



# 南京大学

## 研究生毕业论文 (申请硕士学位)

论文题目 小覆盖的基本群

作者姓名 吴利苏

学科、专业方向 基础数学

研究方向 小覆盖

指导教师 于立 副教授

2018 年 5 月 18 日

学 号：MG1521008

论文答辩日期：2018 年 5 月 18 日

指 导 教 师： (签字)

# Fundamental groups of small covers

by

Wu Lisu

Supervised by

Associate Professor Yu Li

A dissertation submitted to  
the graduate school of Nanjing University  
in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
MASTER  
in  
Basic Mathematics



Department of Mathematics  
Nanjing University

May 18, 2018



# 南京大学研究生毕业论文中文摘要首页用纸

毕业论文题目： 小覆盖的基本群

基础数学 专业 2015 级硕士生姓名： 吴利苏  
指导教师（姓名、职称）： 于立 副教授

## 摘 要

本文研究了小覆盖的基本群. 通过构造小覆盖上的一个仅有单个 0 维胞腔的胞腔分解, 我们得到了小覆盖基本群的一个群表现. 借此进一步讨论了小覆盖的基本群和它的面子流形之间的关系, 即小覆盖的面子流形的  $\pi_1$ -单性由对应的面在单多面体中的局部组合结构完全决定.

关键词： 小覆盖；基本群； $\pi_1$ -单性



## 南京大学研究生毕业论文英文摘要首页用纸

THESIS: Fundamental groups of small covers

SPECIALIZATION: Basic Mathematics

POSTGRADUATE: Wu Lisu

MENTOR: Associate Professor Yu Li

### **Abstract**

We study the topology of small covers from their fundamental groups. We obtain explicit presentations of the fundamental group of a small cover by constructing their cell decomposition with single 0-cell. Furthermore, we use these presentations to study the relations between the fundamental groups of a small cover and its facial submanifolds. In detail, the  $\pi_1$ -injectivity of a facial submanifold of a small cover depends on the local combinatorial structure of the corresponding face in the simple polytope.

**Keywords:** Small Cover, Fundamental Group,  $\pi_1$ -injectivity





# 目 录

第一章 引言 .....	1
第二章 小覆盖 .....	3
2.1 多面体 .....	3
2.2 小覆盖 .....	4
2.3 面子流形 .....	5
第三章 基本群 .....	7
3.1 对偶胞腔 .....	7
3.2 $\pi_1(M)$ 的群表现 .....	10
3.3 万有覆叠空间 .....	12
3.4 Cayley 图 .....	16
第四章 面子流形的 $\pi_1$ -单性 .....	17
参考文献 .....	23
索 引 .....	25
致 谢 .....	27
学位论文出版授权书 .....	29



# 第一章 引言

小覆盖 (small cover) 是 Davis 和 Januszkiewicz 在 [10] 中给出的一类拓扑对象. 首先, 称一个  $n$  维多面体  $P$  是单的, 是指  $P$  的每个顶点附近都恰好有  $n$  个  $n-1$  维面 (称为多面体的切面 (facet)). 则小覆盖是指一类  $n$  维闭流形  $M$ , 满足  $\mathbb{Z}_2^n$  在  $M$  上的某种标准群作用下的轨道空间恰好是一个  $n$  维的单凸多面体. 换句话说, 小覆盖是由  $2^n$  个相同的单多面体, 按照某种规则, 两两配对粘合它们的切面所得到的  $n$  维闭流形. 由于将相同的  $n$  维单多面体局部不变地粘成一个闭流形至少需要  $2^n$  个这样的多面体, 所以在这种意义上, 粘成这类闭流形所用的单多面体数目是最少的, 故称这类闭流形为对应单多面体上的小覆盖, 其中这里局部不变地粘是指单多面体的每个顶点在粘成的闭流形中小开邻域都恰好与  $2^n$  个单多面体相交. 进一步, 我们也可以把  $2^m$  ( $m \geq n$ ) 个相同的单凸多面体局部不变地粘成一个连通闭流形, 特别当  $m$  等于多面体切面的个数时, 存在一种自然的粘贴方式, 此时我们称这类闭流形为对应单多面体上的实 Moment-angle 流形. 小覆盖和实 Moment-angle 流形都是比较有“规律”的闭流形.

由上面小覆盖的构造, 我们推测小覆盖的某些拓扑性质和对应的单凸多面体有很大的关联. 事实也是如此, 例如小覆盖  $\mathbb{Z}_2$  系数的上同调环

$$H^*(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[v_1, v_2, \dots, v_m]/(I + J)$$

其中  $\mathbb{Z}_2[v_1, v_2, \dots, v_m]/I$  是单多面体  $P$  决定的 Stanley-Reisner 面环; 小覆盖的基本群可以自然地实现为单多面体对应的 Coxeter 群  $W_P$  的子群. 本文也证明了一些类似的结论, 比如小覆盖的万有覆盖空间和面子流形的  $\pi_1$ -单性也是由其对应的单多面体完全决定的. 面子流形的  $\pi_1$ -单性是指多面体的面所决定的子流形在包含映射诱导下的基本群同态是否是单同态, 子流形的  $\pi_1$ -单性是闭流形的一个重要的拓扑性质.

在 [10] 中, Davis 和 Januszkiewicz 通过小覆盖的 Borel 构造  $BP = E\mathbb{Z}_2^n \times_{\mathbb{Z}_2^n} M$  来刻画小覆盖的基本群. 此时,  $BP$  可以由单多面体  $P$  的面结构完全决定, 而且  $BP$  的基本群和单多面体  $P$  对应的 Coxeter 群  $W_P$  是同构的. 所以, 纤维化  $M \rightarrow BP \rightarrow B\mathbb{Z}_2^n$  诱导了它们基本群之间的短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow W_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2^n \rightarrow 1 \quad (1-1)$$

故  $\pi_1(M)$  同构于这里群同态  $\psi$  的核. 然而, 这种对小覆盖基本群的描述很难具体地给出小覆盖的基本群. 于是后来, Davis, Januszkiewicz 和 Scott 在 [11] 和 [12] 中进一步讨论了一些

更广泛的拓扑对象的基本群问题. 在本文中, 我们通过构造小覆盖的一种具有单个 0 维胞腔的胞腔结构来给出小覆盖基本群的群表现.

$$\begin{aligned} \pi_1(M, p_0) = \langle x_{F,g}, F \in \mathcal{F}(P), g \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_{F,g} x_{F, \phi_F(g)} = 1, F \in \mathcal{F}(P), g \in \mathbb{Z}_2^n; \\ x_{F,g} x_{F', \phi_F(g)} = x_{F',g} x_{F, \phi_{F'}(g)}, F \cap F' \neq \emptyset, F, F' \in \mathcal{F}(P), g \in \mathbb{Z}_2^n; \\ x_{F,g} = 1, p_0 \in F \in \mathcal{F}(P), g \in \mathbb{Z}_2^n \rangle \quad (1-2) \end{aligned}$$

其中  $\phi_F(g) = g \cdot \lambda(F)$ , 基点为  $p_0 = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ .

进一步, 我们从群表现的层面重新解释上面群短正合列 (1-1), 并证明了小覆盖的万有覆盖空间只与单多面体  $P$  有关. 最后我们讨论了  $M$  的面子流形的  $\pi_1$ -单性.

设  $f = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$  为  $P$  的一个余  $k$  维面,  $M_f$  为  $f$  对应的面子流形. 我们设  $\rho: f \rightarrow P$  为面包含映射,  $\rho_*: W_f \rightarrow W_P$  为  $\rho$  决定的 Coxeter 群之间的群同态; 设  $\varrho: M_f \rightarrow M$  为  $M_f$  到  $M$  的包含映射,  $\varrho_*: \pi_1(M_f, p_0) \rightarrow \pi_1(M, p_0)$  为  $\varrho$  诱导的基本群之间的群同态. 我们发现直接讨论  $\varrho_*$  是否为单同态是不显然的, 而且下面的图表一般不是可交换的.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(M_f) & \longrightarrow & W_f & \xrightarrow{\psi_f} & \mathbb{Z}_2^{n-1} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \varrho_* & & \downarrow \rho_* & & \uparrow \theta \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & W_P & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1 \end{array}$$

于是, 我们通过验证下面的图表的交换性, 来讨论  $\varrho_*$  的单性.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(M_f, p_0)/\mathcal{S}_f & \xrightarrow{\alpha'_f} & W_f/\mathcal{N}_f & \xrightarrow{\rho'_*} & W_P \\ \downarrow \varrho'_* & & & & \downarrow \beta \\ \pi_1(M, p_0) & \xrightarrow{\alpha} & W_P & \xrightarrow{\beta} & W_P/H_f \end{array}$$

其中  $\mathcal{S}_f, \mathcal{N}_f$  分别是由  $f$  的局部组合结构所决定的  $\pi_1(M_f, p_0)$  和  $W_f$  的正规子群,  $H_f = \langle F_1, F_2, \dots, F_k \rangle$ , 这里的  $F_1, F_2, \dots, F_k$  表示  $W_P$  中由相应切面决定的生成元.

下面给出我们的主要结论.

**定理 1.1** (定理 4.3). 设  $M$  是单多面体  $P$  上的一个小覆盖,  $f = F_1 \cap \cdots \cap F_k$  为  $P$  的一个余  $k$  维面, 则  $f$  对应的面子流形  $M_f$  在  $M$  中是  $\pi_1$ -单的当且仅当对任意切面  $F, F' \in \mathcal{F}(P)/\{F_1, \dots, F_k\}$ , 若  $F, F', f$  两两相交, 则它们一定有公共的交.

本文的概要如下: 第二章, 我们给出了小覆盖的定义和一些性质; 第三章, 我们通过构造小覆盖的一种具有单个 0 维胞腔的胞腔结构, 来给出  $\pi_1(M)$  相应的群表现, 并证明了小覆盖的万有覆盖空间只依赖对应的单多面体; 第四章, 我们讨论了小覆盖的面子流形的  $\pi_1$ -单性.

## 第二章 小覆盖

### 2.1 多面体

凸多面体  $P$  是指  $n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中非空有限多个点集的凸包, 或者等价的是  $\mathbb{R}^n$  中有限个半空间的有界交, 即

$$P = \text{conv}\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l_i, x \rangle \geq -a_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

其中  $l_i$  为  $(\mathbb{R}^n)^*$  中的线性函数,  $a_i \in \mathbb{R}$ .

凸多面体  $P$  的维数是指凸包或者有界交的维数, 记为  $\dim P$ . 我们把  $P$  的边界记为  $K$ ,  $P$  的内部记为  $P^\circ$ . 凸子集  $f \subset P$  称为  $P$  的面, 若  $f$  是多面体  $P$  与某一个半空间  $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle l, x \rangle \geq -a\}$  的交, 且  $P^\circ \cap \partial V = \emptyset$ . 注意到空集  $\emptyset$  和  $P$  本身都为  $P$  的面, 称为平凡面; 其他的面称为  $P$  的真面. 面  $f$  在  $P$  中的余维数是指  $P$  的维数与  $f$  的维数的差, 即  $\text{codim} f = \dim P - \dim f$ .  $P$  的 0 维面称为  $P$  的顶点,  $P$  的 1 维面称为  $P$  的边,  $P$  的余 1 维面称为  $P$  的切面, 记为  $F$ . 记  $f_i$  为  $P$  的  $i$  维面的个数, 称  $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$  为  $P$  的  $f$ -vector. 进一步,  $P$  的  $h$ -vector  $\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$  由下面等式定义

$$h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}$$

由 Dehn-Sommerville 关系知  $h_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \dots, n$ , 为方便本文将  $P$  的切面的个数记为  $f_{n-1} = m$ , 记  $P$  的切面集为  $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ .

我们知道一个多面体  $P$  是单 (simple) 的, 是指  $P$  的每个顶点恰好是  $P$  中  $n$  个不同切面的交. 更进一步, 多面体  $P$  是单的, 当且仅当  $P$  的每个顶点处恰好有  $n$  条边, 当且仅当  $P$  中任意余  $k$  维面  $f$  总可以 (唯一) 表示为  $f = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$ , 其中  $F_1, F_2, \dots, F_k$  为  $k$  个不同的且包含  $f$  的切面. 若无特殊说明, 本文中的所考虑的多面体  $P$  均指  $n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中的  $n$  维单凸多面体.

称一个多面体  $P$  是旗状 (flag) 的, 若  $P$  中两两相交的面必有公共的面. 我们将  $K = \partial P$  看作一个单纯复形, 则称  $K$  是旗状的, 若  $P$  是旗状的, 等价的  $K$  中两两相连的顶点集张成  $K$  中的一个单形, 即  $K$  不含维数  $\geq 2$  的空单形. 容易证明旗状单多面体的面也是旗状单的.

## 2.2 小覆盖

取  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$  为二元乘法群,  $\mathbb{Z}_2^n$  表示它们的直积. 将  $\mathbb{Z}_2^n$  视为  $\mathbb{Z}_2$  上的自由模,  $e_i$  表示  $\mathbb{Z}_2^n$  第  $i$  个标准向量. 设  $P$  为  $n$  维单凸多面体,  $\mathcal{F}(P)$  为  $P$  的切面集, 对每一个切面  $F_i \in \mathcal{F}(P)$ , 我们定义一个染色  $\lambda(F_i) \in \mathbb{Z}_2^n$ , 使得对  $P$  的每一个顶点  $p = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ , 满足  $\text{span}\{\lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_n)\} \cong \mathbb{Z}_2^n$ . 进一步, 称  $\lambda: \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$  为下面将要构造的小覆盖的示性函数.

注. 对任意单凸多面体, 满足上面条件的染色不一定存在. 参考 Davis-Januszkiewicz [10]. 反例 1.22.

对任意点  $x \in P$ , 记  $f(x)$  为  $P$  中包含  $x$  为相对内点的唯一的面, 例如  $x$  为  $P$  内部的点时, 则  $f(x) = P$ ;  $x$  为  $P$  的顶点时, 则  $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ , 其中  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  为包含点  $x$  的  $n$  个切面. 不妨设  $f(x) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$  为  $P$  的任意一个固定的余  $k$  维面, 记  $G_{f(x)} = \langle \lambda(F_1), \lambda(F_2), \dots, \lambda(F_k) \rangle = \langle \lambda(F_i) : x \in F_i \rangle$ . 定义小覆盖为

$$M = (P \times \mathbb{Z}_2^n) / \sim \quad (2-1)$$

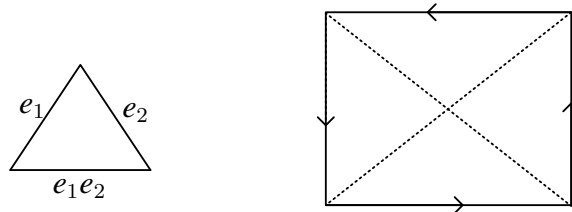
其中  $(x, g) \sim (y, h)$  当且仅当  $x = y$ ,  $g^{-1}h \in G_{f(x)}$ .

根据上面小覆盖  $M$  的定义, 对任意给定的单凸多面体  $P$  和切面集  $\mathcal{F}(P)$  上的染色, 我们可以更具体构造出相对应的小覆盖. 首先我们将  $2^n$  个单多面体  $P$  的拷贝在  $P$  的一个顶点  $p_0 = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$  处粘在一起. 不妨设切面  $F_i$  上的染色为  $\lambda(F_i) = e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 我们把  $P$  放到  $\mathbb{R}^n$  的第一卦限中, 使得  $p_0$  与原点重合, 第  $i$  个切面  $F_i$  落在  $x_i = 0$  的坐标面上. 将  $P$  沿着坐标面反射, 这样我们得到了  $2^n$  个  $P$  的拷贝粘在一起的一个新多面体, 记为  $Q$ , 其中  $p_0$  落在  $Q$  的内部. 我们给第  $g$  个坐标卦限中的  $P$  一个自然的标号  $g \in \mathbb{Z}_2^n$ . 然后我们再将  $Q$  的切面按照染色信息成对粘合在一起, 即第  $g_1$  个  $P$  的切面  $F_i$  与第  $g_2$  个  $P$  的切面  $F_j$  粘, 当且仅当  $i = j$ ,  $g_1^{-1}g_2 = \lambda(F_i)$ . 这样我们就得到  $P$  上的小覆盖  $M$ .

**命题 2.1** ([10]). 小覆盖为连通闭流形.

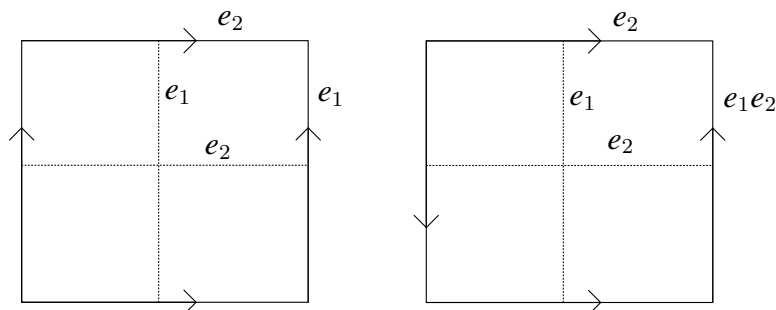
下面我们列举几个例子.

**例 1.** 当  $P = \Delta^n$  时,  $\mathcal{F}(P)$  上本质上只有一种染色, 如  $n = 2$  时, 存在唯一一组染色  $\{e_1, e_2, e_1e_2\}$ . 先将  $P$  在一个顶点处粘, 得到一个大的四边形, 再由染色信息将它的对边沿着箭头方向粘,



这是一个  $\mathbb{R}P^2$ . 一般地,  $\Delta^n$  对应的小覆盖为  $\mathbb{R}P^n$ .

例 2. 当  $P$  为四边形时,  $\mathcal{F}(P)$  上有下面两种不同的染色, 同样的操作, 我们可以分别得到  $T^2$  和 Klein 瓶.



例 3.  $P$  是一个  $m$  边形时,  $M$  是由 4 个  $m$  边形沿边粘成的曲面, 所以  $M$  的欧拉数为  $\chi(M) = 4 - m$ . 由二维曲面分类定理, 当  $m$  为奇数时,  $M$  为  $m - 2$  个  $\mathbb{R}P^2$  的连通和; 当  $m$  为偶数时,  $M$  为  $m - 2$  个  $\mathbb{R}P^2$  的连通和或着为  $\frac{m-2}{2}$  个  $T^2$  的连通和. 所以小覆盖决定了除  $S^2$  外的所有二维闭曲面.

## 2.3 面子流形

设  $f = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$  为单多面体  $P$  的一个  $n - k$  维面. 若  $F \cap f \neq \emptyset$ ,  $F \in \mathcal{F}(P)$ ,  $f \not\subseteq F$ , 则  $F \cap f$  是  $f$  的一个切面. 我们记与  $f$  横截相交的切面集为  $\mathcal{F}(f^\perp) = \{F : F \cap f \neq \emptyset, F \in \mathcal{F}(P), f \not\subseteq F\}$ , 则  $f$  的切面集  $\mathcal{F}(f) = \{F \cap f : F \cap f \neq \emptyset, F \in \mathcal{F}(P), f \not\subseteq F\} = \{F \cap f : F \in \mathcal{F}(f^\perp)\}$ . 此时  $G_f \cong \mathbb{Z}_2^k$  看作  $\mathbb{Z}_2^n$  的子群, 考虑

$$1 \longrightarrow G_f \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_2^n \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}_2^n / G_f \cong \mathbb{Z}_2^{n-k} \longrightarrow 1$$

其中  $i$  为  $G_f$  到  $\mathbb{Z}_2^n$  的包含映射,  $\theta$  为它对应的商映射. 所以对于  $f$  的切面  $F \cap f$ , 存在一个自然的染色  $\lambda_f(F \cap f) = \theta(\lambda(F))$ , 且在  $f$  的任意一个顶点  $p$  处,  $\langle \lambda_f(F \cap f) \mid p \in F \cap f \in \mathcal{F}(f) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n / G_f \cong \mathbb{Z}_2^{n-k}$ . 所以我们可以通过  $f$  和  $\mathcal{F}(f)$  上的染色  $\lambda_f$  得到一个  $n - k$  维小覆盖  $M_f$ , [10] 中指出  $M_f$  为  $M$  的  $n - k$  维连通子流形, 所以称  $M_f$  为  $M$  的对应面  $f$  的面子流形, 记为  $\pi_f : M_f \longrightarrow f$ . 进一步, 我们设  $\rho : f \longrightarrow P$  为面包含映射, 设  $\varrho : M_f \longrightarrow M$  为  $\rho$  决定的面子流形  $M_f$  到  $M$  的包含映射.





## 第三章 基本群

由于单凸多面体具有很好的组合性质，所以我们可以通过不同的方式来构造小覆盖的胞腔结构。比如由单多面体的面结构诱导的胞腔结构；小覆盖的极好胞腔结构，见 Davis-Januszkiewicz [10]；由单多面体的方块分解所诱导的胞腔结构，见 Buchstaber [2]。在下面一节中，我们对上面给出的大多面体  $Q$  作类似方块分解的操作，来构造小覆盖上一种具有单个 0 维胞腔的胞腔分解。由这种胞腔结构，我们可以得到  $\pi_1(M)$  的一个简洁的表示。进一步，我们通过  $\pi_1(M)$  的群表示讨论了小覆盖的万有覆盖空间等一些问题。

对于一般的单凸多面体  $P$ ，总存在它的方块分解，我们将这种分解拉到小覆盖上，自然地可以得到小覆盖一种胞腔分解。而  $Q$  一般来说未必是单的，所以我们下面构造的这种胞腔分解并不是严格意义的方块分解。由于  $Q$  的面结构也诱导了  $M$  的一种胞腔分解，而我们下面构造的胞腔分解实际上是这种胞腔结构 Poincaré 意义上的对偶，并进行了加细。所以我们称之为小覆盖的对偶胞腔结构。

### 3.1 对偶胞腔

由  $Q$  的构造知， $Q$  中的每一个  $P$  自然地拥有一个标号  $g \in \mathbb{Z}_2^n$ ，我们下面将第  $g$  个单多面体  $P$  记为  $P_g$ ，将  $Q$  中  $P_g$  的第  $i$  个切面  $F_i$  记为  $F_{i,g}$ 。若  $P_g$  的  $k$  维面  $f_i^k \subset \partial Q$ ，此时  $f_i^k$  称为  $Q$  的外面，否则称为  $Q$  的内面，将  $Q$  的内、外面集分别记为  $In(Q), Out(Q)$ 。我们注意到  $Q$  的所有的切面上存在一种自然的配对结构。配对的规则由  $P$  上的染色  $\lambda$  决定。这种配对结构有助于我们描述  $M$  的基本群。所以下面我们定义  $M$  的切面配对结构。

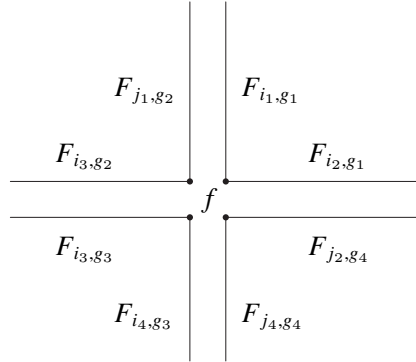
**定义 1** ([19] 切面配对结构)。

设  $X$  为一个  $n$  维连通拓扑空间， $X$  可以由有限个  $n$  维单凸多面体  $\{P_g^n : g = 1, 2, \dots, N\}$  粘合而成，我们记  $P_g$  的第  $i$  个切面  $F_i$  为  $F_{i,g}$ ，并且满足下面两个条件：

- 1、每个切面  $F_{i,g_1}$  唯一配对  $F_{j,g_2}$ ，即存在一对同胚  $\tau_{i,g_1} : F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$  与  $\tau_{j,g_2} : F_{j,g_2} \longrightarrow F_{i,g_1}$  使得  $\tau_{i,g_1} = \tau_{j,g_2}^{-1}$ 。我们称  $\widehat{F} = \{F_{i,g_1}, F_{j,g_2}\}$  为一个切面对，称  $F_{j,g_2}$  为  $F_{i,g_1}$  的配对切面。
- 2、对任意余二维面  $f = F_{i_1,g_1} \cap F_{i_2,g_1}$ ，如果  $\tau_{i_1,g_1}(f) = F_{j_1,g_2} \cap F_{j_3,g_2}$ ， $\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{j_2,g_4} \cap F_{j_4,g_4}$ ，则  $\tau_{j_3,g_2}\tau_{i_1,g_1}(f) = \tau_{j_4,g_4}\tau_{i_2,g_1}(f) = F_{i_3,g_3} \cap F_{i_4,g_3}$ 。这里不排除  $F_{j_2,g_4} = F_{j_3,g_2}$  或者  $F_{i_2,g_1} = F_{i_3,g_3}$ 。

则我们称  $S = \{\widehat{F}_{i,g}, \tau_{i,g}\}$  为  $X$  上的一个切面配对结构， $\tau_{i,g} : F_{i,g_1} \longrightarrow F_{j,g_2}$  为  $S$  的结构映射。

□

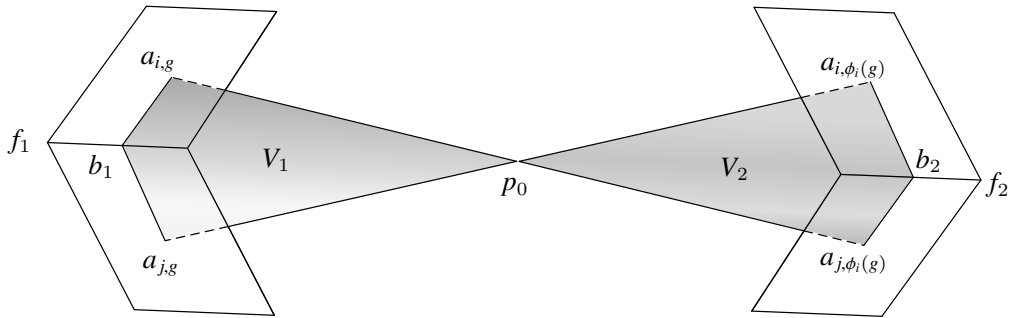


对于小覆盖  $M$ ,  $\mathcal{F}(P)$  上的示性函数  $\lambda: \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$  决定了  $M$  上的一个切面对配对结构.  $F_{i, g_1} \sim F_{j, g_2}$  当且仅当  $i = j$ ,  $\lambda(F_i) = (g_1)^{-1} g_2$ , 即  $Q$  中的切面  $F_{i, g}$  的配对切面为  $F_{i, \phi_i(g)}$ , 其中  $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i): \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ . 下面, 我们记  $M$  的切面对为  $\{F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}\}$ .

$Q = P \times \mathbb{Z}_2^n / \sim'$  到  $P$  有一个自然地投射, 我们记为

$$\bar{\pi}: Q \rightarrow P \quad (3-1)$$

下面给出  $M$  的胞腔结构. 首先我们将  $M$  的 0 维骨架  $M[0]$  取为点  $p_0$ , 并且设为  $M$  的基点. 我们在  $Q$  的每一对余 1 维面处构造一个 1 维胞腔. 对  $Q$  的每对切面对  $\{F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}\}$  (这里我们仅考虑  $Q$  的外切面对), 取  $F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}$  内部相对应的点  $a_{i, g}, a_{i, \phi_i(g)}$  (不妨取为  $F_{i, g}, F_{i, \phi_i(g)}$  的重心), 使得  $\bar{\pi}(a_{i, g}) = \bar{\pi}(a_{i, \phi_i(g)}) = a_i \in P$ , 在  $Q$  的内部取连接  $p_0$  到  $a_{i, g}, a_{i, \phi_i(g)}$  的两条简单有向道路 (不妨取为直线段), 记为  $\overrightarrow{a_{i, g}}, \overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}}$ . 则  $\overrightarrow{a_{i, g}}(\overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}})^{-1}$  为  $M$  中以  $p_0$  为起点的一条有向闭路, 记为  $x_{i, g}$ , 则显然有  $x_{i, \phi_i(g)} = x_{i, g}^{-1}$ , 它表示  $M$  中以  $p_0$  为起点且与  $x_{i, g}$  反向的有向闭路  $\overrightarrow{a_{i, \phi_i(g)}}(\overrightarrow{a_{i, g}})^{-1}$ . 若我们不考虑  $x_{i, g}$  (或  $x_{i, \phi_i(g)}$ ) 的方向, 则  $x_{i, g} - \{p_0\} \cong e_{i, g}^1$  (或  $x_{i, \phi_i(g)} - \{p_0\} \cong e_{i, \phi_i(g)}^1$ ) 即为我们需要的 1 维胞腔, 这里  $e^k$  表示  $M$  一个  $k$  维胞腔.  $M$  中的每一对外切面对都决定了一个 1 维胞腔. 在上述构造中, 所有的  $\{x_{i, g}\}$  都仅交于点  $p_0$  处. 这样我们就获得  $M$  的 1 维骨架  $M[1] = e^0 \cup (\bigcup_{i, g} e_{i, g}^1) = \bigvee_{p_0} x_{i, g}$ .



我们在  $Q$  的余 2 维外面处构造 2 维胞腔. 设  $f_1 = F_{i, g} \cap F_{j, g}$  为  $Q$  的任意一个余 2 维外面,

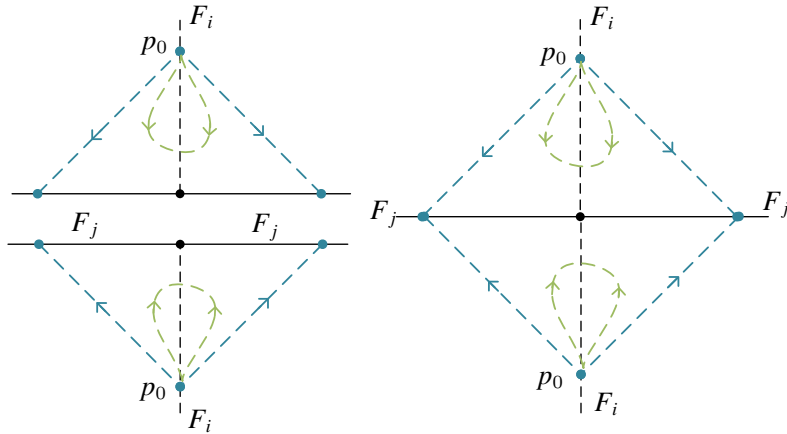
则令  $f_2 = F_{i,\phi_i(g)} \cap F_{j,\phi_j(g)}$ ,  $f_3 = F_{i,\phi_i\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_j\phi_j(g)}$ ,  $f_4 = F_{i,\phi_j(g)} \cap F_{j,\phi_j(g)}$ , 使得  $\{\pi(f_k), k = 1, 2, 3, 4\}$  在  $P$  中的像相同, 记为  $f$ , 这里  $\phi_i\phi_j(g) = \phi_i(g \cdot \lambda(f_j)) = g \cdot \lambda(f_j) \cdot \lambda(f_i)$ . 取  $f$  内部的一个点  $b$ , 对应  $f_k$  上的点设为  $b_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . 取  $V_1$  为经过点  $b_k, p_0, a_{i,g}, a_{j,g}$  的二维简单区域, 如取  $b$  为  $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\}$  与  $f$  的交点, 其中  $\vec{a}_i = \vec{\pi}(\vec{a}_{i,g}), \vec{a}_j = \vec{\pi}(\vec{a}_{j,g})$ , 这里的  $\text{span}\{\vec{a}_i, \vec{a}_j\} \triangleq \{\vec{x} = k_1\vec{a}_i + k_2\vec{a}_j, k_1, k_2 \geq 0\}$ . 则  $V_1 = \text{span}\{\vec{a}_{i,g}, \vec{a}_{j,g}\} \cap P_g \cong D_+^2$ . 类似确定  $V_2 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_i(g)}, \vec{a}_{j,\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_i(g)}$ ,  $V_3 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_i\phi_j(g)}, \vec{a}_{j,\phi_j\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_i\phi_j(g)}$ ,  $V_4 = \text{span}\{\vec{a}_{i,\phi_j(g)}, \vec{a}_{j,\phi_j(g)}\} \cap P_{\phi_j(g)}$ , 则  $\{V_k : k = 1, 2, 3, 4\}$  在  $M$  中实际上粘合成一个闭的  $D^2$ , 记为  $D_f^2$ , 且  $D_f^2$  的边界落在  $M$  的 1 维骨架中. 对应的二维胞腔  $e_f^2 = (D_f^2)^\circ$ . 这样就得到 2 维骨架  $M[2] = M[1] \cup (\bigcup_f e_f^2)$ .

依次进行下去, 我们可以在  $Q$  的余  $k$  维外面  $f_l^k = F_{i_1,g} \cap F_{i_2,g} \cap \cdots \cap F_{i_k,g}$  处可构造  $M$  的  $k$  维胞腔. 我们可以类似取  $V_l = \text{span}\{a_{i_1,g}, a_{i_2,g}, \dots, a_{i_k,g}\} \cap P_g, l = 1, 2, \dots, 2^k$ , 它们在  $M$  中粘成一个  $k$  维闭圆盘, 记为  $D^k$ , 则  $\partial D^k$  落在  $M[k-1]$  中, 且  $D^k$  对应  $M$  的  $k$  维胞腔可以为

$$e^k \cong (D^k)^\circ = \left( \bigcup_{\{l=1,2,\dots,2^k\}} V_l \right)^\circ.$$

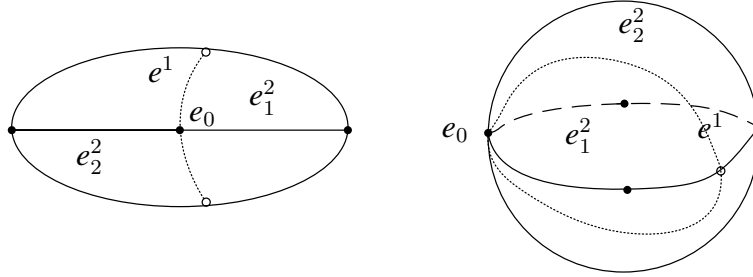
最终我们可以在  $Q$  的顶点处构造  $M$  的  $h_0$  个  $n$  维胞腔. 这样我们就给出了小覆盖  $M$  的一种胞腔结构. 我们构造的这样的胞腔结构实际上  $Q$  的面结构决定的胞腔结构的 Poincaré 意义上的对偶胞腔结构, 即  $Q$  的每个余  $k$  维面与这里的一个  $k$  维胞腔横截相交. 所以我们将这种胞腔结构称为小覆盖  $M$  关于  $Q$  (仅与基点  $p_0$  的选取有关) 的对偶胞腔结构, 容易看出当基点选定时, 这种胞腔结构是唯一的.

需要注意的是, 对应余 2 维面  $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$ , 当  $F_{i,g}$  或者  $F_{j,g}$  包含点  $p_0$ , 为  $Q$  的内面, 不妨  $p_0 \in F_{i,g}$ , 则  $a_{i,g} \subset F_{i,g}$ , 此时我们构造的  $V_i$  实际是一个退化的方块 (三角形), 对应  $x_{i,j}$  为可缩的, 我们的构造依然适用. 不过, 为了下面说明方便, 对于这种情况, 我们进一步加细上面得到的二维骨架. 我们取  $a_{i,g}$  为  $P_g$  内部的简单有向弧, 此时一维胞腔增加了  $x_{i,g} - p_0$  和  $x_{i,\phi_j(g)} - p_0$ , 对应的  $D^k$  实际上分解成了三个胞腔. 它们的边界分别为  $x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_j(g)}x_{j,\phi_j(g)}$ ,  $x_{i,g}$  和  $x_{i,\phi_j(g)}$ .



事实上, 在 Poincaré 对偶意义上, 任何具有切面配对结构的拓扑流形都可类似构造其胞腔结构. 如我们考虑

**例 4.** 我们将三角形沿着他们对应的边粘和得到一个  $S^2$



按照上面步骤, 我们可以得到  $S^2$  的一个胞腔分解  $S^2 = e_0 \cup e^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$ .

### 3.2 $\pi_1(M)$ 的群表现

小覆盖的基本群  $\pi_1(M)$  的生成元可取为每对切面所对应的有向闭路  $\{x_{i,g}\}$ .  $\pi_1(M)$  的关系由二维胞腔及配对关系决定. 对  $M$  中的任意切面对  $\{F_{i,g}, F_{i,\phi_i(g)}\}$  对应一对互逆的生成元  $x_{i,g}, x_{i,\phi_i(g)}$ , 即配对关系为  $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1$ . 对于任意余二维面  $f = F_{i,g} \cap F_{j,g} (\neq \emptyset) \subset Q$ , 由  $f$  确定的二维胞腔  $e_f$  决定一个关系  $r_f = \partial D_f^2 = x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)}x_{i,\phi_j(g)}x_{j,g} = 1$ , 即  $x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = (x_{i,\phi_j(g)}x_{j,g})^{-1} = (x_{j,\phi_j(g)})^{-1}(x_{i,\phi_j(g)})^{-1} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}$ . 另外, 对于  $p_0 \in F_{i,g}, x_{i,g} = 1$ . 从而我们得到  $\pi_1(M)$  的一个群表现.

$$\begin{aligned} \pi_1(M, p_0) = \langle x_{i,g}, i = 1, 2, \dots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, i = 1, 2, \dots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n; \\ x_{i,g}x_{j,\phi_i(g)} = x_{j,g}x_{i,\phi_j(g)}, f = F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \emptyset, i, j = 1, \dots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n \\ x_{i,g} = 1, i = 1, 2, \dots, n, g \in \mathbb{Z}_2^n \rangle \quad (3-2) \end{aligned}$$

其中  $\phi_i(g) = g \cdot \lambda(F_i)$ , 基点  $p_0 = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$ .

注. 当我们不强调切面次序时, 也用  $x_{F,g}$  表示  $Q$  中切面  $(F, g)$  对应的生成元.

我们记  $\mathcal{F}_1(Q) = \{F_{i,g} : i = 1, 2, \dots, n, g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  为  $Q$  的内切面集; 记  $\mathcal{F}_2(Q)$  为  $Q$  的内切面集附近的切面集, 即  $\mathcal{F}_2(Q) = \{F \in \mathcal{F}(Q) \cap \partial Q : \exists G \in \mathcal{F}_1(Q), st. F \cap G \neq \emptyset\}$ ; 记  $\mathcal{F}_3(Q)$  为  $Q$  外切面集剩余的切面集. 则我们有下面结论.

**引理 3.1.**  $\forall F_i \in \mathcal{F}(P)$  固定, 则  $\bar{\pi}^{-1}(F_i) = \{F_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  对应的生成元  $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  可以通过其他生成元互相表示. 特别地,

- 1、当  $F_{i,g} \in \mathcal{F}_1(Q)$  时,  $x_{i,g} = 1$ ;
- 2、当  $F_{i,g_1}, F_{i,g_2} \in \mathcal{F}_2(Q)$  时, 若  $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} \neq \emptyset$ , 则  $x_{i,g_1} = x_{i,g_2}$ , 否则  $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$ ;
- 3、设  $f = F_{i,g} \cap F_{j,g}$  为  $Q$  中任意一个固定的余二维外面, 当  $F_{i,g}$  和  $F_{j,g}$  分别属于  $\mathcal{F}_2(Q)$  和  $\mathcal{F}_1(Q)$  时,  $f$  对应的关系为  $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$ .

**证明：** 若  $F_{i,g} \in \text{In}(Q)$ ，则  $x_{i,g}$  包含在  $Q$  的内部，可缩为点道路，故  $x_{i,g} = 1$ 。若  $F_{i,g}, F_{j,g}$  分别为外面和内面，不妨设  $F_{i,g}$  为外面， $F_{j,g}$  为内面，则  $x_{j,g} = x_{j,\phi_i(g)} = 1$ ，所以  $f$  对应的关系为  $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$ 。又因为每对切面对决定的生成元互为逆元，所以当  $F_{i,g_1} \cap F_{i,g_2} = \emptyset$  时， $x_{i,g_1} = (x_{i,g_2})^{-1}$ 。

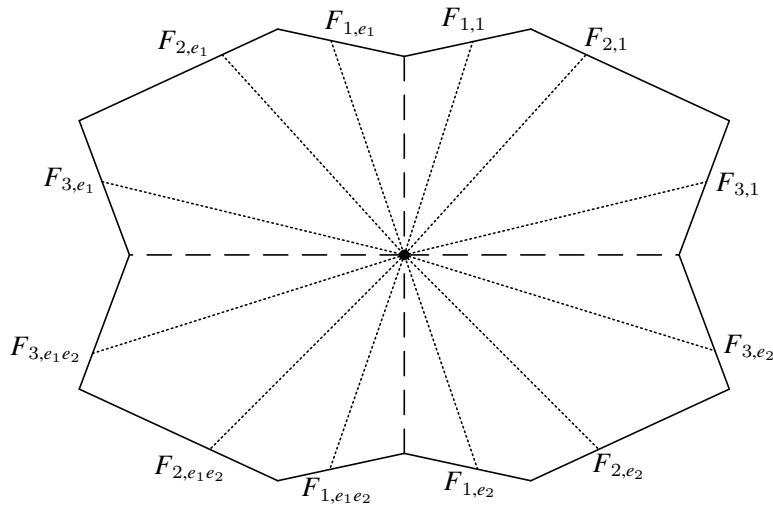
最后，我们考虑  $F_{i,g} \in \mathcal{F}_3(Q)$  的情况。我们不妨固定  $F_{i,1} \in \pi^{-1}(F_i)$ ，对应的生成元为  $x_{i,1}$ 。首先它的配对切面对应的生成元  $x_{i,\phi_i(1)} = (x_{i,1})^{-1}$ 。由于与  $F_{i,1}$  相交的切面都在  $P_1$  中，所以任意  $f = F_{i,1} \cap F_{j,1} \neq \emptyset$  对应的关系为  $x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)} = x_{j,1}x_{i,\phi_j(1)}$ ，即  $x_{i,\phi_j(1)} = (x_{j,1})^{-1}x_{i,1}x_{j,\phi_i(1)}$ 。所以  $\forall g \in \langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle$ ， $x_{i,g}$  都可用  $x_{i,1}$  和其他生成元表示，其中  $j \in \{j : F_j \cap F_i \neq \emptyset\}$ 。我们仅考虑  $F_i$  一个顶点附近的切面，我们知  $\langle \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n / \langle \phi_i(1) \rangle$ 。所以  $\langle \phi_i(1), \{\phi_j(1)\} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^n$ ，这就说明了所有的  $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  是相关的。  $\square$

注. 1、注意这里不排除  $F_{i,g} \cap F_{i,\phi_j(g)}, F_{i,g} \cap F_{i,\phi_i\phi_j(g)}$  都为  $Q$  中非空的余二维面的情况，此时  $(x_{i,\phi_j(g)})^{-1} = x_{i,\phi_i\phi_j(g)} = x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)}$ ，i.e.  $(x_{i,\phi_j(g)})^2 = 1$ 。从而  $\{x_{i,g} : g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  为  $\pi_1(M)$  中的相等的二阶生成元。

2、Davis-Januszkiewicz [10] 定理 3.1 中指出小覆盖 Mod 2 Betti 数  $b_i(M) = h_i(P)$ （这里  $h_i$  定义中  $f_k$  表示  $P$  中余  $k+1$  维面的个数）。 $b_1(M) = h_1(P) = m-n$ ，即在极好意义上的胞腔结构得到基本群生成元个数为  $m-n$  个。在这里所有外切面决定的有效生成元实际上也是  $m-n$  个。

3、 $\pi_1(M)$  中的 (2-) 挠元与  $P$  中的 3 回路有关。但  $P$  上的染色可能会使这种“挠元”变平凡。

**例 5.**  $P$  为五边形时， $\mathcal{F}$  上的染色依次取为  $\{e_2, e_1e_2, e_1, e_2, e_1\}$ ， $Q$  可视为 12 边形，对应 6 对外切面，4 组余二维外面。



$Q$  中的外切面对有  $\{F_{2,e_1}, F_{2,e_2}\}$ ,  $\{F_{1,e_1}, F_{1,e_1e_2}\}$ ,  $\{F_{1,1}, F_{1,e_2}\}$ ,  $\{F_{2,1}, F_{2,e_1e_2}\}$ ,  $\{F_{3,1}, F_{3,e_1}\}$ ,

$\{F_{3,e_2}, F_{3,e_1e_2}\}$ . 给所有道路一个指向  $p_0$  的方向, 取  $p_0$  为基点, 取生成元为

$$\begin{aligned} x_{2,e_1} &= a_{2,e_1}^- \cdot (a_{2,e_2}^-)^{-1} & x_{1,e_1} &= a_{1,e_1}^- \cdot (a_{1,e_1e_2}^-)^{-1} & x_{1,1} &= a_{1,1}^- \cdot (a_{1,e_2}^-)^{-1} \\ x_{2,1} &= a_{2,1}^- \cdot (a_{2,e_1e_2}^-)^{-1} & x_{3,1} &= a_{3,1}^- \cdot (a_{3,e_1}^-)^{-1} & x_{3,e_2} &= a_{3,e_2}^- \cdot (a_{3,e_1e_2}^-)^{-1} \end{aligned}$$

在余 2 维面  $p_1, p_2, p_3, p_4$  处分别确定四组关系:

$x_{1,1} = x_{1,e_1}; x_{1,1}x_{2,e_2} = x_{2,1}x_{1,e_1e_2}$ , 即  $x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1} = x_{2,1}(x_{1,e_1})^{-1}; x_{2,1}x_{3,e_1e_2} = x_{3,1}x_{2,e_1}$ , 即  $x_{2,1}(x_{3,e_2})^{-1} = x_{3,1}x_{2,e_1}; x_{3,1} = x_{3,e_2}$ . 从而

$$\begin{aligned} \pi_1(M) &= \langle x_{2,e_1}, x_{1,e_1}, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,e_2} | x_{1,1}(x_{1,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{3,e_2})^{-1}, \\ &\quad x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}(x_{2,e_1})^{-1}, x_{3,1}(x_{2,e_1})^{-1}x_{3,1}x_{2,e_1} \rangle \\ &= \langle x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} | x_{1,1}(x_{2,1})^{-1}x_{1,1}x_{3,1}(x_{2,e_1})^{-1}x_{3,1} \rangle \end{aligned} \quad (3-3)$$

即  $\pi_1(M) = \langle x, y, z | xy^{-1}xzy^{-1}z \rangle$

### 3.3 万有覆叠空间

设  $\pi : M \rightarrow P$  为单多面体  $P$  上的小覆盖.  $P$  的切面集为  $\mathcal{F}(P) = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ . 下面我们构造小覆盖  $\pi : M \rightarrow P$  的万有覆叠空间

$$M = Q \times \pi_1(M) / \sim \quad (3-4)$$

$(Q, v_1)$  的外切面  $F_{i,g_1}$  与  $(Q, v_2)$  的外切面  $F_{j,g_2}$  粘当且仅当  $i = j, g_1(g_2)^{-1} = \lambda(F_i), v_1(v_2)^{-1} = x_{i,g_1}$  (或者等价的  $v_2(v_1)^{-1} = x_{i,g_2}$ ), 其中  $v_1, v_2 \in \pi_1(M)$ . 下面为方便, 我们把  $(Q, v)$  简记为  $Q_v$ ,  $Q_v$  的切面  $F_{i,g}$  记为  $F_{i,g}^v$ .

下面我们说明  $M$  实际上只与单多面体  $P$  及  $P$  的面结构有关. 首先由  $P$  的面结构决定的 *right-angle Coxeter* 群  $W_P$  定义如下:

$$W_P = \langle F_1, \dots, F_m : F_i^2 = 1; (F_i F_j)^2 = 1, \forall F_i, F_j \in \mathcal{F}(P), F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle$$

注. 1、这里 *right-angle* 的含义是指  $W_P$  中元素的阶是 2 或者  $\infty$ .

2、 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  相交点  $p_0$ , 所以它们在  $W$  中对应的生成元是幂等且可交换的.

Davis-Januszkiewicz [10] 引理 4.4 中构造了

$$\mathcal{L} = (P \times W_P) / \sim \quad (3-5)$$

其中  $(x_1, g_1) \sim (x_2, g_2)$  当且仅当  $x_1 = x_2, g_1(g_2)^{-1} \in \langle F : x \in F, F \in \mathcal{F}(P) \rangle$ . 且由 Davis [8] 定理 10.1 和 13.5 知  $\mathcal{L}$  为单连通的.

定义群同态  $\psi: W \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ , 其中  $\psi(F_i) = \lambda(F_i), i = 1, 2, \dots, m$ . 则有

引理 3.2 ([10]). 设  $\pi: M \rightarrow P$  为单多面体  $P$  上的小覆盖, 则有群短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow W_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2^n \rightarrow 1 \quad (3-6)$$

其中  $\pi_1(M) \cong \ker \psi$  为  $W_P$  的子群,  $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$ .

证: 由 Davis-Januszkiewicz [10] 推论 4.5 可得上面正合列, 且  $\pi_1(M) \cong \ker \psi$  为  $W_P$  的正规子群. 不妨设  $p_0$  附近的切面为  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ ,  $\lambda(F_i) = e_i$ , 考虑  $\gamma: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow W_P$ ,  $\gamma(e_i) = F_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $\psi \circ \gamma = id_{\mathbb{Z}_2^n}$ , 即上面短正合列是右可裂的, 故  $W_P = \pi_1(M) \rtimes \mathbb{Z}_2^n$ .  $\square$

定义 2.  $\pi_1(M, p_0)$  的群表现如形式 (3-2), 定义

$$\begin{aligned} \alpha: \pi_1(M, p_0) &\rightarrow W \\ x_{i,g} &\mapsto \gamma(g) \cdot \gamma(\phi_i(1)) F_i \cdot (\gamma(g))^{-1} \\ &= \gamma(g \phi_i(1)) \cdot F_i \cdot \gamma(g) \\ &= \gamma(\phi_i(g)) F_i \gamma(g) \triangleq \widehat{F_{i,g}} \end{aligned}$$

引理 3.3.  $\alpha$  是良定的单同态, 且  $\text{im } \alpha = \ker \psi$ .

证: 首先验证  $\alpha$  将关系映为关系. 对于配对关系,

$$\begin{aligned} \alpha(x_{i,g} x_{i,\phi_i(g)}) &= \alpha(x_{i,g}) \alpha(x_{i,\phi_i(g)}) \\ &= \gamma(\phi_i(g)) F_i \gamma(g) \cdot \gamma(g) F_i \gamma(\phi_i(g)) \\ &= \gamma(\phi_i(g)) F_i^2 \gamma(\phi_i(g)) = 1 \end{aligned}$$

对于余二维面对应的关系,

$$\begin{aligned} \alpha(x_{i,g} x_{j,\phi_i(g)} x_{i,\phi_i \phi_j(g)} x_{j,\phi_j(g)}) &= \alpha(x_{i,g}) \alpha(x_{j,\phi_i(g)}) \alpha(x_{i,\phi_i \phi_j(g)}) \alpha(x_{j,\phi_j(g)}) \\ &= \gamma(\phi_i(g)) (F_i F_j)^2 \gamma(\phi_i(g)) = 1 \end{aligned}$$

对于内切面对应的关系,  $1 \leq i \leq n$

$$\alpha(x_{i,g}) = \gamma(\phi_i(g)) F_i \gamma(g) = \gamma(\phi_i(g)) \gamma(g) F_i = \gamma(\lambda(F_i)) F_i = F_i^2 = 1$$

所以  $\alpha$  是良定的.

$\text{im } \alpha$  显然为  $W$  的子群, 下说明它是  $W$  的正规子群. 任意  $\widehat{F_{i,g}} \in \text{im } \alpha, F_k \in W$ ,

$$\begin{aligned} F_k \widehat{F_{i,g}} F_k^{-1} &= \gamma(\phi_k(\phi_k(1))) \widehat{F_{k,\phi_k(1)}} \gamma(\phi_k(1)) \cdot \widehat{F_{i,g}} \cdot \gamma(\phi_k(1)) \widehat{F_{k,1}} \gamma(1) \\ &= \widehat{F_{k,\phi_k(1)}} \cdot \gamma(\phi_k(1)) \widehat{F_{i,g}} \gamma(\phi_k(1)) \cdot \widehat{F_{k,1}} \\ &= \widehat{F_{k,\phi_k(1)}} \widehat{F_{i,\phi_k(g)}} \widehat{F_{k,1}} \in \text{im } \alpha \end{aligned}$$

进一步, 对任意  $\alpha(v) \in \text{im } \alpha, \omega \in W$ , 都有  $\omega\alpha(v)\omega^{-1} \in \text{im } \alpha$ . 即  $\text{im } \alpha$  是正规的.

从上面我们发现  $\alpha$  将  $Q$  中的余二维面对应的关系及关系的共轭一一地映到对应  $P$  中余二维面所决定的关系及关系的共轭. 下面我们在  $\text{Coexter}$  群中加入一些冗余的生成元和关系,

$$W = W' = \langle F_i, \widehat{F_{i,g}}, i = 1, 2, \dots, m; g \in \mathbb{Z}_2^n : \widehat{F_{i,g}}\widehat{F_{i,\phi_i(g)}} = 1, \forall i, j, g; \\ \widehat{F_{i,g}}\widehat{F_{j,\phi_i(g)}}\widehat{F_{i,\phi_j(g)}}\widehat{F_{j,\phi_j(g)}} = 1, \forall i, j, g, F_{i,g} \cap F_{j,g} \neq \emptyset \rangle \quad (3-7)$$

任取  $v \in \pi_1(M)$  为生成元上的文字, 则  $\alpha(v) \in W$  为  $\{\widehat{F_{i,g}}\}$  上的文字. 若  $\alpha(v) = 1$ , 则它可以由  $W$  中的关系及关系的共轭拼成, 然后我们把每一小段关系或关系的共轭, 唯一地对应到  $\pi_1(M)$  中的关系及关系的共轭, 然后依次拼成一个新的文字  $v' (= 1)$ . 则  $v = v' = 1 \in \pi_1(M)$ . 即  $\alpha$  是单的.

最后由于  $W/\text{im } \alpha \cong \mathbb{Z}_2^n$ . 故  $\text{im } \alpha = \ker \psi$ . □

注.  $\forall v = F_{i_1}F_{i_2} \cdots F_{i_k} \in \ker \psi$ , 设  $i_{j_1}$  是第一个大于  $n$  的指标, 取  $g_1 = \psi(F_{i_1}F_{i_2} \cdots F_{i_{j_1-1}})$ , 则  $v = \widehat{F_{i_{j_1}}}, g_1 \cdot \gamma(\phi_{i_{j_1}}(g_1))F_{i_{j_1+1}} \cdots F_{i_k}$ . 进行有限步归纳可以得到  $v = \widehat{F_{i_{j_1}}}, g_1 \widehat{F_{i_{j_2}}}, g_1 \cdots \widehat{F_{i_{j_k}}}, g_k$ . 即  $\ker \psi \subset \text{im } \alpha$ , 从而  $\ker \psi = \text{im } \alpha$ .

### 引理 3.4. $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$

证明: 考虑右分裂短正合列给出的,

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\alpha} W_P \xrightleftharpoons[\gamma]{\psi} \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1$$

其中  $\psi \circ \gamma = \text{id}_{\mathbb{Z}_2^n}$ .

注意到  $F_i = \gamma(\phi_i(1))\alpha(x_{i,1}) \triangleq (x_{k,1}, \phi_i(1)) = (x_{k,1}, \lambda(F_k))$ . 我们设  $\varphi: \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \text{Aut}(\pi_1(M))$ , 其中  $\varphi_g(v) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(v)\gamma(g^{-1})) = \alpha^{-1}(\gamma(g)\alpha(v)\gamma(g))$ , 其中  $g \in \mathbb{Z}_2^n, v \in \pi_1(M)$ . 定义  $(v_1, g_1) \cdot (v_2, g_2) = (\varphi_{g_1}(v_1)v_2, g_1g_2)$ .

下面我们定义  $h: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ , 其中  $h(x, \omega) = (x_g, v)$ ,  $(x, \omega) \in P \times W$ ,  $(x_g, v) \in Q \times \pi_1(M)$ ,  $x_g \in P_g \subset Q$ , 当  $\omega = F_k = \gamma(\phi_k(1))\alpha(x_{k,1})$  时,  $g = \phi_k(1), v = x_{k,1}$ , 由于  $W_P$  是群  $\mathbb{Z}_2^n$  和  $\pi_1(M)$  的半直积, 所以这种分解是唯一的. 进一步,  $\forall \omega \in W_P$  为  $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$  上的文字, 则有分解  $\omega = \gamma(g)\alpha(v) = (v, g)$ , 其中  $g \in \mathbb{Z}_2^n, v \in \pi_1(M)$  是唯一的. 故  $h$  是良定的连续映射.

定义  $h^{-1}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ , 其中  $h^{-1}(x_g, v) = (x, \gamma(g)\alpha(v))$ . 同理  $h^{-1}$  也是良定的连续映射.

又  $h \circ h^{-1}(x_g, v) = h(x, \gamma(g)\alpha(v)) = (x_g, v)$ ;  $h^{-1} \circ h(x, \omega) = h^{-1}(x_g, v) = (x, \gamma(g)\alpha(v)) = (x, \omega)$ .

所以  $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$  □



接下来我们将证明  $\mathcal{M}$  为  $M$  的万有覆叠空间. 我们记  $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$  为  $\mathcal{M}$  到  $M$  的投射.

$$\begin{array}{ccc} Q \times \pi_1(M) & \xrightarrow{q'} & Q \times \pi_1(M) / \sim = \mathcal{M} \\ \widetilde{\Pi} \downarrow & & \downarrow \Pi \\ Q & \xrightarrow{q} & Q / \sim = M \end{array}$$

其中  $q, q'$  是粘合  $F_{i,g_1}^{\nu_1}$  和  $F_{i,g_2}^{\nu_2}$  所决定的商映射.

**定理 3.5.**  $\mathcal{M}$  为  $M$  的万有覆叠空间.

**证明:** 由  $\mathcal{M}$  的定义知  $\mathcal{M}/\pi_1(M) = M$ . 下面只需要证明  $\forall x \in \mathcal{M}$ , 存在包含点  $x$  的开邻域  $U$ , 使得不同的  $v \in \pi_1(M)$ ,  $v(U)$  不交.

当点  $x = q^{-1}(x) \in Q^\circ$  时, 取包含点  $x$  的一个实心开球邻域  $U$ , 使得  $U \subset Q^\circ$ , 此时  $v(U)$  落在不同指标的  $Q$  中, 是不交的. 当  $x = q^{-1}(x) \subset \partial Q$ , 我们记  $f(x)$  为  $Out(Q)$  中包含  $x$  为相对内点的最小的面, 不妨设  $f(x)$  为余  $k$  维的, 则我们取包含点  $x$  的实心开球邻域  $U$ , 满足  $U$  与包含点  $x$  的  $Q$  的拷贝的交都是  $\frac{1}{2\epsilon}$  球, 这时  $v(U)$  显然也是不交的.

所以  $\mathcal{M}$  是  $M$  一个正则的覆叠空间, 又  $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$  是单连通的, 故为万有覆叠空间.  $\square$

设  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  为上面覆叠空间  $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$  的覆叠变换群. 由于  $\mathcal{M}$  是单连通的, 所以  $\pi_1(M) \cong D(\mathcal{M}, \Pi, M)$ . 下面我们根据上面构造的胞腔结构 (的 2 维骨架) 来刻画  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  的生成元. 对于  $Q$  中的每个切面  $F_{i,g}$ , 我们定义  $\mathcal{M}$  上的面映射  $\Gamma_{i,g}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ .  $\forall x \in \mathcal{M}$ , 存在某个  $Q_{\nu_1}$ , 使得  $x \in Q_{\nu_1}$ , 由  $\mathcal{M}$  的构造知存在唯一的  $Q_{\nu_2}$ , 使得  $F_{i,g} \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$ , 我们定义  $\Gamma_{i,g}(x)$  为  $\Pi^{-1}(\Pi(x)) \cap Q_{\nu_2}$  中的唯一的一点, 这样定义的  $\Gamma_{i,g}$  显然是良定且连续的.

注. 由上面  $\alpha$  定义知, 面映射  $\Gamma_{i,g}$  可以表示 Coxeter 群中的反射.

类似引理 3.1 容易验证

**引理 3.6.** 对于上面定义的面映射, 我们有

- 1、 $\Gamma_{i,g}\Gamma_{i,\phi_i(g)}(x) = x$ .
- 2、若存在  $F_{j,g'} (\neq F_{i,g}) \subset Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$ , 则  $\Gamma_{j,g'}(x) = \Gamma_{i,g}(x)$ .
- 3、若切面  $F_{i,g} \in in(Q)$ , 此时  $Q_{\nu_1} = Q_{\nu_2}$ ,  $\Gamma_{i,g} = id$ .

实际上, 面映射  $\Gamma_{i,g}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  为  $\mathcal{M}$  上的覆叠变换.

**命题 3.7.**  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  可以由面映射  $\{\Gamma_{i,g}\}$  生成.

**证明:**  $\mathcal{M}$  为单连通的, 此时  $\pi_1(M, p_0)$  到  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  的满同态实际上为群同构, 它将  $[x_{i,g}] \in \pi_1(M, p_0)$  映为  $\Gamma_{i,g}$ . 我们不妨取点  $x = \pi^{-1}(p_0) \in \mathcal{M}$ , 则  $\{\Pi^{-1}(x)\}$  实际上是每个  $Q$  中  $p_0$  的拷贝. 我们取第 1 个  $Q_1$  中的  $p_0$  的拷贝, 记为  $y_0$ , 其中 1 为  $\pi_1(M)$  的单位元. 所以我们只需要验证  $\Gamma_{i,g}(y_0) = \widetilde{x_{i,g}}(1)$ , 其中  $\widetilde{x_{i,g}}$  是  $x_{i,g}$  在  $\mathcal{M}$  中的一段提升.  $\Gamma_{i,g}(y_0)$  实际上是  $Q_{x_{i,g}}$  中的  $p_0$  的拷贝, 即  $\widetilde{x_{i,g}}(1)$ . 所以  $D(\mathcal{M}, \Pi, M)$  可以由  $Q$  的切面对应的面映射生成.  $\square$

综上, 我们有下面结论:

**定理 3.8.**  $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow M$  为  $M$  的万有覆盖空间, 由单多面体  $P$  完全决定. 对应的复叠变换群  $D(\mathcal{L}, \Pi, M) \cong \pi_1(M)$  可以由  $\mathcal{F}(Q)$  对应的面映射生成.

### 3.4 Cayley 图

根据 Tieze 变换或引理 3.1, 固定基点  $p_0 = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ , 我们把 (3-2) 中的内切面对应的生成元消去, 即考虑加细前的胞腔结构对应  $\pi_1(M)$  的群表现.

$$\begin{aligned} \pi_1(M, p_0) &= \langle x_{i,g}, i = n+1, \dots, m, g \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1, i = n+1, \dots, m, g \in \mathbb{Z}; \\ x_{i,g}x_{j,\phi_j(g)} &= x_{j,g}x_{i,\phi_i(g)}, F_i \cap F_j \neq \emptyset, i, j = n+1, \dots, m, g \in \mathbb{Z}; \\ x_{i,g} &= x_{i,\phi_j(g)}, F_i \cap F_j \neq \emptyset, i = n+1, \dots, m, j = 1, \dots, n, g \in \mathbb{Z} \rangle \quad (3-8) \end{aligned}$$

记上面的群表现为  $\pi_1(M, p_0) = \langle \tilde{S} \mid \tilde{R} \rangle$ , 我们把上面胞腔结构的二维骨架  $M[2]$  中的闭路  $x_{i,g}$  和  $x_{i,\phi_i(g)}$  视为两条不同的闭路, 则它实际上是  $\langle \tilde{S} \mid \tilde{R} \rangle$  表示复形, 其中关系  $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)} = 1$  对应的二维胞腔取为退化的闭路  $x_{i,g}x_{i,\phi_i(g)}$ . 然后考虑  $M[2]$  在  $\mathcal{M}$  中的提升  $\widetilde{M[2]} = \Pi^{-1}(M[2])$ , 则  $\Pi^{-1}(p_0)$  与  $\pi_1(M, p_0) = \langle \tilde{S} \mid \tilde{R} \rangle$  中的元素存在一一对应, 且在  $\widetilde{M[1]} = \Pi^{-1}(M[1])$  中,  $\Pi^{-1}(p_0)$  中两个点  $\{g, h\}$  相连当且仅当存在  $M[1]$  中某个闭路  $[x]$  的提升连接它们. 所以有

**命题 3.9.** 设  $M[1], M[2]$  是小覆盖胞腔结构的二维骨架,  $\widetilde{M[1]}, \widetilde{M[2]}$  分别是  $M[1], M[2]$  在  $\mathcal{M}$  中的提升, 则  $\widetilde{M[1]}, \widetilde{M[2]}$  分别对应  $\pi_1(M, p_0)$  (3-8) 的 Cayley 图和 Cayley 复形.

类似, 我们对多面体  $P$  做方块分解, 并把  $P[2]$  提升到  $\mathcal{M}$  中, 则我们类似可以得到 Coxeter 群  $W_P$  的 Cayley 图和 Cayley 复形. 讨论  $W_P$  和  $\pi_1(M)$  的 Cayley 图有助于我们发现  $W_P$  和  $\pi_1(M)$  的关系.

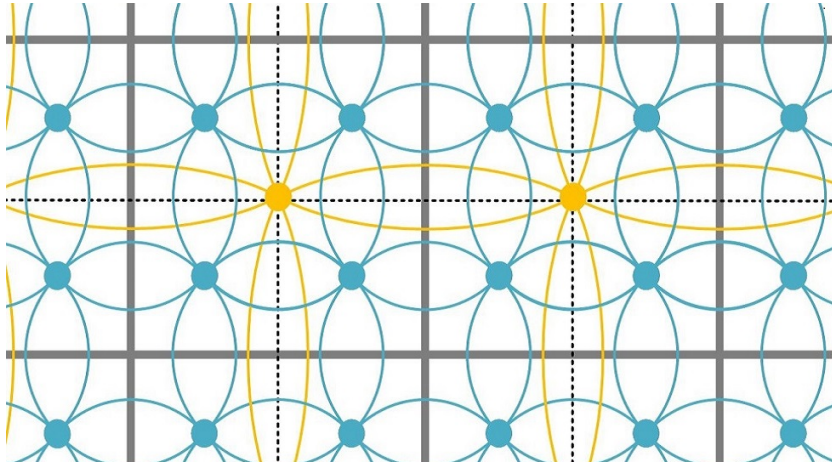


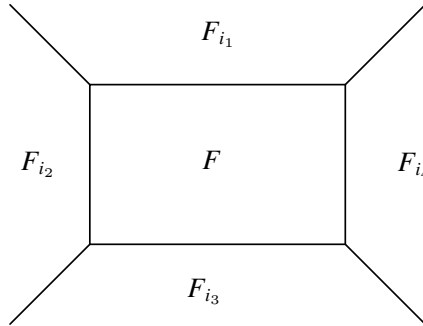
图 3-1: 四边形的 Coxeter 群 (短弧), 环面或 Klein 瓶基本群 (长弧) 的 Cayley 图

## 第四章 面子流形的 $\pi_1$ -单性

设  $f = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$  为单多面体  $P$  的一个余  $k$  维面, 不失一般性设  $\lambda(F_i) = e_i, i = 1, \cdots, k$ .  $\pi_f: M_f \rightarrow f$  是  $\lambda$  在  $f$  上诱导的小覆盖.

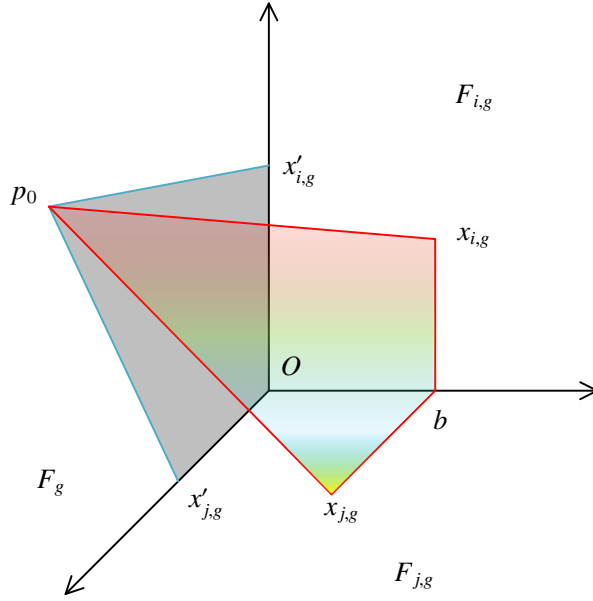
在这一节中, 我们利用上面的胞腔结构, 讨论  $\pi_1(M_f)$  与  $\pi_1(M)$  之间的关系. 我们设多面体  $P, f$  对应的 Coxeter 群分别为  $W_P = \langle S \mid R \rangle, W_f = \langle S_f \mid R_f \rangle$ . 我们取定  $F$  的一个顶点  $p_0$  为基点, 由它们的胞腔结构得到的  $\pi_1(M), \pi_1(M_f)$  的群表现形式如 (3-2), 记  $\pi_1(M, p_0) = \langle \tilde{S} \mid \tilde{R} \rangle, \pi_1(M_f, p_0) = \langle \tilde{S}_f \mid \tilde{R}_f \rangle$ . 设  $\rho: f \rightarrow P$  为面包含映射,  $\rho_*: W_f \rightarrow W_P$  为  $\rho$  决定的 Coxeter 群之间的群同态, 设  $\varrho: M_f \rightarrow M$  为面子流形  $M_f$  到  $M$  的包含映射,  $\varrho_*: \pi_1(M_f, p_0) \rightarrow \pi_1(M, p_0)$  为它诱导的基本群之间的群同态. 进一步不妨设  $F = F_1$  为  $P$  的第 1 个切面, 且  $\lambda(F) = e_1$ . 下面, 我们讨论群同态  $\rho_*$  和  $\varrho_*$  在对应群表现上的作用.

$\rho_*$  的定义: 设  $P$  中与  $F$  横截相交的切面集为  $\mathcal{F}(F^\perp) = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \cdots, F_{i_m}\} \subset \mathcal{F}(P)$ , 则  $S_F = \mathcal{F}(F) = \{F_{i_1} \cap F, F_{i_2} \cap F, \cdots, F_{i_m} \cap F\}$ . 自然地,  $\rho_*(F_{i_k} \cap F) = FF_{i_k}F = F_{i_k}$ . 进一步,  $F$  中余二维面 (不妨考虑)  $(F_{i_1} \cap F) \cap (F_{i_2} \cap F) (\neq \emptyset)$  决定的关系  $((F_{i_1} \cap F)(F_{i_2} \cap F))^2$  在  $\rho_*$  在的像为  $(F_{i_1}F_{i_2})^2$ , 为  $P$  中余二维面  $F_{i_1} \cap F_{i_2}$  在  $W_P$  中决定的关系, 故  $\rho_*$  是良定的.



$\varrho_*$  的定义: 我们下面说明  $\tilde{S}_F$  在  $\varrho_*$  作用下可以自然地包含到  $\tilde{S}$  中. 设  $\mathcal{F}(P)$  上的特征函数  $\lambda$  在  $\mathcal{F}(F)$  上诱导的特征函数为  $\lambda_F: \mathcal{F}(F) \rightarrow \mathbb{Z}_2^n / G_F = \mathbb{Z}_2^n / \langle e_1 \rangle = \mathbb{Z}_2^{n-1} \subset \mathbb{Z}_2^n$ , 其中  $\lambda_F(F_i \cap F) = \theta(\lambda(F_i)), \forall F_i \in \mathcal{F}(F)$ .

我们把  $\{F_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2^{n-1}}$  与  $\{P_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2^n}$  在点  $p_0$  处粘合在一起, 得到多面体  $Q_F = F \times \mathbb{Z}_2^{n-1} / \sim$  和  $Q$ . 其中  $Out(Q_F) \subset Out(Q), In(Q_F) \subset In(Q)$ . 设  $f_{i,g} = F_{i,g} \cap F_{1,g} = F_{i,\phi_1(g)} \cap F_{1,\phi_1(g)}$  为  $Q_F$  中的任意一个切面, 其中  $\{F_{1,g}, F_{1,\phi_1(g)}\}$  为  $\{P_g: g \in \mathbb{Z}_2^n\}$  中的切面对. 我们记  $f_{i,g}$  在  $Q_F$  中对应的有向



闭路为  $x'_{i,g}$ , 则由公式 (3-2) 知  $M_F$  的基本群为

$$\begin{aligned} \pi_1(M_F) = \langle x'_{i,g}, i = i_1, i_2, \dots, i_{m'}, g \in \mathbb{Z}_2^{n-1} \mid x'_{i,g} x'_{i, \bar{\phi}_i(g)} = 1, i = i_1, i_2, \dots, i_{m'}, g \in \mathbb{Z}_2^{n-1}; \\ x'_{i,g} x'_{j, \bar{\phi}_i(g)} x'_{i, \bar{\phi}_i \bar{\phi}_j(g)} x'_{j, \bar{\phi}_j(g)} = 1, f_{i,g} \cap f_{j,g} \neq \emptyset, i = i_1, i_2, \dots, i_{m'}, g \in \mathbb{Z}_2^{n-1}; \\ x_{i,g} = 1, p_0 \in F_i, i = i_1, i_2, \dots, i_{m'}, g \in \mathbb{Z}_2^{n-1} \rangle \quad (4-1) \end{aligned}$$

其中  $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} = F_{i, \phi_1(g)} \cap F_{j, \phi_1(g)} \cap F_{1, \phi_1(g)} \neq \emptyset, \bar{\phi}_i(g) = g \cdot \lambda_F(F_i \cap F)$ .

由引理 3.1, 我们知道  $x'_{i,g}$  与  $F_{i,g}, F_{i, \phi_1(g)}$  在  $Q$  中对应的有向闭路  $x_{i,g}, x_{i, \phi_1(g)}$  是定点同伦的. 所以

$$\varrho_*(x'_{i,g}) = x_{i,g} = x_{i, \phi_1(g)}, \forall i = i_1, i_2, \dots, i_{m'}, g \in \mathbb{Z}_2^n / \langle e_1 \rangle \subset \mathbb{Z}_2^n$$

其中第二个等号是  $Q$  中余二维面  $F_{1,g} \cap F_{i,g}$  决定的关系给出的. 由假设  $G_F = \langle \lambda(F) \rangle = \langle e_1 \rangle = \mathbb{Z}_2$ , 我们将  $G_F, \mathbb{Z}_2^n / G_F \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$  都看为  $\mathbb{Z}_2^n$  的子群, 则存在  $h \in \mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_2^n$  使得  $\lambda_F(F_i \cap F) = h \cdot \lambda(F_i)$ . 所以有,

$$\varrho_*(x'_{i, \bar{\phi}_j(g)}) = x_{i, \bar{\phi}_j(g)} = x_{i, g \cdot \lambda_F(F_j \cap F)} = x_{i, g \cdot \theta(\lambda(F_j))} = x_{i, g \cdot h \lambda(F_j)} = x_{i, \phi_j(gh)} = x_{i, \phi_j(g)}$$

最后一个等号是  $Q$  中余二维面  $F_{1, \phi_j(g)} \cap F_{i, \phi_j(g)}$  决定的关系给出的.

对于  $Q_F$  中的任意一个余 2 维面  $f_{i,g} \cap f_{j,g} = F_{i,g} \cap F_{j,g} \cap F_{1,g} \neq \emptyset$  所对应的二维胞腔  $D_l$  与  $F_{i,g} \cap F_{j,g}$  和  $F_{i, \phi_1(g)} \cap F_{j, \phi_1(g)}$  所对应的二维胞腔  $D_g, D_{\phi_1(g)}$  也是定点同伦的. 所以  $\varrho_*$  也把  $\pi_1(M_F, p_0)$  中的关系映到  $\pi_1(M, p_0)$  中的关系. 即  $\varrho_*$  也是良定的.

一般地,对于余  $k$  维面  $f = F_1 \cap \cdots \cap F_k$ ,不妨设  $\lambda F_i = e_i$ ,则  $G_f = \langle \lambda(F_1), \cdots, \lambda(F_k) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{n-k}$ . 类似有

$$\rho_*(F_i \cap f) = F_i, \forall F_i \in \mathcal{F}(f) \quad (4-2)$$

$$\varrho_*(x'_{i,g}) = x_{i,g \cdot h} \quad (4-3)$$

其中  $h$  为  $G_f = \langle e_1, e_2, \cdots, e_k \rangle \cong \mathbb{Z}_2^k$  中的任意元素. 这是由于  $F_i \cap f = F_i \cap F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \neq \emptyset$ , 则  $F_i \cap F_j \neq \emptyset, \forall j \leq k$ , 则由  $F_{i,g} \cap F_{j,g}$  决定的关系知  $x_{i,g} = x_{i,\phi_j(g)} = x_{i,g \cdot e_j}$ , 进一步由归纳即可.

根据上面的讨论,我们可以认为  $W_F$  中的文字可以用  $W_P$  中的生成元来表示,  $\pi_1(M_F)$  的文字可以用  $\pi_1(M)$  中的生成元来表示. 即有  $\rho_*(\omega) = \omega, \varrho_*(v) = v, \forall \omega \in W_F, v \in \pi_1(M_F)$ . 但一般  $\rho_*$  与  $\varrho_*$  不一定是单同态. 如

**例 6.** 取  $P = I \times \Delta^2$  为三棱柱, 共有 5 个切面  $\{F_i\}_{i=1,2,3,4,5}$ , 我们给上下底面  $F_1, F_2$  染色  $e_1$ , 侧面  $F_3, F_4, F_5$  染色分别为  $e_2, e_3, e_1 e_2 e_3$ , 由  $P$  的  $h$ -vector 知,  $\pi_1(M)$  有两个生成元和两个关系, 它的任意一个侧面上的小覆盖基本群有两个生成元, 一个关系. 即

$$\pi_1(M) = \langle x, y : x^2 = yxyx^{-1} = 1 \rangle$$

$$\pi_1(M_F) = \langle x, y : yxyx^{-1} = 1 \rangle$$

进一步

$$\varrho_* : \pi_1(M_F) \longrightarrow \pi_1(M)$$

满足  $\varrho_*(x) = x, \varrho_*(y) = y$ , 但  $\varrho_*$  非单.

此时  $\rho_*$  也不是单的. 不妨考虑  $F_5$ , 则  $F_3 \cap F_4$  在  $W_P$  中决定的关系  $(F_3 F_4)^2 = 1$  是  $((F_3 \cap F_5)(F_4 \cap F_5))^2 (\neq 1) \in W_{F_5}$  在  $\rho_*$  下的像.

**定义 3.** 设  $f = F_1 \cap \cdots \cap F_k$  是  $P$  的一个余  $k$  维面, 我们定义下面集合和群.

$$\mathcal{P}_f \triangleq \{(F_i, F_j) : F_i \cap f \neq \emptyset, F_j \cap f \neq \emptyset, F_i \cap F_j \neq \emptyset, F_i \cap F_j \cap f = \emptyset\}$$

$$\mathcal{N}_f \triangleq \langle [F_i \cap f, F_j \cap f] : \forall (F_i, F_j) \in \mathcal{P}_f \rangle$$

$$\mathcal{S}_f \triangleq \langle x'_{i,g}, x'_{j,\phi_i(g)}, x'_{i,\phi_i\phi_j(g)}, x'_{j,\phi_j(g)} : \forall (F_i, F_j) \in \mathcal{P}_f, g \in \mathbb{Z}_2^{n-k} \rangle$$

其中  $[F_i \cap f, F_j \cap f] = (F_i \cap f)(F_j \cap f)(F_i \cap f)^{-1}(F_j \cap f)^{-1} = ((F_i \cap f)(F_j \cap f))^2$ .  $\mathcal{N}_f, \mathcal{S}_f$  分别为  $W_f, \pi_1(M_f, p_0)$  中的对应  $\mathcal{P}_f$  中的元素生成的正规子群.

下面我们证明  $\ker \rho_* = \mathcal{N}_f, \ker \varrho_* = \mathcal{S}_f$ .

**引理 4.1.**  $\ker \rho_* = \mathcal{N}_f$ .

**证明:** 设  $W'_f = W_f / \mathcal{N}_f$ , 设  $\rho'_* : W'_f \longrightarrow W_P$  为  $\rho_*$  诱导的映射. 它将  $\mathcal{N}_f$  中对应的关系映到  $\mathcal{P}_f$

中, 故为良定的.

我们定义

$$\eta_* : W_P \longrightarrow W'_f \quad (4-4)$$

其中  $\eta_*|_{S-\rho_*(S_f)} = 1$ ,  $\eta_*|_{\rho_*(S_f)} = id$ .

下面我们验证  $\eta_*$  定义的合理性. 我们考虑  $W_P$  中的关系在  $\eta_*$  下的像是否为  $W_f$  的单位元. 设  $\mathcal{F}_0 = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ , 设  $P$  中与  $f$  相交的切面集 (不包含  $\mathcal{F}_0$  中的切面) 为  $\mathcal{F}_1(\rho_*(S_f))$ , 进一步设  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(F) - \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_0$ . 则  $\eta_*$  将  $\mathcal{F}_2$  中切面对应的生成元映为 1.

对于  $W_P$  的关系  $F_i^2 = 1$ , 当  $F_i \in \mathcal{F}_1$  时,  $\eta_*(F_i^2) = (F_i \cap f)^2 = 1$ ; 当  $F_i \in \mathcal{F}_2$  时,  $\eta_*(F_i^2) = 1$ .

$P$  中的任意余二维面  $g = F_i \cap F_j \neq \emptyset$  决定的关系为  $(F_i F_j)^2 = 1$ . 若  $F_i, F_j$  都属于  $\mathcal{F}_1$ , 则  $\eta_*$  将  $g \subset P$  所对应的关系映为  $W_f$  的一个关系, 其中  $\eta_*$  把  $\mathcal{P}_f$  中的关系映到  $\mathcal{N}_f$  中生成元对应的关系; 若  $F_i, F_j$  都不属于  $\mathcal{F}_1$ , 则对应关系在  $\eta_*$  下的像为 1; 若  $F_i, F_j$  分别属于  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ , 不妨设  $F_i \subset \mathcal{F}_1, F_j \subset \mathcal{F}_2$ , 则  $\eta_*(F_i F_j F_i F_j) = \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) \eta_*(F_i) \eta_*(F_j) = (F_i \cap f)^2 = 1$ .

所以对任意关系  $r \in W_P, \eta_*(r) \equiv 1$ , 即  $\eta_*$  为良定的群同态.

最后容易验证  $\eta_* \circ \rho'_* = id : W_f \longrightarrow W_f$ , 即  $\rho'_*$  为单的.

考虑下列交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{N}_f & \longrightarrow & W_f & \longrightarrow & W_f/\mathcal{N}_f \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \rho'_* \\ 1 & \longrightarrow & \ker \rho_* & \longrightarrow & W_f & \xrightarrow{\rho_*} & \text{im} \rho_* \longrightarrow 1 \end{array}$$

其中  $\text{im} \rho_* = \text{im} \rho'_*$  为  $W_P$  的子群 (未必正规),  $\mathcal{N}_f$  为  $\ker \rho_*$  的正规子群. 故  $\ker \rho_* \cong \mathcal{N}_f$ .  $\square$

**推论 1.**  $\rho_*$  单当且仅当  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ .

**引理 4.2.**  $\ker \varrho_* = \mathcal{S}_f$

**证明:** 设  $\pi'_1(M_f, p_0) = \pi_1(M_f, p_0)/\mathcal{S}_f$ ,  $W'_P = W_P/\langle F_1, F_2, \dots, F_k \rangle$ .

考虑下面图表

$$\begin{array}{ccccc} \pi'_1(M_f, p_0) & \xrightarrow{\alpha'_f} & W'_f & \xrightarrow{\rho'_*} & W_P \\ \downarrow \varrho'_* & & & & \downarrow \beta \\ \pi_1(M, p_0) & \xrightarrow{\alpha} & W_P & \xrightarrow{\beta} & W'_P \end{array}$$

其中  $\alpha'_f : \pi'_1(M_f, p_0) \longrightarrow W'_f$  为  $\alpha_f : \pi_1(M_f, p_0) \longrightarrow W_f$  诱导的映射,  $\alpha'_f$  将  $\mathcal{S}_f$  中元素对应的关系映到  $\mathcal{N}_f$  中元素对应的关系, 故是良定的. 类似  $\alpha_f$  的讨论 (引理 3.3), 我们可以验证  $\text{im} \alpha'_f$  为  $W'_f$  的正规子群, 且  $\alpha'_f$  为单的.  $\beta : W_P \longrightarrow W'_P$  为商映射.  $\varrho'_* : \pi'_1(M_f, p_0) \longrightarrow \pi_1(M, p_0)$

为  $\varrho_* : \pi_1(M_f, p_0) \rightarrow \pi_1(M, p_0)$  诱导的映射,  $\forall x'_{i,g} x'_{j,\bar{\phi}_i(g)} x'_{i,\bar{\phi}_i\bar{\phi}_j(g)} x'_{j,\bar{\phi}_j(g)} \in S_f$ , 有

$$\begin{aligned} \varrho'_*(x'_{i,g} x'_{j,\bar{\phi}_i(g)} x'_{i,\bar{\phi}_i\bar{\phi}_j(g)} x'_{j,\bar{\phi}_j(g)}) &= x_{i,g} x_{j,\bar{\phi}_i(g)} x_{i,\bar{\phi}_i\bar{\phi}_j(g)} x_{j,\bar{\phi}_j(g)} \\ &= x_{i,g} x_{j,\phi_i(g)} x_{i,\phi_i\phi_j(g)} x_{j,\phi_j(g)} \in \widetilde{R} \end{aligned}$$

其中第二个等号是由于  $\exists h \in G_f = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle = \mathbb{Z}_2^k$ , 使得  $\lambda(F_i) = \lambda_f(F_i \cap f) \cdot h$ . 所以  $\varrho'_*$  也为良定的.

设  $x'_{k,g}$  为  $\pi_1(M_f)$  的  $F_k \cap f$  对应的一个生成元, 则  $\beta \circ \alpha \circ \varrho'_*(x'_{k,g}) = \beta \circ \alpha(x_{k,g}) = \beta(\widehat{F_{k,g}}) = [\widehat{F_{k,g}}]$ ;  $\beta \circ \rho'_* \circ \alpha'_f(x'_{k,g}) = \beta \circ \rho'_*(F_{k,g} \cap f) = [\widehat{F_{k,g}}]$ . 进一步, 对  $\forall v \in \pi_1(M_f)$ ,  $\beta \circ \alpha \circ \varrho'_*(v) = \beta \circ \rho'_* \circ \alpha'_f(v)$ . 即上面图表是可交换的.

由于  $\text{im } \alpha'_f \cap \langle F_1, F_2, \dots, F_k \rangle = 1$  (平凡群), 且由引理4.1知  $\rho'_*$  也是单的, 所以  $\beta \circ \rho'_* \circ \alpha'_f$  为单的. 所以  $\beta \circ \alpha \circ \varrho'_*$  也为单的, 故  $\varrho'_*$  是单的.

类似考虑下列交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & S_f & \longrightarrow & \pi_1(M_f, p_0) & \longrightarrow & \pi'_1(M_f, p_0) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \varrho'_* \\ 1 & \longrightarrow & \ker \varrho_* & \longrightarrow & \pi_1(M_f, p_0) & \xrightarrow{\varrho_*} & \text{im } \varrho_* \longrightarrow 1 \end{array}$$

其中  $\text{im } \varrho_* = \text{im } \varrho'_*$  为  $\pi_1(M, p_0)$  的子群. 同理, 由图表的交换性和蛇引理, 我们得  $\ker \varrho_* = S_f$ .

**推论 2.**  $\varrho_*$  单当且仅当  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ .

综合上面讨论, 我们有下面结论.

**定理 4.3.**  $\ker \rho_* = \mathcal{N}_f, \ker \varrho_* = S_f$ . 所以  $\varrho_*$  单当且仅当  $\rho_*$  单当且仅当  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ .

**推论 3.** 当  $P$  为旗状单多面体时,  $\rho_*$  和  $\varrho_*$  都是单的.





## 参考文献

- [1] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, *3-manifold groups*, Mathematics (2013), 1-149
- [2] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series, 24. American Mathematical Society, Providence, RI, (2002)
- [3] A. Brøndsted, *An introduction to convex polytopes*, New York Heidelberg Berlin, (1982)
- [4] D.J. Collins and H. Zieschang, *Combinatorial group theory and fundamental groups*. Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya Sovremennyye Problemy Matematiki. Fundamental' nye Napravleniya, VII. (1990).
- [5] H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Berlin Heidelberg GmbH, (1980)
- [6] M.W. Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*, Princeton University Press, (2008).
- [7] M.W. Davis, *Lectures on orbifolds and reflection groups*.
- [8] M.W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. Math. (2) 117 (1983), 293-325.
- [9] M.W. Davis, *Exotic aspherical manifolds*, Topology of high-dimensional manifolds. (Trieste, 2001), 371-404.
- [10] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 62 (1991), 417-451.
- [11] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, *Nonpositive curvature of blow-ups*, Selecta Math.(N.S.) 4 (1998), 491-547.
- [12] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, and R.Scott, *Fundamental groups of blow-ups*, Advances in mathematics. 177 (2003), 115-179.
- [13] F.T. Farrell, *The Borel conjecture*, Topology of high-dimensional manifolds. (Trieste, 2001), 225-298.
- [14] A. Hatcher, *Spaces of Incompressible Surfaces*, Mathematics. (1999).
- [15] J. Hempel, *3-manifolds*, Annals of Mathematics studies. 86 (1978).
- [16] S. Kuroki, M. Masuda, and L. Yu, *small covers, infra-solvmanifolds and curvature*, Forum mathematicum. 27(5)(2015), 2981-3004.

- 
- [17] A.N. Parshin and I.R. Shafarevich, *Combinatorial group theory applications to geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, (1993)
  - [18] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. (2)87 (1968), 56-88.
  - [19] L. Yu, *Crystallographic groups with cubic normal fundamental domain*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B39, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto. (2013), 233-244

# 索引

- $\pi_1$ -单性  $\pi_1$ -injectivity, 1
- $f$ -vector, 3
- $h$ -vector, 3
- 面子流形 facial submanifold, 5
- 面映射 facial map, 15
- 顶点 vertex, 3
- right-angle Coxeter 群 right-angle Coxeter group, 12
- 余维数 codimension, 3
- 凸多面体 convex polytope, 3
- 切面 facet, 1, 3
- 切面配对结构 facets-pair structure, 7
  - 切面对 facets pair, 7
  - 结构映射 structure map, 7
- 单 simple, 1, 3
- 外面 external face, 7
- 外面 internal face, 7
- 实 moment-angle 流形 real moment-angle manifold, 1
- 小覆盖 small cover, 1, 4
- 旗状 flag, 3
- 染色 color, 4
- 示性函数 characteristic function, 4
- 纤维化 fibration, 1
- 维数 dimension, 3
- 边 edge, 3
- 面 face, 3
  - 平凡面 trivial face, 3
  - 真面 proper face, 3



# 致 谢

在最后，首先非常感谢于立副教授在这两年多以来对我的认真教导. 无论是一开始的上课，上讨论班，还是后来的参加专业活动，做论文，都将是本人一生中宝贵的经历. 就本人而言，也非常喜欢并感谢于老师这种热情讨论而后推荐文章或者书籍的教授方式. 相比于完全放养式的培养方式，这种方式对刚接触科研的我们更有帮助. 特别是在做论文期间，从开始的尝试到后来于老师告诉我基本域的想法，我学到很多有趣的东西，再次认识到代数拓扑或者现代数学中其他领域都是联系很广的学问. 其次，感谢我的家人对我的支持.



# 学位论文出版授权书

本人完全同意《中国优秀博硕士学位论文全文数据库出版章程》（以下简称“章程”），愿意将本人的学位论文提交“中国学术期刊（光盘版）电子杂志社”在《中国博士学位论文全文数据库》、《中国优秀硕士学位论文全文数据库》中全文发表。《中国博士学位论文全文数据库》、《中国优秀硕士学位论文全文数据库》可以以电子、网络及其他数字媒体形式公开出版，并同意编入《中国知识资源总库》，在《中国博硕士学位论文评价数据库》中使用和在互联网上传播，同意按“章程”规定享受相关权益。

作者签名：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日

论文题名	小覆盖的基本群				
研究生学号	MG1521008	所在院系	数学系	学位年度	2015
论文级别	<div><input checked="" type="checkbox"/> 硕士<div><input type="checkbox"/> 硕士专业学位</div></div> <div><input type="checkbox"/> 博士<div><input type="checkbox"/> 博士专业学位</div></div> <div>(请在方框内画勾)</div>				
作者 Email	wulisuwulisu@qq.com				
导师姓名	于立 副教授				

论文涉密情况：  
☐ 不保密  
☒ 保密，保密期：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日 至 \_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日

注：请将该授权书填写后装订在学位论文最后一页（南大封面）。

