1 引言

凸多面体 P 是指 $\mathbb{R}^n$ 中非空有限个点集的凸包，或者等价的是由 $\mathbb{R}^n$ 中有限个半空间的有界交，即

$$P = conv\{p_1, p_2, \cdots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x\rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

其中 l_i 为 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的线性函数，$a_i \in \mathbb{R}$.

凸多面体的维数就是指凸包或者有界交的维数。若无特殊说明，本文中的所考虑的 n 维多面体均指 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维凸多面体，记为 P^n，P 的边界记为 K. 另外我们把 P 的内部记为 P°. 凸子集 $F \subset P$ 称为 P 的面，若 F 是多面体 P 与某一个半空间 $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x\rangle \geq -a\}$ 的交，且 $P^\circ \cap \partial V = \varnothing$. 子集 $\varnothing$ 和 P 本身都为 P 的面，称为平凡面；其他的面称为真面. P 的 0 维面称为 P 的顶点，P 的 1 维面称为 P 的边，P 的 $n-1$ 维面称为 P 的 *facet*. 记 f_i 为 P 的 i 维面的个数，称 $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ 为 P 的 $f-vector$. 取 $f_{-1} = 1$，则 P 的 $h-vector$ $(h_0, h_1, \cdots, h_n)$ 由下面等式定义

$$h_0t^n + \cdots + h_{n-1}t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知 $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \cdots, n$，为方便我们统一将 P 的 facets 的个数记为 $f_{n-1} = m$，即 P^n 的 facets 集为 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$; 把 $h_1 = h_{n-1}$ 记为 κ，把 $h_2 = h_{n-2}$ 记为 ω.

称多面体 P^n 是单的，若 P^n 的每个顶点恰好是 P 中 n 个 facets 的交，等价地，每个顶点处恰好有 n 条边. 单多面体中任意余维数为 k 的面 F 总可以 (唯一) 表示为 $F = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$，其中 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 为包含 F 的 facets.

取 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 为二元乘法群. 设 P^n 为 n 维单凸多面体，$\mathcal{F}$ 为 P^n 的 facets 集，对每一个 facet $F_i \subset \mathcal{F}$，定义一个染色 $\lambda(F_i) \in \mathbb{Z}_2^n$，使得对 P^n 的每一个顶点 $p = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$，满足 $span\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \cdots, \lambda(F_n)\} \cong \mathbb{Z}_2^n$(对任意多面体，这样的染色不一定存在). 对任意点 $x \in P$，记 $F(x)$ 为 P^n 中包含 x 为相对内点的唯一的面，例如 x 为 P^n 内部的点时，则 $F(x) = P^n$; x 为 P^n 的顶点时，则 $F(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$，其中 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 为点 x 附近的 n 个 facets. 不妨设 $F(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$，记 $G_{F(x)} = span\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \cdots, \lambda(F_k)\} = span\{\lambda(F_i) : x \in F_i\}$.

则构造 *small cover* 为

$$M_P^n = (P^n \times \mathbb{Z}_2^n)/\sim$$

$(x,g) \sim (y,h)$ 当且仅当 $x=y, g^{-1}h \in G_{F(x)}$

设 $\pi : M_P \longrightarrow P$ 为一个自然的投射. 事实上，将 $P^n \cong \mathcal{R}/\mathcal{Z}_2^n$ 看为 orbifold，则 small cover 是一个 right-angle Coxeter orbifold，局部同构 orbifold $\mathcal{R}/\mathcal{Z}_2^n$，映射 $\pi : M_P \longrightarrow P$ 是 P 上的一个正则的 orbifold covering，$\mathcal{Z}_2^n$ 是它的 covering transformation group.

命题 1.1 *small cover 为连通闭流形.*

证明： *convex polytope, coxeter orbifolds and torus action 性质 1.7*

$\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 称为 small cover M_P 的示性函数.

定义 1 *facets-pair structure of X.*

若连通拓扑空间 X 可由若干个单凸多面体 $\{P_l^n : l = 1, 2, \cdots, N\}$ 粘合而成，我们记 P_l 的第 i 个 *facet* F_i 为 $F_{i,l}$，并且满足下面两个条件：

1、任意 *facet* F_{i,l_1} 唯一配对 F_{j,l_2} 且存在一个同痕 $\tau_{i,l_1} : F_{i,l_1} \longrightarrow F_{j,l_2}$ 与 $\tau_{j,l_1} : F_{j,l_2} \longrightarrow F_{i,l_1}$ 使得 $\tau_{i,l_1} = \tau_{j,l_2}^{-1}$，我们称 $\hat{F} = \{F_{i,l_1}, F_{j,l_2}\}$ 为一个 *facet* 对，称 F_{j,l_2} 为 F_{i,l_1} 的对 *facet*

2、对任意余二维面 $f = F_{i_1,l_1} \cap F_{i_2,l_1}$，如果 $\tau_{i_1,l_1}(f) = F_{j_1,l_2} \cap F_{j_3,l_2}$，$\tau_{i_2,l_1}(f) = F_{j_2,l_4} \cap F_{j_4,l_4}$，则 $\tau_{j_3,l_2}\tau_{i_1,l_1}(f) = \tau_{j_4,l_4}\tau_{i_2,l_1}(f) = F_{i_3,l_3} \cap F_{i_4,l_3}$. 这里不排除 $F_{j_2,l_4} = F_{j_3,l_2}$ 或者 $F_{i_2,l_1} = F_{i_3,l_3}$.

则我们称 $\mathcal{S} = \{\hat{F_{i,l}}, \tau_{i,l}\}$ 为 $\{P_l^n\}$ 上的一个 *facets-pairing structure*，$\tau_{i,l_1} : F_{i,l_1} \longrightarrow F_{j,l_2}$ 为 $\mathcal{S}$ 的 *structure map*. 记一步，若 X 为闭的，我们称 $\mathcal{S}$ 是 M_P 的一个完全的 *facets-pairing structure*

事实上，$\mathcal{F}$ 上的示性函数 $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 决定了 M_P 上的一个配对结构. 多面体 (P^n, g) 的 facets F_i 与多面体 (P^n, h) 的 facets F_j 相粘，当且仅当 $F_i = F_j, \lambda(F_i)^{-1}\lambda(F_j) = g^{-1}h$. 反之，若知道 $\{P_l^n : l = 1, 2, \cdots, N\}$ 上的一个完全配对结构，我们也可以构造 M_P.

2 example

例 1 当 $P^2 = \triangle^2$ 时，$\mathcal{F}$ 上本质上只有一种染色，得到的 *small cover* 是 $\mathcal{R}P^2$

例 2 当 $P^2 = I^2$ 时，$\mathcal{F}$ 上有下面两种不同的染色，分别得到 T^2 和 *Klein bottle.*

例 3 *(P^2 是一个 m 多边形时)*

M_P 是由 4 个 m-gon 沿边粘成的曲面，所以 M_P 的欧拉数为 $\chi(M_P) = 4 - m$. 当 m 为奇数时，M_P 为 $m-2$ 个 $\mathcal{R}P^2$ 的连通和；当 m 为偶数时，M_P 为 $m-2$ 个 $\mathcal{R}P^2$ 的连通和或着为 $\frac{m-2}{2}$ 个 T^2 的连通和. 所以 *small cover* 决定了除 S^2 外的所有二维闭曲面.