The Fundamental Group of Small Cover

2017 年 7 月 31 日

1 引言

1.1 small cover

凸多面体 P 是指 $\mathbb{R}^n$ 中非空有限个点集的凸包，或者等价的是由 $\mathbb{R}^n$ 中有限个半空间的有界交，即

$$P = conv\{p_1, p_2, \cdots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x\rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

其中 l_i 为 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的线性函数，$a_i \in \mathbb{R}$.

凸多面体的维数就是指凸包或者有界交的维数。若无特殊说明，本文中的所考虑的 n 维多面体均指 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维凸多面体，记为 P^n，P 的边界记为 K. 另外我们把 P 的内部记为 P°. 凸子集 $F \subset P$ 称为 P 的面，若 F 是多面体 P 与某一个半空间 $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x\rangle \geq -a\}$ 的交，且 $P^\circ \cap \partial V = \varnothing$. 子集 $\varnothing$ 和 P 本身都为 P 的面，称为平凡面；其他的面称为真面. P 的 0 维面称为 P 的顶点，P 的 1 维面称为 P 的边，P 的 $n-1$ 维面称为 P 的 *facet*. 记 f_i 为 P 的 i 维面的个数，称 $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ 为 P 的 $f-vector$. 取 $f_{-1} = 1$，则 P 的 $h-vector$ $(h_0, h_1, \cdots, h_n)$ 由下面等式定义

$$h_0t^n + \cdots + h_{n-1}t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知 $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \cdots, n$，为方便我们统一将 P 的 facets 的个数记为 $f_{n-1} = m$，即 P^n 的 facets 集为 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$; 把 $h_1 = h_{n-1}$ 记为 κ，把 $h_2 = h_{n-2}$ 记为 ω.

称多面体 P^n 是单的，若 P^n 的每个顶点恰好是 P 中 n 个 facets 的交，等价地，每个顶点处恰好有 n 条边. 单多面体中任意余维数为 k 的面 F 总

可以 (唯一) 表示为 $F = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$，其中 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 为包含 F 的 facets.

取 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 为二元乘法群或者模空间，$\mathbb{Z}_2^n$ 表示它们的乘积，e_i 表示第 i 个标准向量. 设 P^n 为 n 维单凸多面体，$\mathcal{F}$ 为 P^n 的 facets 集，对每一个 facet $F_i \subset \mathcal{F}$，定义一个染色 $\lambda(F_i) \in \mathbb{Z}_2^n$，使得对 P^n 的每一个顶点 $p = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$，满足 $span\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \cdots, \lambda(F_n)\} \cong \mathbb{Z}_2^n$(对任意多面体，这样的染色不一定存在). 对任意点 $x \in P$，记 $F(x)$ 为 P^n 中包含 x 为相对内点的唯一的面，例如 x 为 P^n 内部的点时，则 $F(x) = P^n$; x 为 P^n 的顶点时，则 $F(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$，其中 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 为点 x 附近的 n 个 facets. 不妨设 $F(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$，记 $G_{F(x)} = span\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \cdots, \lambda(F_k)\} = span\{\lambda(F_i) : x \in F_i\}$.

则构造 *small cover* 为

$$M_P^n = (P^n \times \mathbb{Z}_2^n)/\sim$$

$(x, g) \sim (y, h)$ 当且仅当 $x = y, g^{-1}h \in G_{F(x)}$

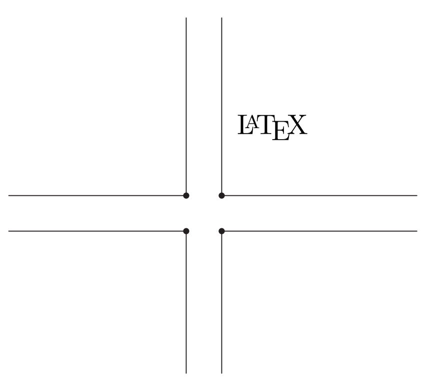
设 $\pi : M_P \longrightarrow P$ 为一个自然的投射. 事实上，将 $P^n \cong \mathcal{R}/\mathcal{Z}_2^n$ 看为 orbifold，则 small cover 是一个 right-angle Coxeter orbifold，局部同构 orbifold $\mathcal{R}/\mathcal{Z}_2^n$，映射 $\pi : M_P \longrightarrow P$ 是 P 上的一个正则的 orbifold covering，$\mathcal{Z}_2^n$ 是它的 covering transformation group.

命题 1.1 *small cover 为连通闭流形.*

证明： *convex polytope, coxeter orbifolds and torus action 性质 1.7*

$\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 称为 small cover M_P 的示性函数.

定义 1 *facets-pair structure of X.*



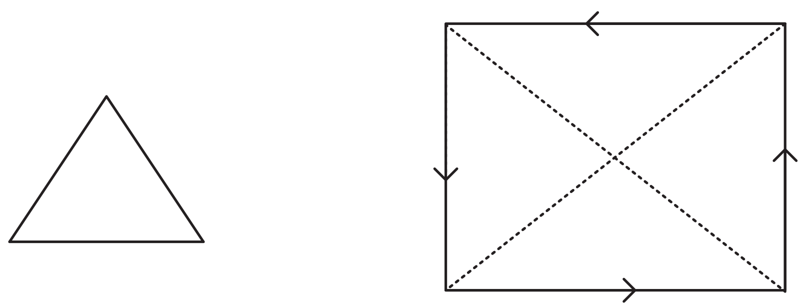
若连通拓扑空间 X 可由若干个单凸多面体 $\{P_l^n : l = 1, 2, \cdots, N\}$ 粘合而成，我们记 P_l 的第 i 个 *facet* F_i 为 $F_{i,l}$，并且满足下面两个条件：
1、任意 *facet* F_{i,l_1} 唯一配对 F_{j,l_2} 且存在一个同痕 $\tau_{i,l_1} : F_{i,l_1} \longrightarrow F_{j,l_2}$ 与 $\tau_{j,l_1} : F_{j,l_2} \longrightarrow F_{i,l_1}$ 使得 $\tau_{i,l_1} = \tau_{j,l_2}^{-1}$，我们称 $\hat{F} = \{F_{i,l_1}, F_{j,l_2}\}$ 为一个 *facet* 对，称 F_{j,l_2} 为 F_{i,l_1} 的对 *facet*
2、对任意余二维面 $f = F_{i_1,l_1} \cap F_{i_2,l_1}$, 如果 $\tau_{i_1,l_1}(f) = F_{j_1,l_2} \cap F_{j_3,l_2}, \tau_{i_2,l_1}(f) = F_{j_2,l_4} \cap F_{j_4,l_4}$，则 $\tau_{j_3,l_2}\tau_{i_1,l_1}(f) = \tau_{j_4,l_4}\tau_{i_2,l_1}(f) = F_{i_3,l_3} \cap F_{i_4,l_3}$. 这里不排除 $F_{j_2,l_4} = F_{j_3,l_2}$ 或者 $F_{i_2,l_1} = F_{i_3,l_3}$.

则我们称 $\mathcal{S} = \{\hat{F_{i,l}}, \tau_{i,l}\}$ 为 $\{P_l^n\}$ 上的一个 *facets-pairing structure*, $\tau_{i,l_1} : F_{i,l_1} \longrightarrow F_{j,l_2}$ 为 $\mathcal{S}$ 的 *structure map*. 记一步，若 X 为闭的，我们称 $\mathcal{S}$ 是 M_P 的一个完全的 *facets-pairing structure*

事实上，$\mathcal{F}$ 上的示性函数 $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ 决定了 M_P 上的一个配对结构. 多面体 (P^n, g) 的 facets F_i 与多面体 (P^n, h) 的 facets F_j 相粘，当且仅当 $F_i = F_j, \lambda(F_i)^{-1}\lambda(F_j) = g^{-1}h$. 反之，若知道 $\{P_l^n : l = 1, 2, \cdots, N\}$ 上的一个完全配对结构，我们也可以构造 M_P.

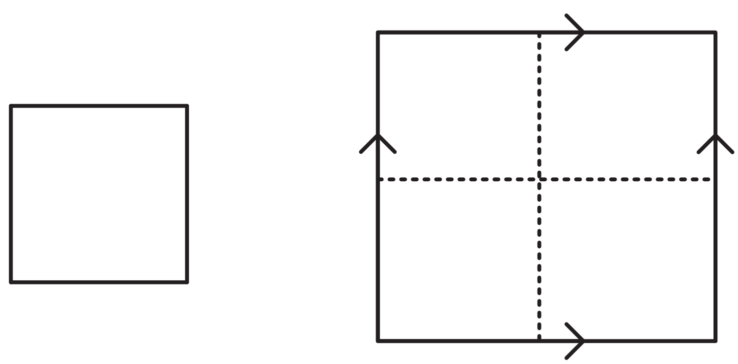
1.2 example

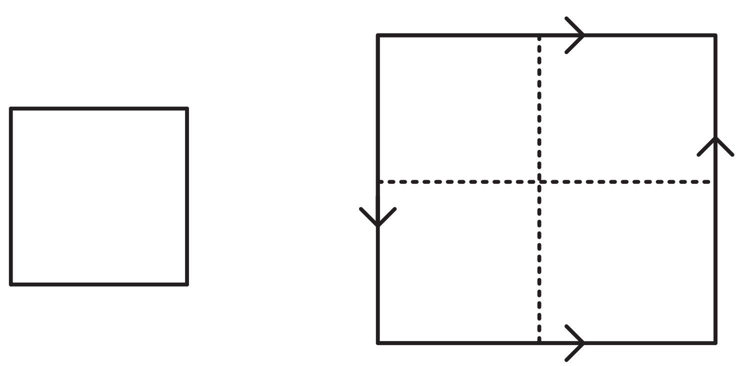
例 1 当 $P^n = \triangle^n$ 时，$\mathcal{F}$ 上本质上只有一种染色，如 $n = 2$ 时，



先将 P 在一个点处粘，得到一个大的四边形，由染色信息知它的对边沿着箭头方向粘，这是一个 $\mathcal{R}P^2$.

例 2 当 $P^2 = I^2$ 时，$\mathcal{F}$ 上有下面两种不同的染色，





同样的操作，我们可以分别得到 T^2 和 *Klein bottle.*

例 3 （P^2 是一个 m 边形时）

M_P 是由 4 个 *m-gon* 沿边粘成的曲面，所以 M_P 的欧拉数为 $\chi(M_P) = 4-m$. 当 m 为奇数时，M_P 为 $m-2$ 个 $\mathcal{R}P^2$ 的连通和；当 m 为偶数时，M_P 为 $m-2$ 个 $\mathcal{R}P^2$ 的连通和或着为 $\frac{m-2}{2}$ 个 T^2 的连通和. 所以 *small cover* 决定了除 S^2 外的所有二维闭曲面.

在本文中，我们主要通过构造 small cover 的不同胞腔分解来计算基本群的群表示. 我们由 Hurewicz 定理知道，胞腔复形的基本群可以由它们的二维骨架确定，所以在本文中，我们构造了 small cover 的两种胞腔结构，计算基本群时，仅考虑它们的二维骨架.

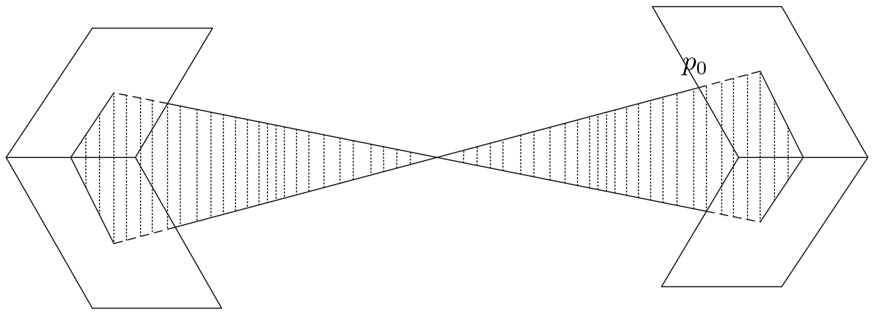
2 dual cell structure

我们首先将 $|\mathbb{Z}_2^n| = 2^n$ 个多面体 P^n 的 copy 在 P 的任一顶点 p_0 处粘合，得到一个大的多面体 $Q^n = P \times \mathbb{Z}_2^n/\sim$，这里 Q 也可以看作将多面体 P 沿着它的一点 p_0 附近的 facets 作反射得到，所以对于 M_P，局部上 ($\mathbb{Z}_2^n$不变) 都可由反射构造，染色信息实际上不决定 M_P 的局部信息.

由 Q 的构造知，Q^n 中的每一个 P 自然地拥有一个标号 $l \in \mathbb{Z}_2^n$，我们记第 l 个多面体 P 为 (P, l)或P_l. 若 (P, l) 的 face $F_i^k \subset \partial Q$，此时 F_i^k 称为 Q 的外 *face*，否则称为 Q 的内 *face*，分别记为 $in(F_i^k), out(F_i^k)$. 同上我们仍将将 Q 中 (P, l) 的第 i 个 facet F_i 记为 $F_{i,l}$. 接下来把 Q 的外 facets 按照染色信息配对粘合就可以得到商空间–small cover M_P，记 $F_{i,l}$ 的对 facet 为 $F_{i,l(i)}$. Q^n 到 P^n 有一个自然地投射，我们记为 $\bar{\pi} : Q \longrightarrow P$.

Q 的 facets F_{i,l_1} 与 F_{j,l_2} 粘，当且仅当它们对应 P 的同一个 facets, 且 $l_1^{-1}l_2 = \lambda(F_i)^{-1}\lambda(F_j)$.

下面构造 M_p 的一个 duall cell constrction。我们记 M_P 的 k 维骨架为 $M_P[k]$. 首先我们取点 p_0 为 $M_P[0]$. 我们在 Q 的余 1 维面处构造横截的 $1 - cells$. 对 Q 的每对 facets pair$\{F_{i,l_1}, F_{i,l_2}\}$（包括所有的内 facets、外 facets），任取 F_{i,l_1}，F_{i,l_2} 内部的点 a_{i,l_1}, a_{i,l_2}（不妨取为 F_{i,l_1}，F_{i,l_2} 的重心），使得 $\bar{\pi}(a_{i,l_1}) = \bar{\pi}(a_{i,l_2}) = a_i$，在 Q 的内部取连接 a_{i,l_1}, a_{i,l_2} 和 p_0 的两条简单有向道路（不妨取为直线段）, 不妨记为 $\overrightarrow{a_{i,l_1}}, \overrightarrow{a_{i,l_2}}$，则 $\overrightarrow{a_{i,l_1}}(\overrightarrow{a_{i,l_2}})^{-1}$ 为 M_P 中以 p_0 为起点的一条有向闭路，不妨记为 x_{i,l_1}，另外记 $x_{i,l_2} = x_{i,l_1}^{-1}$，它表示 M_P 中以 p_0 为起点的有向闭路 $\overrightarrow{a_{i,l_2}}(\overrightarrow{a_{i,l_1}})^{-1}$. 不考虑 $x_{i,l_1}(or x_{i,l_2})$ 的方向，则 $x_{i,l_1} - \{p_0\} \cong x_{i,l_2} - \{p_0\} \cong e^1$，即 M_P 中的每一对 facets pair 都决定了一个 1-cell. 在上述构造中，我们总可以使所有 $\{x_{i,l_1}\}$ 仅交于 0-skelton p_0 处. 这样我们就获得 M_P 的 1-skelton $M_P[1] = \bigvee_{p_0} x_{i,l_1}$.

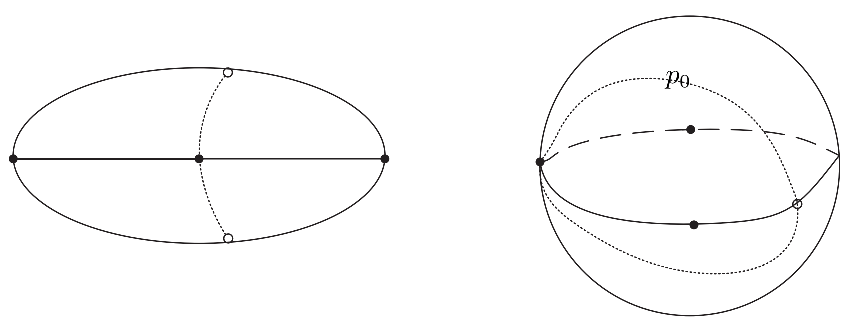


我们在余 2 维面处构造 $2-cells$. 设 $f_1 = F_{i,l} \cap F_{j,l}$ 为 Q 的任意一个余 2 维面，则令 $f_2 = F_{i,l(i)} \cap F_{j,l(i)}$，$f_3 = F_{i,l(i)l(j)} \cap F_{j,l(i)l(j)}$，$f_4 = F_{i,l(j)} \cap F_{j,l(j)}$，使得 $\bar{\pi}(f_k), k = 1,2,3,4$ 在 P 中的像一样，记为 f. 取 f 内部的一个点 b，对应 f_k 上的点设为 b_k. 取 V_1 为经过点 $b_k, p_0, a_{i,l}, a_{j,l}$ 的二维简单区域，如取 b 为 $span\{\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{a_j}\} \cap f$，其中 $\overrightarrow{a_i} = \bar{\pi}(\overrightarrow{a_{i,l_1}}), \overrightarrow{a_j} = \bar{\pi}(\overrightarrow{a_{j,l_1}})$，则 $V_1 = span\{\overrightarrow{a_{i,l_1}}, \overrightarrow{a_{i,l_2}}\} \cap P_l \cong D^2_+$. 类似确定 V_2, V_3, V_4，则 $\{V_k\}$ 在 M_P 中实际上粘合成一个 D^2，记为 V_f，且 V_f 的边界落在 1-skelton 中. 对应的二维 cell $e^2 = V_f - \bar{\pi}^{-1}(a_i) \cup \bar{\pi}^{-1}(a_j)$. 这样就得到 2-skelton $M_P[2] = M_P[1] \cup \{V_f\}$.

依次进行下去，我们可以在 Q 余 k 维面处可构造 M_P 的 $k-cells$. 最终在 Q 的顶点处构造 M_P 的 h_0 个 $n-cells$.

事实上，对于一般具有 facets pair 结构的拓扑流形都可类似构造其胞腔结构. 如我们考虑

例 4 我们将三角形沿着他们对应的边粘和得到一个 S^2



按照上面步骤，我们可以得到 S^2 的一个胞腔分解 $S^2 = e_0 \cup e^1 \cup e^2_1 \cup e^2_2$

在这种胞腔结构下，可以得到 $\pi_1(M_P)$ 的一个漂亮的表达形式. 下面我们分析 M_P 的基本群.small cover 的基本群 $\pi_1(M_P)$ 的生成元可取为 facets 对应的有向闭路 $\{x_{i,l}\}$. $\pi_1(M_P)$ 的关系由二维胞腔及配对关系决定. 对任意 facet F_{i,l_1} 对应的生成元 x_{i,l_1} 与它的对 facet F_{i,l_2} 对应的生成元 x_{i,l_2} 互为逆，即 $x_{i,l_1}x_{i,l_2}=1$. 若我们设 $l(i)=l\lambda(F_i)$，则 $x_{i,l_1}x_{i,l_2}=1$ 当且仅当 $if\ \ l(i)=l_1l_2$. 对于任意余二维面 $f=F_{i,l}\cap F_{j,l}(\neq\varnothing)\subset Q$，由 f 确定的二维胞腔 V_f 决定一个关系 $r_f=\partial V_f=x_{i,l}x_{j,l(i)}x_{i,l(i)l(j)}x_{j,l(j)}=1$. 从而我们得到 $\pi_1(M_P)$ 的一个群表示.

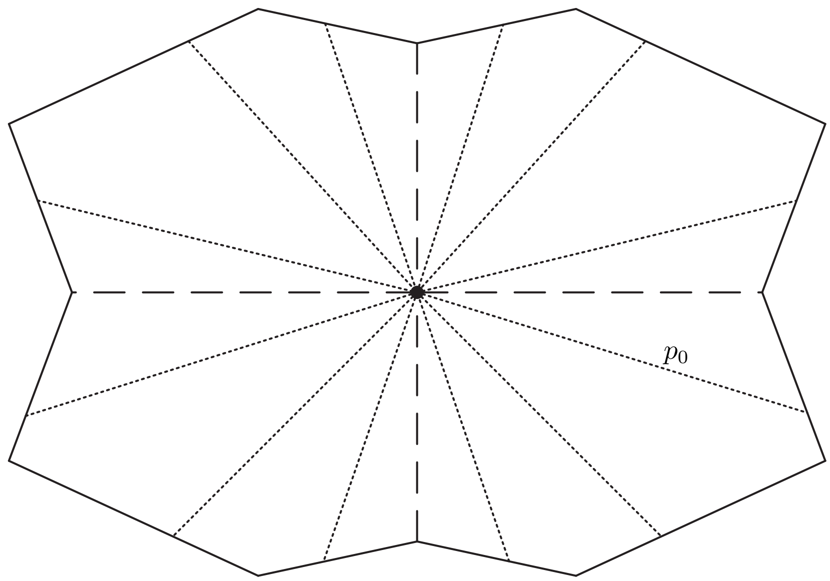
$$\begin{aligned}\pi_1(M_P)=\langle x_{i,l},i=1,2,\cdots,m,l\in\mathbb{Z}_2^n : x_{i,l_1}x_{i,l_2}=1, if\ \ l(i)=l_1l_2\\ x_{i,l}x_{j,l(i)}x_{i,l(i)l(j)}x_{j,l(j)}=1,\forall f=F_{i,l}\cap F_{j,l}\neq\varnothing\rangle\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $l(i)=l\lambda(F_i)$

事实上，若 $F_{i,l}$ 为内 facets，则 $\overrightarrow{x_{i,l}}$ 包含在 Q 的内部，可缩为点道路，故 $x_{i,l}=1$. 同理对于内余 2 维 face $f=F_{i,l}\cap F_{j,l}$ 确定的关系，为内生成元的组合，故也是平凡的. 若 $F_{i,l},F_{j,l}$ 分别为内面和外面，不妨设 $F_{i,l}$ 为外面，$F_{j,l}$ 为内面，则 f 对应的关系为 $x_{i,l}x_{j,l(i)}x_{i,l(i)l(j)}x_{j,l(j)}=x_{i,l}x_{i,l(i)l(j)}=x_{i,l}x_{i,l(j)}^{-1}=1$. 即内面附近的且相交为余二维面 f 的 facets 对应的生成元是彼此相关的. 每对 facets pair 对应的生成元互为逆元，在本文例子中，我们可能只取其中一个作为基本群的生成元，并且不作额外说明默认上面的结果.

3 例子

P 为五边形时，Q 可视为 12 边形，对应 6 对 facets，4 组余二维面。



求 M_P 的基本群。Q 中的 facets pair 有 $\{F_{2,e_1}, F_{2,e_2}\}$，$\{F_{1,e_1}, F_{1,e_1e_2}\}$，$\{F_{1,1}, F_{1,e_2}\}$，$\{F_{2,1}, F_{2,e_1e_2}\}$，$\{F_{3,1}, F_{3,e_1}\}$，$\{F_{3,e_2}, F_{3,e_1e_2}\}$（内部 facets pair 对应平凡生成元，我们暂不考虑）. 给所有道路一个指向 p_0 的方向，不妨设 p_0 为基本群基点，取生成元为

$$\begin{cases} x_{2,e_1} & \longleftrightarrow (\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1} \cdot \overrightarrow{a_{2,e_1}} \\ x_{1,e_1} & \longleftrightarrow (\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}})^{-1} \cdot \overrightarrow{a_{1,e_1}} \\ x_{1,1} & \longleftrightarrow (\overrightarrow{a_{1,e_2}})^{-1} \cdot \overrightarrow{a_{1,1}} \\ x_{2,1} & \longleftrightarrow (\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}})^{-1} \cdot \overrightarrow{a_{2,1}} \\ x_{3,1} & \longleftrightarrow (\overrightarrow{a_{3,e_1}})^{-1} \cdot \overrightarrow{a_{3,1}} \\ x_{3,e_2} & \longleftrightarrow (\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1} \cdot \overrightarrow{a_{3,e_2}} \end{cases}$$

在余 2 维面 p_1, p_2, p_3, p_4 处确定四组二维 cells：

在 p_1 处胞腔的边界对应 $\overrightarrow{a_{1,1}}(\overrightarrow{a_{1,e_1}})^{-1}\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}}(\overrightarrow{a_{1,e_2}})^{-1}$，即 $x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1} = 1$

在 p_2 处胞腔的边界对应 $\overrightarrow{a_{2,1}}(\overrightarrow{a_{1,1}})^{-1}\overrightarrow{a_{1,e_2}}(\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1}\overrightarrow{a_{2,e_1}}(\overrightarrow{a_{1,e_1}})^{-1}\overrightarrow{a_{1,e_1e_2}}(\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}})^{-1}$，即 $x_{2,1}(x_{1,1})^{-1}x_{2,e_1}(x_{1,e_1})^{-1} = 1$

在 p_3 处胞腔的边界对应 $\overrightarrow{a_{3,1}}(\overrightarrow{a_{2,1}})^{-1}\overrightarrow{a_{2,e_1e_2}}(\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1}\overrightarrow{a_{3,e_2}}(\overrightarrow{a_{2,e_2}})^{-1}\overrightarrow{a_{2,e_1}}(\overrightarrow{a_{3,e_1}})^{-1}$，即 $x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,e_2}(x_{2,e_1})^{-1} = 1$

在 p_4 处胞腔的边界对应 $\overrightarrow{a_{3,e_2}}(\overrightarrow{a_{1,1}})^{-1}\overrightarrow{a_{3,e_1}}(\overrightarrow{a_{3,e_1e_2}})^{-1}$，即 $x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1}=1$

从而

$$\begin{aligned}\pi_1(M_P)=\langle x_{2,e_1},x_{1,e_1},x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1},x_{3,e_2}|&x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1},x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1},\\&x_{2,1}(x_{1,1})^{-1}x_{2,e_1}(x_{1,e_1})^{-1},x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,e_2}(x_{2,e_1})^{-1}\rangle\\\cong\langle x_{2,e_1},x_{1,1},x_{2,1},x_{3,1}|&\\&x_{2,1}(x_{1,1})^{-1}x_{2,e_1}(x_{1,1})^{-1},x_{3,1}(x_{2,1})^{-1}x_{3,1}(x_{2,e_1})^{-1}\rangle\end{aligned}\tag{2}$$

即 $\pi_1(M_P)\cong\langle a,x,y,z|yx^{-1}ax^{-1}=zy^{-1}za^{-1}\rangle$

4 Morse theory

微分拓扑

结论：the small cover M_P has a cell structure which is perfect in the sense of Morse theory,with one cell for each vertex of P^n and with exactly h_i cells of dimension i.

5 Morse function 在 small cover 上的作用

取 $\mathbb{R}^n$ 中一个向量 ω，使得它是 generic 的，即 ω 与 P 的任何一个真面都不相切. 设 $\phi=\langle\omega,x\rangle$ 为多面体 P^n 上的高度函数，由于 ω 为 generic 的，所以对 P 中任意两个不同的顶点 p_i,p_j，都有 $\phi(P_i)\neq\phi(p_j)$. 我们把 P^n 的一维骨架（图）记为 G_P. 对 G_P 中的任意一条以点 p_1,p_2 为端点的边 s，若 $\phi(p_1)>\phi(p_2)$，则给边 s 一个指向 p_1 的方向，反之给边 s 指向 p_2 的方向，则得到一个有向图，记为 $\overrightarrow{G_P}$. 记 $m(p)$ 为 $\overrightarrow{G_P}$ 中以顶点 p 为端点且指向点 p 的边的个数. 对于 P^n 中的任意一个面 $F^k(k>0)$，由于 ϕ 是 generic 的线性函数，则 $\phi|_F$ 存在最大值，且在某个定点上取得，这个顶点称为面 F 的最高点，类似 $\phi|_F$ 取最小值的点称为 F 的最低点，显然 F 的最高点和最低点都是唯一的. 对 P 的每一个顶点 p，包含所有指向点 p 的边的最小面记为 F_p，显然 $\dim F_p=m(p)$，且 P 中任意一个以点 p 为最高点的面都是 F_p 的面. 将 F_p 所有面的相对内部（F_p 挖掉 F_p 中不包含点 p 的真面）的并记为

$\hat{F}_p \cong \mathbb{R}_+^{m(v)}$. 设 $\pi : M_P \longrightarrow P$ 为一个 small cover. 则

$$e_p = \pi^{-1}(\hat{F}_p) \cong e^{m(v)}, \qquad D_p = \pi^{-1}(F_p) \cong M_{F_p}$$

这样就得到了 M_P 的一个 cell structure. 由于每个 cell 在 M_P 中的闭包都为一个闭流形，为一个 mod 2 闭链，所以在 $\mathbb{Z}_2$ 同调中，粘贴映射都是平凡的。所以这种胞腔结构在 $\mathbb{Z}_2$ 系数下是 perfect 的。另外

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{n-i}{n-k}f_{i-1} = h_k = h_{n-k} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+k}\binom{i}{k}f_i = |\{p : m(p) = k\}|$$

其中第二个等号是 Dehn-Sommerville 关系，第三个等式见 [brϕnsted, p.115]

6 small cover 基本群的计算与表示

选取 $p_0 \in P$ 为 P 的最低点，则 $\pi^{-1}(p_0) = \{p_0\} \subset M_P$，我们不妨取 p_0 为 small cover M_P 的基点. 对任意边 $s \subset P$，$\pi^{-1}(s)$ 为 small cover M_P 中的闭路，我们选取那个 $m(p) = 1$ 的 F_p 所对应的闭路 s 作为 $\pi_1(M_P)$ 的生成元，设 p_1, p_2 为 F_p 的两个端点，并取一条道路（不妨设为 $(P[1], 1)$ 中的道路）连接 s 中较低点与点 p_0，这样我们就得到 M_P 的一维骨架 $M_P[1] \cong \bigvee_{p_0} S^1$，剩余其他边对应的连接 p_0 的闭路总可以由这些闭路表示. 所有 $m(p) = 2$ 的顶点对应的面 F_p 决定 M_P 的全部二维胞腔，$\pi^{-1}(F_p - \hat{F}_p)$ 为 M_P 中的闭路，记为 r，它决定了 $\pi_1(M_P)$ 的一个关系，这样经过计算化简我们就得到了 $\pi_1(M_P)$ 的一个 perfect 表示.

6.1 二维 small cover 基本群的计算

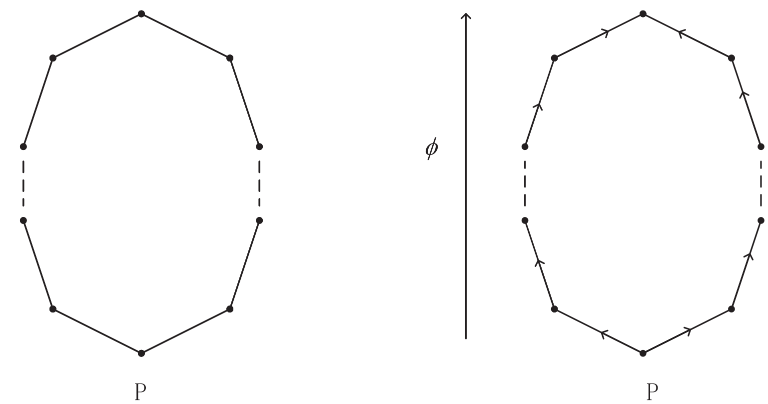
设 $P^2 \subset \mathbb{R}^2$ 为单凸 m 边形（$m \geq 3$）

$$M_{P^2} = \mathbb{Z}_2^2 \times P^2 / \sim$$

其中 $(g, p) \sim (h, q) \Leftrightarrow p = q, gh^{-1} \in G_{F(p)}$

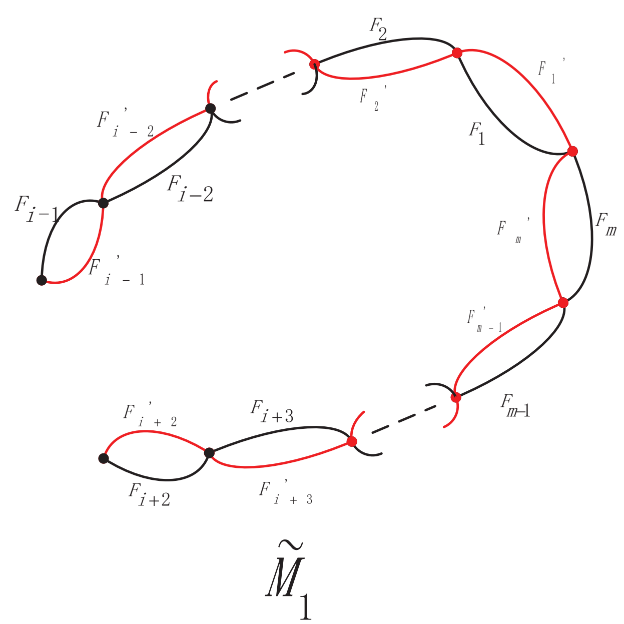
下面计算 small cover 的基本群，设 $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ 为乘法群。

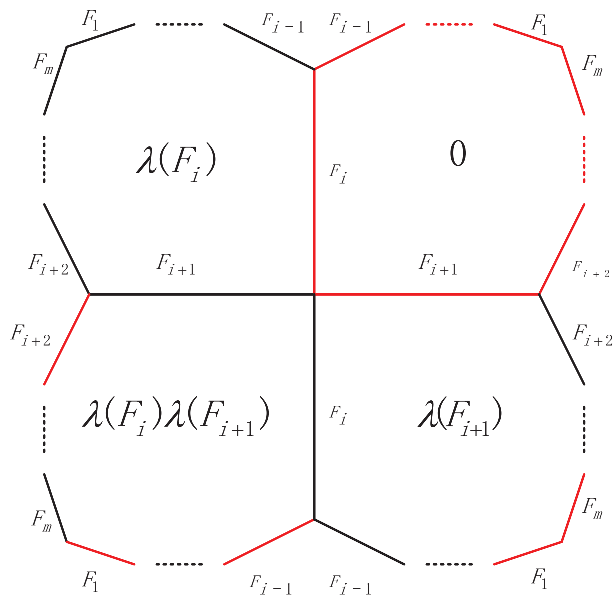
已知 P 上的每条边的染色，给定一个 generic 高度函数 ϕ，从而得到 P 的边构成有向图 $\overrightarrow{G_P}$。



设 P 的最高点为点 q_0，$(m(p_0)=2)$，则二维 $D^2_{q_0}=\pi^{-1}(F_p)$ 是由 4 个 m 边形 P 的 copy 沿着边 F_i, F_{i+1} 粘成，将剩余的边按染色信息成对粘则得到 small cover M_P.

$\partial D^2_{p_0}$ 在 M_P 中实际为一些相连的 loop.





$2-cell$

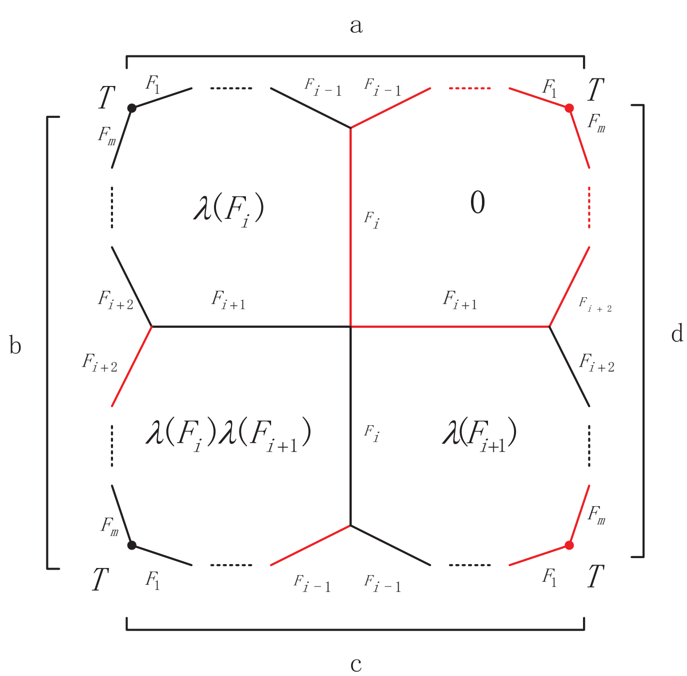
在 $\overrightarrow{G_P}$ 中，$m(p)=1$ 的点有 $m-2$ 个，对应的 $\pi^{-1}(F_p)$ 在 M_P 中为 $m-2$ 个依次连接的 loop. 这和定理（3.1）确定的 perfect cell construction 的 1 维骨架 $M[1]=\vee_{m-2}S_1$ 是同伦的 (如收缩 $\widetilde{M}[1]$ 中的一个极大树，使得所有 $m(p\leq 1)$ 的点都收缩到基点 p_0 上去. 下面我们不妨将第 P_1 的 $m-2$ 条边缩到基点上，得到 $M[1]$).

所以 $\pi_1(M_P)=\pi_1(M[1]\bigcup\limits_{\partial D^2_{p_0}}e^2)\cong\pi_1(\widetilde{M}[1]\bigcup\limits_{\partial D^2_{p_0}}e^2)$. 其中的同构是由上面的收缩映射诱导的.

我们取 $\pi_1(\widetilde{M}_1\cup e_2)$ 的生成元依次为

$$\begin{cases} x_1 & \longleftrightarrow F_1F_1^{'} \\ x_2 & \longleftrightarrow F_1F_2F_2^{'}F_1^{'} \\ x_3 & \longleftrightarrow F_1F_2F_3F_3^{'}F_2^{'}F_1^{'} \\ & \vdots \\ x_{i-1} & \longleftrightarrow F_1F_2\cdots F_{i-1}F_{i-1}^{'}\cdots F_1^{'} \\ x_{i+2} & \longleftrightarrow F_mF_{m-1}\cdots F_{i+2}F_{i+2}^{'}\cdots F_m^{'} \\ & \vdots \\ x_m & \longleftrightarrow F_mF_m^{'} \end{cases}$$

其中 $F_i^{'}$ 表示 $\pi^{-1}(F_{p_i})\cap P_1$ 中的边，F_i 表示 $\pi^{-1}(F_{p_i})-P_1$ 中的边，则 x_i 都是以 p_0 为起点的有向闭路. $\partial D_{p_0}^2$ 本质上为 $\widetilde{M}[1]$ 在平面 R^2 上的展开.



为方便我们将 $\partial D^2_{p_0}$ 分成以 p_0 为端点的 4 段. 分别记为 a,b,c,d，则 a,b,c,d 在 M_P 中都为基点在 p_0 上的闭路，则有

$$\begin{cases} a = F_1F_2\cdots F_{i-1}f_1(F_{i-1})\cdots f_1(F_1) \\ b = f_1(F_m)\cdots f_1(F_{i+2})f_3(F_{i+2})\cdots f_3(F_m) \\ c = f_3(F_1)\cdots f_3(F_{i-1})f_2(F_{i-1})\cdots f_2(F_1) \\ d = f_2(F_m)\cdots f_2(F_{i+2})F_{i+2}\cdots F_m \end{cases}$$

其中

$$f_1(F_k) = \begin{cases} F_k & \text{if} \quad \lambda(F_i)\cdot\lambda(F_k) = 0 \\ F_k^{'} & \text{if} \quad \lambda(F_i)\cdot\lambda(F_k) \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$f_2(F_k) = \begin{cases} F_k & \text{if} \quad \lambda(F_{i+1})\cdot\lambda(F_k) = 0 \\ F_k^{'} & \text{if} \quad \lambda(F_{i+1})\cdot\lambda(F_k) \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$f_3(F_k) = \begin{cases} F_k & \text{if} \quad \lambda(F_i)\cdot\lambda(F_{i+1})\cdot\lambda(F_k) = 0 \\ F_k^{'} & \text{if} \quad \lambda(F_i)\cdot\lambda(F_{i+1})\cdot\lambda(F_k) \neq 0 \end{cases} \tag{5}$$

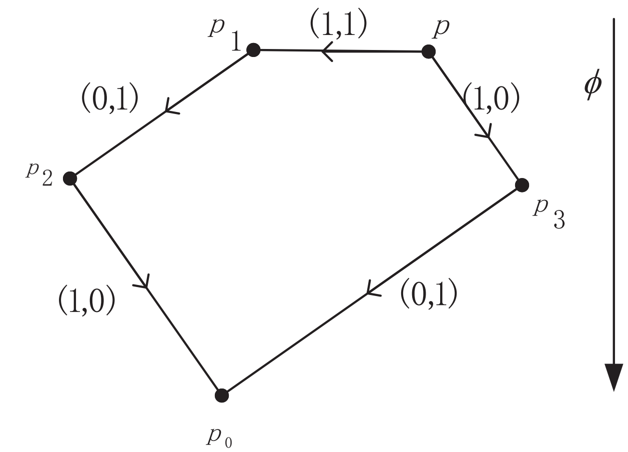
这样进一步可将闭路 a,b,c,d 由生成元 $x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+2},\cdots,x_m$ 表示，故

$$\begin{aligned} \pi_1(M_P) = \langle & x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+2},\cdots,x_m | \\ & a(x_1,\cdots,x_m)b(x_1,\cdots,x_m)c(x_1,\cdots,x_m)d(x_1,\cdots,x_m)\rangle; \end{aligned} \tag{6}$$

另外，还可以获取 F_i 和 $F_i^{'}$，F_{i+1} 和 $F_{i+1}^{'}$ 组成与基点的 loop 与生成元之间的关系，在高维 small cover 基本群的计算中，可能会用到这种关系.

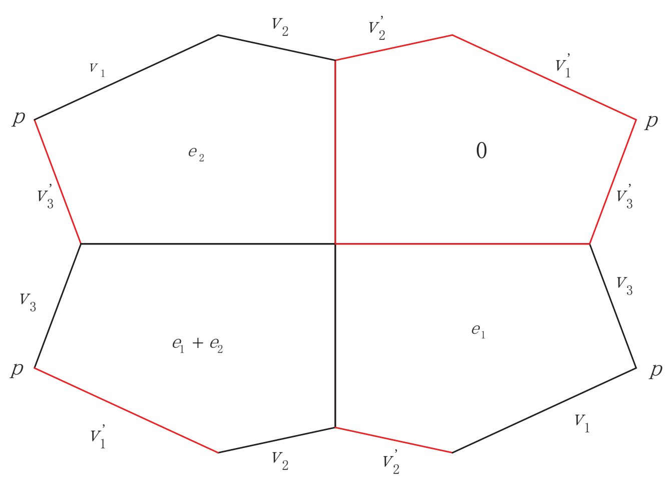
example:

给定五边形 P_2 及其上面的染色，并取如图方向高度函数，得有向图

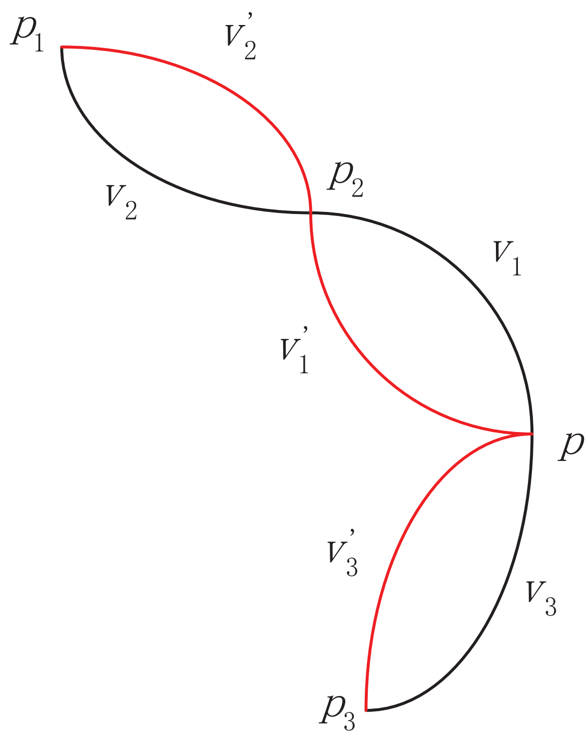


p_1
(1,1)
p
(0,1)
(1,0)
ϕ
p_2
p_3
(1,0)
(0,1)
p_0

得到的 D^2 如下



v_2
v_2'
v_1
v_1'
p
p
e_2
0
v_3'
v_3'
v_3
v_3
e_1+e_2
e_1
p
p
v_1
v_1'
v_2
v_2'



我们取生成元如下

$$\begin{cases} x & \longleftrightarrow v_1 v_1' \\ y & \longleftrightarrow v_1 v_2 v_2' v_1' \\ z & \longleftrightarrow v_3 v_3' \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} a : v_1 v_2 v_2' v_1' = y \\ b : v_3 v_3' = z \\ c : v_1 v_2' v_2 v_1' = x y^{-1} x \\ d : v_3' v_3 = z^{-1} \end{cases}$$

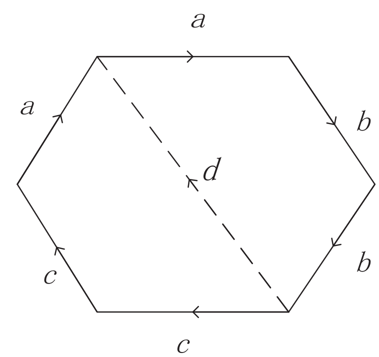
从而求得基本群

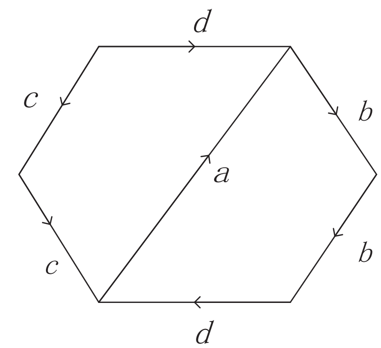
$$\pi_1(M_P) =< x, y, z | yzxy^{-1}xz^{-1} >;$$

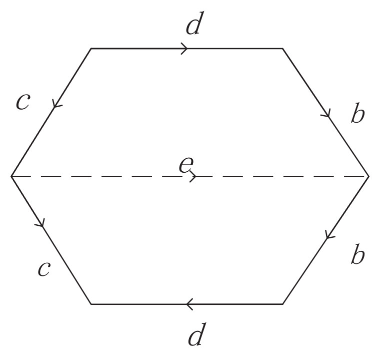
验证：(简单的 word problem 问题) 我们知道二维连通闭曲面由其欧拉数决定，已知 M_p 的欧拉数 $\chi(M_p) = 5-10+4 = -1$, 故 $M_P \cong RP^2\#RP^2\#RP^2 \cong K^2\#RP^2 \cong T^2\#RP2$。知 $\pi_1(M_P, p)$ 的标准表示为 $< a, b, c|aabbcc >$。我们通过下面手术知，可取变换

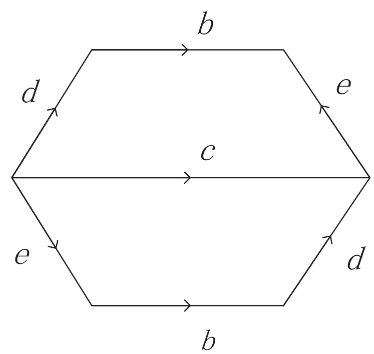
$$\begin{cases} a = z^{-1}y{-}1xy^{-1}x \\ b = x^{-1}y \\ c = yz \end{cases}$$

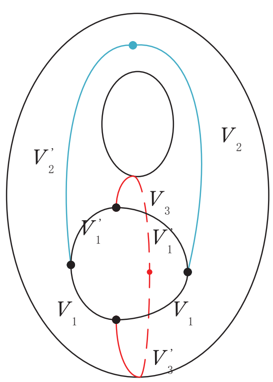
使得上面求得的基本群表示与标准表示同构.

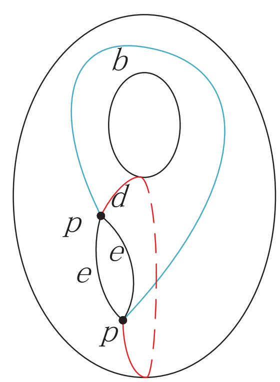

a
a
b
d
b
c
c


d
c
b
a
b
c
d


d
c
b
e
c
b
d


b
d
e
c
e
d
b


V_2'
V_2
V_3
V_1'
V_1'
V_1
V_1
V_3'


b
d
p
e
e
p

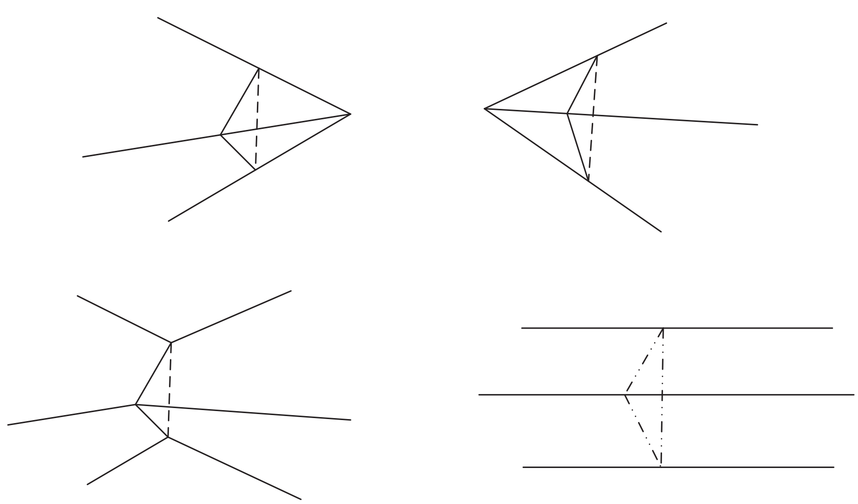
6.2 三维及以上

已知 n 维 $(n \geq 3)$ 单凸多面体 P^n 及其上的染色。我们依然首先给定一高度函数 ϕ，构造 M_P 的 cell structure. 在 P 的一维边构成的有向图 G_P 中，由 $m(v) = 1, 2$ 对应的 F_p 确定基本群生成元和关系。从而得出 M_p 的基本群的一个表示。特别注意的是，我们收缩图 $\pi^{-1}(G_P)$ 中的一个极大树，使得 M_P 中的所有的顶点都收缩到一点 p_0 上，这时 $\pi^{-1}(G_P) \cong \bigvee S^1$，前面确定的 loop 为基本群生成元的几何含义是 M_P 中任意一个以 p_0 为端点的 loop l，总存在一个映射柱使得 l 沿着映射柱可以形变收缩到生成元表示的 loop 上去. perfect 胞腔结构中，2 维面的边界在 M_P 始终为 loop，所以我们可以利用这点计算出 M_P 的基本群.

我们在后面会利用不同方法计算一个三维多面体 $P^3 = I^3 \# \triangle^3$ 上的 small cover 的基本群，这这里不举额外的例子了.

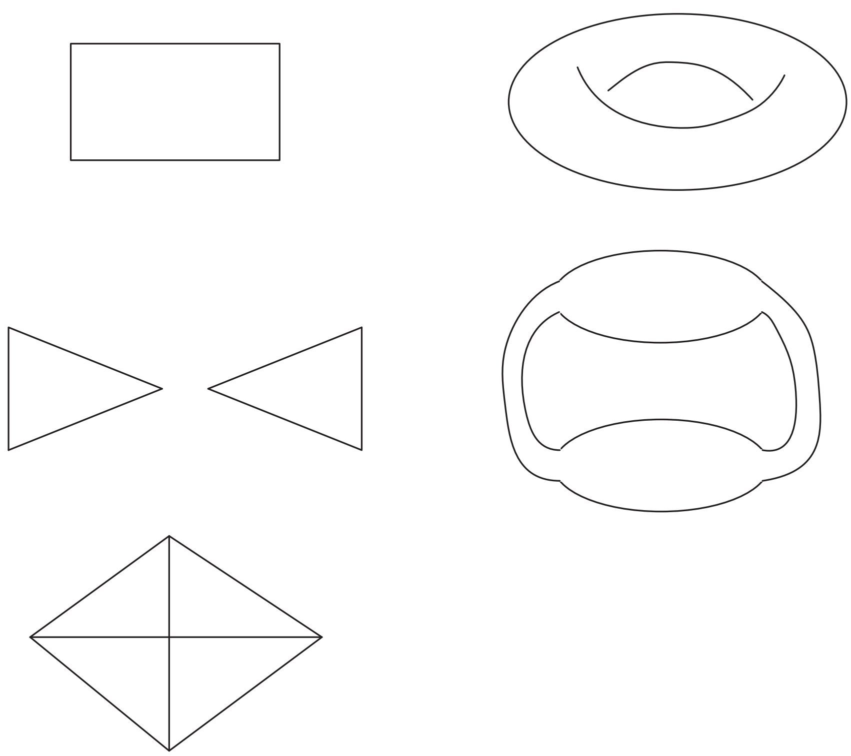
7 the fundamental group of $M_{P_1^n \# P_2^n}$

给定两个同维数的单多面体 P_1^n, P_2^n，p, q 分别为 P_1^n, P_2^n 的两个顶点，分别切去 P^n, Q^n 中包含点 p, q 的一个小角 V_p, V_q，将剩下的部分粘在一起，称为 P, Q 在点 p, q 处的连通和，记为 $P_1 \#_{p,q} P_2$. 注意 $P_1 \#_{p,q} P_2$ 表示一族多面体.



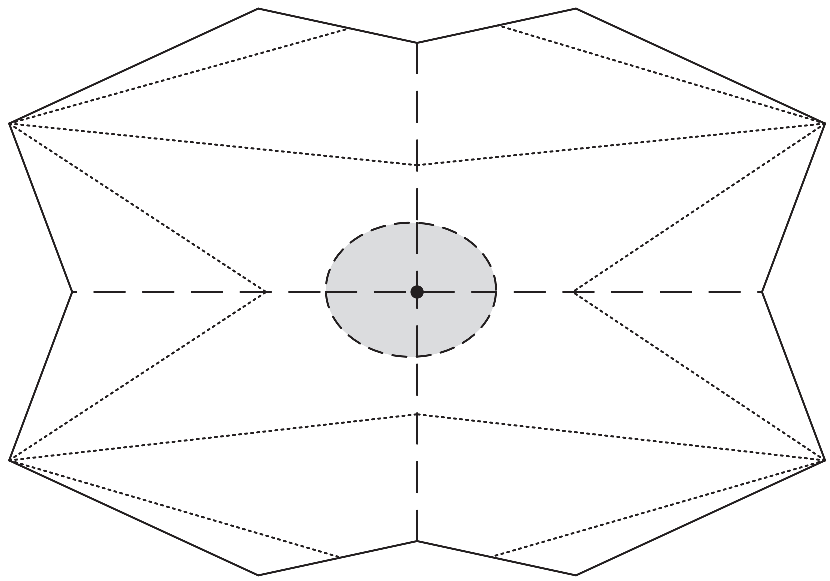
注： $P^n\#\triangle^n$ 相当于 P^n 切去一个角.

我们称 $Q^n = P_1^n\#P_2^n$ 的染色可继承给 P_1, P_2，是指连通和处（三维时对应上图中的小三角）的 n 个 facets 的染色张成 $\mathcal{Z}_2^n$ 的一组基. 若 $Q^n = P_1^n\#P_2^n$ 的染色是可继承的，则 P_1^n, P_2^n 上存在一组自然的染色，我们分别设 $\Pi_1 : M_{P_1} \longrightarrow P_1, \Pi_2 : M_{P_2} \longrightarrow P_2$ 为 P_1^n, P_2^n 上按照继承的染色所构造的 small cover. 由于 $\Pi_1^{-1}(V_p) \cong D^n \cong \Pi_2^{-1}(V_q)$，所以 $M_{P_1\#P_2} = M_{P_1}\#M_{P_2}$. 若 Q^n 上的染色不是可继承的，讨论起来可能比较复杂，比如 $Q = I^2$，给如下的染色，我们知道 $M_Q = T^2$，$M_{P_1} = M_{P_2} = S^2$，T^2 是由两个 S^2 分别挖掉两个圆盘连通起来的，因此不能用 van-Kampen 定理，暂且不讨论. 下面讨论的 Q^n 都具备可继承的染色.

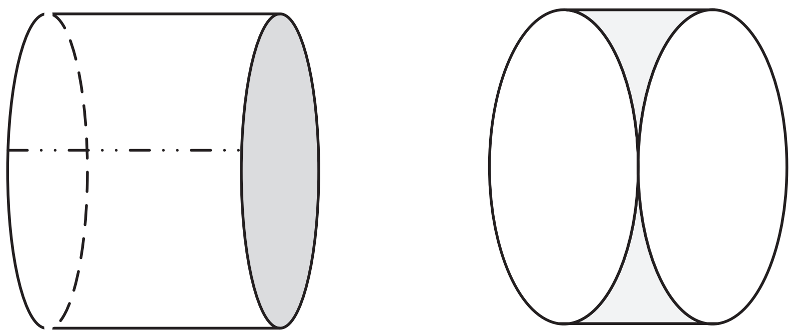


当 $n \geq 3$ 时，由 van-Kampen 定理知，$\pi_1(M_{P\#Q}) \cong \pi_1(M_P) * \pi_1(M_Q)$. 由这可以知道不同构的多面体 (如 $P\#Q$) 上的 small cover 也可以是同胚的.（加上 flag，就不能再考虑连通和，是不是也有这样的反例？若没有，则具有

同构基本群的两个 aspherical small cover 的底空间 polytope 是同构的.）



当 $n=2$ 时，在对偶 cell 结构下，我们在 M_{P_1} 中挖掉包含点 p 的一个圆盘，在 M_{P_2} 中挖掉包含点 q 的一个圆盘，将剩余部分粘合（定向?）. 我们选取 M_{P_1} 中的 p_0 点作为基点，将 M_{P_2} 中的 q_0 点沿着一条固定道路 h 收缩到 p_0 上，这时它们的连通柱相当于一个一个新的二维胞腔，胞腔的边界恰好落在 $M_{P_1}[1]\cup M_{P_2}[1]$ 上，这样就可以得到 $M_{P_1\#P_2}$ 的一个胞腔结构.



我们不妨设 $\pi_1(M_{P_1}, p) = \langle x_1, \cdots, x_{4m_1} : r_1, \cdots, r_{M_1}, r_p \rangle$，
$\pi_1(M_{P_2}) = \langle y_1, \cdots, y_{4m_2} : s_1, \cdots, s_{M_2}, s_q \rangle$. 则

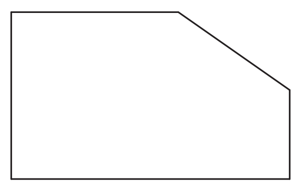
$$\pi_1(M_{P_1 \# P_2}, p_0) = \langle x_1, \cdots, x_{4m_1}, y_1, \cdots, y_{4m_2} : r_1, \cdots, r_{M_1}, s_1, \cdots, s_{M_2}, r_p^{-1} s_q \rangle \quad (7)$$

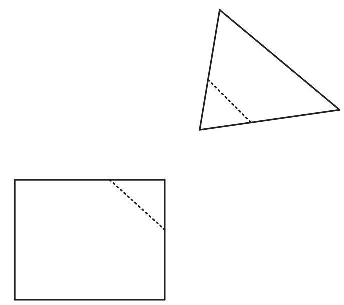
事实上，由二维闭曲面分类定理, 我们只需要判断当 $m_1 + m_2 - 2$ 为偶数时染色信息确定的 small cover 是否可定向，或者由 perfect 胞腔结构我们可以直接算出 M_{Q^2} 的基本群.

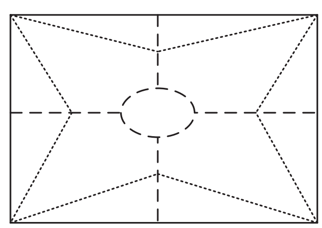
Q1:当 P^2 为 m 边形，m 为一个偶数，由 $\mathcal{F}$ 上的染色判断 M_P 是否可定向.

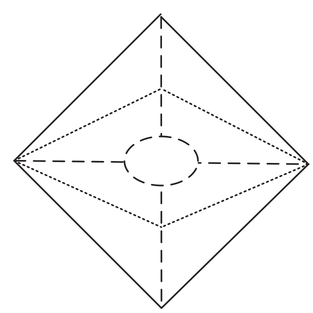
当 $n = 1$ 时，$P = Q = P \# Q = I$，则 $\pi_1(M_{P \# Q}) \cong \pi_1(M_P) \cong \pi_1(M_Q) \cong \mathbb{Z}$

例：设 P 为平面上的五边形，则 $P = I^2 \# \triangle^2$









分别取 T^2 和 $\mathcal{R}P^2$ 中的以 p_0, q_0 为端点的虚线为生成元，并设 h 为 M_P 中 q_0 到 p_0 的一条固定的道路. 则有

$\pi_1(T^2) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 | x_1x_3 = x_2x_4 = x_1x_2x_3x_4 = 1\rangle$

$\pi_1(\mathcal{R}P^2) = \langle y_1, y_2 | y_1(y_2)^{-1} = y_1y_2 = 1\rangle$

我们取 M_P 的基本群的生成元为 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, h^{-1}y_1h = a, h^{-1}y_2h = b\}$ 则

$$\begin{aligned}\pi_1(M_P) = \langle & x_1, x_2, x_3, x_4, h^{-1}y_1h, h^{-1}y_2h | \\ & x_1x_3 = x_2x_4 = h^{-1}y_1(y_2)^{-1}h = 1, x_1x_2x_3x_4h^{-1}y_1y_2h\rangle \\ = \langle & x_1, x_2, a | x_1x_2(x_1)^{-1}(x_2)^{-1}a^2\rangle\end{aligned} \tag{8}$$

8 the fundamental group of $M_{P_1^{n_1}\times P_2^{n_2}}$

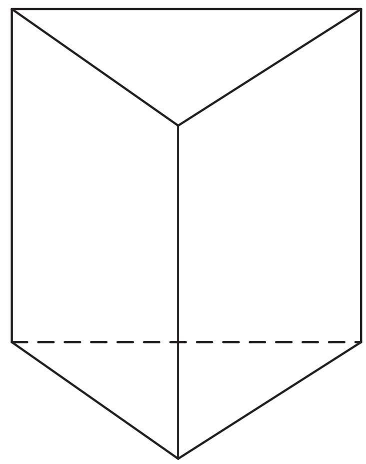
令 $h(P,t)=h_0+h_1t+\cdots+h_nt^n$，由于 $f_k(P^{n_1}\times Q^{n_2})=\sum_{i=-1}^{n_1-1}f_i(P)f_{k-i-1}(Q)$，则

$$\begin{aligned}h(P\times Q,t)&=h(P,t)h(Q,t)\\&=(h_0+h_1t+\cdots+h_{n_1}t^{n_1})(h_0^*+h_1^*t+\cdots+h_{n_2}^*t^{n_2})\\&=h_0h_0^*+(h_0h_1^*+h_1h_0^*)t+(h_0h_2^*+h_1h_1^*+h_2h_0^*)t^2+\cdots\end{aligned}\tag{9}$$

事实上记 $P_1^{n_1},P_2^{n_2}$ 的乘积为 $Q^{n_1+n_2}=P_1^{n_1}\times P_2^{n_2}$，任意 P_1 的 i 维面 F_1^i 和 P_2 的 j 维面 F_2^j 贡献 Q 的一个 $i+j$ 维面 $F_1^i\times F_2^j$. 在 perfect 胞腔结构下，我们考虑 M_Q 的胞腔结构，对于 M_Q 中一顶点 (p_i,q_j)，则 $m(p_i,q_j)=k$ 当且仅当 $m(q_i)+m(q_j)=k$. 在计算基本群时，我们仅考虑 $k=1,2$ 的情况. 当 $k=1$ 时，(p_i,q_j) 对应的边在 M_Q 中取为基本群生成元，此时 $m(q_i)=1,m(q_j)=0$ 或 $m(q_i)=0,m(q_j)=1$，这表示 $\pi_1(M_Q)$ 的生成元，对应 $\pi_1(M_{P_1})$ 和 $\pi_1(M_{P_2})$ 的生成元. 当 $k=2$ 时，(p_i,q_j) 对应的二维面在 M_Q 中的像决定基本群的关系，此时 $m(q_i)=2,m(q_j)=0$，或 $m(q_i)=0,m(q_j)=2$，或 $m(q_i)=m(q_j)=1$，这表示 $\pi_1(M_Q)$ 的关系，对应 $\pi_1(M_{P_1})$ 和 $\pi_1(M_{P_2})$ 的关系，额外添加 $h_1(P_1)h_1(P_2)$ 个形如 $xyx^{-1}y^{-1},xyxy^{-1}$ 的关系（I^2 上的可能关系）. 即有

$$\begin{aligned}\pi_1(M_Q)=\langle x_1,\cdots,x_{m_1},y_1,\cdots,y_{m_2}|r_1,\cdots,r_{n_1},s_1,\cdots,s_{n_2},\\\{[x_i,y_j],x_iy_jx_i(y_j)^{-1},y_jx_iy_j(x_i)^{-1}\}\rangle\end{aligned}\tag{10}$$

其中 M_{P_1},M_{P_2} 在投射下的高度函数和染色所决定的 perfect 胞腔结构对应的基本群分别为，$\pi_1(M_{P_1})=\langle x_1,\cdots,x_{m_1}|r_1,\cdots,r_{n_1}\rangle$，$\pi_1(M_{P_2})=\langle y_1,\cdots,y_{m_2}|s_1,\cdots,s_{n_2}\rangle$



例:如取 $P = I \times \triangle^2$ 为三棱柱，共有 5 个 facets $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$，我们给上下底面 F_1, F_2 染色 e_1，侧面 F_3, F_4, F_5 染色为 $e_2, e_3, e_1e_2e_3$，由 P 的 h-vector 知，$\pi_1(M_P)$ 有两个生成元和两个关系，它的任意一个侧面上的 small cover 基本群有两个生成元，一个关系.

即 $\pi_1(M_I) \cong \mathcal{Z}$，$\pi_1(M_{\triangle^2}) = \langle x : x^2 = 1 \rangle$，$pi_1(M_P) \cong \langle x, y : x^2 = 1, yxyx^{-1} \rangle$

Q2:已知三维 small cover 的基本群 $\pi_1(M_P) = G_1 \times G_2$，则 $M_P \cong S^1 \times N^2$.

证：$\pi_1(M_P)$ 存在一个 balance 表示，不妨设

$$\begin{aligned} \pi_1(M_P) &= \langle x_1, \cdots, x_{m_1}, y_1, \cdots, y_{m_1} | r_1, \cdots, r_{m_1+m_2} \rangle \\ &\cong \langle x_1, \cdots, x_{m_1} | r_1, \cdots, r_{h_1} \rangle \times \langle y_1, \cdots, y_{m_1} | s_1, \cdots, s_{h_2} \rangle \end{aligned} \tag{11}$$

(其中 m_1, m_2 都大于等于 1，这里生成元个数和关系个数都不能再少)，由于关系中至少包含 m_1m_2 个交换关系 $[x_i, y_j]$，故 $m_1 + m_2 - m_1m_2 > 0$，即 $(m_1 - 1)(m_2 - 1) < 1$，即 m_1, m_2 中至少有一个为 1，不妨设 $m_1 = 1$，$\pi_1(M_P)$ 中包含 m_2 个交换关系，所以设 $\pi : M_P \longrightarrow P$ 为单多面体 P^n 上的 small cover. $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$ 为 P^n 的 facets 集，我们定义 P 的 *right-angle Coxeter group* W_P 如下:

$$W_P = \langle F_1, \cdots, F_m : F_i^2 = 1; (F_iF_j)^2 = 1, \forall F_i, F_j \in \mathcal{F}, F_i \cap F_j \neq \varnothing \rangle$$

我们构造 P 的一个二页正则的 covering orbifold$\rho : S^n \longrightarrow P^n$，其中 $S^n = P^n \times \mathcal{Z}_2 / \sim \{(*, F_i) \sim (F_i, *), \forall F_i \in \mathcal{F}\}$，当 $n \geq 2$ 时，S^n 为单连通的，我们将覆叠变换群 $D(S^n, \rho, P^n)$ 称为多面体 P^n 的广义基本群，记为 $\hat{\pi}_1(P^n)$. 当 $n = 1$ 时，$\hat{\pi}_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$，由于 $\rho : S^1 \longrightarrow I$ 为二页覆叠，所以我们将 $\hat{\pi}_1(I)$ 定义为 $\mathbb{Z}^2$.

命题：$\hat{\pi}_1(P) \cong W_P$

$\pi : M_P \longrightarrow P$，$\pi_1(M_P)$ 为 $\hat{\pi}_1(P) \cong W_P$ 的子群.

$\Pi : \mathcal{L} \longrightarrow M_P$，$\pi_1(\mathcal{L})$ 是 $\pi_1(M_P)$ 的子群，当 $\mathcal{L}$ 为单连通时，$\pi_1(M_P)$ 同构于复叠变换群 $D(\mathcal{L}, \Pi, M_P)$