设 F^k 为单凸多面体 P 的一个 k 维面，F^k 仍为单凸的，且继承了 P 染色. 记 F^k 上的 small cover 为 M_F. 下面在 dual cell structure 下，分析 $\pi_1(M_F)$ 与 $\pi_1(M_P)$ 的关系.

不妨取 F 为 P 的第一个 facet，p_0 为 F,P 任意一个共同的顶点，我们将分别将 $\{(F,l)\}_{l\in\mathbb{Z}_2^{n-1}}$ 与 $\{(P,l)\}_{l\in\mathbb{Z}_2^n}$ 在点 p_0 处粘合，得到多面体 $Q=P\times\mathbb{Z}_2^n/\sim$ 与 $Q_F=F\times\mathbb{Z}_2^{n-1}/\sim$. 则 $out(Q_F)\subset out(P), in(Q_F)\subset in(P)$. 设 $f_i=F_i\cap F\neq\varnothing$ 为 F 的一个任意的 facet，$f_i\cap f_j=F_i\cap F_j\cap F\neq\varnothing$ 为 F 的一个任意的余 2 维面. 设 $f_{i,l}=F_{i,l_1}\cap F_{1,l_1}=F_{i,l_2}\cap F_{1,l_2}$ 为 Q_F 中的任意一个 facet，其中 $\{F_{1,l_1},F_{1,l_2}\}$ 为 $\{(P,l)\}_{l\in\mathbb{Z}_2^n}$ 中的 facets-pair，则 $f_{i,l}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路与 F_{i,l_1} 和 F_{i,l_2} 在 Q 中对应的有向闭路 x_{i,l_1},x_{i,l_2} 是定点同伦的，所以我们不妨记 $f_{i,l}$ 在 Q_F 中对应的有向闭路为 $x_{i,l}$. 对于 Q_F 中的任意一个余 2 维面 $f_{i,l}\cap f_{j,l}=F_{i,l}\cap F_{j,l}\cap F_{1,l}\neq\varnothing$ 所对应的二维胞腔 V_l 与 $F_{i,l_1}\cap F_{j,l_1}$ 和 $F_{i,l_2}\cap F_{j,l_2}$ 所对应的二维胞腔 V_{l_1},V_{l_2} 是定点同伦的，所以在 $\pi_1(M_F)$ 中，$f_{i,l}\cap f_{j,l}$ 决定的关系与 $F_{i,l_1}\cap F_{j,l_1}(\cap F_{1,l_1}\neq\varnothing)$ 或者 $F_{i,l_2}\cap F_{j,l_2}(\cap F_{1,l_2}\neq\varnothing)$ 在 $\pi_1(M_P)$ 中决定的关系对应。所以 M_F 的基本群为

$$\begin{aligned}\pi_1(M_F)=\langle x_{i,l}, i=1,2,\cdots,m^{'}, l\in\mathbb{Z}_2^{n-1}: x_{i,l_1}x_{i,l_2}=1, if\ l(i)=l_1l_2\\ x_{i,l}x_{j,l(i)}x_{i,l(i)l(j)}x_{j,l(j)}=1,\forall f=f_{i,l}\cap f_{j,l}\neq\varnothing\rangle\end{aligned}\quad(1)$$

其中 $f=f_{i,l}\cap f_{j,l}=F_{i,l_1}\cap F_{j,l_1}\cap F_{0,l_1}=F_{i,l_2}\cap F_{j,l_2}\cap F_{0,l_2}\neq\varnothing$. 即形式上 $\pi_1(M_F)$ 的生成元集 G_F 和关系集 R_F 都可为 $\pi_1(M_P)$ 的生成元集 G 和关系集 F 的子集. 事实上，由上面分析进一步知这种关系是由包含映射 $i:F\longrightarrow P$ 所诱导的，即对 $i_*:\pi_1(M_F)\longrightarrow\pi_1(M_P)$ 有 $i_*|_{G_F}=id$. 进一步由归纳知，对任意 F^k，$\pi_1(M_F)$ 和 $\pi_1(M_P)$ 都有上面的关系. 由这种关系可以看出 i_* 不一定是单同态.

如取 $P=I\times\triangle^2$ 为三棱柱，共有 5 个 facets $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$，我们给上下底面 F_1,F_2 染色 e_1，侧面 F_3,F_4,F_5 染色为 $e_2,e_3,e_1e_2e_3$，由 P 的 h-vector 知，$\pi_1(M_P)$ 有两个生成元和两个关系，它的任意一个侧面上的 small cover 基本群有两个生成元，一个关系.

即 $\pi_1(M_P)=\langle x,y:x^2=yxyx^{-1}=1\rangle$,$\pi_1(M_F)=\langle x,y:yxyx^{-1}=1\rangle$

$$i_*:\ \pi_1(M_F)\longrightarrow\pi_1(M_P)$$

满足 $i_*(x)=x, i_*(y)=y$，但 i_* 非单.

命题 0.1 *当多面体 P^n 为 flag 时，i_* 为单同态.*

证明：多面体 P 为 flag 的，是指 P 中两两相交的 facets 必有公共的交. 即在上面分析中若 $F\cap F_i \neq \varnothing, F\cap F_j \neq \varnothing$，则 $F\cap F_i\cap F_j \neq \varnothing$，即任意 F 附近的余二维面 $f \subset Q$ 对应的关系一定可以继承到 M_F 的基本群中. 这保证了下面定义的态射的合理性. 我们构造态射 $j_* : \pi_1(M_P) \longrightarrow \pi_1(M_F)$，满足对任意 $x \in G - G_F, j_*(x) = 1$. 下面我们考虑 $\pi_1(M_P)$ 中关系文字在 j_* 下的像，与 F 相交的 facets 集 (包含 F)，我们记为 $\mathcal{F}_F^1$，与 $\mathcal{F}_F^1$ 中 facets 相交且不包含 F 的 facets 集，我们记为 $\mathcal{F}_F^2$，剩余的 facets 我们记为 $\mathcal{F}_F^3$. 对于 Q 中的任意余二位面 $f = F_i\cap F_j$，若 F_i, F_j 都属于 $\mathcal{F}_F^1$，由 P 的 flag 性质知 $f\cap F \neq \varnothing$，从而 j_* 将 $f \subset Q$ 所对应的关系映为 $\pi_1(M_F)$ 的一个关系；若 F_i, F_j 都不属于 $\mathcal{F}_F^1$，则对应关系在 j_* 下的像为 1；若 F_i, F_j 分别属于 $\mathcal{F}_F^1, \mathcal{F}_F^2$，不妨设 $F_i \subset \mathcal{F}_F^1, F_j \subset \mathcal{F}_F^2$，设这个关系为 $x_{i,l}x_{j,l(i)}x_{i,l(i)l(j)}x_{j,l(j)}$，则 $j_*(x_{i,l}x_{j,l(i)}x_{i,l(i)l(j)}x_{j,l(j)}) = j_*(x_{i,l})j_*(x_{j,l(i)})j_*(x_{i,l(i)l(j)})j_*(x_{j,l(j)}) = x_{i,l}x_{i,l(i)l(j)} = 1$. 对于 Q 中的 facets pair，它们同时属于或不属于 $\mathcal{F}_F^1$，所以 $\pi_1(M_P)$ 中的配对关系，在 j_* 像要么不变要么为 1. 所以对任意关系 $r \in \pi_1(M_P), j_*(r) \equiv 1$，即 j_* 为 well-defined. 进一步，对任意 word $w = \partial(x : x \in G_F) \in \pi_1(M_F)$，$j_*i_*(w) = j_*i_*(\partial(x : x \in G_F)) = j_*(\partial(x : x \in G_F)) = \partial(x : x \in G_F) = w \in \pi_1(M_F)$，即 $j_*i_* = id : \pi_1(M_F) \longrightarrow \pi_1(M_F)$，故 i_* 单.

事实上，我们令 $\mathcal{F}_F^2 \cup \mathcal{F}_F^3$ 中的 facets 染色都为 $\varnothing$，得到空间 $\widetilde{M_F} = P \times \mathbb{Z}_2^n/\dot{\sim}$，与 M_F 是同伦等价的.

命题 0.2 *当 P 为 flag 时，$i_* : W_F \longrightarrow W_P$ 为单的.*

证明：若 $F \cap F_i \neq \varnothing, F \cap F_j \neq \varnothing$，则 $F \cap F_i \cap F_j \neq \varnothing$，即任意 F 附近的余二维面 $f \subset P$ 对应的关系一定可以继承到 W_P 中.

考虑 pull back

$$\begin{tikzcd}
M_F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_F"'] & M_P \arrow[d, "\pi_P"'] \\
F \arrow[r, "i"] & P
\end{tikzcd}$$

则

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(M_F) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\pi_*"'] & \pi_1(M_P) \arrow[d, "\pi_*"'] \\
W_F \arrow[r, "i_*"] & W_P
\end{tikzcd}$$

为可交换的.

所以当 P 为 flag 时，i_* 为单的，所以 $i_*\pi_* = \pi_*\alpha_*$ 为单的，从而 α_* 为单的. 这里的 F_* 即为面包含映射 i 所诱导的基本群同态.