plan; KPCPP; KMDPA